Rješavanje rekurzivnih relacija pomoću z-transformacije

Štimac, Filip

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

RJEŠAVANJE REKURZIVNIH RELACIJA POMOĆU z-TRANSFORMACIJE

Rijeka, srpanj 2022.

Filip Štimac
0069085980

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

RJEŠAVANJE REKURZIVNIH RELACIJA POMOĆU z-TRANSFORMACIJE

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Dražić

Rijeka, srpanj 2022.

Filip Štimac
0069085980

SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET
POVJERENSTVO ZA ZAVRŠNE ISPITE

Rijeka, 18. ožujka 2022.

Zavod: **Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike**
Predmet: **Inženjerska matematika ET**
Grana: **1.01.07 primijenjena matematika i matematičko modeliranje**

ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Filip Štimac (0069085980)**
Studij: Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Zadatak: **Rješavanje rekurzivnih relacija pomoću z-transformacije // Solving recursive relations using z-transformation**

Opis zadatka:

U radu je potrebno precizno definirati pojam rekurzivnih relacija i objasniti njihovu klasifikaciju s obzirom na linearnost. Također je potrebno opisati postupak rješavanja linearnih rekurzivnih relacija i dati nekoliko pripadnih primjera.
U drugom dijelu rada potrebno je definirati i opisati temeljna svojstva z-transformacije, a potom primijeniti z-transformaciju na rješavanje rekurzivnih relacija.
U završnom dijelu rada potrebno je rekurzivne relacije i z-transformaciju staviti u kontekst primjene u elektrotehnici.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Filip Š.

Zadatak uručen pristupniku: 21. ožujka 2022.

Mentor:

Doc. dr. sc. Ivan Dražić

Predsjednik povjerenstva za završni ispit:

Prof. dr. sc. Viktor Sučić

IZJAVA

Sukladno članku 8. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku prediplomskih sveučilišnih studija/stručnih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 1. veljače 2020., izjavljujem da sam samostalno izradio/izradila završni rad prema zadatku preuzetom dana 21. ožujka 2022. godine.

Rijeka, 1. srpnja 2022.

Filip Š.

Filip Štimac

Prvenstveno se želim zahvaliti svom profesoru i mentoru doc. dr. sc. Ivanu Dražiću bez kojeg bi pisanje završnog rada bilo puno teže te koji mi je bio velika podrška i motivacija pri izradi istog. Svojim pristupom pomogao mi je da bezbolno i motivirano odradim pisanje rada. Također, htio bih se zahvaliti i članovima svoje uže obitelji koji su mi bili iznimna podrška i potpora tijekom cijelog studiranja te su vjerovali u mene.

Sadržaj

1. Uvod

Ovaj završni rad sastoji se od dvije veće teme: Rekurzivne relacije i z-transformacija. U njemu ćemo pobliže objasniti svaku od tih tema posebno uz niz primjera i teorema. Zaključno s tim ćemo vidjeti i njihovu međusobnu povezanost te primjenu.

Rad ćemo započeti definiranjem rekurzija gdje ćemo na primjerima opisati što je zapravo rekurzivna relacija te postupak nalaženja istih. Nakon toga prelazimo na Fibonnacijeve brojeve, koji su rezultat jedne od najpoznatijih rekurzija u matematici. Prvo ćemo reći nešto općenito o Fibonnaciju kao i o njegovom *Problemu zečeva* koji ćemo detaljnije objasniti. Susrest ćemo se i sa *Zlatnim rezom*, jednim vrlo zanimljivim pojmom kojeg možemo vidjeti u svakodnevnom životu te ćemo ga pobliže analizirati.

Nakon toga prelazimo na najvažniji dio rekurzija gdje ćemo navesti vrste rekurzija. Općenito, ne postoji opća metoda koja daje rješenja svake rekurzije. Međutim, postoje metode koje rješavaju neke posebne vrste rekurzivnih relacija. Jedna takva vrsta su homogene i nehomogene linearne rekurzije s konstantnim koeficijentima. Nakon toga reći ćemo nešto o nelinearnim rekurzijama koje su nešto zahtjevnije od linearnih što ćemo i pokazati primjerom.

I za kraj ovog poglavlja ćemo demonstrirati primjenu rekurzija u elektrotehnici gdje ćemo na jednom primjeru pokazati kako se pomoću rekurzivnih relacija može pronaći vrijednost napona u nekoj električnoj mreži uz primjenu zakona iz elektrotehnike.

Treće poglavlje se bavi z-transformacijama koje koristimo u analizi diskretnih sustava. U početku ćemo definirati diskretne signale kako bi lakše obradili ovo poglavlje. Zatim ćemo definirati dvije vrste z-tranformacija - bilateralnu i unilateralnu. Pošto je z-transformacija red navesti ćemo neke vrste redova kako bi shvatili pojam egzistencije, odosno područja konvergencije z-transformacije. Za kraj ovog poglavlja navesti ćemo neka osnovna svojstva z-transformacije koja će nam trebati u četvrtom poglavlju te ćemo izvesti z-transformacije nekoliko jednostavnijih funkcija.

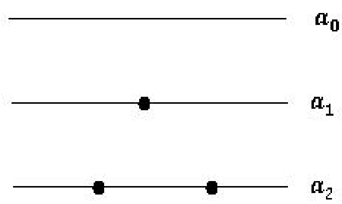
U četvrtom poglavlju ćemo pomoću dva primjera pokazati primjenu z-transformacija na rješavanje rekurzivnih relacija gdje rekurzivne relacije možemo shvatiti kao diferencijske jednadžbe gdje je x_n zapravo $x[n]$.

Na kraju rada, u petom poglavlju, pokazati ćemo primjenu rekurzija i z-transformacija na linearne sustave u diskretnom vremenu. Također, baviti ćemo se i filtrima koji su značajan sustav opisan diferencijskim jednadžbama, a primjerom ćemo pokazati primjenu z-transformacija kod analize digitalnog filtra.

2. Rekurzivne relacije

Rekurzivne relacije ili kraće rekurzije su važni objekti u enumerativnoj kombinatorici. Koristimo ih pri izražavanju n-tog člana nekog niza a_n pomoću prethodnih članova a_k, $k < n$ počevši od nekog indeksa n_0. Idući primjeri ilustriraju kombinatornu primjenu rekurzivnih relacija. Ovo poglavlje obrađeno je prema knjizi [1].

Primjer 2.1. *Neka je a_n broj dijelova na koji n različitih točaka pravca dijeli taj pravac. Očito je $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ i $a_2 = 3$, što možemo vidjeti na sljedećoj slici.*



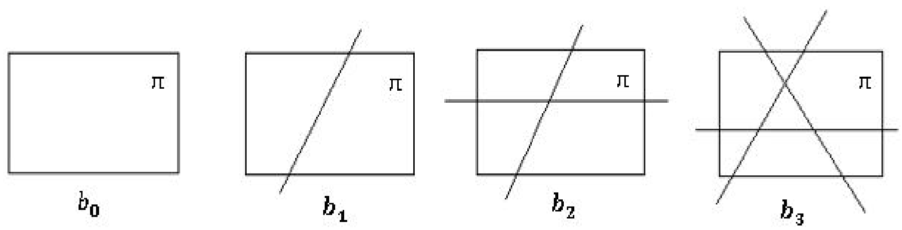
Slika 2.1. Podjela pravca točkama. Izvor: izrada autora

Općenito gledano pravac je s $n-1$ točkom razdijeljen na a_{n-1} dijelova. Dodajući n-tu točku razbit ćemo jedan od a_{n-1} dijelova na dva dijela, pa vrijedi:

$$a_n = a_{n-1} + 1, \tag{2.1}$$

što je primjer rekurzivne relacije.

Primjer 2.2. *Neka je b_n broj dijelova na koji n različitih pravaca dijeli ravninu, uz pretpostavku da se svaka dva pravca sijeku u točno jednoj točci, a nikoja tri ne prolaze istom točkom. Za takve pravce kažemo da se nalaze u općem položaju. Sa sljedeće slike se može vidjeti da je $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = 4$ i $b_3 = 7$.*



Slika 2.2. Podjela ravnine pravcima. Izvor: Izrada autora

Promotrimo sada $n-1$ pravac u općem položaju. Oni dijele ravninu na b_{n-1} dijelova. Dodamo li tom skupu n-ti pravac (nazovimo ga p) tako da i taj novi skup od n pravaca bude u općem položaju, onda prvih $n-1$ pravaca siječe pravac p u $n-1$ različitih točaka pa ga dijeli na a_{n-1} dijelova, gdje je a_n definiran u prethodnom primjeru.

Svaki od tih dijelova na pravcu p povećava broj područja ravnine za jedan jer staro područje pravac p dijeli na dva nova područja. Tako dobivamo:

$$b_n = b_{n-1} + a_{n-1}, \tag{2.2}$$

što je još jedan primjer rekurzivne relacije, ali u njemu sada sudjeluju dva niza brojeva.

U prethodna dva primjera opisali smo postupak nalaženja rekurzivnih relacija iz kojih sada jednostavnim računonom možemo doći do idućih elemenata opisanih nizova. Tako iz (2.1) vrijedi:

$$a_3 = a_2 + 1 = 3 + 1 = 4, \qquad a_4 = a_3 + 1 = 4 + 1 = 5, \ldots. \tag{2.3}$$

Iako na opisani način možemo dobiti bilo koju vrijednost a_n, ovaj će postupak biti krajnje neefikasan u slučaju većih vrijednosti broja n. Stoga bi bilo idealno prikazati broj a_n kao eksplicitnu funkciju argumenta n, što ćemo sada i učiniti. Naime, vrijedi:

$$a_n = a_{n-1} + 1, \tag{2.4}$$
$$a_{n-1} = a_{n-2} + 1, \tag{2.5}$$
$$a_{n-2} = a_{n-3} + 1, \tag{2.6}$$
$$\cdots \tag{2.7}$$
$$a_1 = a_0 + 1. \tag{2.8}$$

Zbrajanjem ovih jednakosti slijedi

$$a_n = a_0 + n, \tag{2.9}$$

odnosno

$$a_n = n + 1. \tag{2.10}$$

Sada se lako može dobiti bilo koji broj a_n te je primjerice

$$a_{567} = 567 + 1 = 568. \tag{2.11}$$

Traženje eksplicitnog izraza za a_n postupak je koji se naziva rješavanje rekurzivne relacije.

Primjer 2.3. *Riješimo rekurziju za b_n. Vrijedi $b_n = b_{n-1} + a_{n-1} = b_{n-1} + n$, pa analognim postupkom dobivamo*

$$b_n = b_{n-1} + n, \tag{2.12}$$
$$b_{n-1} = b_{n-2} + n - 1, \tag{2.13}$$
$$b_{n-2} = b_{n-3} + n - 2, \tag{2.14}$$
$$\cdots \tag{2.15}$$
$$b_2 = b_1 + 2, \tag{2.16}$$
$$b_1 = b_0 + 1. \tag{2.17}$$

Zbrajanjem ovih izraza slijedi:

$$b_n = b_0 + n + (n-1) + (n-2) + ... + 2 + 1 = 1 + \frac{n(n+1)}{2}, \tag{2.18}$$

pri čemu smo koristili činjenicu da je suma prvih n prirodnih brojeva jednaka $\frac{n(n+1)}{2}$.

Sada lako možemo izračunati da je primjerice $b_{10} = 1 + \frac{10 \cdot 11}{2} = 56.$

2.1. Fibonaccijevi brojevi

Jedna od najpoznatijih rekurzija u matematici je rekurzija koja opisuje Fibonaccijeve brojeve.

Leonardo Bonacci (oko 1170. - oko 1240.), poznatiji kao *Fibonacci*, bio je talijanski matematičar iz Republike Pise. Smatran je jednim od najtalentiranijih zapadnjačkih matematičara srednjeg vijeka. Popularizirao je indo-arapski brojevni sustav u zapadnom svijetu prvenstveno kroz svoj rad *Liber Abaci*. Postoje mnogi matematički koncepti nazvani po Fibonacciju zbog povezanosti s Fibonaccijevim brojevima. Neki od njih su *Brahmagupta-Fibonaccijev identitet* i *Pisano period*. Osim matematike njegovo ime povezujemo i sa art-rock bandom *The Fibonaccis* kao i s asteroidom *6765 Fibonacci*. [2]

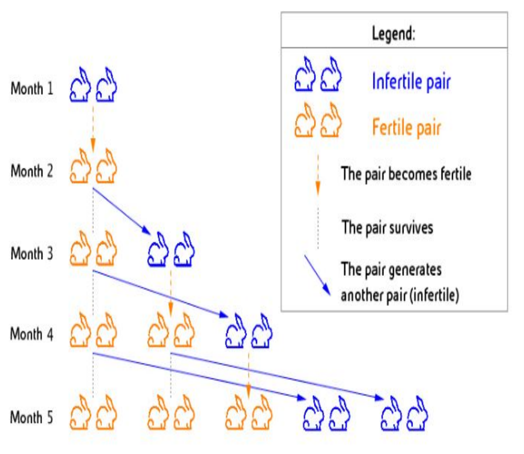
Slika 2.3. Leonardo Bonacci. Izvor: [3]

1202. godine u svom radu *Liber Abaci* postavlja tzv. *Problem zečeva* u kojem analizira rast populacije zečeva u jednom problemu koji biološki nije moguć, ali je osnova za različite primjene.

Fibonacci pretpostavlja da se zečevi razmnožavaju tako da svaki par zec-zečica (starih barem 2 mjeseca) tijekom svakog sljedećeg mjeseca dobije par mladih, odnosno zeca i zečicu, pri čemu se pretpostavlja da zečevi ne ugibaju. Zadatak je odrediti koliko će biti ukupno parova zečeva nakon n mjeseci ako smo počeli s jednim novorođenim parom, što je ilustrirano na slici 2.4.

Neka je f_n broj parova nakon n mjeseci, tj. tijekom $(n+1)$-og mjeseca, pri čemu mora biti $f_0 = f_1 = 1$. Da bi odredili broj f_n broju parova koji su živjeli prethodni mjesec f_{n-1} moramo pribrojiti novorođene parove nastale od parova starih bar 2 mjeseca f_{n-2}. Prema tome vrijedi

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad f_0 = f_1 = 1. \tag{2.19}$$



Slika 2.4. Problem zečeva. Izvor: [3]

Ista rekurzivna relacija ali uz drugačije početne uvjete definira Fibonaccijeve brojeve F_n:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \tag{2.20}$$

pri čemu očito vrijedi $F_n = f_{n-1}$. U sljedećoj tablici navedeno je prvih deset Fibonaccijevih brojeva.

Tablica 2.1. Tablica Fibonnacijevog niza

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

Rješenje Fibonnacijeve rekurzije dano je sljedećim teoremom.

Teorem 2.1 (Binet)**.** *Neka su F_n Fibonnacijevi brojevi definirani s* (2.20). *Tada vrijedi:*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \tag{2.21}$$

za $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Pretpostavimo da je rješenje promatrane rekurzije oblika $F_n = q^n$. Uvrštavanjem dobivamo

$$q^n = q^{n-1} + q^{n-2} \tag{2.22}$$

pa je

$$q^{n-2}(q^2 - q - 1) = 0 \tag{2.23}$$

za $n \geq 2$.

Kako je $F_n = q^n \neq 0$ za sve n to je $q \neq 0$, pa mora vrijediti

$$q^2 - q - 1 = 0. \tag{2.24}$$

Rješavanjem ove kvadratne jednadžbe dobivamo:

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \tag{2.25}$$

Iz toga zaključujemo da su

$$F_n^1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{2.26}$$

i

$$F_n^2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{2.27}$$

dva rješenja Fibonaccijeve rekurzije. Možemo uočiti da je Fibonaccijeva rekurzija linearna, što znači da će svaka linearna kombinacija dobivenih rješenja također biti rješenje polazne rekurzije. Tako je:

$$F_n = \lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{2.28}$$

stvarno rješenje rekurzije.

Sada ćemo odrediti vrijednosti parametara λ i μ uvrštavanjem početnih uvjeta $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$. Slijedi

$$\lambda + \mu = 0, \tag{2.29}$$

za $n = 0$, te

$$\lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1, \tag{2.30}$$

za $n = 1$. Rješenje ovog sustava linearnih jednadžbi je

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \tag{2.31}$$

Uvrštavanjem (2.31) u (2.28) odmah dobivamo tvrdnju teorema. □

Formula iz prethodnog teorema nazvana je po Jacquesu Philippeu Marie Binetu (1786.-1856.), francuskom matematičaru, fizičaru i astronomu. Binet je dao značajan doprinos teoriji brojeva i matematičkim osnovama matrične algebre, a prvi je 1812. opisao pravilo za množenje matrica. Navedena Binetova formula je nazvana njemu u čast iako ju je stoljeće ranije dokazao još jedan francuski matematičar Abraham de Moivre[1].

Sljedeća posljedica Binetove formule izuzetno je važna za definiciju pojma zlatnog reza.

Korolar 2.1. *Neka su F_n Fibonnacijevi brojevi definirani s* (2.20). *Tada vrijedi:*

$$F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n, \tag{2.32}$$

gdje je $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803$ *omjer zlatnog reza.*

[1] Abraham de Moivre, 1667.-1754., francuski matematičar poznat po svojim istraživanjima iz područja kompleksnih brojeva i teorije vjerojatnosti.

Dokaz. Izrazimo F_n u obliku

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right), \tag{2.33}$$

gdje je

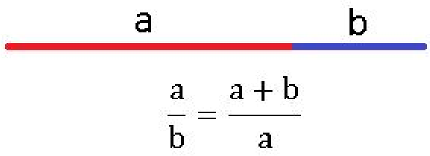
$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,61803. \tag{2.34}$$

Primijetimo da $\beta^n \to 0$ kad $n \to \infty$ pa za veće vrijednosti broja n dobivamo traženu tvrdnju. □

2.1.1. Zlatni rez

Zlatni rez ili *božanski omjer* prisutan je u različitim aspektima ljudskog života. Gdje god primjetimo ljepotu i sklad, postoji mogućnost da ćemo otkriti *zlatni rez*.

Broj α nazivamo **omjer zlatnog reza** (omjer većeg dijela prema manjem jednak je omjeru cijele dužine prema većem dijelu), što je ilustrirano na slici 2.5.



Slika 2.5. Izvor: Izrada autora

Naime, iz omjera

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}, \tag{2.35}$$

slijedi da je

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a}. \tag{2.36}$$

Uvrštavanjem α umjesto $\frac{a}{b}$ dobijemo

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}, \tag{2.37}$$

odnosno

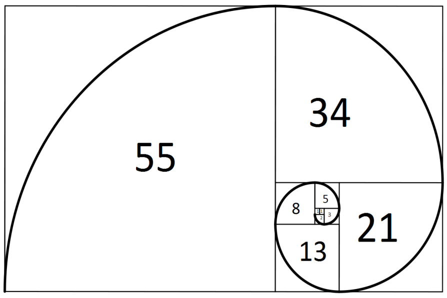
$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0. \tag{2.38}$$

Rješavanjem ove kvadratne jednadžbe dobijemo već poznatu vrijednost za $\alpha \approx 1.61803$.

Uočimo još jedan zanimljiv odnos zlatnog reza i Fibonnacijevih brojeva. Uzmemo li jedan broj Fibonaccijevog niza te ga podijelimo sa njemu prethodnim brojem dobijemo približnu vrijednost zlatnoga reza, primjerice

$$\frac{8}{5} = 1,6\,, \frac{21}{13} = 1,61538\,, \frac{233}{144} = 1,618055, \ldots. \tag{2.39}$$

Spomenimo još da zlatni rez ne mora biti ograničen samo na dužine. Ako nacrtamo pravokutnik kojemu se stranice odnose po zlatnom rezu, on se može podijeliti na kvadrat i manji pravokutnik koji je sličan većemu, te se takav postupak može ponavljati do beskonačnosti. Na takav se način crta tzv. *zlatna spirala* kroz uzastopne vrhove dobivenog niza pravokutnika, što vidimo na slici 2.6. [4]



Slika 2.6. Zlatna spirala. Izvor: [5]

Ove odnose među brojevima možemo uočiti svuda oko nas, u biljnom i životinjskom svijetu, kod čovjeka, u arhitekturi i umjetnosti pa čak i u muzici. Na primjeru suncokreta možemo prikazati prisutnost zlatnog reza. Naime, on se sastoji od dvije vrste spirala, 34 vrste spirala u smjeru suprotnom od kazaljke na satu te 55 spirala u smjeru kazaljke na satu, što se može vidjeti na slici 2.7. Primjećujemo da su brojevi 34 i 55 dio Fibonaccijevog niza. [6]

Slika 2.7. Zlatni rez kod suncokreta. Izvor: [7]

2.2. Homogene linearne rekurzije s konstantnim koeficijentima

U prethodnom poglavlju upoznali smo Fibonaccijevu rekurzivnu relaciju koja se može klasificirati kao homogena linearna rekurzija s konstantnim koeficijentima. U ovom poglavlju detaljnije ćemo se upoznati upravo s takvim tipom rekurzija.

Definicija 2.1. *Homogena linearna rekurzija s konstantnim koeficijentima* ***reda*** r *je rekurzivna relacija oblika*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_r a_{n-r}, \tag{2.40}$$

gdje su $c_1, c_2, c_3, ..., c_r$ *konstante te je* $c_r \neq 0$.

Kažemo da je relacija (2.40) *homogena* jer nema konstantnih članova, a *linearna* jer ima samo prve potencije od a_k. Upravo su svojstva linearnosti i homogenosti zaslužna da skup svih rješenja rekurzije (2.40) čini vektorski prostor. To svojstvo prikazano je u sljedećem teoremu.

Teorem 2.2. *Ako postoje dva niza a_n' i a_n'' koja zadovoljavaju rekurziju* (2.40) *onda i njihova linearna kombinacija $\lambda a_n' + \mu a_n''$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ također zadovoljava* (2.40).

Dokaz. Raspišemo jednadžbe za nizove a_n' i a_n'':

$$a_n' = c_1 a_{n-1}' + c_2 a_{n-2}' + ... + c_r a_{n-r}', \tag{2.41}$$

$$a_n'' = c_1 a_{n-1}'' + c_2 a_{n-2}'' + ... + c_r a_{n-r}''. \tag{2.42}$$

Pomnožimo ih sa λ i μ te dobijemo sljedeće

$$\lambda a_n' = \lambda(c_1 a_{n-1}' + c_2 a_{n-2}' + ... + c_r a_{n-r}'), \tag{2.43}$$

$$\mu a_n'' = \mu(c_1 a_{n-1}'' + c_2 a_{n-2}'' + ... + c_r a_{n-r}''). \tag{2.44}$$

Zatim zbrojimo te dvije jednadžbe i dobijemo

$$\underbrace{\lambda a_n' + \mu a_n''}_{=a_n} = \underbrace{\lambda c_1 a_{n-1}' + \mu c_1 a_{n-1}''}_{=c_1 a_{n-1}} + \underbrace{\lambda c_2 a_{n-2}' + \mu c_2 a_{n-2}''}_{=c_2 a_{n-2}} + \dots + \underbrace{\lambda c_r a_{n-r}' + \mu c_r a_{n-r}''}_{=c_r a_{n-r}}, \tag{2.45}$$

čime smo dokazali ovaj Teorem. □

Rješavanje homogenih linearnih rekurzija je već pokazano kod rješavanja Fibonaccijeve rekurzije, a bazira se na izvođenje u rješavanju tzv. karakteristične jednadžbe. Uvođenjem supstitucije $a_k = x^k$ u (2.40) i sređivanjem dobivamo izraz

$$x^r - c_1 x^{r-1} - c_2 x^{r-2} - ... - c_r = 0, \tag{2.46}$$

koji se naziva **karakteristična jednadžba**.

Karakteristična jednadžba ima r korijena $x_1, x_2 ..., x_r$ (zbog $c_r \neq 0$ su svi različiti od nule) koje nazivamo karakterističnim korijenima. Opće rješenje rekurzivne relacije (2.40) sada je definirano izrazom:

$$a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + ... + \lambda_r x_r^n. \tag{2.47}$$

Rješenje smo dobili iz činjenice da je skup svih rješenja od (2.40) vektorski prostor te slijedi ako su $x_1, x_2, ..., x_r$ karakteristični korijeni a $\lambda_1, \lambda_2 ..., \lambda_r \in \mathbb{C}$ konstante da je (2.47) rješenje rekurzije (2.40).

Karakteristična jednadžba može imati različite i višestruke korijene, a u nastavku analiziramo te dvije situacije, a za samu analizu je nužno poznavanje Vandermondeove matrice.

U linearnoj algebri, Vandermondeova matrica, nazvana po Alexandre-Théophileu Vandermondeu[2], je matrica s elementima geometrijske progresije u svakom retku.

Općenito ju zapisujemo kao matricu oblika $m \times n$ na sljedeći način

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^{n-1} \end{bmatrix}. \tag{2.48}$$

Determinanta te matrice (uz uvjet da je $m = n$) jednaka je

$$D = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i). \tag{2.49}$$

Vandermondeovu determinantu također nazivamo i Vandermondeovim polinomom. Vandermondeova determinanta nije jednaka nuli ako i samo ako su svi x_i različiti. [8]

2.2.1. Karakteristična jednadžba s različitim korijenima

U sljedećem teoremu pokazujemo da je (2.47) zaista rješenje rekurzivne relacije (2.40).

Teorem 2.3. *Neka je dana rekurzivna relacija*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_r a_{n-r}, \tag{2.50}$$

takva da je $c_r \neq 0$, te neka su zadani njeni početni uvjeti

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_{r-1} = b_{r-1}. \tag{2.51}$$

Neka su nadalje svi karakteristični korijeni dane relacije $x_1, x_2, ..., x_r$ međusobno različiti. Tada je opće rješenje danog rekurzivnog problema

$$a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + ... + \lambda_r x_r^n, \tag{2.52}$$

za neke $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \in \mathbb{C}$.

Dokaz. Uvrštavanjem početnih uvjeta u (2.52) dobijemo sljedeći sustav jednadžbi:

$$a_0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r = b_0, \tag{2.53}$$

$$a_1 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_r x_r = b_1, \tag{2.54}$$

$$\vdots \tag{2.55}$$

$$a_{r-1} = \lambda_1 x_1^{r-1} + \lambda_2 x_2^{r-2} + \dots + \lambda_r x_r^{r-1} = b_{r-1}. \tag{2.56}$$

[2] Alexandre-Théophile Vandermonde (1735.-1796.), francuski matematičar, glazbenik i kemičar kojeg se najčešće povezuje s teorijom determinanti u matematici.

Ovaj sustav možemo rješiti pomoću *Cramerovog pravila*. Za početak definiramo determinantu sustava koja će biti izgrađena od koeficijenata uz $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{r-1} & x_2^{r-1} & \ldots & x_r^{r-1}. \end{vmatrix} \tag{2.57}$$

Kako je ovo *Vandermondeova matrica* ona je uvijek pozitivna a prema *Cramerovom pravilu* je rješenje jedinstveno.

Zatim na isti način izrazimo determinantu D_1. Umjesto koeficijenata koji množe λ_1 ubacujemo slobodne koeficijente $(b_0, b_1, \ldots, b_{r-1})$ te dobivamo

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_0 & 1 & \ldots & 1 \\ b_1 & x_2 & \ldots & x_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{r-1} & x_2^{r-1} & \ldots & x_r^{r-1} \end{vmatrix}. \tag{2.58}$$

Na analogan način rješavamo determinante D_2 i D_r te dobivamo

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & b_0 & \ldots & 1 \\ x_1 & b_1 & \ldots & x_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{r-1} & b_{r-1} & \ldots & x_r^{r-1} \end{vmatrix}, D_r = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & b_0 \\ x_1 & x_2 & \ldots & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{r-1} & x_2^{r-1} & \ldots & b_{r-1} \end{vmatrix}. \tag{2.59}$$

Ako je $D \neq 0$ tada slijedi

$$\lambda_1 = \frac{D_1}{D}, \tag{2.60}$$

$$\lambda_2 = \frac{D_2}{D}, \tag{2.61}$$

$$\vdots \tag{2.62}$$

$$\lambda_r = \frac{D_r}{D}. \tag{2.63}$$

čime smo pokazali da je moguće naći brojeve λ_i kojima je definirano rješenje zadanog rekurzivnog problema. □

Pokažimo sada jednim primjerom rješavanje opisanog tipa rekurzije.

Primjer 2.4. *Riješimo rekurziju*

$$a_n = a_{n-1} + 9a_{n-2} - 9a_{n-3} \tag{2.64}$$

uz početne uvjete $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2.$

Rješenje. *Uvrstimo li da je $a_k = x^k$ dobit ćemo karakterističnu jednadžbu oblika*

$$x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0. \tag{2.65}$$

Sada računamo korijene. Faktorizacijom (2.65) *dobijemo sljedeći oblik*

$$x^2(x-1) - 9(x-1) = 0. \tag{2.66}$$

Izlučivanjem $x - 1$ ona izgleda ovako:

$$(x-1)(x^2-9) = 0, \tag{2.67}$$

te iz toga lako dobijemo korijene.

$$x - 1 = 0 \implies x_1 = 1 \tag{2.68}$$

$$x^2 - 9 = 0 \implies x_{2,3} = \pm 3 \tag{2.69}$$

Prema (2.52) *smo dobili*

$$a_n = \lambda_1 \cdot (-3)^n + \lambda_2 \cdot 1^n + \lambda_3 \cdot 3^n. \tag{2.70}$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta imamo

$$a_0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \tag{2.71}$$

$$a_1 = \lambda_1 \cdot (-3) + \lambda_2 + \lambda_3 \cdot 3 = 1, \tag{2.72}$$

$$a_2 = \lambda_1 \cdot 9 + \lambda_2 + \lambda_3 \cdot 9 = 2. \tag{2.73}$$

Ovaj sustav možemo lako riješiti metodom supstitucije. Iz jednadžbe (2.71) *izlučimo λ_1 te dobijemo $\lambda_1 = -\lambda_2 - \lambda_3$, zatim taj izraz uvrstimo u* (2.72) *i* (2.73) *te dobivamo sljedeće*

$$3\lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 1, \tag{2.74}$$

$$-9\lambda_2 - 9\lambda_3 + \lambda_2 + 9\lambda_3 = 2. \tag{2.75}$$

Iz (2.75) *dobijemo da je $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$. Uvrštavanjem λ_2 u* (2.74) *dobijemo da je $\lambda_3 = \frac{1}{3}$. Sada nam još preostaje izračunat λ_1, a to ćemo dobiti uvrštavanjem vrijednosti od λ_2 i λ_3 u izraz $\lambda_1 = -\lambda_2 - \lambda_3$ i dobiti da je $\lambda_1 = -\frac{1}{12}$. Traženo rješenje je sada*

$$a_n = -\frac{1}{12}(-3)^n - \frac{1}{4}1^n + 3^{n-1}. \tag{2.76}$$

2.2.2. Karakteristična jednadžba s višestrukim korijenima

Postupak rješavanja rekurzivne relacije s višestrukim karakterističnim korijenima dan je sljedećim teoremom.

Teorem 2.4. *Neka su $x_1, x_2, ..., x_t$ korijeni karakteristične jednadžbe rekurzivne relacije*

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + .. + c_ra_{n-r},\ c_r \neq 0,\ n \geq r, \tag{2.77}$$

uz činjenicu da je x_i korijen kratnosti v_i za $i = 1, 2, 3, ..., t$. Partikularno rješenje te rekurzije je tada

$$a_n^{(i)} = (\lambda_1^{(i)} + \lambda_2^{(i)}n + ... + \lambda_{vi}^{(i)}n^{v_i-1})x_i^n \tag{2.78}$$

pri čemu su $\lambda_j^{(i)}$ konstante, dok je opće rješenje

$$a_n = a_n^1 + a_n^{(2)} + ... + a_n^{(t)}. \tag{2.79}$$

Dokaz. Dokaz ovog teorema provodi se na analogan način način kao i dokaz prethodnog Teorema, a dan je u [1]. □

Pogledajmo sada jedan primjer rješavanja rekurzije ovakvog tipa.

Primjer 2.5. *Zadana je rekurzija*

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \tag{2.80}$$

uz početne uvjete $a_0 = 1$ i $a_1 = 3$. Njena karakteristična jednadžba je oblika

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \tag{2.81}$$

. Rješavanjem ove kvadratne jednadžbe dobijemo $x_{1,2} = 2$, tj. dvostruki korijen 2 kao rješenje. Iz toga dobijemo da je $a_n = 2^n$, jer su dva korijena jednaka.

U ovom slučaju, trebamo pronaći još jedno rješenje za dvostruki korijen. Zaključimo da je uz $a_n = 2^n$ i $a_n = n2^n$ također rješenje relacije te pretpostavljamo da je njeno opće rješenje sljedećeg oblika:

$$a_n = \lambda \cdot 2^n + \mu \cdot n2^n. \tag{2.82}$$

Ukoliko početne uvjete $a_0 = 1$ i $a_1 = 3$ uvrstimo u (2.82) *dobijemo*

$$\lambda = 1, \tag{2.83}$$

$$2\lambda + 2\mu = 3. \tag{2.84}$$

Budući da taj sustav linearnih jednadžbi ima jedinstveno rješenje

$$\lambda = 1, \tag{2.85}$$

$$\mu = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}, \tag{2.86}$$

onda (2.82) *poprima oblik*

$$a_n = 1 \cdot 2^n + \frac{1}{2} \cdot n2^n. \tag{2.87}$$

2.3. Nehomogene linearne rekurzije s konstantnim koeficijentima

Osnova za rješavanje nehomogenih linearnih rekurzija s konstantnim koeficijentima je sljedeći teorem.

Teorem 2.5. *Neka je dana linearna nehomogena rekurzija s konstantnim koeficijentima*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + .. + c_r a_{n-r} + f(n), \quad n \geq r, \tag{2.88}$$

gdje je $f(n)$ neka funkcija. Opće rješenje (2.88) *je suma općeg rješenja homogenog dijela i partikularnog rješenja nehomogene relacije.*

Dokaz. Uz uvjet da je $r = 1$, (2.88) izgleda ovako:

$$a_n = ca_{n-1} + f(n). \tag{2.89}$$

Opće rješenje homogene relacije koje dobijemo izostavljanjem člana $f(n)$ (označavati ćemo ga sa a_n^*) je

$$a_n^* = \lambda c^n. \tag{2.90}$$

To rješenje ćemo zbrojiti sa partikularnim rješenjem nehomogene relacije (označavati ćemo ga sa a'_n), za koje je

$$a'_n = ca'_{n-1} + f(n). \tag{2.91}$$

Sada promatramo izraz $a_n = a_n^* + a'_n$ u kojeg uvrštavamo (2.90) i (2.91) te dobijemo

$$a_n = \lambda c^n + (ca'_{n-1} + f(n)) = \tag{2.92}$$

$$= (c \cdot \lambda c^{n-1}) + (ca'_{n-1} + f(n)). \tag{2.93}$$

Izlučivanjem konstante c dobivamo

$$a_n = c(\underbrace{\lambda c^{n-1} + a'_{n-1}}_{a_{n-1}}) + f(n), \tag{2.94}$$

čime smo dokazali da je opće rješenje rekurzivne relacije (2.88) jednako zbroju općeg rješenja homogenog dijela i partikularnog rješenja čitave rekurzije.

Konstanta λ određuje se iz poznatih početnih uvjeta.

Dokaz za proizvoljan $r > 1$ provodi se analogno. □

Ako je u (2.89) $c = 1$. Onda je $a_n = a_{n-1} + f(n)$ pa slijedi da je

$$a_1 = a_0 + f(1), \tag{2.95}$$

$$a_2 = a_1 + f(2), \tag{2.96}$$

$$\vdots \tag{2.97}$$

$$a_n = a_{n-1} + f(n). \tag{2.98}$$

Ukoliko je $c \neq 1$, onda za neke jednostavnije funkcije $f(n)$ postavljamo rješenja sljedećom tablicom.

Tablica 2.2. Oblici partikularnih rješenja za neke jednostavne funkcije $f(n)$

$\mathbf{f(n)}$	**partikularno rješenje** $\mathbf{a_n}$
$d(=const)$	A
dn	$A_1n + A_0$
dn^2	$A_2n^2 + A_1n + A_0$
d^n	Ad^n

U navedenoj tablici su A, A_0, A_1 i A_2 konstante koje je potrebno odrediti. Ako se funkcija $f(n)$ sastoji od više dijelova, kako bi našli partikularno rješenje nehomogene jednadžbe, posebno analiziramo svaki njen dio.

Pogledajmo sada rješavanje ovakvog tipa rekurzije na jednom primjeru.

Primjer 2.6. *Riješimo rekurzivnu relaciju*

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2 + 3n \tag{2.99}$$

uz početne uvjete $a_0 = a_1 = 1$.

Opće rješenje pripadne homogene relacije

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \tag{2.100}$$

dobijemo iz pripadne karakteristične jednadžbe

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \tag{2.101}$$

čiji su karakteristični korijeni $x_1 = 2$ i $x_2 = 3$. Prema tome, traženo opće rješenje je dano s

$$a_n^* = \lambda_1 \cdot 2^n + \lambda_2 \cdot 3^n. \tag{2.102}$$

Kako bismo našli partikularno rješenje nehomogene jednadžbe, rješavamo posebno za svaki nehomogeni član. Prvo, imamo rekurziju

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2 \tag{2.103}$$

čije ćemo partikularno rješenje tražiti u obliku

$$a'_n = A. \tag{2.104}$$

Uvrštavanjem dobijemo

$$a'_{n+2} - 5a'_{n+1} + 6a'_n = 2, \tag{2.105}$$

odnosno

$$A - 5A + 6A = 2, \tag{2.106}$$

odakle je $A = 1$. *Prema tome, partikularno rješenje promatrane rekurzije je oblika*

$$a_n' = 1. \tag{2.107}$$

Sada analiziramo relaciju

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 3n \tag{2.108}$$

čije rješenje tražimo u obliku

$$a_n'' = A_1 n + A_0. \tag{2.109}$$

Uvrštavanjem dobijemo

$$a_{n+2}'' - 5a_{n+1}'' + 6a_n'' = 3n, \tag{2.110}$$

odnosno

$$A_1(n+2) + A_0 - 5(A_1(n+1) + A_0) + 6(A_1 n + A_0) = 3n. \tag{2.111}$$

Sređivanjem ovog izraza dobivamo

$$(A_1 - 5A_1 + 6A_1)n + 2A_1 + A_0 - 5A_1 - 5A_0 + 6A_0 = 3n, \tag{2.112}$$

odnosno

$$2A_1 n - 3A_1 + 2A_0 = 3n, \tag{2.113}$$

Odavde ćemo izjednačavanjem koeficijenata (uz n *i slobodni član) dobiti sustav*

$$2A_1 = 3 \tag{2.114}$$

$$-3A_1 + 2A_0 = 0, \tag{2.115}$$

iz čega slijedi da je $A_1 = \dfrac{3}{2}$ *i* $A_0 = \dfrac{9}{4}$, *pa je*

$$a_n'' = \frac{3}{2}n + \frac{9}{4}. \tag{2.116}$$

Kombinacijom općeg rješenja homogene i partikularnih rješenja nehomogene relacije dobili smo opće rješenje nehomogene relacije:

$$a_n = \lambda_1 \cdot 2^n + \lambda_2 \cdot 3^n + 1 + \frac{3}{2}n + \frac{9}{4}. \tag{2.117}$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta u (2.117) *dobijemo*

$$a_0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{13}{4} = 1, \tag{2.118}$$

$$a_1 = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \frac{19}{4} = 1. \tag{2.119}$$

Odavdje izlučivanjem λ_1 *iz* (2.118) *dobijemo*

$$\lambda_1 = -\lambda_2 - \frac{9}{4}, \tag{2.120}$$

te uvrštavanjem toga izraza u (2.119) *dobijemo da je*

$$-2\lambda_2 + 3\lambda_2 = 1 + \frac{18}{4} - \frac{19}{4}, \tag{2.121}$$

$$\lambda_2 = \frac{3}{4}. \tag{2.122}$$

Uvrštavanjem (2.122) *u* (2.120) *dobijemo da je* $\lambda_1 = -3$ *pa je traženo rješenje*

$$a_n = -3 \cdot 2^n + \frac{3}{4} \cdot 3^n + \frac{13}{4} + \frac{3}{2}n. \tag{2.123}$$

2.4. Neki primjeri nelinearnih rekurzija

Nelinearne rekurzije se puno teže rješavaju od linearnih. Tehnike za njihovo rješavanje su nesistematizirane, osim za neke posebne tipove. Jedan tip nelinearne rekurzije obrađen je u sljedećem teoremu.

Teorem 2.6. *Neka je zadana rekurzivna relacija oblika*

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \tag{2.124}$$

uz početni uvjet $a_0 = a$. *Neka su nadalje* (b_n) *i* (c_n) *nizovi brojeva koji zadovoljavaju sljedeći sustav rekurzija:*

$$b_{n+1} = pb_n + qc_n, \tag{2.125}$$

$$c_{n+1} = rb_n + sc_n, \tag{2.126}$$

s zadanim početnim uvjetima $b_0 = a$ *i* $c_0 = 1$. *Tada je*

$$a_n = \frac{b_n}{c_n} \tag{2.127}$$

rješenje rekurzije (2.124).

Dokaz. Ukoliko vrijedi da je

$$a_n = \frac{b_n}{c_n}, \tag{2.128}$$

onda također vrijedi da je

$$a_0 = \frac{b_0}{c_0} = a. \tag{2.129}$$

Sada imamo da je

$$a_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{c_{n+1}} = \frac{pb_n + qc_n}{rb_n + sc_n}. \tag{2.130}$$

Dijeljenjem brojnika i nazivnika sa c_n dobivamo

$$a_{n+1} = \frac{p\frac{b_n}{c_n} + q}{r\frac{bn}{cn} + s}. \tag{2.131}$$

Uvrštavanjem (2.128) u ovaj izraz dobijemo relaciju (2.124) čime je dokaz teorema završen. $\square$

Pokažimo sada na jednom primjeru primjenu ovog teorema.

Primjer 2.7. *Riješimo rekurzivnu relaciju*

$$a_{n+1} = \frac{2a_n - 3}{3a_n - 4} \tag{2.132}$$

uz početni uvjet $a_0 = -1$.

Prema prethodnom teoremu, najprije formiramo sustav rekurzija na sljedeći način:

$$b_{n+1} = 2b_n - 3c_n \tag{2.133}$$

$$c_{n+1} = 3b_n - 4c_n, \tag{2.134}$$

uz poštivanje početnih uvjeta $b_0 = -1$ *i* $c_0 = 1$.

Iz (2.133) *ćemo izlučiti* c_n *i dobiti*

$$c_n = \frac{2}{3}b_n - \frac{1}{3}b_{n+1}. \tag{2.135}$$

Stoga vrijedi i da je

$$c_{n+1} = \frac{2}{3}b_{n+1} - \frac{1}{3}b_{n+2}. \tag{2.136}$$

Izraze (2.135) *i* (2.136) *ćemo uvrstiti u* (2.134) *te sređivanjem navedene jednadžbe dobiti*

$$b_{n+2} = -2b_{n+1} - b_n. \tag{2.137}$$

Rekurzija (2.137) *ima karakterističnu jednadžbu oblika* $x^2 + 2x + 1 = 0$. *Njenim rješavanjem dobijemo dvostruki korijen* -1 *kao rješenje. Prema tome, njeno opće rješenje je*

$$b_n = (-1)^n \cdot (\lambda + n\mu). \tag{2.138}$$

Sada moramo izračunati konstante λ *i* μ. *Uvrštavanjem* $b_0 = -1$ *u* (2.133) *dobijemo još jedan uvjet* $b_1 = 2b_0 - 3c_0 = -5$. *Sada, uvrštavanjem* b_0 *i* b_1 *u* (2.138), *lako dobimo da je* $\lambda = -1$ *i* $\mu = 6$. *Time dobivamo*

$$b_n = (-1)^n(6n - 1). \tag{2.139}$$

Na sličan ćemo način dobiti vrijednost za c_n. *Iz* (2.134) *ćemo izraziti* b_n *i dobiti*

$$b_n = \frac{1}{3}c_{n+1} + \frac{4}{3}c_n. \tag{2.140}$$

Slijedi da je

$$b_{n+1} = \frac{1}{3}c_{n+2} + \frac{4}{3}c_{n+1}. \tag{2.141}$$

Uvrštajući ta dva izraza u (2.133) *te sređivanjem dobivamo*

$$c_{n+2} + 2c_{n+1} + c_n = 0 \tag{2.142}$$

što je ista rekurzija kao i kod b_n pa je samim time i karakteristična jednadžba jednakog oblika kao i njeno rješenje. Stoga imamo

$$c_n = (-1)^n \cdot (\lambda + n\mu). \tag{2.143}$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta $c_0 = 1$ i $b_0 = -1$ u $c_1 = 3b_0 - 4c_0$ dobijemo još jedan uvjet $c_1 = -7$. Uvrštavanjem c_0 i c_1 u $c_n = (-1)^n \cdot (\lambda + n\mu)$ dobivamo da je $\mu = 6$ i $\lambda = 1$. Sada imamo da je

$$c_n = (-1)^n \cdot (1 + 6n). \tag{2.144}$$

Konačno možemo zaključiti da je rješenje zadane rekurzivne relacije oblika

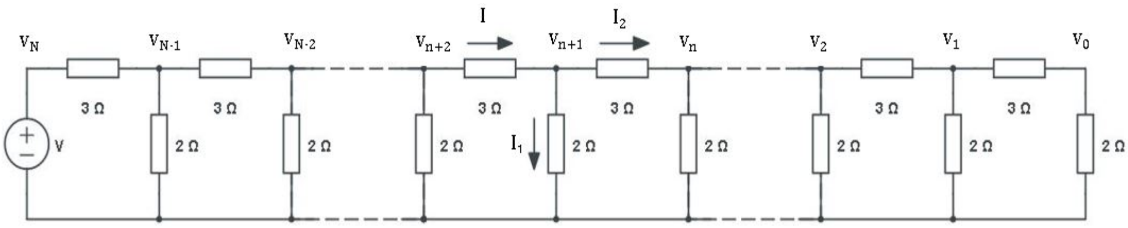
$$a_n = \frac{b_n}{c_n} = \frac{6n-1}{6n+1}. \tag{2.145}$$

Nekolicina nelinearnih rekurzija, kao i u prethodnom primjeru, se svodi na linearne rekurzije metodom supstitucije ili pogodnom supstitucijom nakon neke transformacije. Rješavanje raznih nelinearnih rekurzija opisano je u [1].

2.5. Rekurzivne relacije u elektrotehnici

Pokazat ćemo jedan primjer gdje se opisuje primjena rekurzija kod proračuna električne mreže.

Primjer 2.8. *Promotrimo električnu mrežu u kojoj imamo N otpornika od $3\ \Omega$ i N otpornika od $2\ \Omega$ spojenih žicama kao na slici 2.8 s izvorom struje napona V. Potrebno je pronaći izraz za napon v_n (vrijedi $0 \leq n \leq N$) u svakome čvoru mreže kao funkciju od n.*



Slika 2.8. Električna mreža. Izvor: Izrada autora.

Rješenje. *Kako bismo rješili ovaj primjer koristiti ćemo dva poznata zakona iz elektrotehnike. Prvi je Kirchhoffov zakon o električnoj struji koji nam govori da je zbroj struja koje ulaze u čvor jednak zbroju izlaznih struja. Drugi je Ohmov zakon koji govori o odnosu između električne struje, napona i otpora, odnosno*

$$I = \frac{V}{R}, \tag{2.146}$$

tj. ako imamo neki otpornik kroz kojeg je pad napona jednak $V_2 - V_1$ onda je struja kroz otpornik jednaka

$$I = \frac{V_2 - V_1}{R}. \tag{2.147}$$

Primjetimo da je v_n *pad napona duž otpornik od* $2\ \Omega$ *ispod toga čvora. Sada raspisujemo jednadžbe prema prethodno navedenim zakonima. Prvo ćemo gledati čvor* v_{n+1} *te sve struje kroz njega. Po Kirchhoffovu zakonu imamo da je*

$$I = I_1 + I_2. \tag{2.148}$$

Sada ćemo prema Ohmovu zakonu raspisati jednadžbe za svaku od struja I, I_1 *i* I_2 *te dobiti:*

$$I = \frac{v_{n+2} - v_{n+1}}{3}, \tag{2.149}$$

$$I_1 = \frac{v_{n+1}}{2}, \tag{2.150}$$

$$I_2 = \frac{v_{n+1} - v_n}{3}. \tag{2.151}$$

Ove izraze ćemo uvrstiti u (2.148)*, pa slijedi*

$$\frac{v_{n+2} - v_{n+1}}{3} = \frac{v_{n+1}}{2} + \frac{v_{n+1} - v_n}{3}. \tag{2.152}$$

Sređivanjem ove jednakosti dobivamo rekurzivnu relaciju

$$2v_{n+2} - 7v_{n+1} + 2v_n = 0, \tag{2.153}$$

a to je homogena linearna rekurzija s konstantnim koeficijentima. Njeno rješenje dobivamo metodom karakteristične jednadžbe koja je opisana u prethodnim poglavljiva. Pripadna karakteristična jednadžba je

$$2x^2 - 7x + 2 = 0, \tag{2.154}$$

čiji su karakteristični korijeni jednaki

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{33}}{4}, \tag{2.155}$$

$$x_2 = \frac{7 - \sqrt{33}}{4}. \tag{2.156}$$

Stoga je opće rješenje rekurzije dano s

$$v_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n = \lambda_1 \left(\frac{7 + \sqrt{33}}{4}\right)^n + \lambda_2 \left(\frac{7 - \sqrt{33}}{4}\right)^n. \tag{2.157}$$

Sada treba izračunati koeficijente λ_1 *i* λ_2*. Pretpostaviti ćemo da vrijede općeniti početni uvjeti* v_0 *i* v_1*, tj. nećemo koristiti za njih neke konkretne vrijednosti. Tako iz* (2.157) *dobivamo*

$$v_0 = \lambda_1 + \lambda_2, \tag{2.158}$$

$$v_1 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2. \tag{2.159}$$

Iz (2.158) *ćemo izraziti* λ_2 *i ubaciti u* (2.159) *te dobiti*

$$\lambda_2 = v_0 - \lambda_1, \tag{2.160}$$

$$v_1 = \lambda_1 x_1 + (v_0 - \lambda_1) x_2. \tag{2.161}$$

Sređivanjem (2.161) *dobijemo izraz za* λ_1 *što ubacujemo u* (2.160) *te konačno dobijemo:*

$$\lambda_1 = \frac{v_1 - v_0 x_2}{x_1 - x_2}, \tag{2.162}$$

$$\lambda_2 = v_0 - \frac{v_1 - v_0 x_2}{x_1 - x_2}. \tag{2.163}$$

Primjećujemo na slici 2.8 čvorove v_0 *i* v_1 *na kojima također možemo primjeniti spomenute zakone te dobiti da je*

$$\frac{v_1 - v_0}{3} = \frac{v_0}{2}. \tag{2.164}$$

Odavdje možemo izraziti npr. v_0 *i dobiti* $v_0 = \frac{2v_1}{5}$ *te ubaciti u* (2.162) *i* (2.163)*. Sada smo konačno dobili da je*

$$\lambda_1 = \frac{v_1(5 - 2x_2)}{5(x_1 - x_2)}, \tag{2.165}$$

$$\lambda_2 = \frac{v_1(2x_1 - 5)}{5(x_1 - x_2)}, \tag{2.166}$$

što ćemo uvrstiti u (2.157)*. Tako dobivamo:*

$$v_n = \frac{v_1}{5(x_1 - x_2)} \left[(5 - 2x_2)x_1^n + (2x_1 - 5)x_2^n\right]. \tag{2.167}$$

Preostaje eliminirati konstantu v_1*, a to ćemo napraviti iz činjenice da je* $v_N = V$ *napon koji daje izvor što nam daje*

$$v_N = V = \frac{v_1}{5(x_1 - x_2)} \left[(5 - 2x_2)x_1^N + (2x_1 - 5)x_2^N\right]. \tag{2.168}$$

Sada dobijemo izraz za v_1 :

$$v_1 = \frac{5(x_1 - x_2)V}{\left[(5 - 2x_2)x_1^N + (2x_1 - 5)x_2^N\right]}, \tag{2.169}$$

koji ćemo uvrstiti u (2.167) *te konačno dobiti*

$$v_n = V \left[\frac{(5 - 2x_2)x_1^n + (2x_1 - 5)x_2^n}{(5 - 2x_2)x_1^N + (2x_1 - 5)x_2^N}\right]. \tag{2.170}$$

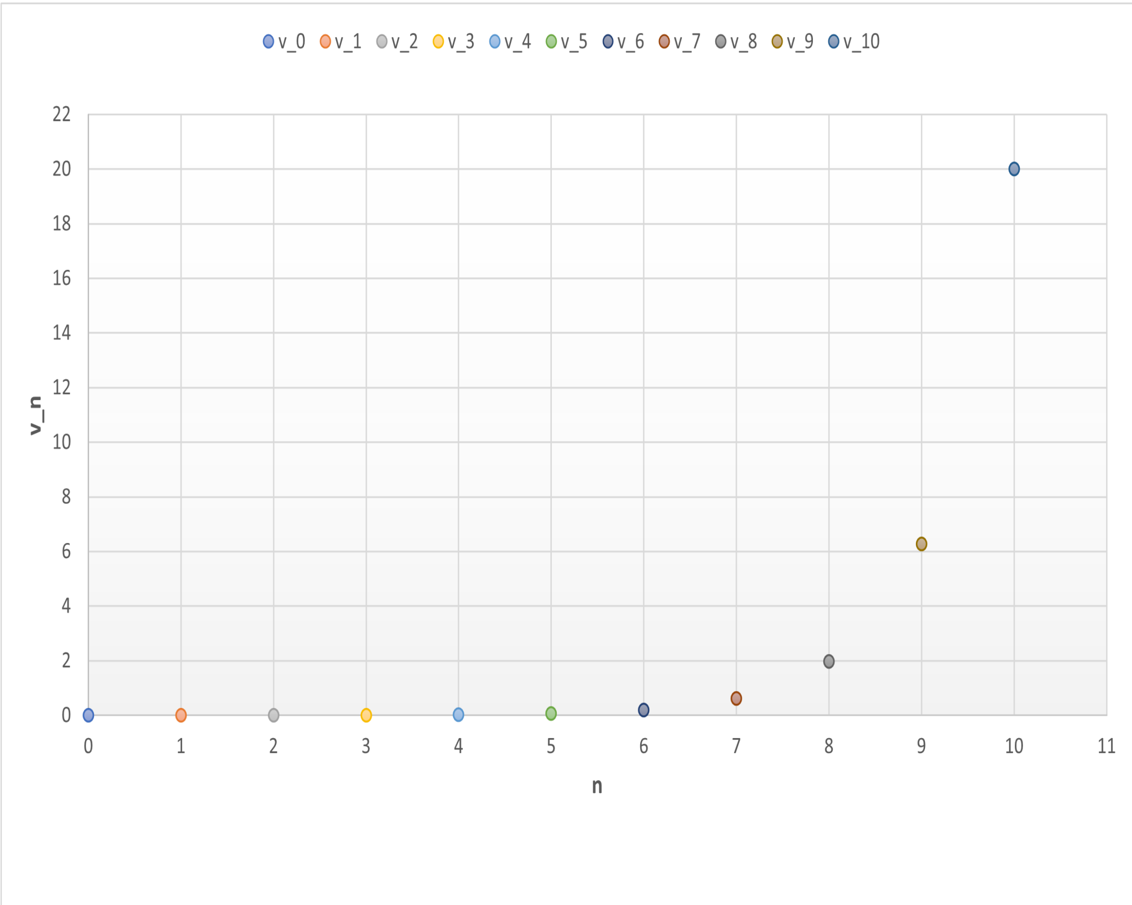
Uvrstimo li vrijednosti $x_1 \approx 3,18614$ *i* $x_2 \approx 3,13859$ *u gornju jednadžbu imamo da je*

$$v_n = V \left[\frac{(4,37228) \cdot 3,18614^n + (1,37228) \cdot 0,313859^n}{(4,37228) \cdot 3,18614^N + (1,37228) \cdot 0,313859^N}\right]. \tag{2.171}$$

Prikažimo sada rješenje kada je $V = 20\ V$ *i* $N = 10$*. U tablici 2.3 prikazane su pripadne vrijednosti napona, dok je njihov grafički prikaz dan na slici 2.9.*

Tablica 2.3. Tablica vrijednosti v_n za $V = 20\ V$ i $N = 10$.

n	v_n
0	$2,437 \cdot 10^{-4}$
1	$6,094 \cdot 10^{-4}$
2	$1,889 \cdot 10^{-3}$
3	$6 \cdot 10^{-3}$
4	0,02
5	0,06
6	0,194
7	0,618
8	1,97
9	6,277
10	20



Slika 2.9. Graf vrijednosti v_n. Izvor: Izrada autora.

Prema slici 2.9 vidimo kako vrijednost napona u početku zanemarivo sporo raste, dok kasnije ima sve veći eksponencijalni rast povećavanjem vrijednosti n dok ne dođe do svoje maksimalne vrijednosti od $20\ V$ koja je jednaka naponu samog izvora. Samim time prema shemi na slici (2.8) *zaključujemo da što je manji index napona v_n to će njegova vrijednost biti manja zbog udaljavanja od izvora pa tako možemo reći da je v_N maksimalna vrijednost , a v_0 minimalna vrijednost.*

3. z-transformacija

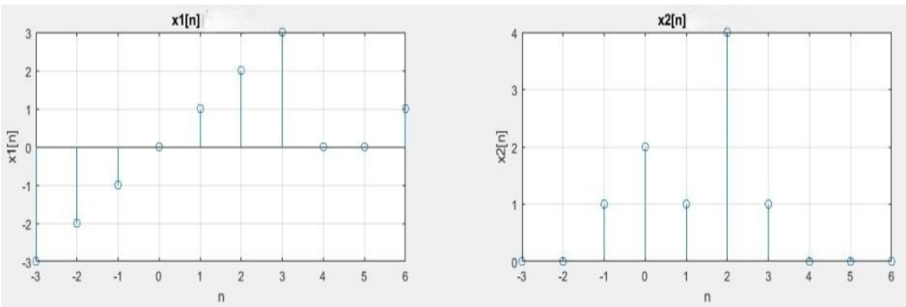
Upotreba z-transformacije kod diskretnih sustava analogna je upotrebi Laplaceove[1] transformacije u kontinuiranih sustava. Laplaceova transformacija definirana je odnosom između vremenske domene i s-domene te uglavnom služi za rješavanje diferencijalnih jednadžbi kojom se opisuju kontinuirani (analogni) sustavi. z-transformacija se koristi na isti način no u diskretnom sustavu gdje je diferencijalna jednadžba diferencijska, odnosno rekurzivna relacija. Drugim riječima, pomoću njih pretvaramo diskretne signale tzv. frekvencijsku domenu koja je analogna s-domeni kod Laplaceove transformacije.

Iako su primjene z-transformacije relativno nove, počeci ove matematičke tehnike datiraju iz 1730-ih kada je De Moivre predstavio koncept generirajuće funkcije koji je identičan z-transformaciji. Razvoj i opsežne primjene z-transformacija znatno su poboljšane kao rezultat korištenja digitalnih sustava.
Prethodni odlomak kao i većina ovog poglavlja obrađeno je prema knjizi [9]

Pošto ćemo u ovome poglavlju raditi s diskretnim signalima, najprije ih je potrebno matematički definirati.

Definicija 3.1. *Vremenski diskretni signal, koji označavamo s $x[n]$, vremenski je niz koji se sastoji od niza brojeva (uzoraka) te je definiran za cjelobrojne vrijednosti n.*

Primjeri nekih diskretnih signala, odnosno njihovi grafički prikazi dani su na slici 3.1.



Slika 3.1. Diskretni signali $x_1[n]$ i $x_2[n]$. Izvor: Izrada autora.

3.1. Definicija i egzistencija z-transformacije

z-transformacija može biti definirana kao **dvostrana (bilateralna)** i **jednostrana (unilateralna)**.

[1] Pierre-Simon Laplace (1749.-1827.), francuski matematičar i astronom.

Definicija 3.2. *Bilateralna ili dvostrana z-transformacija diskretnog signala $x[n]$ je kompleksna funkcija $X(z)$ definirana kao*

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}, \tag{3.1}$$

gdje je n cijeli broj, a z kompleksni broj definiran kao

$$z = Ae^{j\phi} = A \cdot (\cos\phi + j\sin\phi), \tag{3.2}$$

pri čemu A predstavlja amplitudu od z, j je imaginarna jedinica, a ϕ kompleksni argument u radijanima.

Definicija 3.3. *Za slučajeve gdje je $x[n]$ definiran samo za $n \geq 0$, jednostrana ili unilateralna z-transformacija je definirana kao*

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}. \tag{3.3}$$

U ovom radu ćemo se koristiti s **jednostranom z-transformacijom.**

z-transformacija je zapravo beskonačni red (suma) koji divergira ili konvergira. Kako bi pojasnili pojam konvergencije reda dati ćemo jedan primjer konvergirajućeg reda, te jedan primjer divergirajućeg reda.

Primjer 3.1. *Geometrijski red, u matematici, je beskonačni red oblika*

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots. \tag{3.4}$$

Jednostavan primjer je kada je $a = 1$ i $r = \frac{1}{2}$, tada imamo

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots, \tag{3.5}$$

što konvergira prema sumi od 2 (ili 1 ako izostavimo prvi član). Sumu geometrijskog reda kada $n \to \infty$ možemo prikazati sljedećom formulom:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r} \tag{3.6}$$

[10] Napomenimo da geometrijski red konvergira ako je $|r| < 1$, dok za ostale vrijednosti parametra r on divergira.

Primjer 3.2. *Red oblika*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots, \tag{3.7}$$

nazivamo beskonačni ***harmonijski red*** *u kojemu su članovi svi pozitivni jedinični razlomci. Iako sporo, ovaj red divergira u beskonačnost. [11]*

Sada možemo iskazati teorem kojim je opisana egzistencija z-transformacije.

Teorem 3.1. *Neka je zadan diskretni signal $x[n]$ te neka je $X(z)$ njegova z-transformacija. Funkcija $X(z)$ će postojati ukoliko vrijedi:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty. \tag{3.8}$$

Dokaz. Iz definicije z-transformacije, slijedi da je

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}\right| < \infty, \tag{3.9}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x[n]z^{-n}| < \infty. \tag{3.10}$$

Znamo da je $z = re^{j\omega}$, što ćemo uvrstiti u (3.10). Sada dobivamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x[n](re^{j\omega})^{-n}| < \infty, \tag{3.11}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x[n]r^{-n}| \cdot |e^{-j\omega n}| < \infty. \tag{3.12}$$

Magnituda od $e^{-j\omega n}$ je jednaka 1 čime smo dobili traženi izraz za egzistenciju z-transformacije. $\square$

Sada možemo definirati još jedan pojam vezan za egzistenciju z-transformacije.

Definicija 3.4. *Područje konvergencije (engl. Region of convergence- ROC) je skup točaka u kompleksnoj ravnini na kojem z-transformacija konvergira. Ono je definirano s*

$$ROC_x = \left\{ z : \left|\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}\right| < \infty \right\}. \tag{3.13}$$

Riješimo sada jedan primjer u kojem ćemo odrediti područje konvergencije služeći se izrazom (3.8).

Primjer 3.3. *Odredimo područje konvergencije funkcije $x[n] = 2^n u[n]$, gdje je $u[n]$ Heaviseidova step funkcija definirana s*

$$u[n] = \begin{cases} 1 & , n \geq 0, \\ 0 & , n < 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Kada uvrstimo $x[n]$ u (3.8) *dobijemo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |2^n u[n]r^{-n}| < \infty. \tag{3.15}$$

Zbog definicije funkcije $u[n]$ sumacija se vrši od 0 do ∞ pa dobijemo sljedeće:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |2^n r^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |(2r^{-1})^n|. \tag{3.16}$$

Sada imamo da je

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2r^{-1})^n = 1 + 2r^{-1} + (2r^{-1})^2 + \cdots , \tag{3.17}$$

što je primjer geometrijskog reda za koji smo rekli da konvergira ako je

$$|2r^{-1}| < 1. \tag{3.18}$$

Konačno, dobili smo da je $\frac{2}{r} < 1$, *te je* $r > 2$. *Pošto je* r *magnituda od* z *možemo pisati*

$$|z| > 2, \tag{3.19}$$

što je traženo područje konvergencije, odnosno vrijedi:

$$ROC_x = \{z : |z| > 2\}. \tag{3.20}$$

3.2. Osnovna svojstva z-transformacije

U ovom ćemo poglavlju navesti neka svojstva z-transformacije potrebna za rješavanje rekurzivnih relacija.

Teorem 3.2 (Linearnost)**.** *Neka su $x_1[n]$ i $x_2[n]$ diskretne funkcije u vremenskoj domeni, tj. diskretni signali te neka su a_1 i a_2, konstantne. Nadalje, neka su $X_1(z)$ i $X_2(z)$ z-transformacije signala $x_1[n]$ i $x_2[n]$ s područjima konvergencije ROC_1 i ROC_2. Vrijedi:*

$$\mathcal{Z}\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1X_1(z) + a_2X_2(z), \tag{3.21}$$

pri čemu je porručje konvergencije signala $a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$ definirano s $ROC_1 \cap ROC_2$.

Dokaz. Primjenom definicije z-transformacije slijedi:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} &= \sum_{n=0}^{\infty}(a_1x_1[n] + a_2x_2[n])z^{-n} \\ = a_1\sum_{n=0}^{\infty} x_1[n]z^{-n} + a_2\sum_{n=0}^{\infty} x_2[n]z^{-n} &= a_1X_1(z) + a_2X_2(z), \end{aligned} \tag{3.22}$$

čime je tražena tvrdnja pokazana. □

Teorem 3.3 (Pomak u vremenu - kašnjenje za k-koraka)**.** *Neka je $x[n]$ diskretna funkcija u vremenskoj domeni čija je z-transformacija $X(z)$, a područje konvergencije R_x. Za funkciju $x[n]$ uz njezino vremensko kašnjenje k, $k > 0$, vrijedi*

$$\mathcal{Z}\{x[n-k]\} = z^{-k}X(z) + \sum_{m=-k}^{-1} x[m]z^{-(k+m)}, \tag{3.23}$$

pri čemu se područje konvergencije ne mijenja.

Dokaz. Prema definiciji z-transformacije dobivamo:

$$\mathcal{Z}\{x[n-k]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-k]z^{-n}. \tag{3.24}$$

Uvodimo supstituciju $m = n - k$, tj. $n = m + k$ te dobijemo:

$$\mathcal{Z}\{x[n-k]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-k]z^{-n} = \sum_{m=-k}^{\infty} x[m]z^{-(m+k)} = \sum_{m=-k}^{\infty} x[m]z^{-m}z^{-k}, \tag{3.25}$$

$$= z^{-k} \sum_{m=-k}^{\infty} x[m]z^{-m} = z^{-k} \left(X(z) + \sum_{m=-k}^{-1} x[m]z^{-m} \right), \tag{3.26}$$

čime smo dokazali tvrdnju (3.23). □

Na analogan način dokazujemo sljedeći teorem.

Teorem 3.4 (Pomak u vremenu unaprijed za k-koraka)**.** *Neka je $x[n]$ diskretna funkcija u vremenskoj domeni čija je z-transformacija $X(z)$, a područje konvergencije R_x. Za funkciju $x[n]$ uz njezin pomak unaprijed za k, $k > 0$, vrijedi*

$$\mathcal{Z}\{x(n+k)\} = z^k X(z) - \sum_{m=0}^{k-1} x[m]z^{k-m}, \tag{3.27}$$

pri čemu se područje konvergencije ne mijenja.

Dokaz. Iz definicije z-transformacije slijedi:

$$\mathcal{Z}\{x[n+k]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n+k]z^{-n}. \tag{3.28}$$

Uz supstituciju $m = n + k$ dobijemo:

$$\mathcal{Z}\{x[n+k]\} = \sum_{m=k}^{\infty} x[m]z^{-(m-k)} = \sum_{m=k}^{\infty} x[m]z^{-m}z^{k}, \tag{3.29}$$

$$= z^{k} \sum_{m=k}^{\infty} x[m]z^{-m} = z^{k} \left(X(z) - \sum_{m=0}^{k-1} x[m]z^{-m} \right), \tag{3.30}$$

čime je teorem dokazan. □

Rekurzije možemo shvatiti kao diskretne signale pri čemu vrijedi da je x_n zapravo $x[n]$. Tako primjerice rekurziju

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 2 \tag{3.31}$$

shvaćamo kao

$$y[n+2] - 5y[n+1] + 6y[n] = 2. \tag{3.32}$$

Također, u z-domeni pišemo X_z što je isto kao i $X(z)$. Samim time je i rješavanje analogno pa koristimo već navedena svojstva i kod rekurzija. Tako bi primjerice Teorem pomaka u vremenu zapisivali na sljedeći način:

$$\mathcal{Z}\{x_{n+k}\} = z^k X_z - \sum_{m=0}^{k-1} x_m z^{k-m}. \tag{3.33}$$

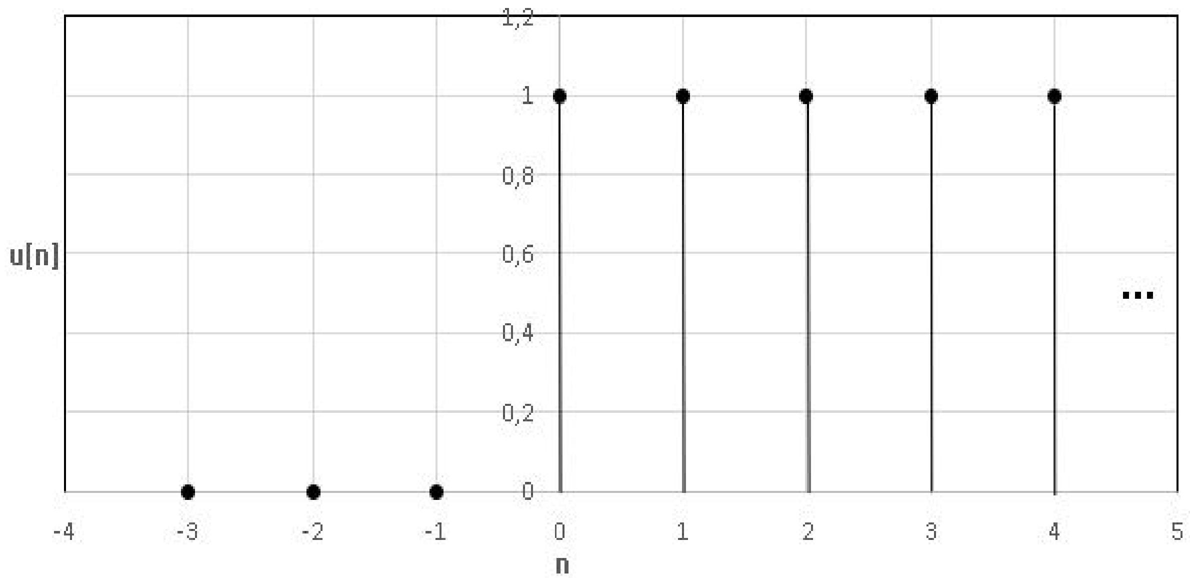
3.3. z-transformacija nekih jednostavnijih funkcija

U ovom ćemo poglavlju odrediti z-transformacije nekih funkcija koje se češće koriste kod rješavanja rekurzija.

Primjer 3.4. *Heavisideova*[2] *step funkcija ili jedinična stepenica u diskretnom je vremenu definirana sljedećim izrazom:*

$$u[n] = \begin{cases} 1 & , n \geq 0, \\ 0 & , n < 0. \end{cases} \tag{3.34}$$

Na idućoj slici prikazana je funkcija $u[n]$.



Slika 3.2. Grafički prikaz funkcije $u[n]$. Izvor: Izrada autora.

z-transformacija funkcije $u[n]$ se izvodi na sljedeći način:

$$\mathcal{Z}\{u[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(z^{-1}\right)^n, \tag{3.35}$$

što predstavlja geometrijski red. Koristeći se formulom (3.6) *za sumu geometrijskog reda dobiti ćemo*

$$\mathcal{Z}\{u[n]\} = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \tag{3.36}$$

[2] Oliver Heaviside(1850.-1925.), elektroinženjer, fizičar i matematičar porijeklom iz Engleske.

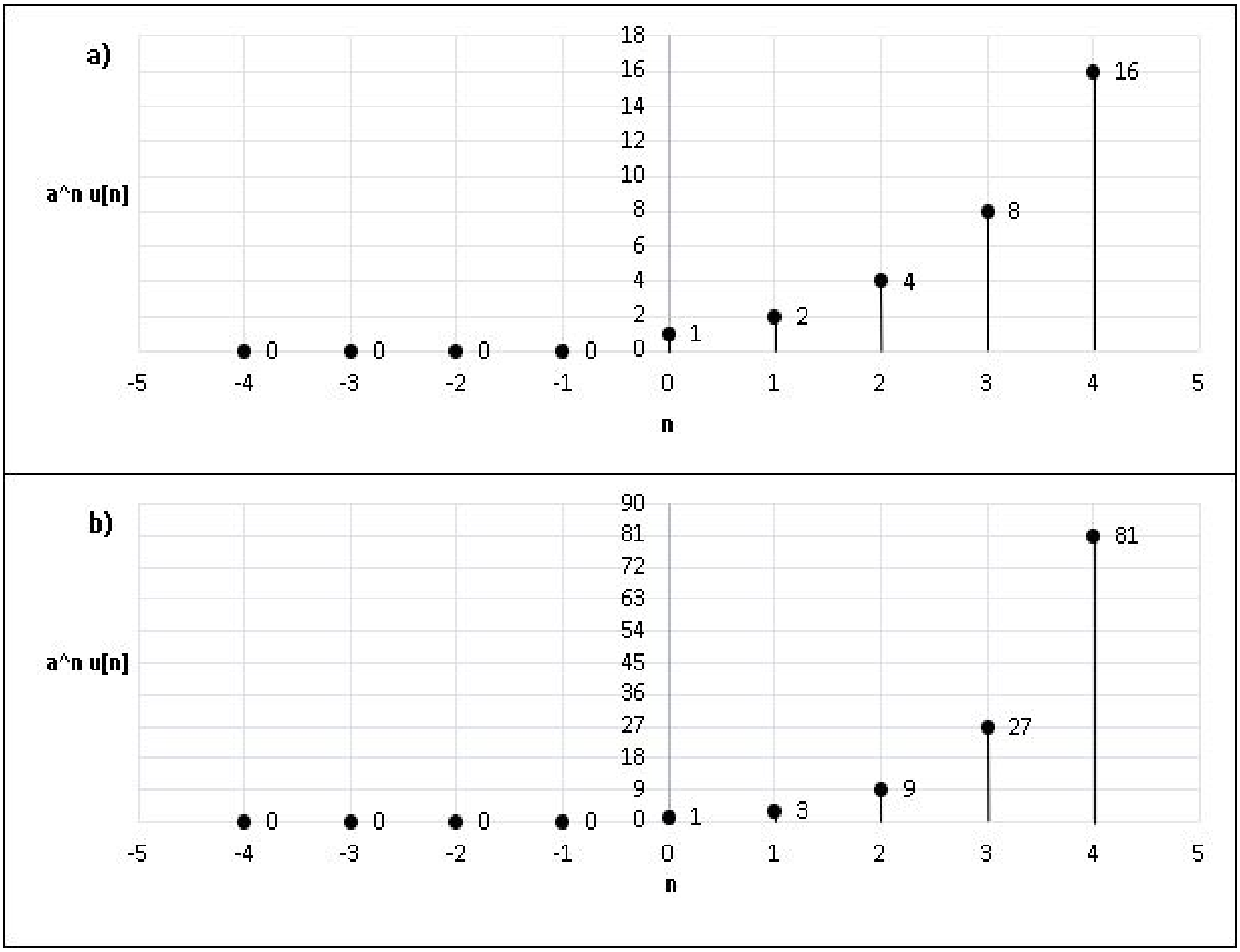
pri čemu je područje konvergencije određeno s $|z| > 1$, što slijedi iz uvjeta konvergencije geometrijskog reda.

Na sličan ćemo način dobiti z-transformaciju sljedeće funkcije.

Primjer 3.5. *Odredimo z-transformaciju funkcije koja predstavlja eksponencijalni niz te je zadana sljedećim izrazom*

$$a^n u[n] = \begin{cases} a^n & , n \geq 0, \\ 0 & , n < 0. \end{cases} \tag{3.37}$$

Grafički prikaz promatrane funkcije možemo vidjeti na sljedećoj slici.



Slika 3.3. Grafički prikaz $a^n u[n]$ za a) $a = 2$ i b) $a = 3$. Izvor: Izrada autora.

Izvedimo sada z-transformaciju dane funkcije. Iz definicije z-transformacije i definicije same funkcije slijedi:

$$\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot 1 \cdot z^{-n}, \tag{3.38}$$

što se može zapisati u obliku:

$$\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n, \tag{3.39}$$

pa primjenom formule (3.6) *za sumu geometrijskog reda dobivamo*

$$\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \tag{3.40}$$

pri čemu je područje konvergencije određeno s $|z| > |a|$*.*

U sljedećem se primjeru bavimo funkcijom kojom se modelira impuls.

Primjer 3.6. *Jedinični impuls ili Diracova*[3] *delta funkcija je funkcija jednaka nuli u svim točkama osim u jednoj u kojoj je njena vrijednost beskonačna. Međutim, integral te funkcije mora biti jednak jedinici, što znači da na tu funkcija ne možemo gledati kao na funkciju u klasičnom smislu.*

Jedinični impuls u diskretnom vremenu nije toliko kompleksan i definiran je s:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & , n = 0, \\ 0 & , n \neq 0. \end{cases} \tag{3.41}$$

Napomenimo da se diskretna δ *funkcija često naziva i Kroneckerova*[4] *delta fukcija.*

z*-transformacija Kroneckerove delta funkcije izračunava se na sljedeći način:*

$$\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n]z^{-n} = \ldots + \underbrace{\delta[-1]z^{1}}_{0} + \delta[0]z^{0} + \underbrace{\delta[1]z^{-1}}_{0} + \ldots = \delta[0]z^{0}, \tag{3.42}$$

iz čega možemo zaključiti da vrijedi

$$\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = \delta[0]z^0 = 1. \tag{3.43}$$

Također, primjenjujući Teorem pomaka u vremenu zaključujemo da je

$$\mathcal{Z}\{\delta[n-k]\} = z^{-k}. \tag{3.44}$$

Napomenimo samo da su jedinički impuls i jedinična stepenica međusobno povezani te vrijedi:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]. \tag{3.45}$$

U sljedećoj tablici prikazati ćemo z-transformacije najčešće korištenih funkcija.

[3] Paul Adrien Maurice Dirac (1902.-1984.), engleski teoretski fizičar.

[4] Leopold Kronecker (1823.-1891.), njemački matematičar.

Tablica 3.1. Tablica osnovnih z-transformacija

$x[n]$	$\mathcal{Z}\{x[n]\}$	ROC
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
$\delta[n]$	1	$\forall z$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| < 1$
$\delta[n-k]$	z^{-k}	$\forall z \neq 0$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$
$\sin[\omega_0 n]u[n]$	$\frac{\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$\cos[\omega_0 n]u[n]$	$\frac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$

4. Primjena z-transformacije na rješavanje rekurzivnih relacija

U ovome ćemo poglavlju riješiti dva primjera u kojima ćemo pokazati primjenu z-transformacije na rješavanje rekurzivnih relacija.

Primjer 4.1. *Riješimo rekurzivnu relaciju*

$$y_{n+1} - 3y_n = 2^n \tag{4.1}$$

uz početni uvjet $y_0 = 1$ primjenom z-transformacije.

Koristeći teorem 3.2 o linearnosti te teorem 3.3 o vremenskom pomaku znamo da je

$$\mathcal{Z}\{y_{n+1}\} = zY_z - zy_0, \tag{4.2}$$

dok je

$$\mathcal{Z}\{y_n\} = Y_z. \tag{4.3}$$

Član 2^n možemo pronaći u Tablici 3.1, pa dobivamo:

$$\mathcal{Z}\{2^n u[n]\} = \frac{1}{1-2z^{-1}} = \frac{z}{z-2}. \tag{4.4}$$

Sada smo dobili sljedeći izraz:

$$zY_z - zy_0 - 3Y_z = \frac{z}{z-2}. \tag{4.5}$$

Uvrštavanjem početnog uvjeta dobivamo

$$zY_z - z - 3Y_z = \frac{z}{z-2}. \tag{4.6}$$

Sada moramo izraziti Y_z, odnosno riješiti pripadnu algebarsku jednadžbu. Dobivamo da je:

$$Y_z(z-3) = \frac{z}{z-2} + z, \tag{4.7}$$

odnosno

$$Y_z = \frac{z^2 - z}{(z-2)(z-3)}. \tag{4.8}$$

Sada se iz z-domene trebamo vratiti u vremensku domenu. Pošto se s desne strane izraza (4.8) *ne nalazi tablična transformacija, svesti ćemo ju na tabličnu rastavom na parcijalne razlomke. Dobivamo:*

$$Y_z = z\frac{z-1}{(z-2)(z-3)} = z\frac{A}{z-2} + z\frac{B}{z-3}. \tag{4.9}$$

Sada je potrebno odrediti koeficijente A i B u jednakosti

$$\frac{z-1}{(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3}, \tag{4.10}$$

odnosno

$$z - 1 = A(z-3) + B(z-2). \tag{4.11}$$

Uvrštavanjem vrijednosti $z = 2$ dobivamo da je $A = -1$, dok uvrštavanjem $z = 2$ slijedi da je $B = 2$.

Sada smo konačno dobili da je

$$Y_z = \frac{-z}{z-2} + \frac{2z}{z-3}, \tag{4.12}$$

te se taj izraz dijeljenjem sa z svodi na tablični:

$$Y_z = -\frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{2}{1-3z^{-1}}, \tag{4.13}$$

iz kojeg slijedi rješenje rekurzivne relacije

$$y_n = -(2^n) + 2 \cdot (3^n). \tag{4.14}$$

Primjer 4.2. *Riješimo rekurzivnu relaciju*

$$y_n = 2y_{n-1} + 1 \tag{4.15}$$

pomoću z-transformacije uz početni uvjet $y_1 = 1$.

Primijetimo da je zadan početni uvjet y_1, dok je za primjenu metode z-transformacije i primjenu Teorema o pomaku u vremenu nužno imati početni uvjet y_{-1}. Stoga ćemo zadani početni uvjet uvrstiti u relaciju. Dobivamo:

$$y_1 = 2y_0 + 1, \tag{4.16}$$

odakle slijedi da je $y_0 = 0$. Nadalje je

$$y_0 = 2y_{-1} + 1, \tag{4.17}$$

te uvrštajući $y_0 = 0$ dobivamo da je $y_{-1} = -\frac{1}{2}$.

Sada, koristeći teoreme 3.2 i 3.3 te tablicu z-transformacije dobijemo

$$Y_z = 2y_{-1} + 2z^{-1}Y_z + \frac{z}{z-1}. \tag{4.18}$$

Uvrštavanjem vrijednosti od y_{-1} u (4.18) *i sređivanjem slijedi:*

$$Y_z\left(1 - \frac{2}{z}\right) = \frac{z}{z-1} - 1, \tag{4.19}$$

$$Y_z\left(\frac{z-2}{z}\right) = \frac{1}{z-1}. \tag{4.20}$$

Sada smo dobili da je

$$Y_z = \frac{z}{(z-1)(z-2)}, \tag{4.21}$$

te ćemo taj izraz rastaviti na parcijalne razlomke. Dobivamo:

$$Y_z = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = z\frac{A}{z-1} + z\frac{B}{z-2}. \tag{4.22}$$

Vrijednosti za koeficijente A i B ćemo dobiti istom metodom kao u prethodnom primjeru. Promatramo jednakost:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}, \tag{4.23}$$

odnosno

$$1 = A(z-2) + B(z-1). \tag{4.24}$$

Uvrštavanjem $z = 1$ dobivamo da je $A = -1$, a uvrštavanjem $z = 2$ slijedi da je $B = 1$. Tako dobivamo

$$Y_z = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-2z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}}, \tag{4.25}$$

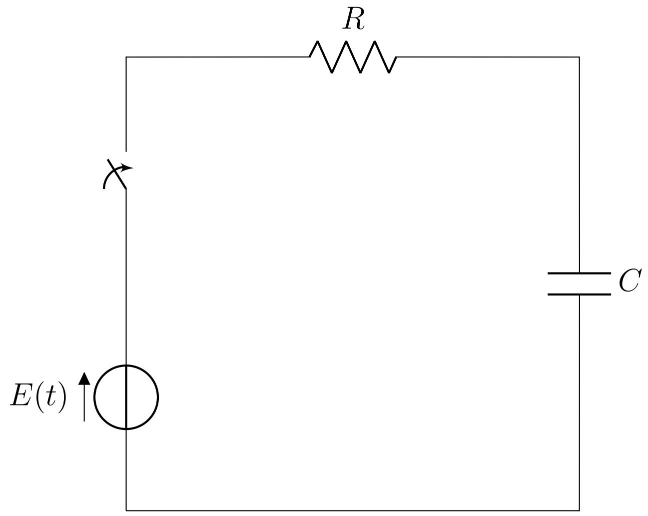
što su tablične z-transformacije, te konačno rješenje rekurzije glasi

$$y_n = 2^n - 1. \tag{4.26}$$

5. Primjena rekurzija i z-transformacija na linearne sustave u diskretnom vremenu

Kako bismo lakše shvatili pojam sustava promotrimo sljedeći primjer

Primjer 5.1. *Zadan je RC krug čija je shema prikazana na sljedećoj slici.*



Slika 5.1. RC krug

Ponašanje RC kruga opisano je sljedećom diferencijalno-integralnom jednadžbom

$$E(t) = i(t) \cdot R + \frac{1}{C} \int_{0}^{t} i(\tau) d\tau, \tag{5.1}$$

gdje je $E(t)$ napon izvora, $i(t)$ struja u krugu, R je otpor otpornika, a C kapacitet kondenzatora. Ovaj se strujni krug može promatrati kao sustav pri čemu će napon izvora predstavljati njegovu pobudu, dok će struja u strujnom krugu predstavljati odziv sustava. Drugim riječima možemo pisati da je

$$i(t) = \mathcal{S}\{E(t)\}, \tag{5.2}$$

pri čemu je $\mathcal{S}$ operator koji opisuje ponašanje sustava, a u navedenom primjeru to bi bila diferencijalna jednadžba.

Sustav možemo promatrati u kontinuiranom vremenu i tada ga nazivamo kontinuiranim. Ukoliko vrijeme ne promatramo kontinuirano, već u nekim točno određenim vremenskim trenutcima (primjerice svake sekunde) kažemo da se radi o sustavu u diskretnom vremenu. Sustav bi tada zapisali na sljedeći način

$$i[n] = \mathcal{S}\{E[n]\}. \tag{5.3}$$

Dok sustave u kontinuiranom vremenu opisujemo diferencijalnim jednadžbama, sustave u diskretnom vremenu uglavnom opisujemo diferencijskim jednadžbama.

Općenito se sustav u diskretnom vremenu može grafički prikazati blokovskim dijagramom, kao na sljedećoj slici.

Slika 5.2. Blokovski dijagram diskretnog sustava. Izvor: Izrada autora.

Objasnimo sada neke osnovne pojmove vezane u sustave u diskretnom vremenu.

Definicija 5.1. *Za sustav $\mathcal{S}$ u diskretnom vremenu kažemo da ima svojstvo* ***homogenosti*** *ako vrijedi*

$$\mathcal{S}\{ax[n]\} = a\mathcal{S}\{x[n]\} = ay[n]. \tag{5.4}$$

pri čemu je a konstanta, $x[n]$ pobuda, a $y[n]$ odziv sustava.

Definicija 5.2. *Za sustav $\mathcal{S}$ u diskretnom vremenu kažemo da ima svojstvo* ***aditivnosti*** *ako vrijedi*

$$\mathcal{S}\{x_1[n] + x_2[n]\} = \mathcal{S}\{x_1[n]\} + \mathcal{S}\{x_2[n]\} = y_1[n] + y_2[n], \tag{5.5}$$

pri čemu su a_1 i a_2 konstante, $x_1[n]$ i $x_2[n]$ pobude, a $y_1[n]$ i $y_2[n]$ pripadni odzivi.

Ako je sustav u diskretnom vremenu i homogen i aditivan, tada kažemo da on posjeduje i svojstvo **linearnosti** koje se uz prethodno uvedene oznake analitički može zapisati na sljedeći način:

$$\mathcal{S}\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1\mathcal{S}\{x_1[n]\} + a_2\mathcal{S}\{x_2[n]\} = a_1y_1[n] + a_2y_2[n], \tag{5.6}$$

gdje su a_1 i a_2 konstante.

Svojstvo linearnosti može se generalizirati na veći broj pobuda i odziva što se naziva svojstvo superpozicije, a objašnjeno je u sljedećem teoremu.

Teorem 5.1 (Svojstvo superpozicije)**.** *Neka je zadan linearni sustav u diskretnom vremenu te neka je*

$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k x_k[n] \tag{5.7}$$

pobuda tog sustava. Tada vrijedi

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y_k[n], \tag{5.8}$$

pri čemu je $y_k[n]$=$\mathcal{S}\{x_k[n]\}$, dok su $a_1, a_2, \ldots, a_N$ konstante.

Ako sustav na istu pobudu reagira isto sada ili nakon T sekundi, kažemo da je vremenski nepromjenjiv, što se formalno može definirati sljedećom definicijom.

Definicija 5.3. *Neka je $\mathcal{S}$ sustav u diskretnom vremenu. Sustav $\mathcal{S}$ zvati ćemo* ***vremenski nepromjenjivim*** *ako vrijedi*

$$\mathcal{S}\{x[n-T]\} = y[n-T], \forall x[n], \tag{5.9}$$

pri čemu je $T > 0$ proizvoljan diskretni vremenski trenutak.

Sada možemo definirati jedan bitan sustav koji se bazira na prethodno uvedenim svojstvima.

Definicija 5.4. *Neka je $\mathcal{S}$ sustav u diskretnom vremenu za koji vrijede svojstva linearnosti i vremenske nepromjenjivosti. Takav sustav zovemo LVN (linearan vremenski nepromjenjiv) sustav te ga opisujemo sljedećom diferencijskom jednadžbom:*

$$y[n] - \sum_{j=1}^{N} a_j y[n-j] = \sum_{i=0}^{M} b_i x[n-i], \tag{5.10}$$

gdje je x ulazni signal (ponuda), a y izlazni signal (odziv), dok su $a_j, j = 1, 2, \ldots N$ i $b_i, i = 0, 1, 2, \ldots M$ konstante.

Već smo prije spomenuli kako se diferencijske jednadžbe mogu shvatiti kao rekurzije i pokazali smo kako se na njihovo rješavanje može primijeniti z-transformacija, što dodatno ilustrira važnost opisanih tehnika.

Jedan od važnih primjera sustava u diskretnom vremenu koji se mogu opisati diferencijskim jednadžbama su filtri. Objasnimo stoga što je to filtar i kakve vrste filtara postoje.

Filtar je sustav čija je funkcija ukloniti neželjene dijelove signala, kao što su slučajni šum, ili pak izdvojiti korisne dijelove signala. Postoje dvije osnovne vrste filtara, analogni i digitalni, koji su dosta različiti. Analogni filtri koriste analogne elektroničke sklopove sastavljene od komponenti kao što su otpornici, kondenzator i operacijska pojačala za postizanje potrebnog efekta filtriranja. Koriste se najviše u aplikacijama za smanjenje buke te poboljšanju video signala. Analogni filtri će tako primjerice ukloniti sve frekvencije iznad ili ispod odabrane granične frekvencije.

Digitalne filtre možemo naći bilo gdje gdje se vrši digitalna obrada signala. To uključuje digitalne sustave za prijenos signala kao što su telefonski sustav i sustavi koji obrađuju audio signale. Digitalni filtar je zapravo sustav koji izvodi matematičke operacije na uzorkovani signal u diskretnom vremenu za potiskivanje ili pojačavanje određenih aspekata tog signala, a kao osnovni alat se pritom koristi upravo z-transformacija. [12]

Osnovu za dizajn digitalnih filtera čini diferencijska jednadžba (5.10). Tako primjerice diferencijska jednadžba oblika

$$y[n] = 0,5x[n] + 4x[n-1] + 2y[n-1] \tag{5.11}$$

specificira operaciju digitalnog filtriranja gdje su 0.5, 4 i 2 koeficijenti koji karakteriziraju filtar te je $M = N = 1$. Ovo je primjer realnog filtra zbog realnih koeficijenata. Ako bi koeficijenti bili kompleksni brojevi, filter bi bio kompleksan.

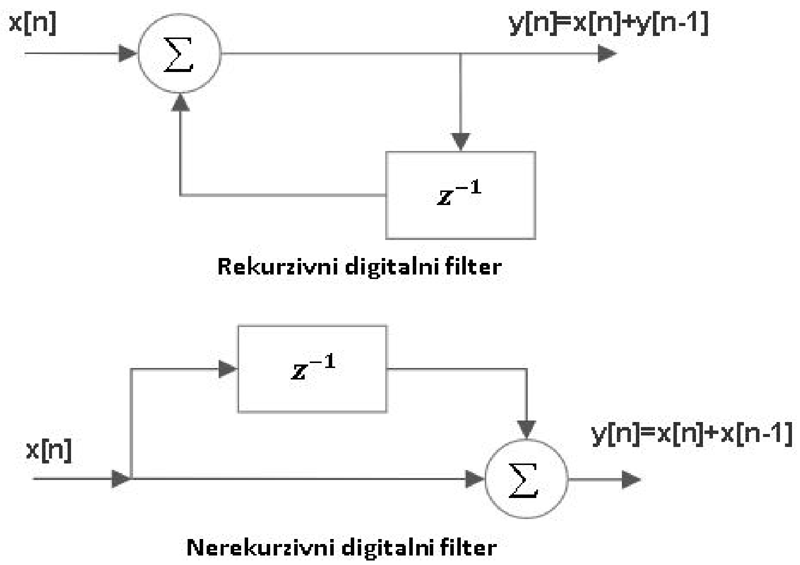
Digitalne filtre možemo podijeliti u dvije kategorije:

1. rekurzivne, i
2. nerekurzivne.

Svaki filtar koji ima jedan ili više povratnih puteva $(N > 1)$ je rekurzivni. Koeficijente a_j u tom slučaju nazivamo *feedback* koeficijentima odnosno koeficijentima s povratnom spregom, dok koeficijente b_i nazivamo *feedforward* koeficijentima. Vrijedi da je filter rekurzivan ako i samo ako je

$$a_j \neq 0 \text{ za} j > 0. \tag{5.12}$$

Kada je $a_j = 0$ za $j > 0$, odnosno kad nema *feedback* koeficijenata onda govorimo o nerekurzivnom filtru. [13] Slika 5.3 ilustrira rekurzivne i nerekurzivne digitalne filtre.



Slika 5.3. Blokovski dijagrami digitalnih filtra. Izvor:izrada autora.

Pokažimo sada na jednom primjeru kako se opisane tehnike koriste kod opisivanja jednog sustava u diskretnom vremenu.

Primjer 5.2. *Zadan je diskretni sustav koji uzima trenutni i prethodna 3 ulazna uzorka te izračunava prosječnu vrijednost. Njegova diferencijska jednadžba je dana s*

$$y[n] = \frac{1}{4}(x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3]), \tag{5.13}$$

odnosno ako ovo zapišemo kao rekurziju imamo

$$y_n = \frac{1}{4}(x_n + x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}). \tag{5.14}$$

Napravimo li z-transformaciju ovog izraza dobivamo

$$Y_z = \frac{1}{4}(X_z + z^{-1}X_z + z^{-2}X_z + z^{-3}X_z) \tag{5.15}$$

$$Y_z = \frac{1}{4}(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3})X_z, \tag{5.16}$$

što se može zapisati u obliku

$$Y_z = H_z \cdot X_z, \tag{5.17}$$

gdje je H_z tzv. prijenosna funkcija kojom se definira ponašanje sustava. Prijenosna funkcija je omjer odziva i pobude, tj.

$$H_z = \frac{Y_z}{X_z}. \tag{5.18}$$

U našem slučaju je:

$$H_z = \frac{1}{4}(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}). \tag{5.19}$$

Spomenimo da promatrani primjer opisuje tzv. filtar pomičnog prosjeka.

6. Zaključak

U ovom radu objašnjene su rekurzivne relacije i njihova primjena u opisivanju nizova brojeva. Kao poseban primjer niza brojeva opisanog rekurzivnom relacijom, objašnjeni su Fibonnacijevi brojevi te smo vidjeli kako oni nemaju samo značenje u matematici već u različitim sferama ljudskog života. Pokazana je metoda rješavanja linearnih rekurzija s konstantnim koeficijentima, kao i poteškoće koje nastaju kod rješavanja nelinearnih rekurzija. Također smo pokazali kako rekurzije mogu biti korisne i upotrebljive unutar elektrotehnike.

U drugom dijelu rada obradili smo važan alat u matematici, a to je z-transformacija. Njom rješavamo diferencijske jednadžbe, što znači da ima široku primjenu pri obradi diskretnih signala. Objasnili smo pojam egzistencije z-transformacije te smo uveli pojam njenog područja konvergencije. Nadalje, navedena su neka osnovna svojstva z-transformacije neophodna pri rješavaju rekurzija te je dano nekoliko primjera z-transformacija jednostavnijih funkcija.

Možemo reći da su rekurzivne relacije zapravo diskretni signali pri čemu je x_n zapravo $x[n]$ u notaciji signala. Ta veza rekurzija s diskretnim signalima pokazana je u četvrtom poglavlju, gdje smo primijenili z-transformaciju na rješavanje rekurzija.

Naposljetku, uveli smo pojam sustava kojega smo detaljno opisali te smo objasnili neke od osnovnih pojmova vezanih za sustave u diskretnom vremenu te prikazali filtre kao važne sustave u obradi signala.

Kroz ovaj rad pokazali smo kako su rekurzije i z-transformacije vrlo bitne i primjenjive metode te imaju široku primjenu, kako u matematici tako i u elektrotehnici, s posebnim naglaskom na obradu signala i sustava.

Literatura

[1] Veljan, D., "Kombinatorika s teorijom grafova", Školska knjiga, Zagreb, 1989.

[2] From Wikipedia, the free encyclopedia, "Fibonacci", s Interneta, https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci, 3.4.2022.

[3] Palazzo, B., "The numbers of nature: the Fibonacci sequence", s Interneta, http://st-eni.eniscuola.net/en/2016/06/27/the-numbers-of-nature-the-fibonacci-sequence/, 4.4.2022.

[4] Zlatni rez. Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, s Interneta, https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=67302, 4. 4. 2022.

[5] Mullin, M., "Fibonacci, spirals and human movement–Part I", s Interneta, https://www.mjmatc.com/positional-integration/2017/8/27/fibonacci-spirals-and-human-movement, 4.4.2022.

[6] Dobrič, S., ”Zlatni rez”, časopis Nova Akropola (online), broj 11, 20 stranica, Zagreb, 2020.

[7] Scientific American, "The Mind-Blowing Mathematics of Sunflowers", s Interneta, https://www.scientificamerican.com/video/the-mind-blowing-mathematics-of-sunflowers/, 5.4.2022.

[8] "Vandermonde matrix", s Interneta, https://en.wikipedia.org/wiki/Vandermonde_matrix, pristupljeno 6.4.2022.

[9] Poularikas, A.D, "The Transforms and Applications Handbook: Second Edition.", CRC Press LLC, Boca Raton, 2000.

[10] Hosch, William L. "Geometric series", Encyclopedia Britannica, s Interneta, https://www.britannica.com/science/geometric-series, 9.6.2022.

[11] Weisstein, Eric W. "Harmonic Series." From MathWorld - A Wolfram Web Resource, s Interneta, https://mathworld.wolfram.com/HarmonicSeries.html, 9.6.2022.

[12] Introduction to digital filters, s Interneta, https://123.physics.ucdavis.edu/week_5_files/filters/digital_filter.pdf, 20.6.2022.

[13] N. C. Kenneth, ”Digital signal processing: Roles of Z-transform and Digital Filters”, IJETTICS, Volume 4, Issue 4, July - August 2015

Sažetak i ključne riječi

Ovaj završni rad opisuje rekurzije i z-transformaciju. U prvom dijelu rada uveden je pojam rekurzije te objašnjen na primjeru Fibonaccijevih brojeva zajedno sa Zlatnim rezom. Opisuju se vrste rekurzija i metode njihova rješavanja, a pokazana je i primjena rekurzija u elektrotehnici. U drugom dijelu rada je z-transformacija kao i njezina egzistencija te je objašnjen pojam područja konvergencije. Dana su neka od osnovnih svojstava z-transformacije te su primjerima opisane z-transformacije nekih jednostavnijih funkcija. Primjena z-transformacija na rješavanje rekurzija objašnjena je na nekoliko primjera. U završnom dijelu rada opisan je diskretni sustav te primjena z-transformacije kod analize linearnih diskretnih sustava.

Ključne riječi: Rekurzivne relacije (rekurzije), Fibonaccijevi brojevi, homogene linearne rekurzije, nehomogene linearne rekurzije, nelinearne rekurzije, z-transformacija, diskretan sustav, LVN sustav, digitalni filtar

Summary and key words

This work describes recursions and z- transformations. In the first part of the thesis, the concept of recursion was introduced and explained using Fibonacci numbers and the golden section as examples. The types of recursions and the methods for their solution are described and the application of recursion in electrical engineering is also demonstrated. In the second part of the paper, the z transform and its existence are explained as well as the region of convergence. Some basic properties of the z-transform are given and examples of the z-transform of some simpler functions are described. The use of z-transforms to solve recursions is explained with some examples. The last part of the paper describes the discrete system and the application of z-transforms in the analysis of linear discrete systems.

Keywords: recursive relations (recursions), Fibonacci numbers, homogeneous linear recursions, inhomogeneous linear recursions, nonlinear recursions, z- transformation, discrete system, LVN system, digital filter