

# ARIMA modeli u teoriji signala

---

**Kamenar, Erik**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:190:879541>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-28**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Engineering](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI

**TEHNIČKI FAKULTET**

Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

**ARIMA MODELI U TEORIJI SIGNALA**

Rijeka, srpanj 2022.

Erik Kamenar  
0069086647

SVEUČILIŠTE U RIJECI

**TEHNIČKI FAKULTET**

Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

**ARIMA MODELI U TEORIJI SIGNALA**

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Dražić

Rijeka, srpanj 2022.

Erik Kamenar  
0069086647

Rijeka, 18. ožujka 2022.

Zavod: **Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike**  
Predmet: **Inženjerska matematika ET**  
Grana: **1.01.07 primijenjena matematika i matematičko modeliranje**

## ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Erik Kamenar (0069086647)**  
Studij: **Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike**

Zadatak: **ARIMA modeli u teoriji signala // ARIMA models in signal theory**

### Opis zadatka:

U radu je potrebno precizno definirati ARIMA modele u kontekstu slučajnih procesa, pri čemu se potrebno osvrnuti na svaku sastavnicu ARIMA modela. Za dane modele potrebno je opisati matematička i statistička svojstva te se osvrnuti na njihove prednosti i mane. Obradene modele potrebno je staviti u kontekst primjene, a posebno se treba osvrnuti na primjere njihove implementacije u obradi signala i elektrotehnici.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.



Zadatak uručen pristupniku: 21. ožujka 2022.

Mentor:



---

Doc. dr. sc. Ivan Dražić

Predsjednik povjerenstva za  
završni ispit:



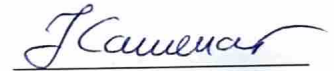
---

Prof. dr. sc. Viktor Sučić

# IZJAVA

Sukladno članku 8. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku prediplomskih sveučilišnih studija/stručnih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 1. veljače 2020., izjavljujem da sam samostalno izradio/izradila završni rad prema zadatku preuzetom dana 18.3.2022.

Rijeka, 8.7.2022.



Erik Kamenar

*Zahvaljujem se svima koji su mi na bilo koji način pomogli u pisanju i stvaranju ovog rada. Pritom veliko hvala profesoru i mentoru koji mi je uvelike olakšao stvaranje ovog rada na pristupačnosti i susretljivosti. Zahvaljujem se i svojoj obitelji koja mi je bila velika podrška tijekom cijelog dosadašnjeg školovanja.*

## Sadržaj

<b>1. Uvod</b>	<b>3</b>
<b>2. Uvod u matematičku analizu vremenskih nizova</b>	<b>4</b>
<b>3. Stacionarnost</b>	<b>6</b>
<b>4. Autokorelacijska i parcijalna autokorelacijska funkcija</b>	<b>8</b>
4.1. Autokorelacijska funkcija . . . . .	8
4.2. Parcijalna autokorelacijska funkcija . . . . .	8
<b>5. Čisti slučajni proces ili proces bijelog šuma</b>	<b>10</b>
<b>6. Autoregresijski (AR) model</b>	<b>12</b>
6.1. Autoregresijski model prvog reda - AR(1) . . . . .	13
6.1.1. Autokorelacijska funkcija AR(1) procesa . . . . .	15
6.1.2. Parcijalna autokorelacijska funkcija AR(1) procesa . . . . .	15
6.2. Autoregresijski model drugog reda - AR(2) . . . . .	16
6.3. Autoregresijski model reda $p$ - AR( $p$ ) . . . . .	16
6.3.1. Autokorelacijska funkcija AR( $p$ ) procesa . . . . .	16
6.3.2. Parcijalna autokorelacijska funkcija AR( $p$ ) procesa . . . . .	17
6.4. Primjer AR modela . . . . .	17
<b>7. Model pomičnih presjeka (MA)</b>	<b>19</b>
7.1. Proces pomičnih presjeka prvog reda - MA(1) proces . . . . .	19
7.2. Proces pomičnih presjeka drugog reda - MA(2) proces . . . . .	20
7.2.1. Autokorelacijska funkcija MA(1) procesa . . . . .	20
7.2.2. Autokorelacijska funkcija MA( $q$ ) procesa . . . . .	21
7.2.3. Parcijalna autokorelacijska funkcija MA(1) procesa . . . . .	21
7.2.4. Parcijalna autokorelacijska funkcija MA( $q$ ) procesa . . . . .	22
7.3. Primjer MA procesa . . . . .	22
<b>8. Mješoviti ARMA model</b>	<b>25</b>
8.1. Prikaz stacionarnog AR( $p$ ) procesa u obliku MA( $\infty$ ) procesa . . . . .	25
8.2. Prikaz invertibilnog MA( $q$ ) procesa u obliku AR( $\infty$ ) procesa . . . . .	25

	2
8.3. ARMA (1,1) . . . . .	26
<b>9. ARIMA modeli</b>	<b>27</b>
9.1. Nestacionarni vremenski nizovi i integracijska komponenta "I" . . . . .	27
9.2. Trend modeli . . . . .	28
9.2.1. Deterministički trend modeli . . . . .	28
9.2.2. Stohastički trend modeli . . . . .	28
<b>10. Primjena ARIMA modela u proračunu potrošnje električne energije na području RH</b>	<b>30</b>
10.1. Predviđanje proračuna za 2019.-u godinu . . . . .	30
10.2. Pouzdanost i točnost dobivenih rezultata . . . . .	32
<b>11. Predviđanje putem ARIMA modela u programskom paketu STATA</b>	<b>34</b>
<b>12. Predviđanje potrošnje električne energije na području RH za narednu godinu (2021.)</b>	<b>37</b>
<b>13. Zaključak</b>	<b>41</b>
<b>Literatura</b>	<b>43</b>
<b>Sažetak i ključne riječi</b>	<b>44</b>
<b>Summary and key words</b>	<b>45</b>



## 1. Uvod

Oduvijek je postajala ljudska potreba da prati kretanje određenih pojava u prirodi te pokuša predvidjeti njihovo daljnje ponašanje. Ako se uzme za primjer jedan moderan sustav kao što je tržište kriptovaluta i vrijednosnih papira vrlo je poželjno znati njihovo kretanje. Isto tako postoje i drugi sustavi u prirodi za koje su ljudi oduvijek htjeli znati ishode. Najdrevniji i najpoznatiji sustav koji se danas često uzima zdravo za gotovo jest prognoziranje vremena. Osim preciznih mjerenja koja se provode u samom prognoziranju, koriste se i statistički podatci prethodnih mjerenja kako bi se utvrdila prognoza.

Ovaj rad detaljno razrađuje postupak analize podataka u nekom sustavu na temelju kojih pokušava predvidjeti njihovo daljnje kretanje. Pritom su prikazani razni matematički dokazi i izvodi kako bi se moglo opravdati takvo predviđanje. U radu su detaljno opisani ARIMA modeli kao jedan od najadekvatnijih i danas najprimjenjenijih modela analize podataka u grani matematičke statistike.

Kako se ovo istraživanje ne bi samo zadržalo na matematičkoj analizi, provodi se istraživanje hrvatskog elektroenergetskog sustava u svrhu predviđanja potrošnje električne energije. Cilj ovog projekta jest razraditi i primjeniti ARIMA modele na elektroenergetski sustav u Republici Hrvatskoj. Ideja je da se na temelju stvarnih podataka potrošnje električne energije na području RH u proteklih par godina pokuša predvidjeti potrošnja i potreba za električnom energijom u budućnosti.

Prije svega, potreba za električnom energijom sve je veća i bilo koji elektroenergetski sustav mora biti u mogućnosti i pripravan u svakom trenutku opskrbiti kućanstva u svakom djelu Republike Hrvatske. Iz vlastitog iskustva može se zaključiti da potreba za električnom energijom svakim danom raste. Tijekom tog rasta dolazi do većih i manjih oscilacija u potrošnji. Najviše električne energije se troši tijekom ljetnih mjeseci (na hlađenje) i tijekom zimskih mjeseci (na grijanje). Glavna zadaća operatera elektroenergetskog sustava jest pokušati predvidjeti kolika će biti potreba za električnom energijom u svakom dijelu godine kako bi se mogla proizvesti dovoljna količina energije. Pritom, ukoliko postoji višak električne energije on se može na razne načine skladištiti, dok se nedostatak električne energije ne može samo tako nadomjestiti. Upravo to je razlog zašto je bitno točno predvidjeti koliko će električne energije biti potrebno u određenom trenutku u godini kako ne bi došlo do nepovoljnih stanja u sustavu.

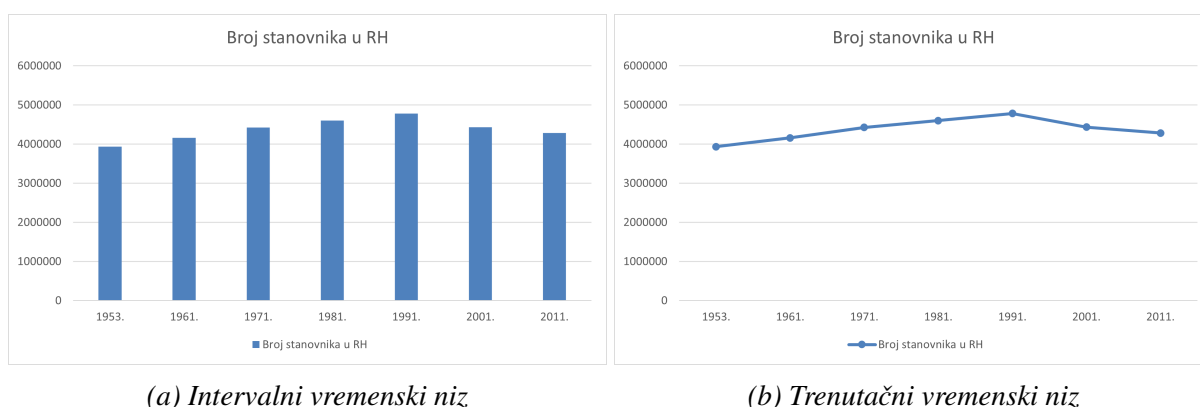
Nakon provedenih proračuna bit će provedeno testiranje različitih matematičkih modela za nekoliko različitih stanja. Pritom je naglasak na točnosti samih izračuna. U završnom poglavlju ovog rada bit će prikazani rezultati provedenog predviđanja. Isto tako, bit će dane pozitivne i negativne strane modela te zašto bi ili ne bi mogli korisiti ovaj model u stvarnosti. Prije samog istraživanja potrebno se upoznati sa temeljnim terminima i izrazima koji će se koristiti u proračunima.

## 2. Uvod u matematičku analizu vremenskih nizova

U ovom poglavlju će se obrađivati teme prema izvoru [5]. Vremenski niz jest skup kronološki uređenih vrijednosti određene pojave međusobno pomaknutih za jednake vremenske intervale. Cilj analize vremenskih nizova je opisivanje ponašanja sustava u vremenu, objašnjavanje određenih pojava te predviđanja budućih pojava na temelju ponašanja sustava. Ako se nekakv vremenski niz označi sa  $x_t$  tada ga je moguće zapisati kao skup međusobno razmaknutih vrijednosti u vremenu. Ako  $x_t$  označava nekakav vremenski niz, tada indeks  $t$  predstavlja položaj tog člana u vremenskom nizu.

$$x_t \implies x_1, x_2, \dots, x_{t-1} \quad (2.1)$$

Postoje dvije vrste vremenskih nizova: intervalni i trenutačni. Intervalni vremenski niz sačinjavaju opažanja koja se odnose na uzastopne vremenske intervale. Intervalni niz nastaje zbrajanjem vrijednosti po intervalima. Trenutačni vremenski niz dobiva se kronološkim uređivanjem vrijednosti vezanih uz specifične vremenske točke. Trenutačni niz nije moguće zbrajati jer opisuje trenutačno stanje sustava.



(a) Intervalni vremenski niz

(b) Trenutačni vremenski niz

Slika 2.1. Oblici vremenskih nizova; izvor: autor rada, podatci preuzeti sa Državnog zavoda za statistiku

Promatranjem vremenskog niza dolazi se do pojma stohastičkog procesa. Pritom, stohastički proces jest proces koji u sebi sadržava elemente neuređenosti ili slučajnosti tj. to je sustav kojeg čini skupina slučajnih varijabli vezanih uz vrijeme i međusobno različito indeksiranih. U narednom dijelu teksta, stohastički proces bit će označen sa  $Y_t$ . Primjeri stohastičkih procesa bili bi potres i vrijeme. Nemoguće je predvidjeti kakvo će biti vrijeme u nekom trenutku u budućnosti te je isto tako nemoguće predvidjeti kada bi se mogao dogoditi potres, unatoč modernom tehnološkom napretku. Upravo iz tog razloga stohastičke procese dijelimo na stacionarne i nestacionarne. Pritom su stacionarni procesi oni kod kojih je moguće uočiti nekakvo periodičko kretanje. Zato su

stacionarni procesi na neki način predvidivi procesi. U sljedećem poglavlju bit će objašnjen pojam stacionarnosti i invertibilnosti.

Cilj bilo kakvog statističkog skupa jest mogućnost pronalaska kriterija po kojem bi se uredili i povezali vrijednosti u tom istom nizu. Dva modela po kojima se to može napraviti su regresijski i autoregresijski modeli.

Regresijski modeli jesu modeli koji koriste skup statističkih analiza za procjenu odnosa zavisne varijable i jedne ili više nezavisnih varijabli. Primjerice, odnos težine i visine može se opisati linearnom regresijom. Linearna regresija jest model u kojem je odnos između ulaznih i izlaznih varijabli pravac odnosno ravna linija. Još jedan primjer linearne regresije bio bi odnos prodaje i zarade nekog proizvoda, tj. ako neki poslovni sustav proda 1000 komada nekog proizvoda i pritom zaradi 5000kn, za očekivati je kako će zaraditi 10000kn ako proda dvostruko više komada istog proizvoda.

Autoregresijski modeli jesu modeli koji za predviđanje određenih vremenskih nizova koriste vlastite prošle varijable, tj. okreću se sami sebi. U tom se slučaju određena vrijednost iz nekog vremenskog niza regresira na prethodne vrijednosti iz istog vremenskog niza. U narednim poglavljima bit će više riječi o autoregresijskim modelima.

### 3. Stacionarnost

U ovom poglavlju bit će obrađene teme prikazane u izvoru [2]. Stacionaran proces jest onaj proces čija se svojstva ne mijenjaju s vremenom. Dakle, ako postoji nekakav  $Y_t$ , njegova se vrijednost neće mijenjati promjenom varijable  $t$ . Uz pojam stacionarnosti se vežu tri bitna kriterija:

- Srednja vrijednost
- Varijanca
- Kovarijanca

Srednja vrijednost predstavlja prosjek skupa podataka. Može se računati prema izrazu:

$$\mu = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad (3.1)$$

gdje  $\mu$  označava srednju vrijednost (očekivanje) skupa varijabli,  $n$  broj članova u nizu, a  $X_i$  pojedinačne varijable. Varijanca mjeri koliko je skup podataka raširen. Matematički se izračunava u nekoliko koraka: prvo je potrebno odrediti srednju vrijednost skupa te od svakog člana u vremenskom nizu oduzeti tu srednju vrijednost i kvadrirati. Na kraju se vrši usrednjavanje kvadrata razlike. Proces se može prikazati izrazom:

$$Var = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{n}, \quad (3.2)$$

gdje  $\sigma$  predstavlja varijancu,  $n$  broj uzoraka, a  $X_i$   $i$ -ti član u vremenskom nizu. Kovarijanca jest mjera koliko dvije varijable variraju zajedno. Za razliku od varijance, gdje se promatra kako jedna varijabla varira, kod kovarijance se razmatra kako dvije varijable variraju zajedno. Kovarijancu se može zapisati kao:

$$Cov(Y_t, Y_{t+k}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)], \quad (3.3)$$

gdje je  $\mu$  očekivana varijabla za  $Y_t$  i  $Y_{t+k}$ , a  $E$  operator očekivanja. [6]

**Primjer 3.1.** Srednja vrijednost brojeva 5, 7, 52, 24 i 33 računa se kao:

$$\bar{x} = \frac{5 + 7 + 52 + 24 + 33}{5} = 24.2. \quad (3.4)$$

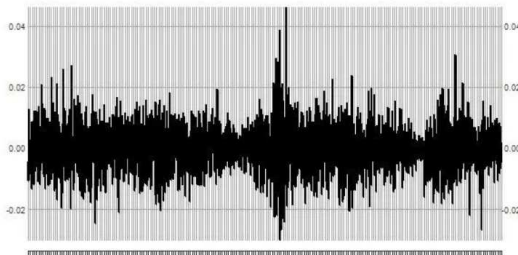
Iz izraza (3.4) varijanca iznosi:

$$\sigma^2 = \frac{(5 - 24.2)^2 + (7 - 24.2)^2 + (52 - 24.2)^2 + (24 - 24.2)^2 + (33 - 24.2)^2}{5} = 302.96, \quad (3.5)$$

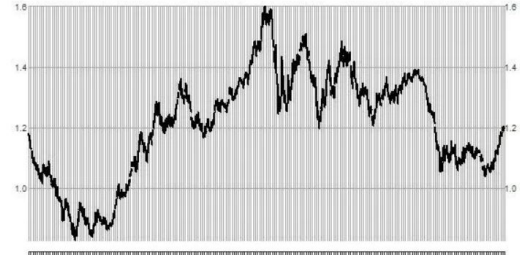
odnosno:

$$\sigma = \sqrt{302.96} = 17.40575, \quad (3.6)$$

Zaključno, stacionaran proces je onaj za koji vrijedi: očekivana vrijednost procesa (srednja vrijednost) je nula, varijanca je konstantna i kovarijanca je jednaka nuli. Kada se govori o stacionarnosti nekog procesa, najčešće se pod pojmom stacionarnost misli na stacionarnost u širem smislu. To podrazumijeva ne samo da su srednja vrijednost, varijanca i kovarijanca neovisni o vremenu, već da i momenti viših redova ne ovise o vremenskom pomaku. Stacionarni vremenski nizovi jesu osnova za definiranje velikog broja ekonometrijskih modela. [4]



(a) Stacionarni stohastički proces



(b) Nestacionarni stohastički proces

Slika 3.1. Primjeri vremenskih nizova. Izvor: [2]

## 4. Autokorelacijska i parcijalna autokorelacijska funkcija

Kako bi se razumio način na koji se vremenski nizovi mogu primjeniti u stvarnosti, prije svega je potrebno razumjeti koncept autokorelacije i parcijalne autokorelacije. Ovo poglavlje obrađeno je prema izvoru [1].

### 4.1. Autokorelacijska funkcija

Autokorelacija je matematički prikaz stupnja sličnosti određene varijable nekog vremenskog niza i prethodne verzije iste te varijable prikazane u jednakim vremenskim intervalima. Koeficijent autokorelacije  $k$  je koeficijent linearne korelacije između članova stohastičkog procesa razmaknutih za  $k$  vremenskih razdoblja. Može se zapisati kao:

$$\rho(k) = \frac{Cov(Y_t, Y_{t+k})}{\sqrt{Var(Y_t)}\sqrt{Var(Y_{t+k})}}, \quad (4.1)$$

gdje je u brojniku kovarijanca između varijabli  $Y_t$  i  $Y_{t+k}$ , a u nazivniku umnožak korjenovanih varijanci istih varijabli. Koeficijent autokorelacijske funkcije označavamo sa  $\rho(k)$ . Grafički prikaz autokorelacijske funkcije naziva se korelogram. Autokorelacijska funkcija poprima različite oblike, ovisno o karakteristikama sustava.

### 4.2. Parcijalna autokorelacijska funkcija

Za razliku od autokorelacije, gdje se promatra odnos članova stohastičkog procesa međusobno udaljenih za  $k$  vremenskih razdoblja, može se promatrati i korelacija između njih na način da se ukloni linearna zavisnost između varijabli. Tada se govori o parcijalnoj autokorelaciji. Koeficijenti parcijalne autokorelacije definiraju se sljedećim izrazom:

$$\phi_{kk} = Corr(Y_t, Y_{t+k} | Y_{t+1}, Y_{t+2}, \dots, Y_{t+k-1}), k = 1, 2, \dots, \quad (4.2)$$

gdje je  $\phi_{kk}$  vrijednost parcijalne autokorelacije zadane funkcije. Razliku između autokorelacije i parcijalne autokorelacije može se objasniti na vrlo jednostavnom primjeru.

**Primjer 4.1.** *Ako postoji nekakav poslovni sustav za koji se zna prosječna prodaja određenog proizvoda tijekom protekla tri mjeseca može se sastaviti autokorelacijska funkcija i funkcija parcijalne autokorelacije. Autokorelacijska funkcija će promatrati sustav kao direktne veze između susjednih elemenata međusobno razmaknutih za jednaka vremenska razdoblja.*

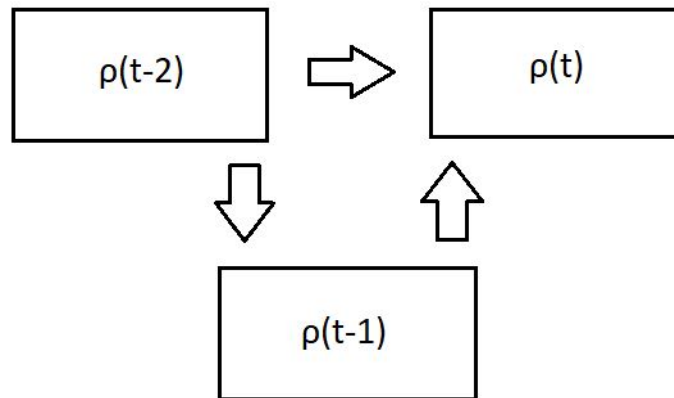
*U ovom slučaju promatra se tri mjeseca:*

$$\rho(t-2) \implies \rho(t-1) \implies \rho(t). \quad (4.3)$$

Funkcija parcijalne autokorelacije promatrati će sustav kao direktnu vezu između sadašnjeg mjeseca tj. utjecaj prvog mjeseca na vrijednost dobivenu u trenutnom mjesecu.

$$\rho(t-2) \implies \rho(t). \quad (4.4)$$

Navedeni izrazi mogu se prikazati i grafički za ovaj konkretan primjer:



Slika 4.1. Prikaz veza autokorelacije i parcijalne autokorelacije; izvor: autor rada

## 5. Čisti slučajni proces ili proces bijelog šuma

U ovom poglavlju obrađene su teme objašnjene prema izvoru [2].

Proces bijelog šuma (*eng. white noise*) se rijetko pojavljuje u praksi, ali je važan za razumijevanje vremenskih nizova. Obično se pretpostavlja da su greške modela generirane takvim procesom. Uobičajeno se pretpostavlja da je čisti slučajni proces ujedno i Gaussov proces sa očekivanom vrijednosti nula i varijancom  $\sigma^2$ . Pretpostavlja se da se svaki stohastički proces sastoji od signala i vlastitog šuma i može ga se prikazati kao:

$$Y_t = \text{signal} + \text{šum}, \quad (5.1)$$

iz čega se može dobiti:

$$\text{šum} = Y_t - \text{signal}. \quad (5.2)$$

Bijeli šum se isto tako može definirati kao vrsta vremenskog niza za koji vrijedi da je srednja vrijednost proces jednaka nuli, standardna devijacija konstantna u vremenu i korelacija između vrijednosti jednaka nuli. Ako se uoči da je neki proces u vremenskom nizu proces bijelog šuma, može se zaključiti kako je isti taj proces nepredvidiv i nema smisla provoditi analizu tog vremenskog niza u svrhu predviđanja njegova ponašanja.

Čisti slučajni proces je stacionaran ako su ispunjeni slijedeći uvjeti:

- funkcija kovarijance:

$$\gamma(k) = \begin{cases} \sigma^2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

- autokorelacijska funkcija:

$$\rho(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

- funkcija parcijalne autokorelacije:

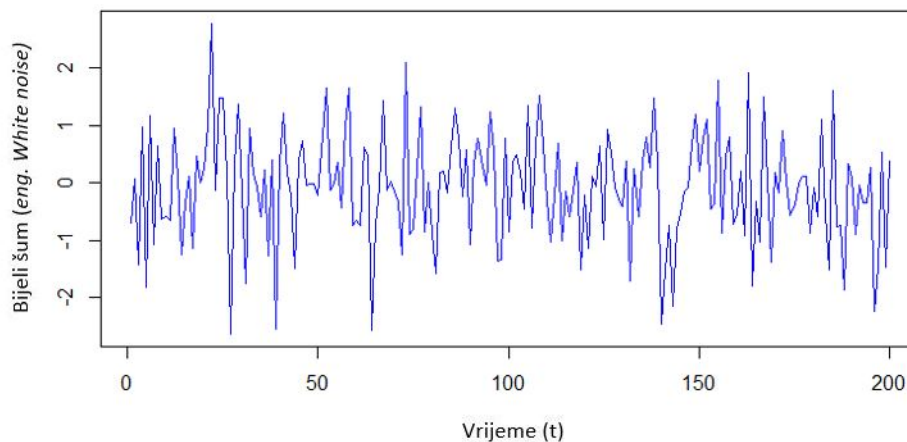
$$\phi_{kk} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Može se zaključiti da je karakteristika čistog slučajnog procesa takva da su njegove funkcije (ACF i PACF) jednake nuli za svaki  $k \neq 0$ . Jedino za  $k = 0$  vrijednosti funkcija jednake su jedan. [1]

Kako je prethodno i navedeno, postoji nekoliko načina kako se može utvrditi je li nekakav proces ujedno i bijeli šum.



Zaključno, bijeli šum se može smatrati smetnjom u signalu. U nekim slučajevima ta je smetnja neznatna i može se zanemariti, dok u nekim može doći do iskrivljenja signala do neprepoznatljivosti.



*Slika 5.1. Primjer funkcije bijelog šuma. Izvor: [3]*

Prema prethodno spomenutim izrazima (5.3), (5.4) i (5.5) može se dokazati grafički prikaz 5.1. Uočeno je kako je srednja vrijednost prikazanog signala jednaka nuli. To je jedan od kriterija za utvrđivanje bijelog šuma. Zatim, može se uočiti kako se prikazani signal kreće u intervalu  $[-2, 2]$  te nema odskakivanja. Iz toga je potrebno zaključiti da je standardna devijacija signala konstantna u vremenu. Također, ne može se uočiti periodičnost signala niti povezanost u vremenu te se zaključuje da je korelacija između vrijednosti u signalu jednaka nuli što je i zadnji kriterij za utvrđivanje funkcije bijelog šuma.

U kasnijim primjerima prikazat će se grafovi autokorelacije i parcijalne autokorelacije. Bitno je znati da, ukoliko je određeni signal bijeli šum, tada će sve vrijednosti u vremenskom nizu biti ispod statističke granice tj. statistički gledano, bit će jednake nuli te neće biti pogodne za modeliranje. Prethodno je matematički pokazana ova relacija.

## 6. Autoregresijski (AR) model

U ovom poglavlju bit će obrađene teme na temelju izvora [1]. Autoregresijski model opisuje stohastičke procese koji generiraju vremenske nizove upotrebom procesa autokorelacije. Općeniti autoregresijski model dan je sljedećim izrazom:

$$Y_t = \theta_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (6.1)$$

gdje  $Y_t$  označava izlaznu varijablu stohastičkog procesa,  $\theta_0$  konstantu,  $Y_{t-1} \dots Y_{t-p}$  predstavljaju prethodne vrijednosti u vremenskom nizu, a  $\phi_1 \dots \phi_p$  predstavljaju parametre autoregresijskog procesa. [8]

Iz izraza (6.1) uočava se kako član jednadžbe  $Y_t$  ovisi o  $p$  prethodnih vremenskih razdoblja i slučajnoj varijabli odnosno pogrešci  $\varepsilon_t$ . Slučajna varijabla  $\varepsilon_t$  opisana je čistim slučajnim procesom (bijeli šum iz prethodnog poglavlja).

Model se naziva autoregresijskim modelom jer se izlazna vrijednost jednadžbe  $Y_t$  regresira na  $p$  prethodnih članova.

Jednostavnosti radi, analiza se uobičajeno provodi nad centriranim procesom  $Z_t$  koji glasi:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (6.2)$$

gdje  $Z_t$  iznosi:

$$Z_t = Y_t - E(Y_t), \quad (6.3)$$

odnosno:

$$Z_t = Y_t - \mu, \quad (6.4)$$

gdje  $\mu$  predstavlja očekivanje. Konstantni član  $\theta(0)$  se zanemaruje budući da se gleda centrirani proces te se uzima u obzir samo kada postoji parametar koji se ne mijenja sa promjenom vremenske varijable. Nadalje, ako se sa  $B$  označi operator pomaka može ga se zapisati kao:

$$BZ(t) = Z(t-1), \quad (6.5)$$

odnosno za dvije vrijednosti:

$$B^2 Z_t = BZ_{t-1} = Z_{t-2}. \quad (6.6)$$

Općenito se može pisati:

$$B^p Z_t = Z_{t-p}. \quad (6.7)$$

Izraz se tada zapisuje:

$$\begin{aligned} Z_t - \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} &= \varepsilon_t, \\ (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) Z_t &= \varepsilon_t. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Operator pomaka  $B$  se uvodi kako bi se pojednostavio izraz za stohastički proces te kako bi se odredilo karakterističnu jednadžbu sustava koja će pomoći u određivanju stacionarnosti procesa. Karakteristična jednadžba procesa bit će opisana i objašnjena u narednom dijelu teksta.

Označi li se općeniti autoregresijski model kao:

$$\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p), \quad (6.9)$$

opći oblik AR(p) modela tada glasi:

$$\phi(B)Z_t = \varepsilon_t. \quad (6.10)$$

Dva su bitna svojstva svih stohastičkih modela: stacionarnost i invertibilnost. Pojam stacionarnosti opisan je u jednom od prethodnih poglavlja. S druge strane, proces jest invertibilan ako se može prikazati kao linearna kombinacija vlastitih prošlih vrijednosti. Invertibilnost se referira na procese koji se ponašaju kao beskonačan broj autoregresivnih članova vremenskog niza. Zapisuje se kao:

$$Z_t = \pi_1 Z_{t-1} + \pi_2 Z_{t-2} + \dots + \varepsilon_t, \quad (6.11)$$

gdje  $Z_t$  označava invertibilnost,  $\pi_n$  predstavlja parametre (koeficijente) za model AR( $\infty$ ) i važni su za predviđanje budućih vrijednosti procesa. Jedan od bitnijih zaključaka do kojih se dolazi primjenom invertibilnosti jest:

$$AR(\infty) = MA(1). \quad (6.12)$$

U sljedećim poglavljima bit će detaljno opisani AR i MA procesi te dokaz izraza (6.12).

Stohastički proces ujedno se naziva i Gaussov proces, ako vrijedi da je zajednička funkcija distribucije procesa normalna. To znači da je tada stohastički proces određen samo prvim i drugim momentom te vrijedi da su pojmovi striktno stacionarnosti i stacionarnosti u širem smislu međusobno ekvivalentni. U većini statističkih analiza prepostavlja se normalna distribuiranost procesa.

Budući da je stohastički model invertibilan ako ima AR( $\infty$ ), slijedi da je AR( $p$ ) uvijek invertibilan proces. Isto tako, AR( $p$ ) proces je stacionaran ako ima MA( $\infty$ ) što znači da je model pomičnih presjeka temeljen na beskonačnom broju procesa. O modelu pomičnih presjeka govorit će se u sljedećem poglavlju. [2]

AR(p) proces je dakle stacionaran ako su sva rješenja karakteristične jednadžbe (6.9) jednaka nuli. U nastavku će biti prikazani primjeri autoregresijskih modela prvog i drugog reda.

### 6.1. Autoregresijski model prvog reda - AR(1)

[1] Autoregresijski model prvog reda može se zapisati kao:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (6.13)$$

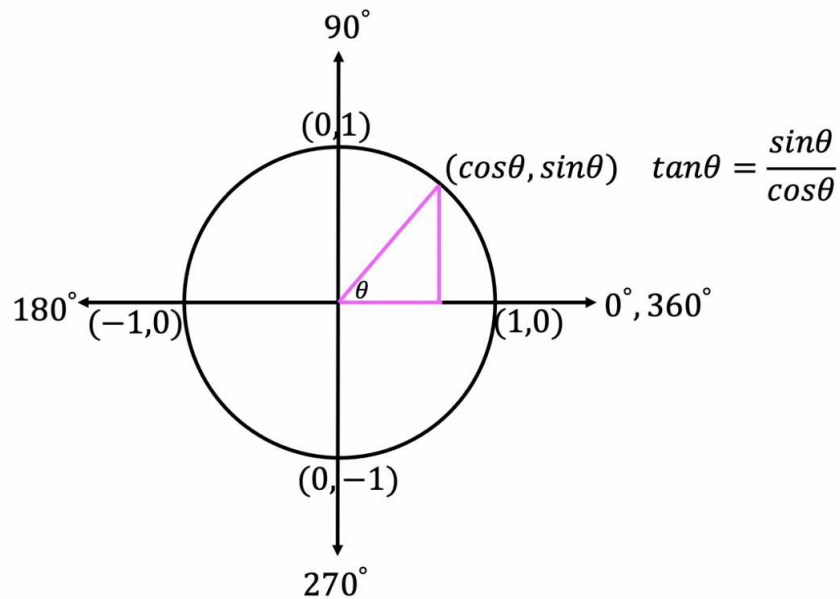
te vrijedi:

$$Z_t - \phi_1 Z_{t-1} = \varepsilon_t, \quad (6.14)$$

odnosno zapisano pomoću operatora pomaka:

$$(1 - \phi_1 B)Z_t = \varepsilon_t. \quad (6.15)$$

Ovaj stohastički proces moći će se zapisati kao predvidiv i periodičan proces samo u slučaju pozitivne stacionarnosti. Kako bi model bio stacionaran nultočka jednadžbe (6.15) mora biti izvan jediničnog kruga. To znači da moduli rješenja moraju biti veći od jedan. Jedinični krug definiran je kao kružnica sa centrom u ishodištu koordinatnog sustava i radijusom 1.



Slika 6.1. Jedinična kružnica; izvor: mathsux.org

U tom slučaju karakteristična jednadžba modela glasi:

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z = 0, \quad (6.16)$$

gdje  $z$  predstavlja nezavisnu varijablu. Karakteristična jednadžba sustava jest jednadžba koja karakterizira ponašanje sustava. Određivanjem nultočki karakteristične jednadžbe sustava, određuje se ponašanje samog sustava.

**Teorem 6.1.** *Neka karakteristična jednadžba sustava glasi:*

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z = 0, \quad (6.17)$$

*stohastički proces će biti stacionaran ako i samo ako vrijedi:*

$$|z| = \left| \frac{1}{\phi_1} \right| > 1, \quad (6.18)$$

*tj.*

$$|\phi_1| < 1, \quad (6.19)$$

$$-1 < \phi_1 < 1. \quad (6.20)$$

### 6.1.1. Autokorelacijska funkcija AR(1) procesa

Autokorelacijsku funkciju za ovaj proces dobit će se ako se izraz (6.13) pomnoži sa  $Z_{t-k}$ . Tada se dobiva:

$$Z_{t-k}Z_t = \phi_1 Z_{t-k}Z_{t-1} + Z_{t-k}\varepsilon_t \quad (6.21)$$

Ako vrijedi:

$$\gamma(k) = E(Z_{t-k}Z_t) \quad (6.22)$$

tada izraz (6.21) postaje:

$$\gamma(k) = \phi_1 \gamma(k-1) \quad (6.23)$$

Autokorelacijska funkcija je tada jednaka:

$$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) = \phi_1(\phi_1 \rho(k-2)) = \dots = \phi_1^k \quad (6.24)$$

za svako  $k \geq 1$ .

Oblik autokorelacijske funkcije prvog reda AR(1) prvenstveno ovisi o predznaku parametra  $\phi_1$ . Ukoliko je on pozitivan, sve vrijednosti autokorelacijske funkcije bit će pozitivne. Ukoliko je on negativan odnosno vrijedi  $-1 < \phi_1 < 0$ , vrijednosti autokorelacijske funkcije alterniraju (izmjenjuju se) počevši sa negativnom vrijednošću. U oba slučaja, srednja vrijednost autokorelacijske funkcije jednaka je nuli.

### 6.1.2. Parcijalna autokorelacijska funkcija AR(1) procesa

Kako je prethodno opisano, za  $k=1$  vrijedi:

$$\phi_{11} = \rho(1) = \phi_1 \quad (6.25)$$

Nadalje, za  $k=2$  vrijedi:

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \phi_1 \\ \phi_1 & \phi_1^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \phi_1 \\ \phi_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\phi_1^2 - \phi_1^2}{1 - \phi_1^2} = 0 \quad (6.26)$$

Analogno se dobiva za  $\phi_{33}, \phi_{44}, \dots$ . Na temelju provedenih proračuna proizlazi da za AR(1) proces parcijalna autokorelacijska funkcija glasi:

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \rho(1) = \phi_1 & k = 1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases} \quad (6.27)$$

## 6.2. Autoregresijski model drugog reda - AR(2)

Autoregresijski model drugog reda, analogno s prethodnim objašnjenjima, može se zapisati:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \varepsilon_t \quad (6.28)$$

Iz izraza (6.28) može se zaključiti kako postoje dva člana jednadžbe koji se uzimaju u obzir. Nadalje se izvodi:

$$\begin{aligned} Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} &= \varepsilon_t, \\ (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) Z_t &= \varepsilon_t. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Analogno sa autoregresijskim modelom prvog reda, može se zaključiti da je uvjet stacionarnosti AR(2) modela kada su nultočke jednadžbe  $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0$  izvan jediničnog kruga. Tada se dolazi do zaključka da parametri  $\phi_1$  i  $\phi_2$  moraju zadovoljavati slijedeće uvjete:

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 &< 1, \\ \phi_2 - \phi_1 &< 1, \\ -1 &< \phi_2 < 1. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Autokorelacijsku funkciju i funkciju parcijalne autokorelacije AR(2) modela dobiva se analogno postupku iz prethodnog potpoglavlja za AR(1). [1]

## 6.3. Autoregresijski model reda $p$ - AR( $p$ )

U ovom poglavlju pojavljuju se teme obrađene u izvoru [1]. Kako je u početnom ulomku opisana jednadžba autoregresijskog modela (izraz (6.1)) za općeniti broj vremenskih nizova, ne treba posebno izdvajati njeno značenje. Potrebno je naglasiti kako svaki model zahtjeva određen broj ponavljanja te će tako neki sustav zahtijevati veći broj vremenskih razdoblja, a neki manji.

### 6.3.1. Autokorelacijska funkcija AR( $p$ ) procesa

Kako bi se odredila autokorelacijska funkcija općeg procesa jednadžba:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t \quad (6.31)$$

se množi sa članom  $Z_{t-k}$ :

$$Z_{t-k} Z_t = \phi_1 Z_{t-k} Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-k} Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-k} Z_{t-p} + Z_{t-k} \varepsilon_t \quad (6.32)$$

Uz pretpostavku da je član uz  $\varepsilon_t = 0$  dobiva se izraz za autokorelacijsku funkciju:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} \quad (6.33)$$

tj.

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad (6.34)$$

Ovisno o vrijednostima nultočki karakteristične jednadžbe polinoma, funkcija može imati oblik prigrušenih sinusoidalnih valnih oblika ili može opadati eksponencijalno.

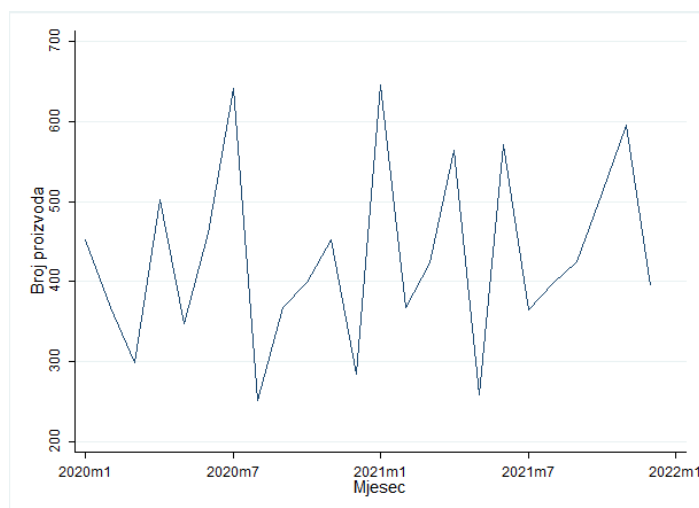
### 6.3.2. Parcijalna autokorelacijska funkcija $AR(p)$ procesa

Kako je u slučaju  $AR(1)$  određena parcijalna autokorelacijska funkcija, analogno se može odrediti i  $AR(p)$  parcijalna autokorelacijska funkcija. Zaključuje se da će za svaki  $k > p$  vrijednosti parcijalne autokorelacijske funkcije biti jednake nuli.

Prethodno je spomenuto da će biti potrebno odabrati određen broj vremenskih nizova kako bi model bio zadovoljavajuć. To je moguće učiniti i grafički pomoću empirijske autokorelacijske funkcije (SACF) i empirijske parcijalne autokorelacijske funkcije (SPACF). Grafičke prikaze koji se dobiju ovim modelima uspoređuju se sa teorijskim funkcijama kako bi se dobilo odgovarajući broj vremenskih nizova, a time i odgovarajući model.

## 6.4. Primjer AR modela

Promatra prosječna mjesečna prodaja mlijeka nekog proizvođača. Želi li se predvidjeti prodaja i moguća zarada u budućnosti može se koristiti autoregresijski model. Ako je broj prodanih proizvoda za 2020.-u i 2021.-u godinu dan sa slijedećim grafičkim prikazom može se odrediti njegov

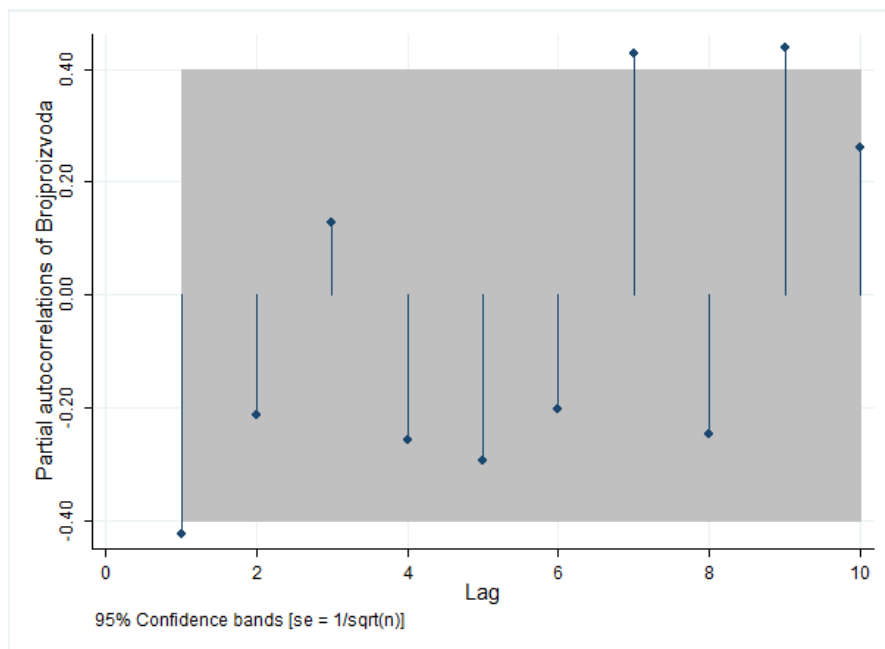


Slika 6.2. Prikaz mjesečne prodaje mlijeka; izvor: autor rada

graf parcijalne autokorelacije. Iz grafičkog prikaza parcijalne autokorelacije sa slike 6.3 postoje tri slučaja u kojima dolazi do nadvišenja nultog područja. Uobičajeno za predviđanje autoregresijskog modela se koristi funkcija parcijalne autokorelacije. Iz prethodnog teksta, svi elementi koji se nalaze unutar osjenčanog područja, statistički gledano, jednaki su nuli.

Za navedeni primjer može se zapisati izraz AR modela. Potrebno je prije svega uočiti kako će izlazna varijabla ovisiti samo o slučajevima: 1, 7 i 9 (iz slike 6.3). Tada vrijedi:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_7 Z_{t-7} + \phi_9 Z_{t-9} + \varepsilon_t. \quad (6.35)$$



Slika 6.3. Graf parcijalne autokorelacije za prikaz 6.2; izvor: autor rada



## 7. Model pomičnih presjeka (MA)

U ovom poglavlju objašnjene su teme prema izvoru [1]. Model pomičnih presjeka jest model koji definira stohastičke procese za vremenske nizove čija je vrijednost povezana sa greškama prethodnih razdoblja. Model pomičnih presjeka reda  $q$  dan je jednadžbom:

$$Y_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}, \quad (7.1)$$

gdje izlazni član jednadžbe  $Y_t$  ovisi o pogreškama prethodnih vremenskih razdoblja danih sa  $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q}$ .  $\theta_0$  je konstantni član koji se u centriranom modelu zanemaruje dok su  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  nepoznati parametri MA modela. [9]

Kako se u autoregresijskom modelu zanemario konstantni član, isto se čini i ovdje. Razlog tome je da model ne zahtjeva određenu početnu vrijednost već je ona određena ostalim članovima u jednadžbi. U tom se slučaju proces može zapisati kao:

$$Z_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}. \quad (7.2)$$

Također se uvodi operator pomaka  $B$  koji je dan sa:

$$B^p Z_t = Z_{t-p}. \quad (7.3)$$

Sada se općeniti oblik modela može zapisati kao:

$$\begin{aligned} Z_t &= \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}, \\ Z_t &= \varepsilon_t - \theta_1 B\varepsilon_t - \theta_2 B^2\varepsilon_t - \dots - \theta_q B^q\varepsilon_t, \\ Z_t &= (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)\varepsilon_t. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Model pomičnih presjeka je uvijek stacionaran, a invertibilan ako se može prikazati kao  $AR(\infty)$  proces.

### 7.1. Proces pomičnih presjeka prvog reda - MA(1) proces

Model pomičnog presjeka prvog reda glasi:

$$Z_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}. \quad (7.5)$$

Ako se uvede operator  $B$  koji je definiran izarzom (7.3) model je oblika:

$$Z_t = (1 - \theta_1 B)\varepsilon_t. \quad (7.6)$$

Kako vrijedi:

$$1 + \theta_1^2 < \infty, \quad (7.7)$$

model pomičnog presjeka će biti uvijek stacionaran proces, a uvjet invertibilnosti jest ako vrijedi:

$$|B| = \left| \frac{1}{\theta_1} \right| > 1. \quad (7.8)$$

Dakle, proces će biti invertibilan ako se nultočka jednadžbe:

$$(1 - \theta_1 B) = 0 \quad (7.9)$$

nalazi izvan jediničnog kruga tj. ako vrijedi:

$$|\theta_1| < 1. \quad (7.10)$$

## 7.2. Proces pomičnih presjeka drugog reda - MA(2) proces

Model pomičnih presjeka drugog reda dan je izrazom:

$$Z_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}, \quad (7.11)$$

odnosno ako se uvede operator pomaka:

$$Z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) \varepsilon_t. \quad (7.12)$$

MA(2) proces će uvijek biti stacionaran budući da vrijedi:

$$(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) < \infty. \quad (7.13)$$

Da bi proces bio invertibilan, nultočke jednadžbe:

$$1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 = 0, \quad (7.14)$$

moraju ležati izvan jediničnog kruga. Tada se dobivaju uvjeti invertibilnosti MA(2) procesa koji glase:

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 &< 1, \\ \theta_2 - \theta_1 &< 1, \\ -1 &< \theta_2 < 1. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Izraz (7.15) može se analogno povezati sa AR(2) procesom itd.

### 7.2.1. Autokorelacijska funkcija MA(1) procesa

Autokorelacijska funkcija modela pomičnih presjeka za prvi red dobiva se množenjem izraza (7.6) sa  $Z_{t-k}$  i promatranjem očekivane vrijednosti. Tada se dobiva:

$$Z_{t-k} Z_t = (\varepsilon_{t-k} - \theta_1 \varepsilon_{t-k-1})(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}) \quad (7.16)$$

Uz uvjete:

$$\begin{aligned} k &= 0, \\ k &= 1, \\ k &> 1, \end{aligned} \tag{7.17}$$

dobiva se da će funkcija autokovarijance MA(1) procesa glasiti:

$$\rho_k = \begin{cases} (1 + \theta_1^2)\sigma^2 & k = 0 \\ -\theta_1\sigma^2 & k = 1 \\ 0 & k > 1. \end{cases} \tag{7.18}$$

Tada vrijednosti autokorelacijske funkcije MA(1) procesa za  $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$  su dane sljedećim izrazom:

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} & k = 1 \\ 0 & k > 1. \end{cases} \tag{7.19}$$

### 7.2.2. Autokorelacijska funkcija MA(q) procesa

Analogno sa prethodno provedenim izračunima, može se zaključiti da će se općenito za MA(q) proces, vrijednosti autokorelacijske funkcije izračunavati prema izrazu:

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2} & k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & k > q. \end{cases} \tag{7.20}$$

### 7.2.3. Parcijalna autokorelacijska funkcija MA(1) procesa

Iz izraza za parcijalnu autokorelacijsku funkciju prikazanu u uvodnim poglavljima i svojstva da vrijedi  $\rho(1) = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}$  i  $\rho_k = 0$  dobiva se izraz za računanje vrijednosti parcijalne autokorelacijske funkcije:

$$\phi_{11} = \rho(1) = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}, \tag{7.21}$$

$$\phi_{22} = \frac{-\rho(1)^2}{1 - \rho(1)^2} = \frac{-\theta_1^2}{1 + \theta_1^2 + \theta_1^4}, \tag{7.22}$$

$$\phi_{33} = \frac{\rho(1)^3}{1 - 2\rho(1)^2} = \frac{-\theta_1^3}{1 + \theta_1^2 + \theta_1^4 + \theta_1^6}, \tag{7.23}$$

odnosno općenito:

$$\phi_{kk} = \frac{-\theta_1^{k(1-\theta_1^2)}}{1 - \theta_1^{2(k+1)}}. \tag{7.24}$$

Vrijednosti parcijalne autokorelacijske funkcije eksponencijalno opadaju ovisno o paramteru  $\theta_1$ .

#### 7.2.4. Parcijalna autokorelacijska funkcija MA(q) procesa

Parcijalna autokorelacijska funkcija reda  $q$  MA(q) procesa opada eksponencijalno ili u obliku prigušene sinusoide. Oblik modela ovisi o parametrima karakteristične jednadžbe. Ako su korijeni karakteristične jednadžbe kompleksni, opadanje je oblika prigušenih sinusoidalnih valova.

Za određivanje reda  $q$  modela pomičnih presjeka analiziraju se grafički prikazi funkcija. Pomoću vrijednosti vremenskog niza izračunavaju se empirijske funkcije koje se zatim uspoređuju sa teorijskim funkcijama. Najbolji model će u tom slučaju biti onaj za koji su vrijednosti funkcije približno jednake nuli. Primjerice, za neki slučaj odabrat će se MA(2) model ako su vrijednosti empirijske funkcije približno jednake nuli za  $k = 2$ . [1]

### 7.3. Primjer MA procesa

Ako se promatra potrošnja električne energije na nekom području, može se predvidjeti potrošnja primjenom MA(1) modela. Izraz za njegovo izračunavanje glasi:

$$f_t = |f_t| + \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \quad (7.25)$$

gdje  $|f_t|$  predstavlja početnu vrijednost modela.  $\theta_1$  predstavlja parametar MA(1) modela te je zadan i on iznosi 0.5. To znači da se za svaki novi slučaj promatra 50-postotna vrijednost pogreške iz prethodnog promatranja.  $\varepsilon_{t-1}$  predstavlja pogrešku svakog novog ponavljanja. U tablici su dani podatci o potrošnji u *GWh* sa pogreškama i početnom vrijednošću procesa na temelju kojih se izračunavaju i dobivaju izlazne vrijednosti.

Tablica 7.1. Prikaz zadanih vrijednosti

$t$	$ f_t $	$\varepsilon_t$	$f_t$
1	1450 GWh	-15	
2		0	
3		25	
4		10	
5		1	

Izračunavaju se i ostale vrijednosti prema izrazu (7.25):

$$\begin{aligned}
 f(t = 1) &= 1450 - 15 = 1435 \text{ GWh}, \\
 f(t_0 = 2) &= 1450 + 0.5 * (-15) = 1442.5 \text{ GWh}, \\
 f(t = 2) &= 1442.5 + 0 = 1442.5 \text{ GWh}, \\
 f(t_0 = 3) &= 1450 + 0.5 * 0 = 1450 \text{ GWh}, \\
 f(t = 3) &= 1450 + 25 = 1475 \text{ GWh}, \\
 f(t_0 = 4) &= 1450 + 0.5 * 25 = 1462.5 \text{ GWh}, \\
 f(t = 4) &= 1462.5 + 10 = 1472.5 \text{ GWh}, \\
 f(t_0 = 5) &= 1450 + 0.5 * 10 = 1455 \text{ GWh}, \\
 f(t = 5) &= 1455 + 1 = 1456 \text{ GWh}.
 \end{aligned} \tag{7.26}$$

Na kraju se dobivaju vrijednosti prikazani u tablici 7.2. Iz popunjene tablice potrebno je uočiti

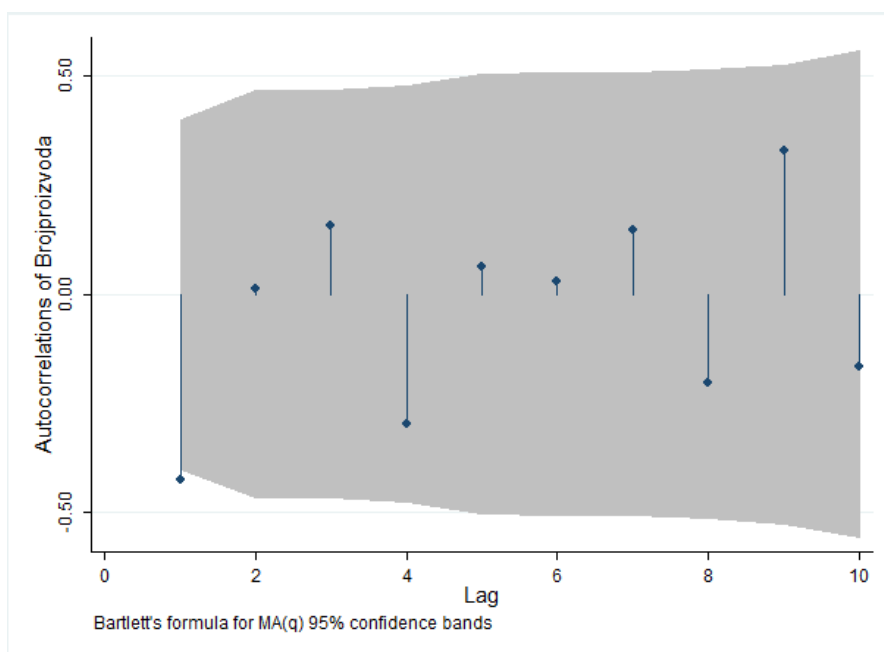
*Tablica 7.2. Prikaz dobivenih rezultata*

$t$	$ f_t $	$\varepsilon_t$	$f_t$
1	1450 GWh	-15	1435 GWh
2	1442.5 GWh	0	1442.5 GWh
3	1450 GWh	25	1475 GWh
4	1462.5 GWh	10	1472.5 GWh
5	1455 GWh	1	1456 GWh

kako je srednja vrijednost procesa uvijek konstantna. Zato se ovaj postupak i naziva modelom pomičnih presjeka.

Za model pomičnog presjeka uobičajeno se koristi funkcija autokorelacije. Kako bi se usporedilo AR i MA model, pokazat će se graf autokorelacije za primjer naveden u poglavlju 6.4.. Već je pokazano kako izgleda graf parcijalne autokorelacije, a sada će se pokazati kako izgleda graf autokorelacije. Iz prikaza 7.1 potrebno je uočiti kako izlazna varijabla ovisi samo o prvom ponavljanju. Svi ostali modeli nalaze se unutar osjenčanog područja i statistički gledano, jednaki su nuli. Sada jednadžba ovog modela glasi:

$$Z_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}. \tag{7.27}$$



Slika 7.1. Graf autokorelacije za prikaz 6.2; izvor: autor rada

## 8. Mješoviti ARMA model

Teme u ovom poglavlju obrađene su prema izvoru [1]. Kako se iz samog naziva poglavlja može primjetiti, ovdje će biti riječi o kombiniranim autoregresijskim modelima i modelima pomičnih presjeka. Prije svega potrebno je razjasniti dvije činjenice:

### 8.1. Prikaz stacionarnog AR(p) procesa u obliku MA( $\infty$ ) procesa

**Teorem 8.1.** *Ako postoji nekakav AR proces konačnog reda  $p$ , dan formulom: [1]*

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \phi_3 Z_{t-3} + \dots + \phi_p Z_t + \varepsilon_t, \quad (8.1)$$

*i može se zapisati kao:*

$$Z_t = \frac{1}{1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \phi_3 B^3 - \dots - \phi_p B^p} * \varepsilon_t, \quad (8.2)$$

*odnosno:*

$$Z_t = \frac{1}{\phi(B)} * \varepsilon_t = \psi(B)\varepsilon_t, \quad (8.3)$$

*gdje je  $\psi(B)$  polinom oblika:*

$$\psi(B) = \frac{1}{\phi(B)}, \quad (8.4)$$

*tada vrijedi sljedeće:*

$$\psi(B) = \frac{1}{\phi(B)} = 1 - \psi_1 B - \psi_2 B^2 - \psi_3 B^3 - \dots, \quad (8.5)$$

*i:*

$$\phi(B)\psi(B) = 1. \quad (8.6)$$

*Iz izraza (8.5) proizlazi da svaki stacionaran AR(p) sadržava MA( $\infty$ ) reprezentaciju.*

### 8.2. Prikaz invertibilnog MA(q) procesa u obliku AR( $\infty$ ) procesa

**Teorem 8.2.** *Ako je proces pomičnih presjeka konačnog reda  $q$  dan izrazom: [1]*

$$Z_t = \theta(B)\varepsilon_t, \quad (8.7)$$

*gdje je:*

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q, \quad (8.8)$$

*proces će biti invertibilan ako vrijedi:*

$$\varepsilon_t = \frac{1}{\theta(B)} Z_t = \pi(B) Z_t, \quad (8.9)$$

gdje je:

$$\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots = \frac{1}{\theta(B)}. \quad (8.10)$$

Iz izraza (8.9) proizlazi da za svaki invertibilan MA( $q$ ) proces konačnog reda  $q$  postoji AR( $\infty$ ) reprezentacija:

$$\varepsilon_t = \pi(B)Z_t, \quad (8.11)$$

odnosno:

$$Z_t = \pi_1 Z_{t-1} + \pi_2 Z_{t-2} + \dots + \varepsilon_t. \quad (8.12)$$

Povezanost između AR i MA procesa očituje se i u grafičkim prikazima autokorelacijske funkcije i funkcije parcijalne autokorelacije. Autokorelacijska funkcija AR( $p$ ) procesa jest opadajuća funkcija dok parcijalna autokorelacijska funkcija opada za pomake veće od  $p$ . S druge strane, u slučaju MA( $q$ ) procesa vrijedi suprotno. Autokorelacijska funkcija MA( $q$ ) procesa iščezava za pomake veće od  $q$ , dok funkcija parcijalne autokorelacije jest opadajuća funkcija.

Cilj svakog AR i MA modela jest odabrati model dovoljnog i konačnog reda. To ponekad može zahtijevati velik broj modela kako bi se dobila odgovarajuća aproksimacija procesa, međutim, velik broj parametara smanjuje samu efikasnost procesa te se zato pokušava izbjeći velik broj parametara. Kako bi se to postiglo definira se model koji istovremeno uključuje članove autoregresijskog modela i modela pomičnih presjeka. Tako nastaje mješoviti ARMA ( $p,q$ ) model i on glasi:

$$\phi(B)Y_t = \theta_0 + \theta(B)\varepsilon_t, \quad (8.13)$$

gdje je  $\theta_0$  konstantni član,  $B$  operator pomaka,  $\phi$  autoregresijski parametri, a  $\theta$  parametri modela pomičnih presjeka.

Poželjna svojstva ARMA modela jesu stacionarnost i invertibilnost. Da bi model bio stacionaran, nultočke polinoma  $\phi(B)$  moraju ležati izvan jediničnog kruga, a da bi bio invertibilan, nultočke polinoma  $\theta(B)$  moraju ležati izvan jediničnog kruga.

### 8.3. ARMA (1,1)

Izraz koji opisuje ARMA (1,1) proces glasi:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (8.14)$$

Pritom, ako je član  $\theta_1$  jednak nuli, model se reducira na AR(1) model, dok ako je član  $\phi_1$  jednak nuli, model se reducira na MA(1) model. Tada se MA(1) i AR(1) modeli mogu promatrati kao specijalni slučajevi ARMA (1,1) modela. [1]

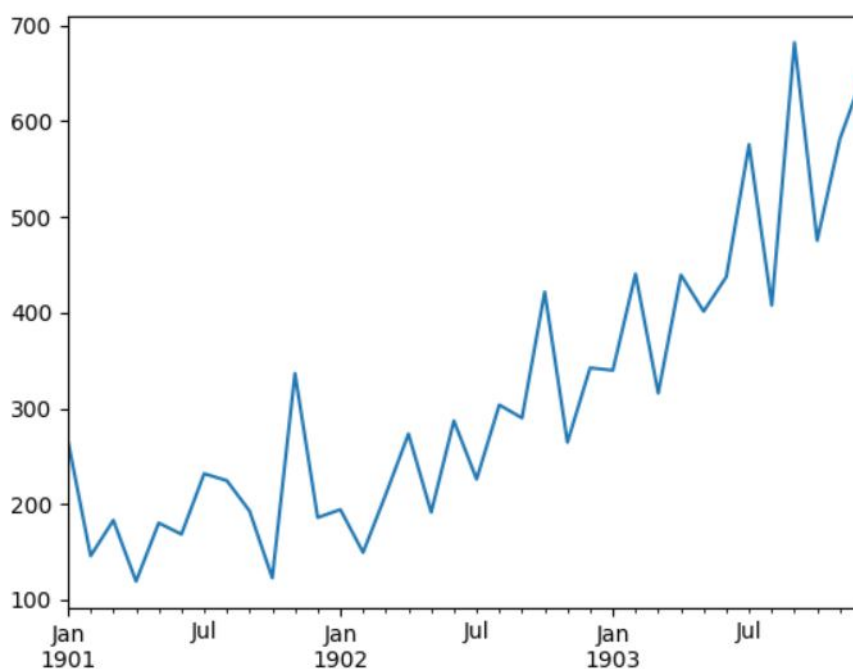


## 9. ARIMA modeli

Prema izvoru [2] obrađene su teme u ovom poglavlju. Kako se i iz samog naslova ovog poglavlja može zaključiti, prethodno opisani ARMA model može se proširiti sa još jednom komponentom koja se naziva integracijska komponenta i slovo "I" u nazivu ARIMA reprezentira upravo to. Prije svega potrebno se prisjetiti pojma stacionarnosti u vremenskim nizovima kako bi se moglo opisati značenje integracijske komponente.

### 9.1. Nestacionarni vremenski nizovi i integracijska komponenta "I"

Svi modeli koji su dosad bili opisani bili su primjenjivi samo u slučaju čisto stacionarnog procesa. Takvi procesi imali su konstantno očekivanje i varijancu. Međutim, većina pojava u stvarnom svijetu jesu upravo nestacionarni procesi sa promjenjivim parametrima očekivanja i varijance. Primjer nestacionarnog procesa dan je na sljedećem grafu: Iz grafa 9.1 može se uočiti kako



Slika 9.1. Nestacionarni vremenski niz; izvor:semanticscholar.org

nestacionarni vremenski niz mijenja svoju vrijednost i amplitudu tj. očekivanje i varijancu kroz vrijeme. [10]

## 9.2. Trend modeli

Najčešći uzrok pojave nestacionarnosti u nekom modelu jest prisutnost trenda. Postoje modeli koji se mogu procijeniti na temelju samo jedne realizacije i koji opisuju promjenu dugoročne razine u vremenu. Takvi modeli su deterministički trend modeli i stohastički trend modeli. [1]

### 9.2.1. Deterministički trend modeli

Deterministički trend model prikazan je sljedećim izrazom:

$$Y_t = f(t) + \varepsilon_t, \quad (9.1)$$

gdje je  $f(t)$  funkcija vremena, a  $\varepsilon_t$  je čisti slučajni proces. Očekivana vrijednost je  $E(Y_t)$ . Općenito, ako je neka funkcija  $f(t)$  polinom  $k$ -tog stupnja:

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_k t^k, \quad (9.2)$$

tada njen deterministički trend model glasi:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_k t^k + \varepsilon_t. \quad (9.3)$$

### 9.2.2. Stohastički trend modeli

Za razliku od determinističkog trend modela, gdje se funkcija opisuje funkcijom vremena, kod stohastičkih trend modela razina pojave se mijenja stohastički s vremenom. Kod takvih modela, iako proces nije stacionaran, višestrukim diferenciranjem procesa može se postići da proces postane stacionaran. Tada uvodimo pojam integriranosti procesa.

Proces koji je potrebno diferencirati jedanput ( $d=1$ ), reda je jedan. Takav model prikazan je izrazom:

$$Z_t = Z_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (9.4)$$

odnosno vrijedi:

$$Z_t - Z_{t-1} = \varepsilon_t, \quad (9.5)$$

tj.:

$$\Delta Z_t = \varepsilon_t. \quad (9.6)$$

Dakle, promatrajući razliku odnosno diferenciju svakog sljedećeg skupa parametara u vremenskom nizu, nestacionarni proces može se prikazati kao stacionaran. Proces definiran izrazom (9.4) naziva se proces slučajnog pomaka i u ARIMA modelu označen je sa slovom "I".

Primjenom prethodno izvedenih izraza može se generalizirati prethodno opisani ARMA model za koji vrijedi da se sve nultočke autoregresijskog polinoma  $\phi(B)$  nalaze izvan jediničnog kruga, a pritom se  $d$  broj nultočaka nalazi na jediničnom krugu. Takav proces opisuje se modelom:

$$\phi(B)(1 - B)^d Y_t = \theta(B)\varepsilon_t, \quad (9.7)$$

gdje  $d$  označava red diferenciranja procesa.

Primjerice, ako je  $d = 1$ , proces se diferencira jednom. Takav model glasi:

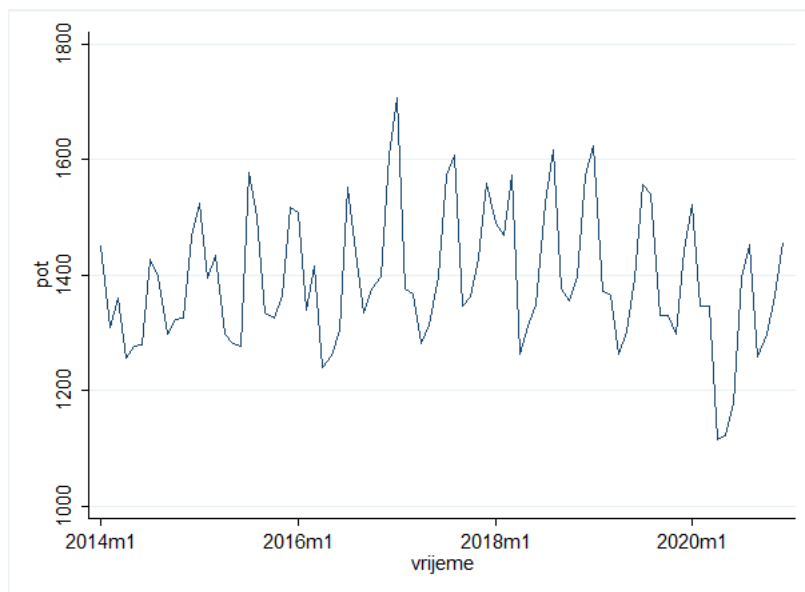
$$Z_t = \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (1 - B)^1 Y_t. \quad (9.8)$$

Iz prethodno navedenog, proizlazi da su ARIMA (p,d,q) modeli prikladni za opisivanje vremenskih nizova koji diferenciranjem  $d$  puta postaju stacionarni i opisuju se ARMA (p,q) modelom. Zaključno, u oznaci ARIMA, slovo "I" označava integraciju koju treba provesti nad određenim vremenskim nizom da bi se dobile originalne vrijednosti niza.

Pojam ARIMA prvi uvode Box i Jenkins 1976.-e godine, a nestacionarnost koju je moguće ukloniti diferenciranjem procesa pritom nazivaju homogena nestacionarnost. ARIMA (p,d,q) procesi tada spadaju u skupinu homogenih nestacionarnih procesa.

## 10. Primjena ARIMA modela u proračunu potrošnje električne energije na području RH

U nastavku rada bit će provedeno istraživanje o potrošnji električne energije u Hrvatskoj kako bi se pokušala predvidjeti potrošnja u budućnosti. Sljedeći graf prikazuje potrošnju električne energije u Hrvatskoj u razdoblju 2014-2020.-e godine: Sa grafa se može uočiti kako se radi o sta-



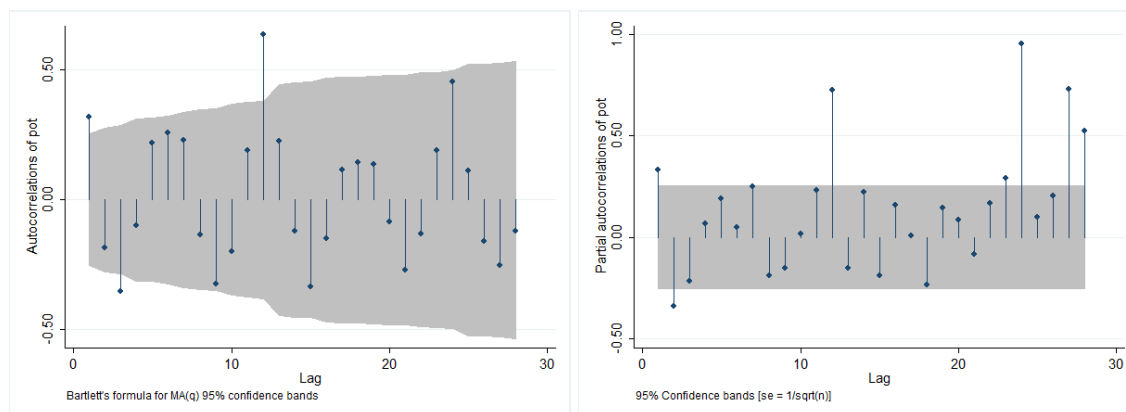
Slika 10.1. Stacionarni vremenski niz; izvor: autor rada, hops.hr

cionarnom procesu bez sezonalnosti i sa konstantnom varijancom. U nastavku će biti proračunati i prikazani podaci o potrošnji za 2019.-u kako bi se utvrdilo može li ARIMA model biti adekvatan oblik proračuna i predviđanja potrošnje radi dimenzioniranja opreme u elektroenergetskom sustavu. Prije svega potrebno je odrediti redove modela  $p$ ,  $d$  i  $q$  za stvaranje predikcije. Postoji nekoliko kriterija pomoću kojih se može odabrati model koji će najbolje i najtočnije opisati traženu funkciju.

### 10.1. Predviđanje proračuna za 2019.-u godinu

Kako bi se odredio potreban broj parametara za izračun koeficijenata  $AR(p)$  i  $MA(q)$  modela koriste se grafovi autokorelacije i parcijalne autokorelacije koji su prikazani u nastavku. U prethodnom poglavlju iz grafa 10.1 utvrđeno je kako je funkcija stacionarna te će koeficijent diferenciranja  $d$  biti jednak nuli.

Iz prikaza 10.2a potrebno je uočiti kako postoje 3 koeficijenta koji izlaze iz osjenčanog područja. Svi oni koeficijenti koji se nalaze unutar osjenčanog područja jednaki su statističkoj nuli. Također, u prikazu 10.2b postoji 7 koeficijenata koji nisu jednaki nuli. Međutim, budući da se



(a) Graf autokorelacije

(b) Graf parcijalne autokorelacije

Slika 10.2. AC i PAC grafovi; izvor: autor rada, hops.hr

nekoliko parametara nalazi vrlo blizu osjenčanog područja u prikazanim grafovima, potrebno je provesti i dodatnu analizu.

Tada se definiraju još četiri dodatna koeficijenta prema kojima će se odabrati najbolji model. To su: SigmaSQ kriterij, koeficijent vjerojatnosti, Akaikeov informacijski kriterij i Schwartz-Bayesov kriterij. U nastavku su prikazani kriteriji provedeni za različite ARIMA modele:

Kako je i prikazano na slici 10.3 u zadnjem stupcu, najbolji model odabire se na način da se

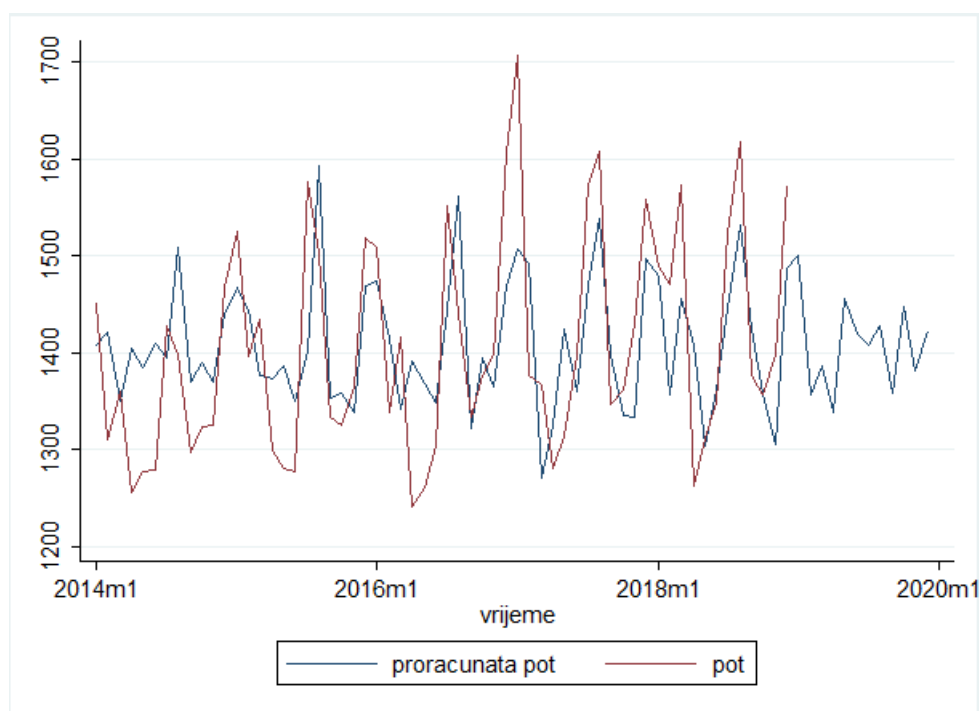
	ARIMA (4,0,1)	ARIMA (4,0,2)	ARIMA (5,0,1)	ARIMA (5,0,2)	ARIMA (6,0,2)	
<b>SigmaSQ</b>	94.178	82.429	94.275	93.099	92.94	<b>(4,0,2)</b>
<b>Vjerojatnost</b>	-358.322	-353.06	-358.296	-357.705	-357.598	<b>(4,0,2)</b>
<b>Akaike</b>	730.6436	720.12	732.591	733.41	735.195	<b>(4,0,2)</b>
<b>Schwartz</b>	745.304	734.781	749.346	752.259	756.138	<b>(4,0,2)</b>

Slika 10.3. Kriterij odabira najboljeg modela; izvor: autor rada

odabire:

- najmanji SigmaSQ koeficijent
- najveći koeficijent vjerojatnosti
- najmanji Akaikeov koeficijent i
- najmanji Schwartz-bayesov koeficijent.

Analizom je utvrđeno da je najbolji model za uvedene podatke i parametre ARIMA (4,0,2). Temeljem toga provedeno je predviđanje za 2019.-u godinu te su dobiveni konačni rezultati.



Slika 10.4. Grafički prikaz podataka; izvor autor rada

vrijeme	Predviđena potrošnja
sij.19	1.499.976
vlj.19	1.357.001
ožu.19	1.385.759
tra.19	1.337.888
svi.19	1.455.044
lip.19	1.418.564
srp.19	1.407.719
kol.19	1.428.064
ruj.19	1.357.702
lis.19	1.446.948
stu.19	1.380.573
pro.19	1.423.378

Slika 10.5. Analitički prikaz podataka u GWh; izvor: autor rada

## 10.2. Pouzdanost i točnost dobivenih rezultata

Na grafu 10.4 crvena funkcija prikazuje kretanje stvarnih vrijednosti potrošnje, dok plava funkcija prikazuje predviđanu potrošnju. Potrebno je uočiti nepravilnost odnosno nepodudarnost tih dviju funkcija u prvom intervalu i prvoj polovici drugog intervala (razdoblje 2014-2017.-e go-

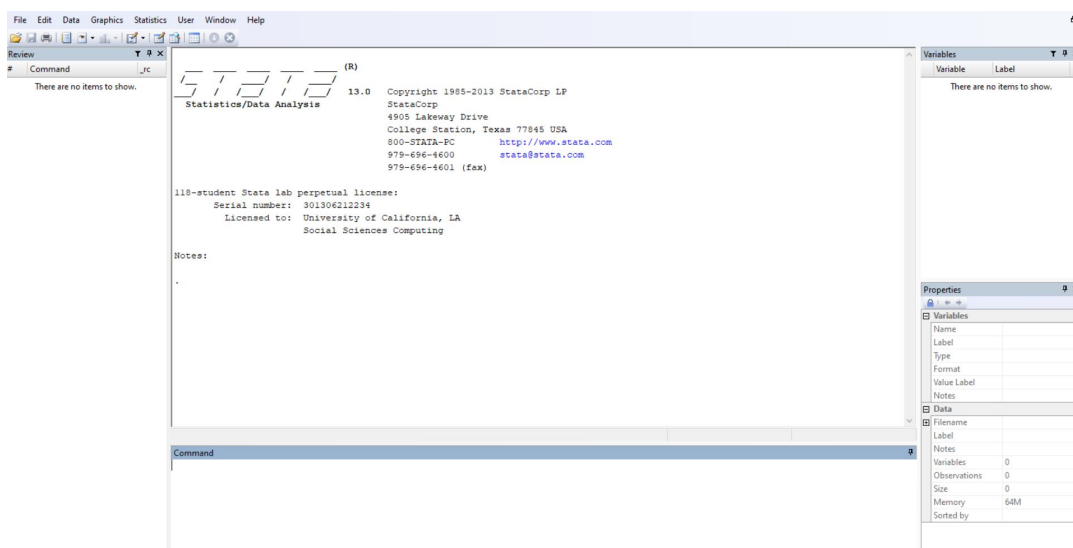
dine). Ta je nepravilnost posljedica nedovoljnog broja podataka u uzetom primjerku. Tek u drugoj polovici drugog intervala funkcije se stabiliziraju i međusobno podudaraju. Nadalje na predviđanje funkcije mogu utjecati jedino nepredvidljive varijable u sadašnjosti/budućnosti koje nisu uzete u obzir u ovom primjeru. U tom bi slučaju bilo potrebno dodati varijable koje bi utjecale na smanjenje pogreške proračuna. Druga polovica trećeg intervala sadržava samo plavu funkciju budući da je to područje koje se ovim modelom istraživalo. Nadalje, na slici 10.5 prikazani su analitički dobiveni rezultati za predviđeno područje odnosno 2019.-u godinu.

## 11. Predviđanje putem ARIMA modela u programskom paketu STATA

Postupak u ovom poglavlju temeljen je na radu u Stati i prema izvoru [7]. Stata je statistički programski paket koji se koristi za modeliranje i upravljanje znanstvenim podacima. Koristi se za izračun statističkih modela i predviđanja temeljem skupa podataka.

Statu prvenstveno koriste istraživači u području ekonomije, biomedicine i političkih znanosti za ispitivanje obrazaca podataka. Sam program sadržava sučelje za naredbe i grafičko korisničko sučelje.

Svi primjeri i sva istraživanja u ovom radu provedena su u Stati. U nastavku će biti objašnjen postupak korištenja tog programskog paketa.



Slika 11.1. Prikaz zaslona koji se pojavi prilikom pokretanja State

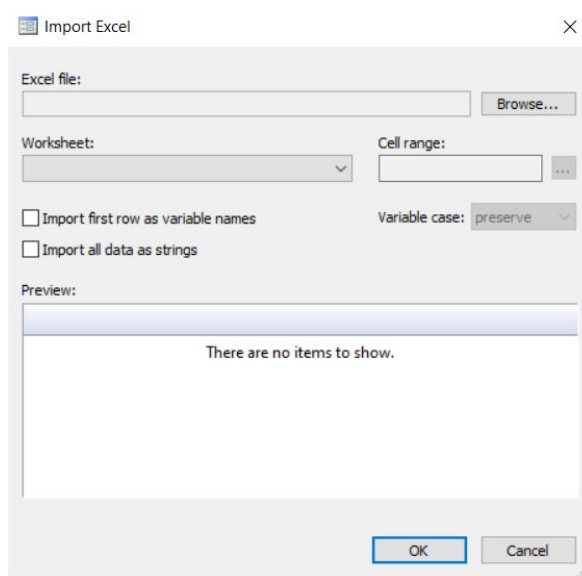
Na slici 11.1 prikazan je početni zaslon u programskom paketu Stata. Sljedeći korak jest uvesti podatke u Statu kako bi se mogli vršiti proračuni i predviđanja. Ovisno jesu li podatci zapisani u programskom paketu Excel ili nekom drugom programu, u izborniku *File*  $\Rightarrow$  *Import* odabire se oblik podataka.

Kako je i prikazano na slici 11.2 odabire se skup podataka koji se zatim uvozi u model. Pritom je isto tako moguće definirati prvi red tablice kao skup varijabli, a ne podataka.

Nakon definiranja oblika varijabli prikazanih na slici 11.3 potrebno je grafički prikazati grafove autokorelacije i parcijalne autokorelacije. To se čini pomoću naredbi *ac pot* i *pac pot*. Grafovi autokorelacije i parcijalne autokorelacije potrebni su kako bi se mogao sastaviti adekvatan ARIMA model. Na temelju odabranog broja podataka sastavlja se ARIMA model.

Nakon postupka prikazanog na slici 11.4 otvara se prozor kao na slici 11.5.





Slika 11.2. Uvoz podataka zadanih u programu Excel

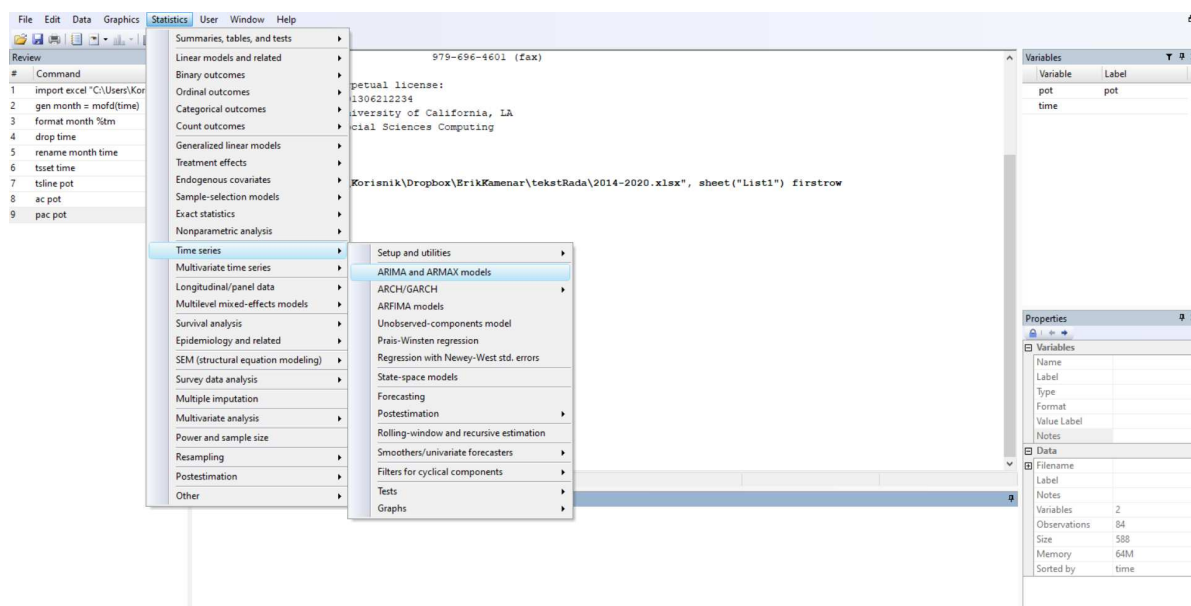
Notes:

```
. import excel "C:\Users\Korisnik\Dropbox\ErikKamenar\tekstRada\2014-2020.xlsx", sheet("List1") firstrow
. gen month = mofd(time)
. format month %tm
. drop time
. rename month time
. tsset time
    time variable: time, 2014m1 to 2020m12
    delta: 1 month
```

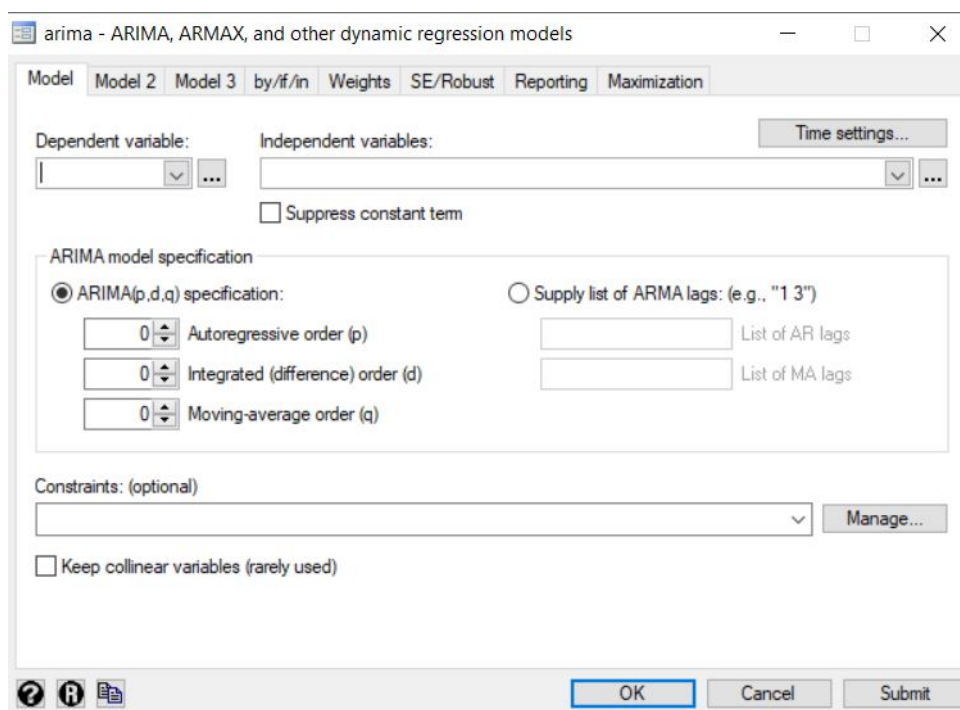
Slika 11.3. Skupina naredbi za formatiranje varijable vremena

Na prozoru sa slike 11.5 potrebno je odabrati p, d i q parametre te definirati zavisnu i nezavisnu varijablu. Nakon definiranja modela, ukoliko je potrebno provesti dodatnu analizu odabranog modela, može se koristiti naredba *estat ic* koja daje dodatne parametre za usporedbu odnosno prethodno spomenuta četiri kriterija za odabir najboljeg modela.

Nakon definiranog najboljeg ARIMA modela, može se provesti proračun predviđanja koristeći naredbe prikazane na slici 11.6. Takav princip proračuna predviđanja proveden je u svim primjerima i istraživanjima u ovom radu.



Slika 11.4. Postupak otvaranja prozora za sastavljanje ARIMA modela



Slika 11.5. Odabir parametara ARIMA modela

```
. tsappend, add(12)

. predict fpot, y dynamic(m(2021m1))

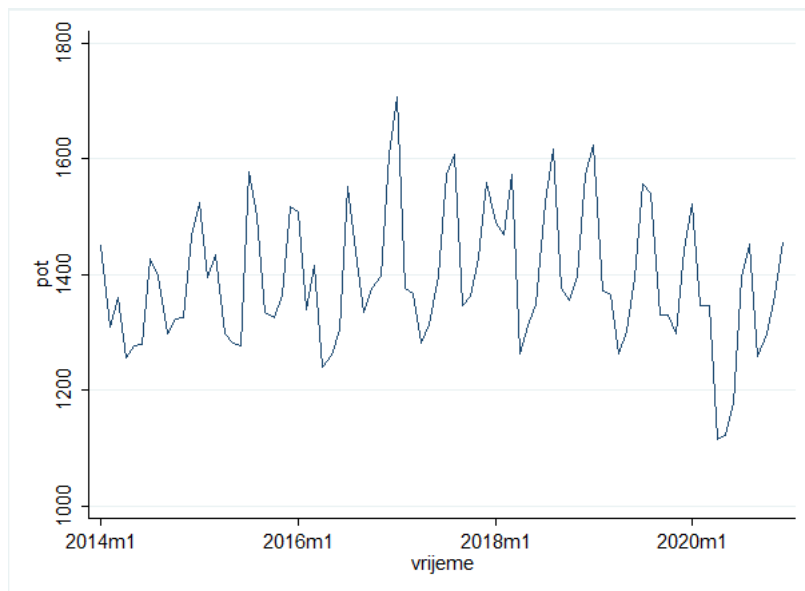
. label variable fpot "predvidena pot"

. tsline pot fpot

. browse
```

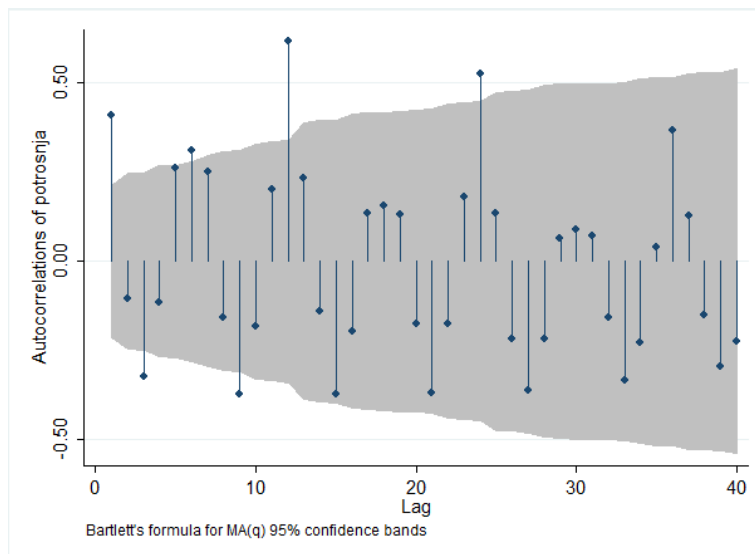
Slika 11.6. Predviđanje parametara zadanog ARIMA modela

## 12. Predviđanje potrošnje električne energije na području RH za narednu godinu (2021.)

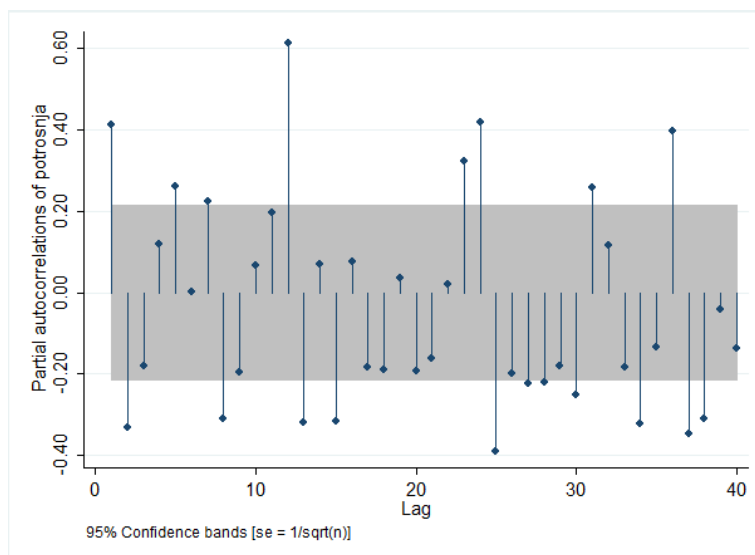


Slika 12.1. Prikaz stvarne potrošnje za razdoblje 2014-2020.; izvor: autor rada, hops.hr

Slika 12.1 grafički prikazuje stvarnu ostvarenu potrošnju električne energije za vremensko razdoblje 2014-2020. Iz tog prikaza dobivaju se grafovi autokorelacije i parcijalne autokorelacije prikazani na slikama 12.2 i 12.3. Potrebno je uočiti kako vrlo veliki broj elemenata u proračunu izlazi iz osjenčanog područja. bitno je naglasiti da broj tih elemenata ne premašuje deset jer bi tada bilo vrlo teško predvidjeti daljnje kretanje funkcije. Razlog tome je nedovoljan broj varijabli u modelu i nedostatak informacija. Usporedbom četiriju kriterija odabira najtočnijeg modela iz

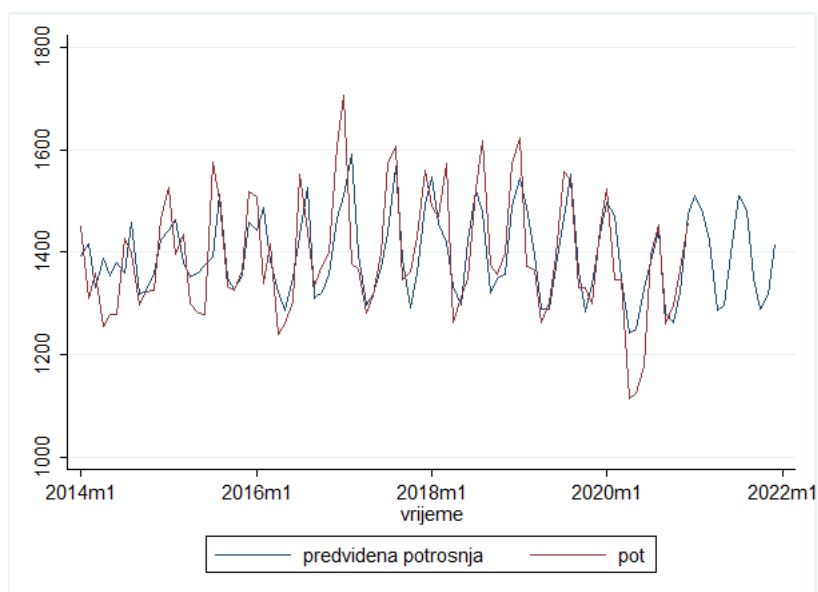


Slika 12.2. Graf autokorelacije; izvor: autor rada



Slika 12.3. Graf parcijalne autokorelacije; izvor: autor rada

prethodnog poglavlja, uzima se model ARIMA (9,0,2) na temelju kojeg se radi predviđanje. Slika 12.4 grafički prikazuje stvarnu i predviđenu potrošnju električne energije dobivenu u Stati. Pritom plava funkcija označava predviđenu potrošnju, a crvena ostvarenu potrošnju. Kao i u prikazu iz



Slika 12.4. Prikaz stvarne i predviđene potrošnje za razdoblje 2014-2020/21.; izvor: autor rada, hops.hr

prethodnog modela za 2019.-u godinu sa slike 12.4 potrebno je uočiti kako postoje nepravilnosti u podudarnosti funkcija tijekom prvog intervala. Zatim u drugom intervalu (2016-2020) dolazi do stabilizacije kretanja funkcija. Stabilno kretanje i podudarnost funkcija nastavlja se i u trećem intervalu. Početkom četvrtog intervala dolazi do velikog odstupanja između plave i crvene funkcije. Razlog tome je nepredvidiv događaj (slučaj pandemije i znatno manja potrošnja električne energije) koji nije uvršten u sam proračun.

Budući da se ARIMA modeli koriste samo prošlim vrijednostima varijabli i njihovim pogreškama vrlo je teško uvesti i predvidjeti varijable koje bi mogle utjecati na sam model i proračun.

Kako bi se pobliže opisala razlika između proračunatih vrijednosti i stvarnih vrijednosti u nastavku su na slikama 12.5a i 12.5b prikazane analitičke vrijednosti za svaki mjesec u razdoblju od siječnja 2014.-e do prosinca 2021.-e godine. Za godinu 2021.-u prikazani su samo predviđeni podatci budući da stvarne vrijednosti za to razdoblje nisu dostupne. Usporedbom stvarnih i predviđenih podataka dobiva se maksimalna pogreška odstupanja u iznosu od 10%.

Stvarna potrošnja	Vrijeme	Predviđena potrošnja
1450	sij.14	1.394.022
1310	vlj.14	1.417.153
1360	ožu.14	1.329.097
1255	tra.14	1.387.832
1277	svi.14	1.355.056
1279	lip.14	1.381.033
1427	srp.14	1.359.845
1398	kol.14	1.459.563
1297	ruj.14	1.317.578
1323	lis.14	1325.83
1325	stu.14	1.358.228
1467	pro.14	1.424.234
1525	sij.15	1.443.769
1396	vlj.15	1.463.835
1435	ožu.15	1.379.929
1298	tra.15	1.352.005
1281	svi.15	1.358.037
1277	lip.15	1.374.601
1577	srp.15	1.391.004
1502	kol.15	1.512.465
1334	ruj.15	1.349.243
1325	lis.15	1.326.801
1364	stu.15	1.353.464
1518	pro.15	1.459.261
1508	sij.16	1.443.324
1339	vlj.16	1.486.291
1416	ožu.16	1381.69
1240	tra.16	1.322.864
1260	svi.16	1.286.913
1304	lip.16	1.347.439
1552	srp.16	1432.49
1440	kol.16	1525.24
1334	ruj.16	1.309.126
1376	lis.16	1.322.258
1397	stu.16	1.356.853
1607	pro.16	1.467.447
1707	sij.17	1.511.148
1377	vlj.17	1.590.628
1367	ožu.17	1.394.949
1281	tra.17	1.297.613
1314	svi.17	1.316.892
1397	lip.17	1.369.447
1573	srp.17	1.438.032
1608	kol.17	1569.16
1347	ruj.17	1.388.669
1362	lis.17	1.290.812
1429	stu.17	1.360.255

(a)

1559	pro.17	1.493.321
1489	sij.18	1.545.848
1470	vlj.18	1456.85
1574	ožu.18	1.418.698
1262	tra.18	1.334.259
1311	svi.18	1.295.955
1349	lip.18	1.421.773
1524	srp.18	1.520.496
1618	kol.18	1478.05
1376	ruj.18	1.320.209
1356	lis.18	1.349.689
1397	stu.18	1.357.191
1573	pro.18	1.490.353
1624	sij.19	1.545.081
1373	vlj.19	1.488.017
1364	ožu.19	1.396.913
1262	tra.19	1.289.694
1302	svi.19	1.289.484
1394	lip.19	1.371.401
1557	srp.19	1465.35
1542	kol.19	1.551.209
1331	ruj.19	1.364.388
1330	lis.19	1.283.923
1298	stu.19	1.336.023
1444	pro.19	1.435.387
1523	sij.20	1.496.388
1347	vlj.20	1.470.422
1346	ožu.20	1.349.985
1115	tra.20	1.241.075
1123	svi.20	1.248.226
1177	lip.20	1.327.466
1395	srp.20	1.380.208
1454	kol.20	1.443.478
1259	ruj.20	1.280.831
1297	lis.20	1.262.199
1365	stu.20	1.322.379
1458	pro.20	1.475.129
	sij.21	1.510.365
	vlj.21	1.477.789
	ožu.21	1.420.854
	tra.21	1.284.915
	svi.21	1.296.168
	lip.21	1.417.666
	srp.21	1.510.692
	kol.21	1.481.937
	ruj.21	1.347.907
	lis.21	1.287.913
	stu.21	1.317.084
	pro.21	1.417.762

(b)

Slika 12.5. Ostvarena i predviđena potrošnja - analitički prikaz; izvor: autor rada, stvarni podatci preuzeti sa hops.hr

### 13. Zaključak

Temeljem provedenih istraživanja ustanovljeno je kako je moguće provesti predviđanje potrošnje električne energije za narednu godinu korištenjem ARIMA modela. Ipak, potrebno je izdvojiti pozitivne i negativne strane ovog modela.

Pozitivne strane:

- Maksimalna pogreška u normalnim i standardnim uvjetima je vrlo mala i iznosi do 10%
- Za relativnu točnost potrebno je poznavati samo vrijednosti prošlih parametara
- Proces je vrlo brz i lako primjenjiv ako su dostupni svi potrebni podatci
- Moguće je procijeniti potrošnju za veće vremensko razdoblje

Negativne strane:

- Ako sustav zahtjeva veliku točnost, ne može se u potpunosti osloniti na ovaj model već su potrebne daljnje analize i proračuni kao što je uvođenje novih varijabli u model kako bi se smanjila ukupna pogreška
- U nestandardnim uvjetima pogreška odstupanja može iznositi i do 20% i više.

Vrlo je teško definirati koje su dobre strane, a koje loše strane predviđanja ARIMA modelom. Prethodno navedene prednosti ARIMA modela mogu se primjeniti na konkretan sustav koji je opisan u istraživanju rada. Gledajući općenito, ne može se govoriti o istim prednostima. Primjerice, postoji problem ukoliko se ne može predvidjeti hoće li se sustav nalaziti u "normalnim" i standardnim okolnostima jer se tada ne može sa sigurnošću tvrditi da pogreška neće premašiti maksimalnu dozvoljenu pogrešku.

ARIMA model može se u nekim slučajevima pokazati izuzetno točnim, dok je za neke neupotrebljiv odnosno suviše netočan da bi ga imalo smisla koristiti.

Kako je i prethodno spomenuto, ne treba se u potpunosti osloniti na rezultate ovog modela ako sustav zahtjeva maksimalnu točnost. Budući da model u proračun uzima samo jednu vrstu varijable za očekivati je da će u potpunosti moći predvidjeti ponašanje sustava, međutim, to je u redu. Neće se koristiti ovaj model ukoliko točnost predviđanja predstavlja veliku i bitnu komponentu. Dodavanje novih varijabli u model uvelike komplicira sam proračun, ali na taj način moguće je predvidjeti i točnije izračunati ponašanje sustava.

Na ovom konkretnom slučaju moguće je zaključiti kako se ARIMA model ne može koristiti kao adekvatan model u predviđanju potrošnje električne energije.

Primjerice, ako se procjenjuje količina potrošnje električne energije na području Primorsko-goranske županije za određeno vremensko razdoblje, prema dobivenim izračunima dimenzionira se oprema u sustavu. Međutim, ako se dogodi da u jednom trenutku dođe do neočekivano visoke potrošnje koja je u svakom slučaju znatno viša od one procijenjene, može doći do "blackouta" i nastanka veće materijalne štete. Ta materijalna šteta ne mora se temeljiti samo na oštećenjima dalekovoda, transformatorskih stanica i drugih uređaja već se tu mora uračunati i šteta koja je nastala za vrijeme "blackouta" ili nestanka struje u kućanstvima i drugim objektima različite namjene. Uzroci takvog naglog skoka ili pada potrošnje električne energije mogu biti različiti.

Bili smo svjedoci tijekom 2021-e godine, gdje je uslijed početka pandemije virusa Covid-19 došlo do naglog pada potrošnje električne energije tijekom tri mjeseca: travnja, svibnja i lipnja što je i pokazano na prethodnim stranicama ovog rada.

Iz prethodno napisanih razloga, ARIMA model ne može se smatrati pouzdanim za ovaj sustav. Ipak, može se pokazati vrlo korisnim za neke druge sustave.

ARIMA model tako može biti koristan za promatranje kretanja kriptovaluta i dionica, cijena na tržištu, BDP-a tijekom godina, mjesečne potrošnje u kućanstvu, vremenske prognoze itd.



## Literatura

- [1] Bahovec, V.; Erjavec, N.; "Uvod u ekonometrijsku analizu", Element, 1. izdanje, Zagreb, 2009.
- [2] Athanasopoulos, G.; Hyndman, R. J.; "Forecasting: Principles and practice", s Interneta, <https://otexts.com/fpp2/arima-forecasting.html>, 14.5.2022.
- [3] Sahajwani, M.; Manish, S.; "Finance train - White noise", s Interneta, <https://financetrain.com/simulate-white-noise-wn-in-r>, 2.6.2022.
- [4] Palachy, S.; "Stationarity in time series analysis", s Interneta, <https://towardsdatascience.com/stationarity-in-time-series-analysis>, 8.4.2022.
- [5] Sveučilište u Zagrebu, "Vremenski nizovi i korelacija", s Interneta, <http://www.riteh.uniri.hr/media/>, 18.6.2022.
- [6] Sneiderman, R.; "A Quick Introduction to Time Series Analysis", s Interneta, <https://towardsdatascience.com/a-quick-introduction-to-time-series-analysis-d86e4ff5fdd>, 26.5.2022.
- [7] Chetty, P.; "How to predict and forecast using ARIMA in STATA?", s Interneta, <https://www.projectguru.in/prediction-forecasting-using-arima-stata/>, 29.4.2022.
- [8] The Pennsylvania State University; "Autoregressive Models", s Interneta, <https://online.stat.psu.edu/stat501/lesson/14/14.1>, 25.4.2022.
- [9] The Pennsylvania State University; "Moving Average Models (MA models)", s Interneta, <https://online.stat.psu.edu/stat510/lesson/2/2.1>, 15.5.2022.
- [10] Hayes, A.; Munichello, K.; "Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA)", s Interneta, <https://www.investopedia.com/terms/a/autoregressive-integrated-moving-average-arima.asp>, 20.5.2022.

## **Sažetak i ključne riječi**

Tema ovog rada jesu ARIMA modeli. Objasnjeno je njihovo značenje i izvedene su formule koje objašnjavaju proces izrade modela. Cilj je bio utvrditi jesu li ARIMA modeli upotrebljivi u proračunima vremenskih nizova u potrošnji električne energije. Objasnjenje je potkrepljeno matematičkim dokazom i grafičkim prikazima. Zaključno su iznesene pozitivne i negativne strane samog modela na konkretnom slučaju, ali i općenito.

**Ključne riječi:** ARIMA, autoregresijski model, model pomičnog presjeka, integracijska komponenta, graf autokorelacije, graf parcijalne autokorelacije, potrošnja električne energije

## **Summary and key words**

The topic of this seminar are ARIMA models. Their meaning and formulas are explained and used on a particular system. The aim was to determine whether ARIMA models are usable when it comes to time series in electricity consumption. The explanation is supported by mathematical proof and graphical representations. In conclusion, positive and negative sides of the model itself are presented in the specific case, but also in general.

**Keywords:** ARIMA, autoregressive model, moving average model, integration component, auto-correlation graph, partial autocorrelation graph, electricity consumption