

# Matematički modeli vibracija pobuđenih suhim trenjem

---

**Martinović, Anamarija**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:190:522258>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-12**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Engineering](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI  
**TEHNIČKI FAKULTET**

Preddiplomski sveučilišni studij strojarstva

Završni rad

**MATEMATIČKI MODELI VIBRACIJA POBUĐENIH SUHIM  
TRENJEM**

Rijeka, rujan 2022.

Anamarija Martinović

0069077849

SVEUČILIŠTE U RIJECI  
TEHNIČKI FAKULTET

Preddiplomski sveučilišni studij strojarstva

Završni rad

**MATEMATIČKI MODELI VIBRACIJA POBUĐENIH SUHIM  
TRENJEM**

Mentor: Prof. dr. sc. Roberto Žigulić

Komentor: Doc. dr. sc. Ante Skoblar

Rijeka, rujan 2022.

Anamarija Martinović

0069077849

**SVEUČILIŠTE U RIJECI**  
**TEHNIČKI FAKULTET**  
POVJERENSTVO ZA ZAVRŠNE ISPITE

Rijeka, 12. ožujka 2021.

Zavod: **Zavod za tehničku mehaniku**  
Predmet: **Dinamika**  
Grana: **2.15.06 tehnička mehanika (mekanika krutih i deformabilnih tijela)**

## ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Anamarija Martinović (0069077849)**  
Studij: **Preddiplomski sveučilišni studij strojarstva**

Zadatak: **Matematički modeli vibracija pobuđenih suhim trenjem / Mathematical models of friction induced vibrations**

### Opis zadatka:

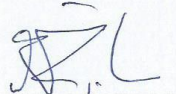
Proučiti dostupnu literaturu u kojoj se opisuju osnovni mehanizmi nestabilnosti koji izazivaju samouzbudne vibracije suhog trenja te detaljno opisati fizikalnu pozadinu navedene fenomenologije. Na principu vibracijskog sustava opruga / masa, kinematički pobuđenog gibanjem trake transportera izraditi jednostavni matematički model za pobudne mehanizme uslijed tzv. stick / slip efekta s konstantnim i promjeljivim koeficijentom trenja, zatim jednostavni matematički model povezan s nadodavanjem prigušivača s mogućnošću pojave tzv. negativnog prigušenja, jednostavni matematički stick / slip model s mogućnosti kinematičke pobude s prelaskom u kaotično gibanje te jednostavniji matematički ravninski stick / slip model. Izraditi vlastito programsko rješenje u sklopu programske platforme Excel / VBA, te analizirati rezultate i efekte dobivene korištenjem prikladnih numeričkih metoda.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

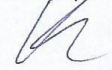
*Anamarija Martinović*

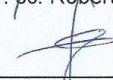
Zadatak uručen pristupniku: 15. ožujka 2021.

Mentor:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. dr. sc. Roberto Žigulić

Predsjednik povjerenstva za  
završni ispit:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. dr. sc. Kristian Lenić

  
\_\_\_\_\_  
Doc. dr. sc. Ante Skoblar (komentor)

## IZJAVA

Ovom izjavom potvrđujem da sam samostalno izradila završni rad s naslovom „Matematički model vibracija pobuđenih suhim trenjem“ pod mentorstvom prof. dr. sc. Roberta Žigulića i komentora doc. dr. sc. Ante Skoblara.

U radu sam primijenila metodologiju znanstvenoistraživačkog rada i koristila literaturu koja je navedena na kraju završnog rada. Tuđe spoznaje, stavove, zaključke, teorije i zakonitosti koje sam izravno ili parafrazirajući navela u završnom radu na uobičajen, standardan način citirala sam i povezala s fusnotama i korištenim bibliografskim jedinicama.

Suglasna sam s objavom završnog rada na službenim stranicama Fakulteta.

Rijeka, rujan 2022.

---

Anamarija Martinović

## ZAHVALE

Zahvaljujem se mentoru Prof. dr. sc. Robertu Žiguliću na iskazanom povjerenju, strpljenju, vodstvu i korisnim diskusijama tijekom izrade ovog rada.

Zahvaljujem se doc. dr. sc. Anti Skoblaru na korisnim sugestijama i suradnji.

Na kraju bih se zahvalila svojoj obitelji, prijateljima i dečku na strpljenju i moralnoj podršci te povjerenju koje su mi ukazali tokom studija.

# SADRŽAJ

1. UVOD .....	1
2. TRENJE .....	2
2.1. Tribologija.....	2
2.2. Općenito o trenju.....	4
2.3. Suho trenje.....	5
3. VIBRACIJE .....	7
3.1. Modeliranje vibracijskih sustava.....	8
4. MEHANIZMI NESTABILNOSTI IZAZVANI SAMOUZBUDNIM VIBRACIJAMA SUHOG TRENJA .....	12
4.1. Negativni nagib trenja i brzine .....	12
4.2. Efekt lijepljenje-klizanje (stick-slip efekt).....	13
4.3. Efekt zaklinjenje-klizanje (sprag-slip efekt) .....	15
4.4. Nestabilnost sprezanja modova.....	16
5. MATEMATIČKI MODELI VIBRACIJA POBUĐENIH SUHIM TRENJEM.....	17
5.1. Matematički model negativnog prigušenja .....	17
5.2. Matematički model lijepljenje-klizanje (stick-slip) .....	19
5.3. Matematički model kaotičnih vibracija efekta lijepljenje-klizanje.....	20
5.4. Matematički model nestabilnosti uslijed sprezanja modova.....	21
5.5. Matematički model nestabilnosti zaklinjenje-klizanje (sprag-slip nestabilnosti) .....	23
6. GRAFIČKI PRIKAZI MATEMATIČKIH MODELA VIBRACIJA POBUĐENIH SUHIM TRENJEM.....	25
6.1. Programski paketi korišteni u prikazu podataka .....	25
6.2. Model lijepljenje-klizanje (stick-slip) .....	25
6.3. Model lijepljenje-klizanje s konstantnom silom .....	28
6.4. Model lijepljenje-klizanje s promjenjivom silom .....	30
6.5. Model kaotičnih vibracija efekta lijepljenje-klizanje.....	33

6.6. Matematički model nestabilnosti uslijed sprezanja modova.....	37
7. ZAKLJUČAK .....	43
LITERATURA.....	44
POPIS SLIKA .....	46
SAŽETAK.....	48
ABSTRACT .....	49



## 1. UVOD

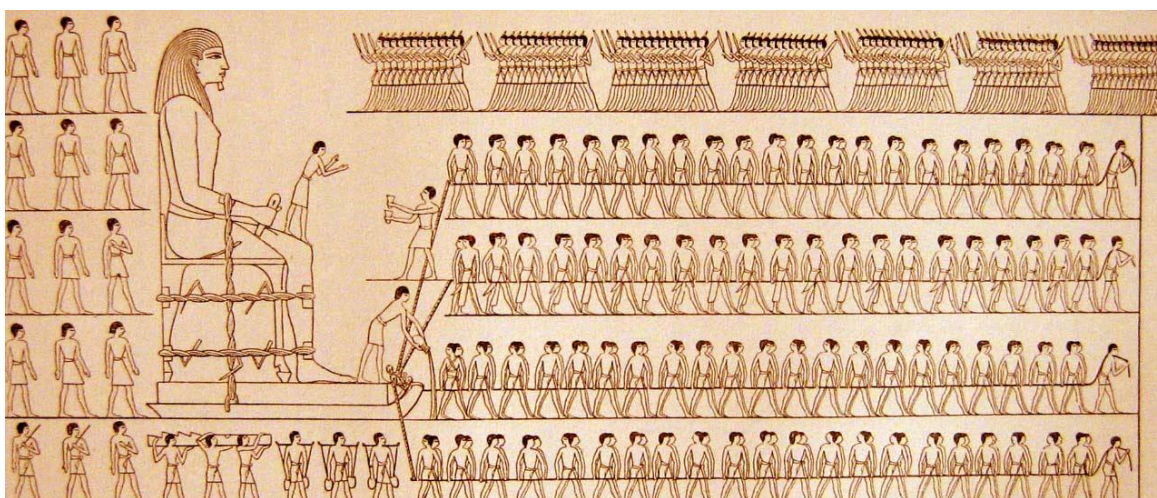
Suho trenje proizlazi iz kontakta krutih tvari koje kližu relativno jedna prema drugoj ili imaju tendenciju tome. Općenito, trebalo bi raspršiti mehaničku energiju i djelovati kao otpor relativnom gibanju, što se koristi u mehaničkim komponentama poput prigušivača i kočnica.

Međutim, suho trenje može inducirati samouzbudne vibracije pod određenim uvjetima. Vibracije izazvane trenjem su određena vrsta oscilacija koja se često pojavljuje u inženjerstvu kao i u našem svakodnevnom životu, a u većini slučajeva su nepoželjne. Postoje i primjeri korištenje vibracija u industrijski primjena kao što su sita, udarni čekići itd. Iako je u posljednjim desetljećima postignut bitan pomak u razumijevanju mehanizma nastanka i samoodržanja vibracija, ipak su one kao neželjena pojava. Problem vibracija izazvanih trenjem još uvijek je prisutan zajedno s razvojem industrije.

## 2. TRENJE

### 2.1. Tribologija

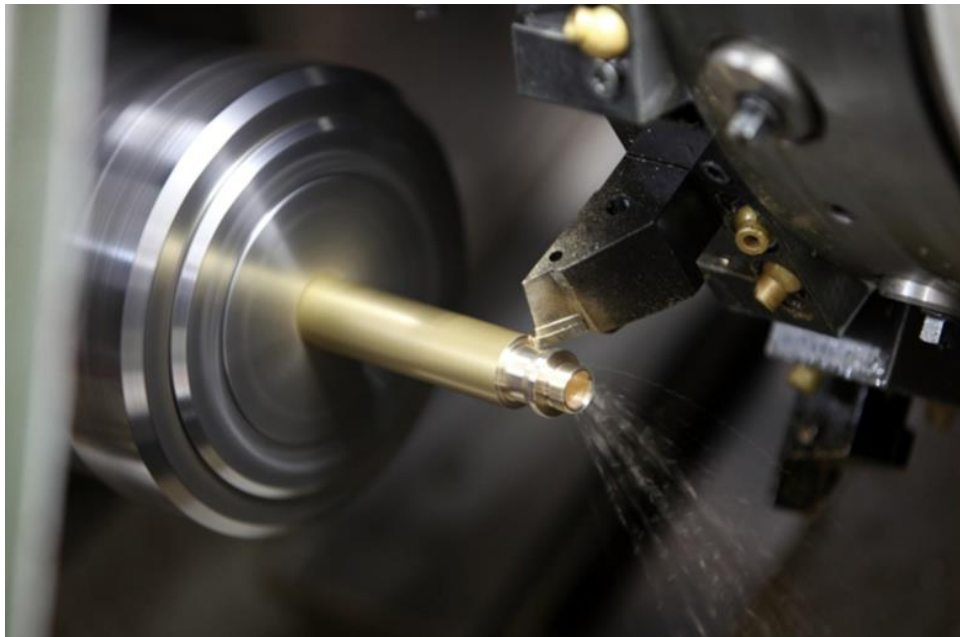
Tribologija je grana znanosti koja proučava površine koje se pomiču jedna u odnosu na drugu, što je fenomen koji svakodnevno utječe na naše živote na mnogo načina. Pojam tribologije potječe od grčkog izraza (tribos - trenje i logos - znanost) što bi u krajnjem prijevodu značilo tribologija. Iako se prvi put ovaj izraz spominje još 1964. godine, postoje slike iz starog Egipta na kojima se vidi kako tribolozi koriste ulje kao mazivo, kako bi olakšali klizanje većih kipova. [1]



Slika 2.1. Klizanje velikog kipa uz pomoć maziva [2]

Trenje je važan pojam tribologije, koja proučava međusobno povezane površine s relativnim gibanjem i pokriva nekoliko disciplina u znanosti i tehnologiji. Osim toga, tribologija također obuhvaća proučavanje podmazivanja i trošenja. Podmazivanje je učinkovit način smanjenja trenja i trošenja. Većina mehaničkih komponenti ima jedan ili više pokretnih dijelova koji se gibaju jedni u odnosu na druge unutar mehaničkih sklopova.

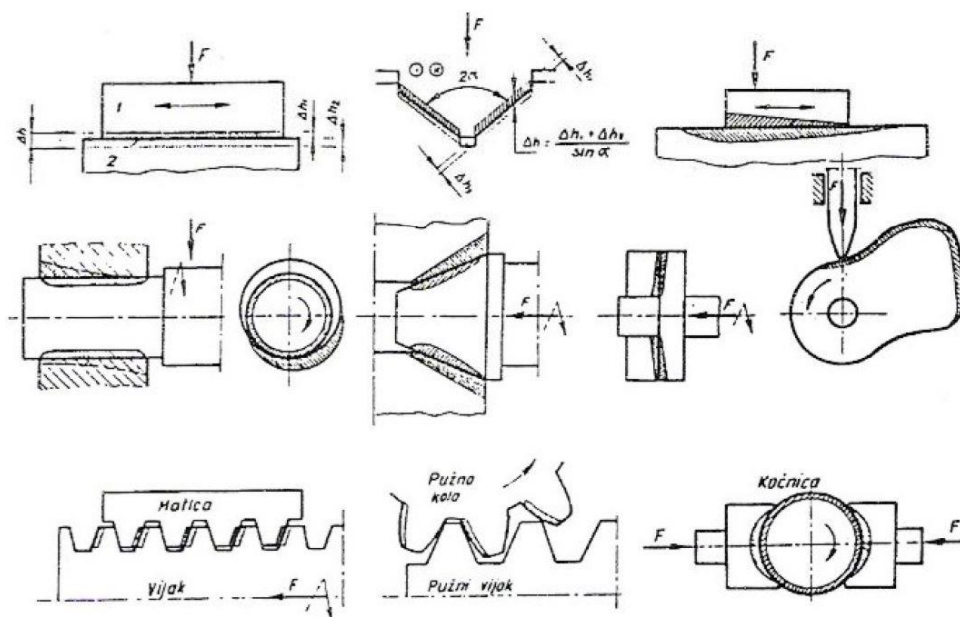
U nekim komponentama, kao što su ležajevi i zupčanci, cilj je minimalizirati otpor klizanju ili kotrljanju tako da se što je moguće manje energije gubi na trenje. U drugim komponentama, kao što su kočnice i spojke, želimo ostvariti maksimalan otpor klizanju kako bismo ograničili relativna gibanja. Postoje i mnogi proizvodni procesi koji se oslanjaju na tribologiju, kao što su valjanje, tokarenje, brušenje i poliranje.



Slika 2.2. Tokarenje [3]

Drugi, važan pojam tribologije je trošenje. Trošenjem mogu nastati površinska oštećenja i habanje materijala te također može prouzrokovati kvar sustava. Stoga se često nanose premazi kako bi se stvorila površina s visokom tvrdoćom otpornom na gubitak materijala.

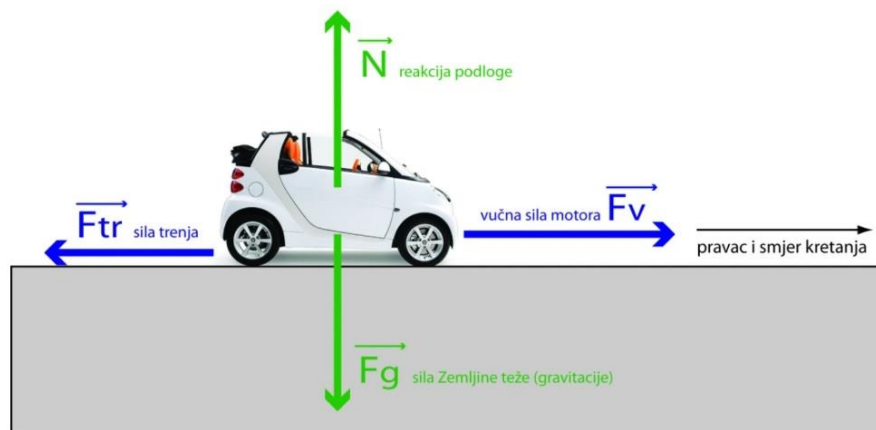
U strojarstvu, elementi alatnih strojeva u kontaktu ili dodiru izloženi su procesu trošenja, tj. neposrednom djelovanju trenja i zagrijavanja, odnosno posrednom djelovanju trenja. Neki od tipičnih i najučestalijih primjera trošenja materijala u strojarstvu prikazani su na slici 2.3.



Slika 2.3. Tipični primjeri trošenja u strojarstvu [4]

## 2.2. Općenito o trenju

Trenje se definira kao tangencijalna otporna sila od kliznog sučelja u dinamičkom sustavu. [5] Jednostavnije pojašnjeno, trenje izaziva silu koja djeluje suprotno od relativnog gibanja. Trenje je nekonzervativna sila što znači da je potrebno potrošiti energiju na savladavanje trenja. Gubici trenjem znatno smanjuju energetska učinkovitost mnogih mehaničkih uređaja.



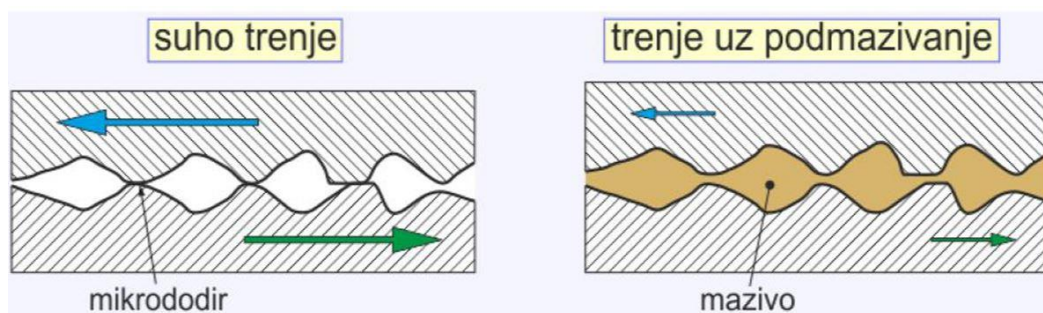
Slika 2.4. Tipični primjeri trošenja u strojarstvu [6]

Trenje je vrlo složen i jedan od najstarijih fizikalnih fenomena koji se znanstveno istražuju. Još od davnih vremena, ljudi su prepoznali važnost trenja kao što je korištenje sile trenja za stvaranje vatre, stvaranje kotača, slikanje i tako dalje. Znanstvena istraživanja o trenju provode se stoljećima. U današnje vrijeme, s razvojem inženjerstva naglašeni su sve veći zahtjevi za udobnošću i smanjenjem troškova, ključna uloga trenja u brojnim industrijskim primjenama, kao što su proizvodna industrija, automobilska i zrakoplovna industrija. Prema prisutnosti/odsutnosti sloja između uzajamno pokretnih dijelova postoje više vrsta trenja:

- Suho trenje
- Hidrodinamičko trenje
- Unutarnje trenje

Za veliku većinu površina koje se susreću u prirodi i koja se koriste u industriji, izvor suhog trenja su nesavršenosti površina. Ispostavilo se da čak ni zrcalno sjajne površine zapravo nisu ravne, barem na mikro i nano skalama, te sadrže nepravilnosti. Te se nesavršenosti nazivaju površinska hrapavost.

Na slici 2.5. je prikazana podjela trenja prema prisutnosti ili odsutnosti sloja, tj. maziva.

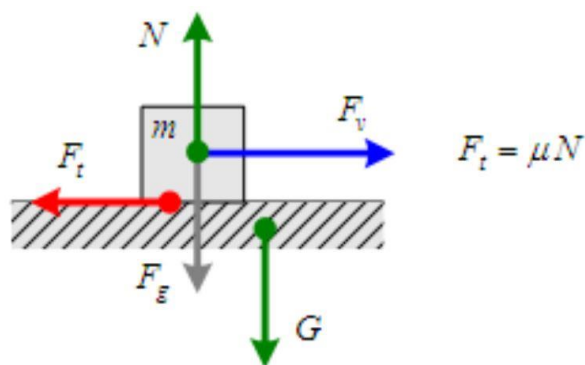


Slika 2.5. Usporedni prikaz suhog i trenja uz podmazivanje [7]

### 2.3. Suho trenje

Suho trenje odnosi se na trenje koje se javlja između dviju čistih površina bez maziva. Ovisno o pojedinostima situacije, suho trenje može držati predmet u ravnoteži ili uzrokovati njegovo ubrzanje ili usporavanje. [8] Najčešće korišteni model za suho trenje je model Coulombovog trenja. Coulombovo trenje temelji se na koeficijentu trenja koji predstavlja konstantu proporcionalnosti između normalne sile i sile trenja. Koeficijent trenja je uvijek veći od 0 i obično manji od 1. Koeficijent trenja može biti veći od 1 za materijale koji pokazuju pozitivnu adheziju jedan na drugi (poput silikonske gume ili lijepljenih površina).

Coulombovo trenje može se dalje podijeliti na statičko trenje i kinetičko trenje. U statičkom slučaju, sila trenja je upravo onolika koliko je potrebno da se spriječi gibanje između površina to jest uravnotežuje silu koja nastoji izazvati takvo gibanje. Sila trenja uvijek djeluje u smjeru koji se suprotstavlja gibanju što vrijedi za kinetičko trenje ili potencijalnom gibanju (za statičko trenje) između dviju površina. Ove dvije vrste trenja prikazane su na slici 2.6. Kod modela kutije koja stoji na nekoj površini, sila povlačenja djeluje paralelno s površinom i stalno se povećava. Na kutiju također djeluju gravitacijska sila, normalna sila i sila trenja.



Slika 2.6. Prikaz suhog trenja [9]

Statičko trenje se javlja prije klizanja i pomicanja kutije. U tom će području sila trenja bit jednaka po veličini i suprotnog smjera samoj sili povlačenja. S povećanjem sile povlačenja raste i veličina sile trenja. Ako veličina sile povlačenja nastavi rasti, kutija će na kraju početi kliziti. Kako kutija počinje kliziti, vrsta trenja koja se suprotstavlja kretanju kutije mijenja se iz statičkog trenja u ono što se naziva kinetičko trenje. Točka neposredno prije nego što kutija sklizne poznata je kao nadolazeće kretanje. Ovo se također može smatrati maksimalnom mogućom statičkom silom trenja prije klizanja. Veličina maksimalne sile statičkog trenja jednaka je statičkom koeficijentu trenja pomnoženom s normalnom silom koja postoji između kutije i površine. Ovaj koeficijent trenja je svojstvo koje ovisi o materijalu oba tijela u kontaktu i obično se može pronaći u tablicama.

Kinetičko trenje pojavljuje se u trenutku kada kutija počinje klizati. Uz kinetičko trenje, veličina sile trenja koja se suprotstavlja gibanju bit će jednaka kinetičkom koeficijentu trenja pomnoženom s normalnom silom između kutije i površine. Kinetički koeficijent trenja također ovisi o materijalima oba tijela u kontaktu, ali će uvijek biti manji od statičkog koeficijenta trenja.

### 3. VIBRACIJE

Vibracija se može opisati kao kretanje mase oko položaja točke ravnoteže. [10] Kako god masa oscilirala, uvijek će se vratiti u točku ravnoteže, jer je smjer sile koja djeluje na oscilator uvijek usmjeren prema točki ravnoteže. Samo kada je smjer sile (tj. elastične sile u opruzi) suprotan smjeru gibanja, vibracije će se događati oko točke ravnoteže. Dakle, vibracije su vrste gibanja mase čija su elastična sila i pomak obrnutih smjerova.

U slučaju jednodimenzionalnog (1D) gibanja, elastičnu silu označavamo s  $F$ , a pomak gibanja označavamo s  $u$ . Prema Hookeovom zakonu vrijedi:

$$F = -ku \quad (3.1)$$

gdje  $k$  označava koeficijent elastičnosti, negativni predznak označava smjer sile koji je suprotan od pomaka. Označavajući masu oscilatora kao  $m$ , možemo napisati jednadžbu koristeći Newtonov drugi zakon kao:

$$m \frac{d^2u}{dt^2} = -ku = F \quad (3.2)$$

Postavljajući kružnu frekvenciju kao  $\omega$ , uvrstiti ćemo izraz (3.3) u jednadžbu (3.2)

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (3.3)$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u = 0 \quad (3.4)$$

Gornja jednadžba je jednadžba vibracija bez prigušenja i njezina opće rješenje je:

$$u = A \cos(\omega t + \theta) \quad (3.5)$$

gdje  $A$  označava amplitudu, a  $\theta$  fazu niskih vibracija. Vibracije pod utjecajem otporne sile nazivaju se prigušne vibracije. Prigušenje dolazi od ograničenja okolnog medija i stvara otpor  $f_r$ , koji je proporcionalan brzini titranja kada brzina nije prevelika, a smjerovi su im suprotni.

Označimo li  $\gamma$  kao proporcionalni koeficijent, slijedi:

$$f_r = -\gamma \frac{du}{dt} \quad (3.6)$$

Stoga se jednačba (3.2) za slučaj djelovanje otporne sile može napisati na sljedeći način:

$$m \frac{d^2u}{dt^2} = -ku - \gamma \frac{du}{dt} = -F - \gamma \frac{du}{dt} \quad (3.7)$$

gdje je  $\omega^2 = \frac{k}{m}$  označava kvadrat kutne frekvencije vibracija, a  $\beta = \frac{\gamma}{2m}$  je koeficijent prigušenja vibracija. Diferencijalna jednačba prigušenih vibracija može se napisati kao:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\beta \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0 \quad (3.8)$$

Jednačba (3.8) je obična diferencijalna jednačba drugog reda. Ako je  $\beta < \omega_0$ , opće rješenje je:

$$u = A_0^{-\beta t} \cos(\omega t + \theta_0) \quad (3.9)$$

gdje su  $A_0$  i  $\theta_0$  integralne konstante (amplituda i fazni kut) koje se biraju prema početnom stanju vibracija. Kutna frekvencija  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  je povezana s koeficijentom prigušenja.

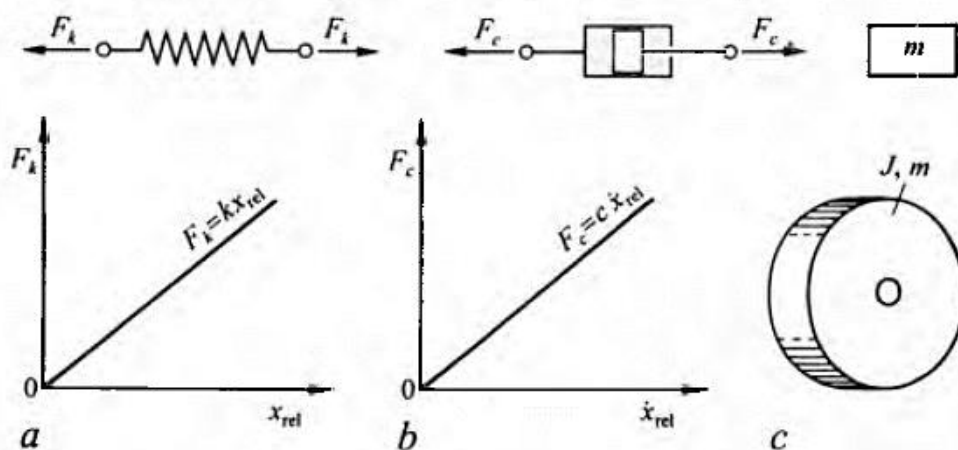
### 3.1. Modeliranje vibracijskih sustava

Tijekom slobodnog vibriranja mehaničkog sustava potencijalna energija sustava djelomično prelazi u kinetičku i obratno, pri čemu se jedan dio energije rasipa, što smanjuje amplitudu, sve dok nakon nekog vremena vibracije potpuno ne prestanu. Svaki realni vibracijski sustav sadrži povratne (elastične, restorativne), nepovratne (disipativne) i masene (inercijske) elemente. U realnim sustavima jedan te isti fizikalni element može imati sva tri svojstva.

Tako npr. opruga ima elastično svojstvo, odnosno opruga koja može akumulirati potencijalnu energiju, može stvarati povratnu ili restorativnu silu. Međutim, stvarna opruga ima i određenu masu. Osim toga, uslijed unutarnjeg trenja materijala oprugu može karakterizirati i određeno strukturno prigušenje.



Sukladno tome, možemo konstatirati da stvarna opruga ima sva tri karakteristična svojstva: svojstvo elastičnosti, tromosti i prigušenja. Prevladava svojstvo elastičnosti, a druga su dva svojstva zanemarivo malena. Pri modeliranju vibracijskih sustava upotrebljavaju se elementi koji imaju samo po jedno od tih svojstava.

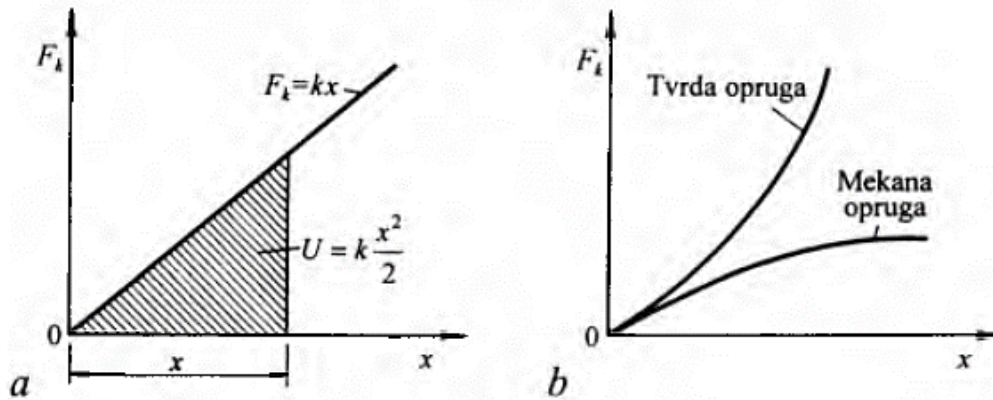


Slika 3.1. Prikaz osnovnih elemenata vibracijskih modela [11]

Glavna zadaća elastičnog elementa je da služi kao akumulator ili pretvarač potencijalne energije sustava. U praksi su to najčešće razni elastični elementi, uglavnom u obliku raznih opruga. Elastični elementi mogu biti i polje centrifugalnih sila, ali i primjerice gravitacijsko polje te sl. Takav se element uglavnom prikazuje pomoću opruge, te ukoliko nije drukčije definirano, smatra se da opruga ima linearnu karakteristiku, odnosno da je sila opruge proporcionalna s produljenjem.

$$F_k = kx \quad (3.10)$$

gdje je  $F_k$  sila u opruzi,  $k$  konstanta opruge (krutosti), a  $x$  produljenje opruge. Ranije prikazani izraz (3.10) nazivamo i karakteristikom opruge. Karakteristika nelinearne opruge zadaje se pomoću dijagrama, a prema porastu sile opruga može biti tvrda ili mekana. Često je za male pomake uvriježeno da se takva opruga može smatrati linearnom.



Slika 3.2. Prikaz karakteristika linearnih (a) i nelinearnih (b) opruga [11]

Poznato je da maseni ili inercijski element akumulira kinetičku energiju nekog sustava. Njega prikazujemo pomoću utega mase  $m$ . Ukoliko imamo relevantno i rotacijsko gibanje, tada se navedeno može prikazati pomoću diska koji ima moment tromosti  $J$ .

Prigušnim elementom modelira se rasipanje, odnosno disipacija mehaničke energije. Prigušenje može nastati zbog unutarnjeg ili vanjskog trenja, odnosno zbog otpora nekonzervativnih sila. Unutarnje trenje nastaje prilikom međusobnog pomicanja čestica materijala pri deformiranju. Vanjsko trenje može se klasificirati kao suho, viskozno ili općenito otpor fluida. Poznato je da viskozno trenje ovisi o prvoj potenciji relativne brzine  $\dot{x}_{rel}$  površina u dodiru. Otpor fluida ovisi o drugoj potenciji relativne brzine. Općenito, silu prigušenja možemo izraziti kao:

$$F_c = c\dot{x}_{rel}^n \quad (3.11)$$

gdje je  $c$  koeficijent prigušenja, a  $n$  neki eksponent. Vrijednosti ovog eksponenta se uzimaju u ovisnosti o vrsti trenja te iznose:

- $n = 0$  za suho trenje
- $n = 1$  za viskozno trenje
- $n = 2$  pri otporu fluida

U realnim je vibracijskim sustavima  $n \approx 1$ , te se zbog pojednostavljenja matematičke analize, uzima da je  $n = 1$ , odnosno pretpostavlja se da analiziramo slučaj gdje postoji viskozno trenje. Simbolički se element takva trenja prikazuje pomoću viskoznog prigušivača, a koji se sastoji od klipa i cilindra u kojem se nalazi ulje.

Kao posljedica djelovanja uzбудnih sila na vibracijski model nastaju prisilne vibracije. Veoma su česte i za analizu vrlo jednostavne tzv. harmonijske sile. Za harmonijske je sile karakteristično da se mijenjaju po zakonu sinusa ili kosinusa prema sljedećoj jednadžbi:

$$F(t) = F_0 \cos (\Omega t - \varphi_0) \quad (3.12)$$

gdje je  $F_0$  amplituda,  $\Omega$  uzbudna kružna frekvencija, a  $\varphi_0$  početna faza. Ukoliko je uzbudna sila periodična ali ne i harmonijska, tada se ona može razvojem u Fourierov red prikazati kao suma svih harmonijskih sila. Uzrok te uzbude može biti i podloga kao primjerice prilikom potresa ili vožnje automobila po hrapavoj cesti. To se naziva tzv. kinematička uzbuda. Kod rotirajućih dijelova veoma česta je i centrifugalna uzbuda. Uzbudu možemo karakterizirati kao determinističku ukoliko je ona periodična i unaprijed poznata, a stohastička ako je potpuno proizvoljna i nije nam unaprijed poznata.

## 4. MEHANIZMI NESTABILNOSTI IZAZVANI SAMOUZBUDNIM VIBRACIJAMA SUHOG TRENJA

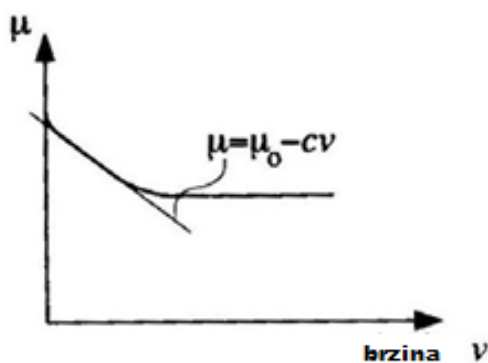
Tijekom prošlog stoljeća razvijeno je nekoliko disciplina proučavanja vibracija izazvanih trenjem. Velika količina istraživanja je posvećena razlogu pojave vibracija izazvanih trenjem, što je jedna važna grana koja je dala znatan doprinos dosadašnjim istraživanjima koja pokušavaju riješiti ovaj problem.

Mehanizme nestabilnosti koji izazivaju samouzbudne vibracije suhog trenja možemo podijeliti u četiri kategorije:

- negativni nagib trenja i brzine
- efekt ljepljenje–klizanje (stick-slip efekt)
- efekt zaklinjenje–klizanje (sprag-slip efekt)
- nestabilnost mod-couplinga.

### 4.1. Negativni nagib trenja i brzine

U nekim slučajevima, ovisno o materijalima u kontaktu, koeficijent kinetičkog trenja u odnosu na brzinu klizanja pokazuje negativan nagib u određenim područjima.



Slika 4.1. Prikaz negativnog prigušivanja [12]

Na slici 4.1 je prikazana vrsta trenja za slučaj kada trenje i relativna brzina imaju negativan nagib. Ovaj prikaz sile trenja i relativne brzine može se promatrati kao prigušenje. Ako je nagib negativan, sustav je izložen negativnom prigušenju. U ranijim istraživanjima primijećeno je postojanje područja negativnog nagiba za klizne površine koje prolaze kroz vibracije izazvane trenjem. Zbog ovog negativnog nagiba, klizanje u stacionarnom stanju postaje nestabilno

izazivajući pritom samouzbudne vibracije. Međutim, opažene su samouzbudne vibracije i pri odsutnosti negativnog nagiba.

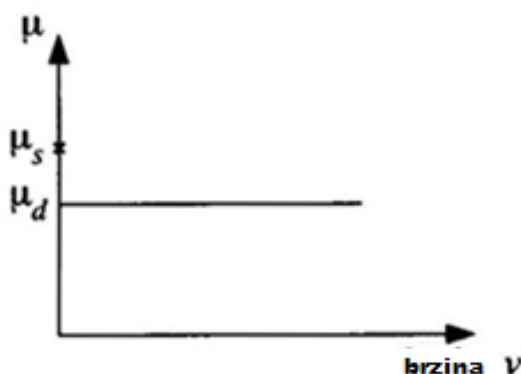
Sinclair i Manville [13] u svom istraživanju škrice kočnica otkrili su da je koeficijent trenja kod većine materijala kočionih obloga zapravo nepromjenjiv s brzinom klizanja, osim što je došlo do malog smanjenja koeficijenta trenja s povećanjem temperature.



Slika 4.2. Sklop kočionog diska [14]

#### 4.2. Efekt lijepljenje-klizanje (stick-slip efekt)

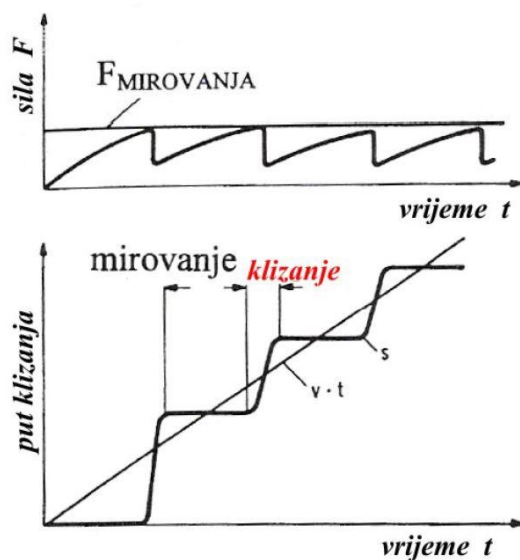
Stick-slip efekt nastaje u području malih brzina klizanja, to jest u području podmazivanja. Uzrok tome je statički koeficijent trenja koji je veći od dinamičkog koeficijenta.



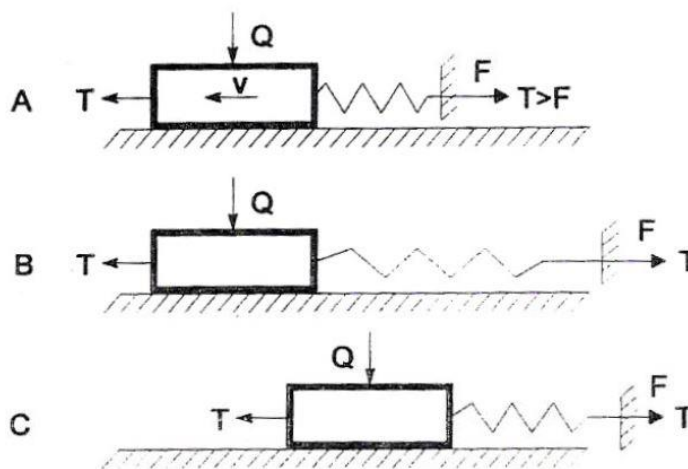
Slika 4.3. Grafički prikaz koeficijenata trenja kod stick-slip efekta [12]

Na slici 4.3 je prikazano gibanje kada je stick-slip efekt moguć, a uzrokovan je statičkim koeficijentom trenja  $\mu_s$  koji je veći od dinamičkog  $\mu_d$ .

Tijekom faze lijepljenja (*eng. stick*), ne postoji relativna brzina između površina, te se klizač i podloga gibaju zajedno. Tijekom faze klizanja (*eng. slip*), energija se prazni gotovo trenutno.



Slika 4.4. Prikaz faza stick-slip efekta tijekom vremena [4]



Slika 4.5. Djelovanje stick-slip efekta [4]

Kako se brzina klizanja povećava, postoji kritična vrijednost brzine iznad koje nestaje stick-slip efekt. Stick-slip efekt manifestira se podrhtavanjem, odnosno nejednolikim gibanje kliznog elementa u odnosu na kliznu površinu.

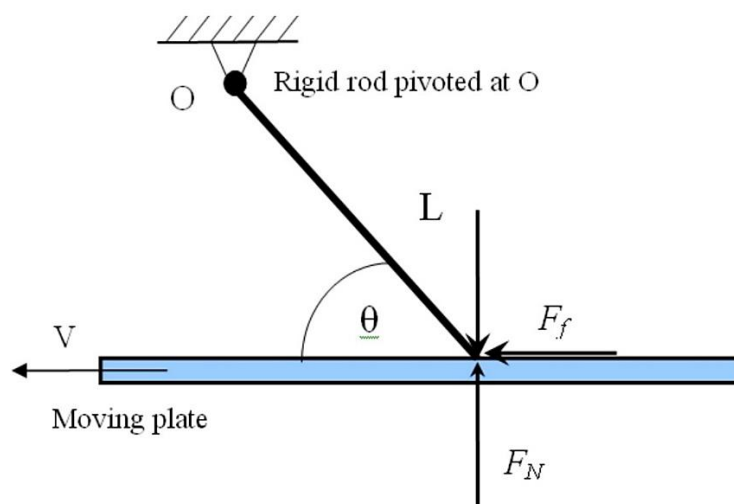
Neki od načina ublažavanja stick-slip efekta u strojarstvu su sljedeći:

- povećavanje brzine klizanja
- viskoznijim uljem
- većom nosivom površinom kliznog para
- manjom masom kliznog elementa
- uporabom polimernih dodataka ulju
- oblaganjem kliznih površina umjetnim masama (npr. epoksidne smole)

#### 4.3. Efekt zaklinjenje-klizanje (sprag-slip efekt)

Nakon provedenih istraživanja škripa kočnica uočeno je da stick-slip efekt nije jedini razlog za škripanje kočnica, te da se samouzbudne vibracije mogu proizvesti i u slučaju kada je koeficijent trenje konstantan.

Prvi koji je predložio mehanizam za vibracije izazvanim trenjem koji je nazvan sprag-slip bio je Spurr. [15] Prema njegovoj teoriji, samouzbudne vibracije nastaju pod djelovanjem uranjanja (*eng. digging-in*) klizača u kliznu površinu. Sila trenja raste sve dok ne dosegne visoku vrijednost koja prisiljava klizač da se kreće s kliznom površinom bez relativne brzine (*eng. sprag*). Zbog ovoga kretanja, mijenja se glavni položaj oko kojeg se klizač okreće i to rezultira u novom efektivnom kutu nagiba. To uzrokuje smanjenje sile trenja koja dopušta relativno gibanje između klizača i površine (klizanje).



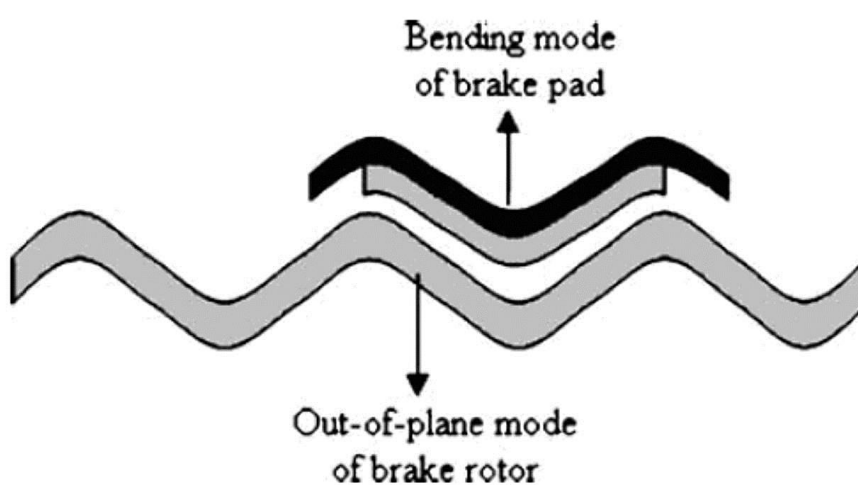
Slika 4.6. Prikaz mehanizma sprag-slip [16]

Na slici 4.6 je prikazan polukruti podupirač koji je bio nagnut pod kutom  $\theta$  prema površini koja se trlja i gurnut paralelno s površinom.

#### 4.4. Nestabilnost sprezanja modova

U mehanizmu sprezanja modova, dva moda vibracija geometrijski usklađena odnosno iste valne duljine i bliske rezonancije mogu inducirati više energije u sustav nego što se može raspršiti. Nestabilnost uslijed sprezanja modova ili zaključavanja moda zapravo predstavlja vrstu geometrijski inducirane nestabilnosti, koja se općenito smatra glavnim mehanizmom za škripu kočnica i privukla je mnogo pažnje istraživača u području vibracija izazvano trenjem.

North [17] je prvi opisao da je škripa kočnica bila posljedica sile trenja s konstantnim koeficijentom trenja.



Slika 4.7. Sprezanje modova između komponenti kočnica [16]

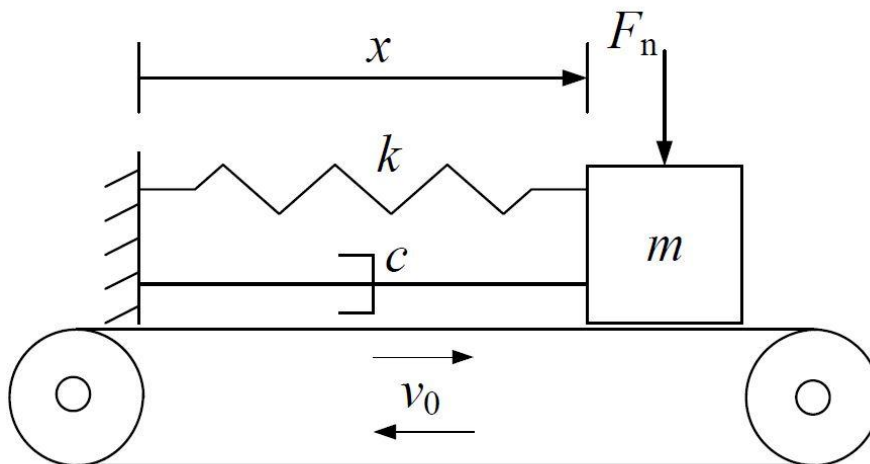
Slika 4.7 prikazuje spoj između kočionog rotora i način savijanja kočione pločice na istoj frekvenciji. Sprezanje modova je često ovisno o radnim uvjetima kao što su brzina, tlak i temperatura i karakteristikama sučelja kao što su kontaktna krutost, hrapavost, adhezivna sila i mnogi drugi. Postoje i drugi nazivi koji se koriste za definiranje ovog mehanizma, naime; binarno lepršanje (*eng. binary flutter*), stacionarni mod (*eng. mod lock-in*) i nekonzervativne sile ovisne o pomaku (*eng. non conservative displacement dependant forces*). Modalno sprezanje konstrukcije uključuje klizne dijelove, a spajanje rezultira promjenama sila trenja koje su neophodne za samouzbudne vibracije. Među ostalim pristupima, nestabilnost sprezanja modova (*eng. mode lock in*) između dvaju načina rada sustava jedan je od najprihvaćenijih, a analiza složenih vlastitim vrijednostima kočionog sustava popularan je numerički alat za predviđanje nestabilnosti cviljenja.



## 5. MATEMATIČKI MODELI VIBRACIJA POBUĐENIH SUHIM TRENJEM

### 5.1. Matematički model negativnog prigušenja

Tijekom proteklih desetljeća razvijene su različite vrste zakona trenja. Negativan gradijent koeficijenta trenja u odnosu na relativnu brzinu zajednička je značajka većine zakona trenja. Koristi se model pomičnog remena mase s oprugom s jednim stupnjem slobode, prikazan na slici 5.1. Na slici 5.1. klizač je diskretna masa, označena kao  $m$ ,  $x$  opisuje horizontalni pomak mase  $m$ ,  $k$  je krutost opruge,  $c$  je prigušenje,  $F_n$  je normalna sila opterećenja, a  $v_0$  je brzina pokretne trake. Između mase i pokretne trake postoji kontakt trenjem. Iako je ovaj model jednostavan, uključuje trenje na interesantan način jer je trenje primarni faktor koji utječe na dinamiku sustava, što je vrlo pogodno za proučavanje mehanizma. Ovaj sustav je klasičan model koji se može koristiti za proučavanje različitih problema vibracija izazvanih trenjem.



Slika 5.1. Sustav s jednim stupnjem slobode sustava masa-opruga-remen [18]

Prema drugom Newtonovom zakonu izražena je jednadžba gibanja sustava kao:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_r(v_r) \quad (5.1)$$

u kojoj je  $F_r(v_r)$  funkcija sile trenja od  $v_r$ , a  $v_r$  je relativna brzina između mase i remena, definirana jednažbom (5.2):

$$v_r = \dot{x} - v_0 \quad (5.2)$$

Pod pretpostavkom da je sila trenja  $F_r$  proporcionalna sili  $F_n$  s koeficijentom  $\mu(v_r)$  poznatim kao koeficijent trenja, sila trenja se izražava kao:

$$F_r = \mu(v_r) F_n \quad (5.3)$$

Ovdje funkcija koeficijenta trenja  $\mu(v_r)$  koristi izraz dan jednažbom (5.4):

$$\mu(v_r) = \mu_s - \mu_2 |v_r| \quad (5.4)$$

gdje su  $\mu_s$  i  $\mu_2$  konstante. Tada se sila trenja izražava sljedećom jednažbom:

$$F_r = \mu(v_r) F_n = (\mu_s - \mu_2 |\dot{x} - v_0|) F_n \quad (5.5)$$

Kako sila trenja mijenja smjer kada relativna brzina mijenja predznak, funkcija sile trenja dana je jednažbom (5.6):

$$F_r(v_r) = -[\mu_s F_n - \mu_2 F_n |\dot{x} - v_0|] \sin(\dot{x} - v_0) \quad (5.6)$$

Jednažbu možemo isto napisati kao:

$$F_r(v_r) = \begin{cases} -\mu_s F_n + \mu_2 F_n (\dot{x} - v_0), & \dot{x} > v_0 \\ [-\mu_s F_n, \mu_s F_n], & \dot{x} = v_0 \\ \mu_s F_n + \mu_2 F_n (\dot{x} - v_0), & \dot{x} < v_0 \end{cases} \quad (5.7)$$

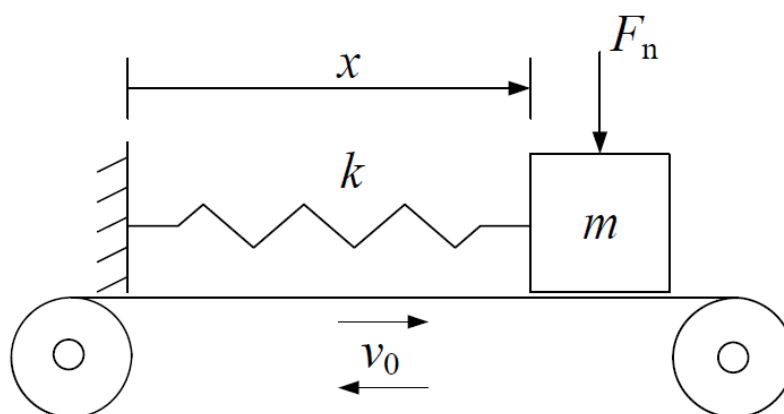
Zamjenom jednažbe (5.6) u jednažbu (5.1), jednažba gibanja poprima oblik (5.8):

$$m\ddot{x} + (c - \mu_2 F_n)\dot{x} + kx = -\mu_s F_n \sin(\dot{x} - v_0) + \mu_2 F_n v_0 \quad (5.8)$$

U jednadžbi (5.8), može se naći da, kada je  $\mu_s F_n > c$ , prigušenje sustava postaje negativno, što rezultira divergentnim vibracijama. Dakle, negativan nagib koeficijenta trenja u odnosu na relativnu brzinu može uzrokovati negativno prigušenje u sustava, što je prepoznato kao jedan od razloga za nestabilno trenje izazvano vibracija.

## 5.2. Matematički model lijepljenje-klizanje (stick-slip)

Model masa-opruga-remen s jednim stupnjem slobode prikazan na slici 5.2 koristi se za proučavanje stick-slip vibracija. Kod ovog modela nije uključeno prigušenje. Koristit će se iste oznake kao i u prethodnom potpoglavlju.



Slika 5.2. Model masa-opruga-remen s jednim stupnjem slobode [18]

Masa  $m$  doživljava sljedeće faze gibanja: zalijepi se za remen i pomiče se s njim, u početnoj fazi. Istovremeno se opruga rasteže i sila opruge raste. Statička sila trenja drži masu zalijepljenu za remen sve dok je sila opruge manja od sile trenja. Međutim, kada sila opruge premaši silu trenja, klizač počinje kliziti u odnosu na remen. Istog trenutka režim trenja se naglo mijenja iz statičkog u kinetički čiji je koeficijent trenja manji. Tako masa može dalje kliziti po traci. Kako je sila opruge veća od sile kinetičkog trenja, brzina klizanja prema naprijed (klizač klizi u istom smjeru pokretne trake) se smanjuje, a u točki preokreta od brzine smjer klizanja klizača mijenja se u smjer suprotan smjeru pokretne trake (klizanje unatrag). Nakon nekog vremena, opruga se stisne i klizanje klizača unatrag se opire, zbog čega klizač mijenja smjer klizanja u klizanje prema naprijed. Onda kada postigne istu brzinu s pokretnom trakom, a sila opruge je manja od statičkog kapaciteta trenja, masa se ponovno lijepi za pokretnu traku. Prethodno kretanje stick-slip ponavlja se tijekom režima vibracije sustava. Kako se stanja gibanja izmjenjuju, to je neglatki proces.

Matematička formulacije stick-slip vibracija prikazana su u nastavku. Za proces ljepljenja, pomak i brzina mase dati su jednačbom (5.9):

$$x = v_0 t, \dot{x} = v_0 \quad (5.9)$$

Za proces klizanja, sila trenja  $F_T = \mu_f F_n$ , a njezin smjer određen je relativnom brzinom između mase i pokretne trake. Jednačba gibanja mase dana je jednačbom (5.10):

$$m\ddot{x} + kx = -\mu_k F_n \sin(v_r) \quad (5.10)$$

Uvjet za prebacivanje iz "stick" moda u "slip" mod je:

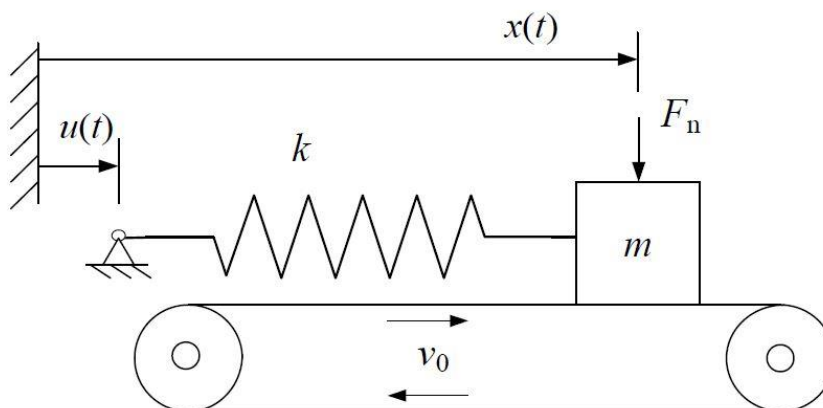
$$|kx| > \mu_s F_n \quad (5.11)$$

u kojoj je  $kx$  sila opruge, a  $\mu_s F_n$  kapacitet statičkog trenja. S druge strane, uvjeti za prebacivanje s slip na stick mod su:

$$\dot{x} = v_0 \text{ i } |kx| < \mu_s F_n \quad (5.12)$$

### 5.3. Matematički model kaotičnih vibracija efekta lijepljenje-klizanje

Stick-slip vibracije mogu biti vrlo složene i presudno ovise o parametrima sustava. U ovom poglavlju predviđena je nestabilna vibracija stick-slip efekta.



Slika 5.3. Model masa-remen s jednim stupnjem slobode i s kinematičkom pobudom [18]

Slika 5.3 prikazuje model koji je sličan slici 5.2, ali s vanjskom pobudom. Koristi se isti zapis definiran u potpoglavlju 5.2. Između klizača i pokretne trake javlja se suho trenje, a sila trenja je  $F_r(v_r)$ .  $u(t)$  je pobuda pomaka, a zadana je u sljedećem obliku:

$$u(t) = u_0 \cos(\Omega t) \quad (5.13)$$

u kojoj je  $\Omega$  frekvencija kinematičke uzbude, a  $u_0$  amplituda. Jednadžba gibanja sustava, u bezdimenzijskom obliku, dana je jednadžbom (5.14):

$$\ddot{x}_1 + x_1 = \frac{F_r(v_r)}{k} + u_0 \cos(\eta\tau) - x \quad (5.14)$$

Varijable i parametri u jednadžbi (5.14) preuređeni su u bezdimenzijski oblik pomoću:

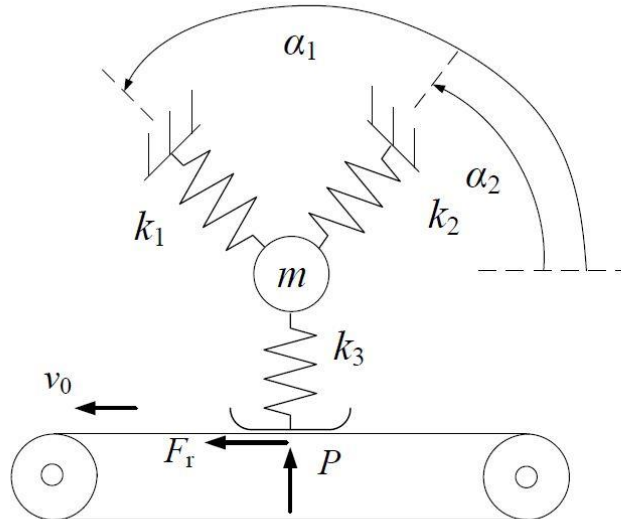
$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \eta = \frac{\Omega}{\omega_0}, x_s = \frac{F_r(-v_r)}{k}, x_1 = x - x_s, \tau = \omega_0 t \quad (5.15)$$

Sila trenja  $F_r(v_r)$  izražava se kao:

$$F_r(v_r) = -\mu(v_r)F_n \sin(v_r) \quad (5.16)$$

#### 5.4. Matematički model nestabilnosti uslijed sprezanja modova

U ovom potpoglavlju prikazan je model koji predstavlja osnovnu ideju nestabilnosti uslijed sprezanje modova. Mehanički model je prikazano na slici 5.4. U ovom modelu,  $k_1$ ,  $k_2$  i  $k_3$  su linearne opruge. Donji kraj opruge  $k_3$  povezan je s klizačem zanemarive mase koji ima frikcijski kontakt s donjim remenom koji se kreće konstantnom brzinom  $v_0$ . Sila trenja je označena sa  $F_r$ , uz konstantan koeficijent trenja  $\mu$ .



Slika 5.4. Model sa dva stupnja slobode [18]

Kontaktna sila između klizača i remena je sila opruge  $k_3y$ , stoga se sila trenja podrazumijeva kao:

$$F_r = \mu k_3 y \quad (5.17)$$

Jednadžbe gibanja mogu se prikazati matričnim sustavom jednadžbi:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} - \mu k_3 \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

u kojem je:

$$\begin{cases} k_{11} = k_1 \cos^2 \alpha_2 \\ k_{12} = k_{21} = k_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + k_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \\ k_{22} = k_1 \sin^2 \alpha_2 + k_2 \sin^2 \alpha_2 + k_3 \end{cases} \quad (5.19)$$

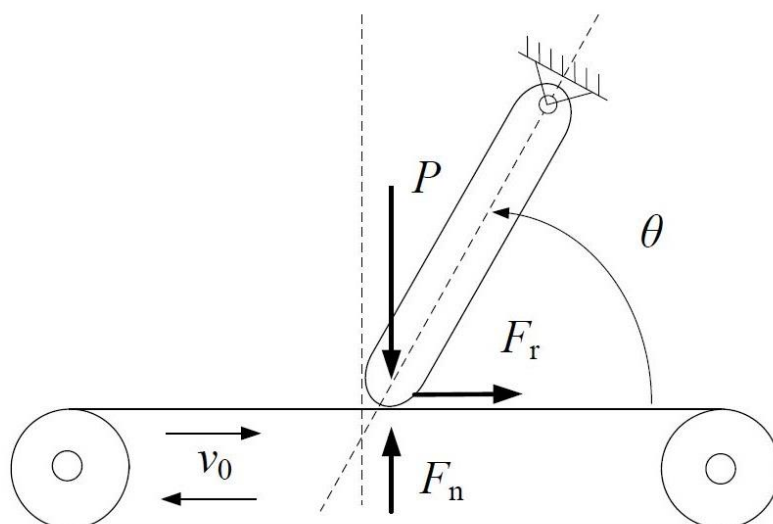
Iz izraza 5.18 je vidljivo da matrica krutosti postaje asimetrična zbog člana sile trenja  $\mu k_3 y$ .

U tom slučaju vlastite vrijednosti  $s = \lambda + i\omega$  mogu se dobiti rješavanjem problema vlastitih vrijednosti:

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{-2 \pm \sqrt{1 - \frac{k_{12} - \mu k_3}{m}}} \quad (5.20)$$

## 5.5. Matematički model nestabilnosti zaklinjenje-klizanje (sprag-slip nestabilnosti)

Da bi se opisao sprag-slip proces, prikazan je savršeno kruti model na slici 5.5. Na ovom modelu, kruti štap je nagnut prema pokretnoj traci na jednom kraju pod kutom  $\theta$  a zakrenut je na drugom kraju kraju.  $P$  je normalna sila koja komprimira štap na remenu. Kao posljedica toga, otpor trenja djeluje između dvije relativno pokretne komponente.



Slika 5.5. Model krutog štapa s pokretnim remenom [18]

Prema stanju ravnoteže sila dobiva se odnos između sile pritiska  $P$  i normalne sile  $F_n$ :

$$P = F_n + F_r \tan \theta \quad (5.21)$$

Uz pretpostavku  $F_r = \mu F_n$ , sila trenja i kontaktna sila izvedene su kao:

$$F_r = \frac{\mu P}{1 - \mu \tan \theta} \quad (5.22)$$

$$F_n = \frac{P}{1 - \mu \tan \theta} \quad (5.23)$$

Jednadžbe (5.22) i (5.23) pokazuju da sila trenja može postati beskonačno velika, kada se  $1 - \mu \tan \theta$  približava se nuli. Dakle, do ovog stanja se dolazi kada je šipka zaklinjena (*eng. spragged*) na remen.

S druge strane, pod pretpostavkom da je šipka djelomično elastična, pomicat će se te će se mijenjat  $\theta$ . Prilikom pomicanja vrijednost  $1 - \mu \tan \theta$  postaje različita od nule i raste s porastom  $\theta$ . Kao posljedica toga, vrijednost  $F_r$  pada. Istodobno raste elastična energija elastične komponente sile. U ovom trenutku, elastična sila nadvladava silu trenja, što omogućuje da se elastična šipka otpusti i vrati u prvobitni položaj, a  $\theta$  ponovno postane manji. Nakon toga, kretanjem štapa ponavlja se ova petlja sprag-slip efekta.



## 6. GRAFIČKI PRIKAZI MATEMATIČKIH MODELA VIBRACIJA POBUĐENIH SUHIM TRENJEM

### 6.1. Programski paketi korišteni u prikazu podataka

Programski paketi korišteni za izradu prikaza matematičkih modela vibracija pobuđenih suhim trenjem su Excel, VBA i Mathematica. VBA je kratica za Visual Basic for applications. VBA je Microsoftov programski jezik za Excel i sve druge Microsoft Office programe, poput Worda i PowerPointa. Svi programi paketa Office dijele zajednički programski jezik. Za pokretanje VBA prozoru, pritisne se Alt + F11 unutar bilo kojeg Office programa.

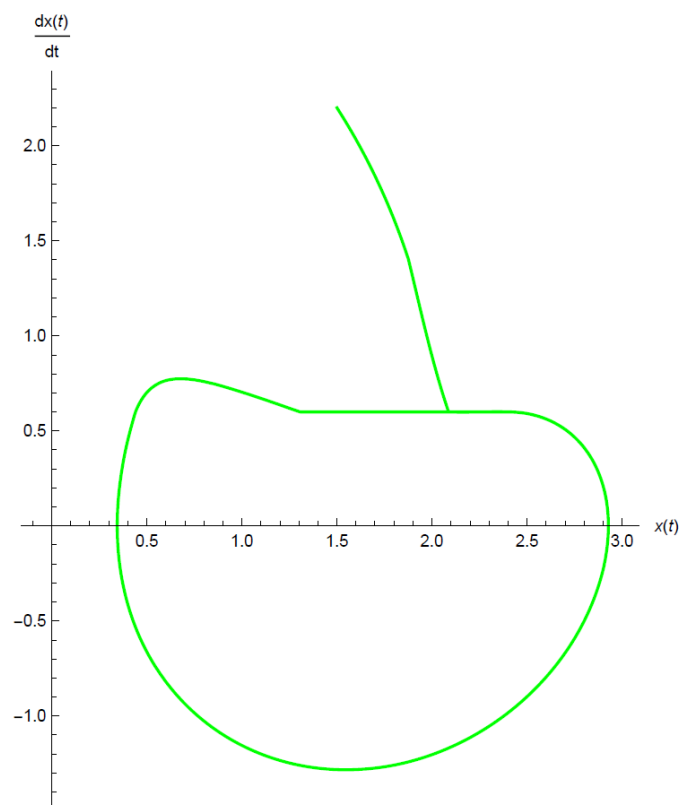
U prethodno spomenutim programskim paketima napravljen je programski kod pomoću jednadžbi za modele vibracija pobuđenih suhim trenjem koje su spomenute u ranijim poglavljima. Rješenja diferencijalnih jednadžbi modela dobiveni su pomoću Runge-Kutta metode.

### 6.2. Model lijepljenje-klizanje (stick-slip)

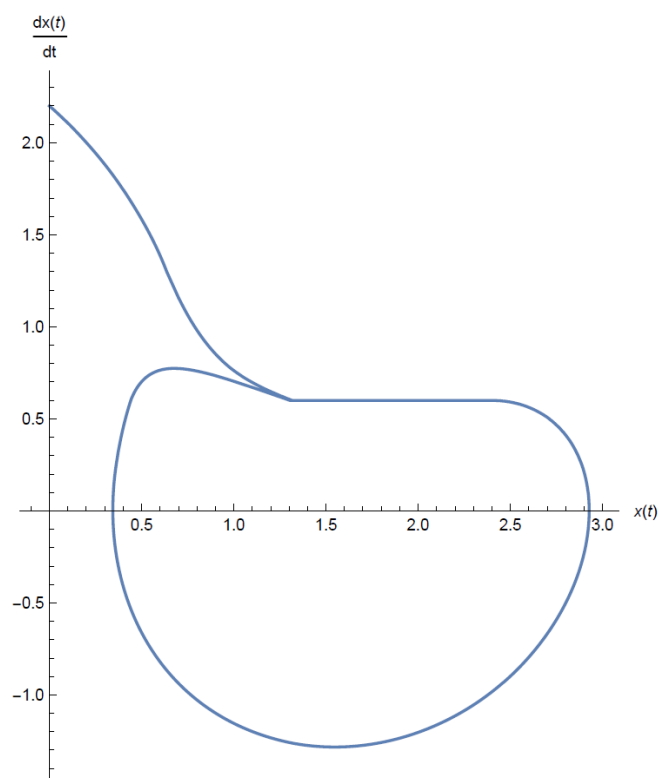
Sljedeći primjer matematičkog modela lijepljenje-klizanje (stick-slip) koji su računalnim putem obrađeni u softveru Mathematica je preuzet iz literature [19]. Prikazani su fazni dijagram za Coulombovo trenje prema jednadžbi:

$$\ddot{x} + x = F(\dot{x}) \quad (6.1)$$

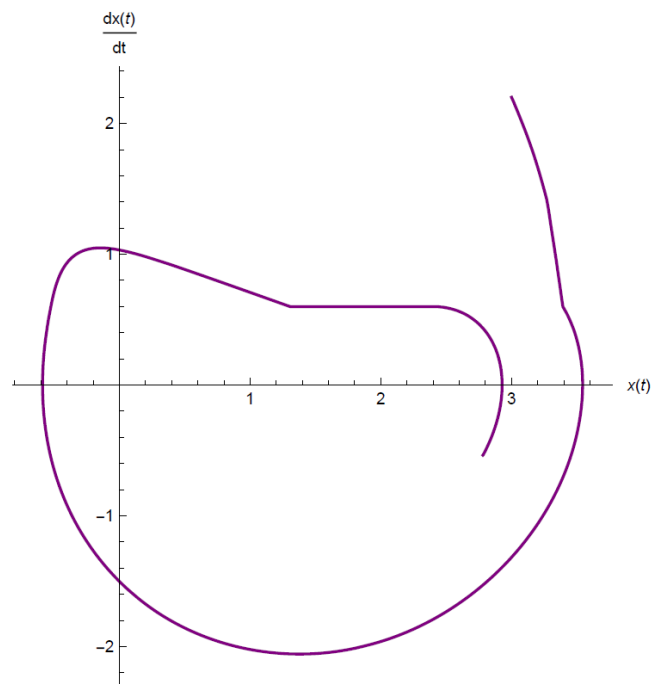
Na sljedećim slikama prikazani su fazni dijagrami matematičkih modela s različitim početnim uvjetima  $x_0$ .



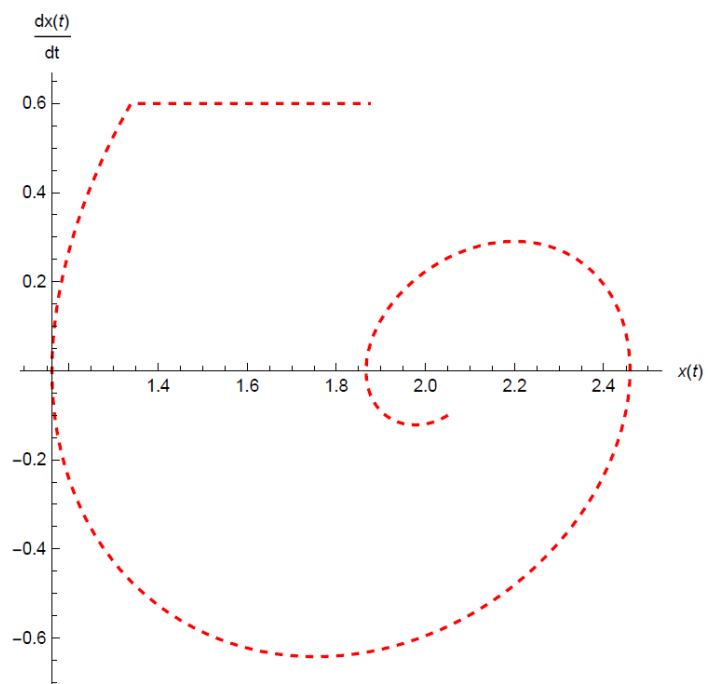
Slika 6.1. Fazni dijagram za  $x_0=1,5$



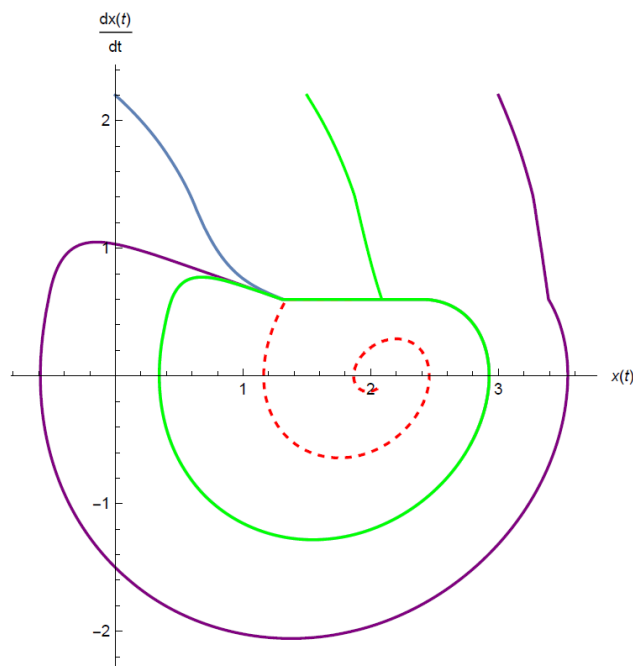
Slika 6.2. Fazni dijagram za  $x_0=0$



Slika 6.3. Fazni dijagram za  $x_0=3$



Slika 6.4. Fazni dijagram za  $x_0=2,05$



Slika 6.5. Fazni dijagram ukupnih početnih uvjeta

### 6.3. Model lijepljenje-klizanje s konstantnom silom

Za grafički prikaz simulacije lijepljenja-klizanja s konstantnom silom moramo imati zadane sljedeće parametre:

- početni položaj  $x_0$
- početnu brzinu  $v_0$
- krajnje vrijeme simulacije  $t$
- broj koraka simulacije  $N$
- početno vrijeme  $t_0$
- brzinu gibanja trake  $v_{tr}$
- masu klizača  $m$
- krutost opruge  $c$

Broj koraka  $h$  dobivamo dijeljenjem razlike krajnjeg i početnog vremena s brojem koraka  $N$ . Ako je  $(y-v_0) < 0$  tada vrijedi:

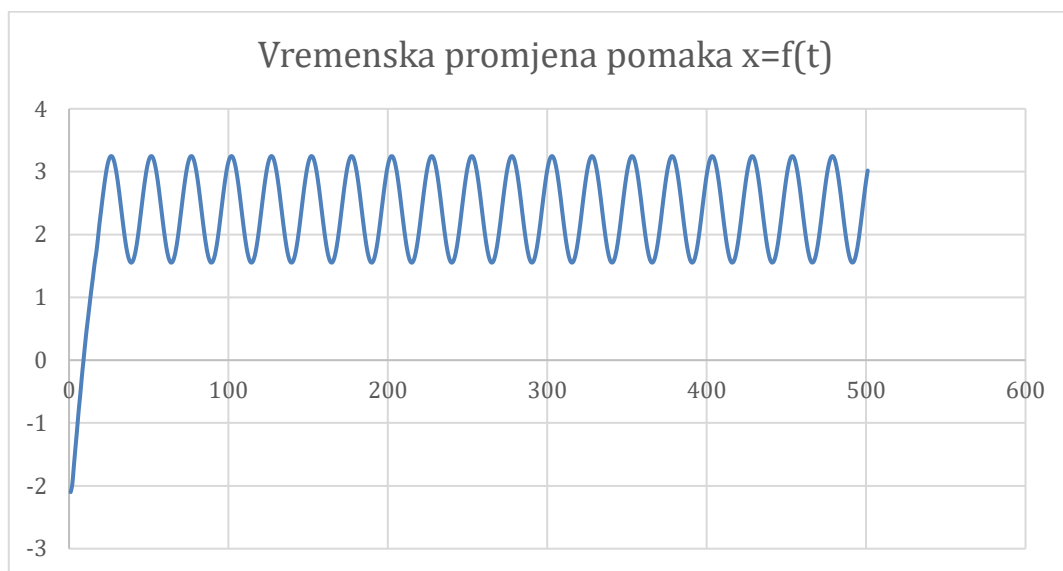
$$y = \left(\frac{1}{m}\right) (2,4 - cx) \quad (6.2)$$

U suprotnome vrijedi:

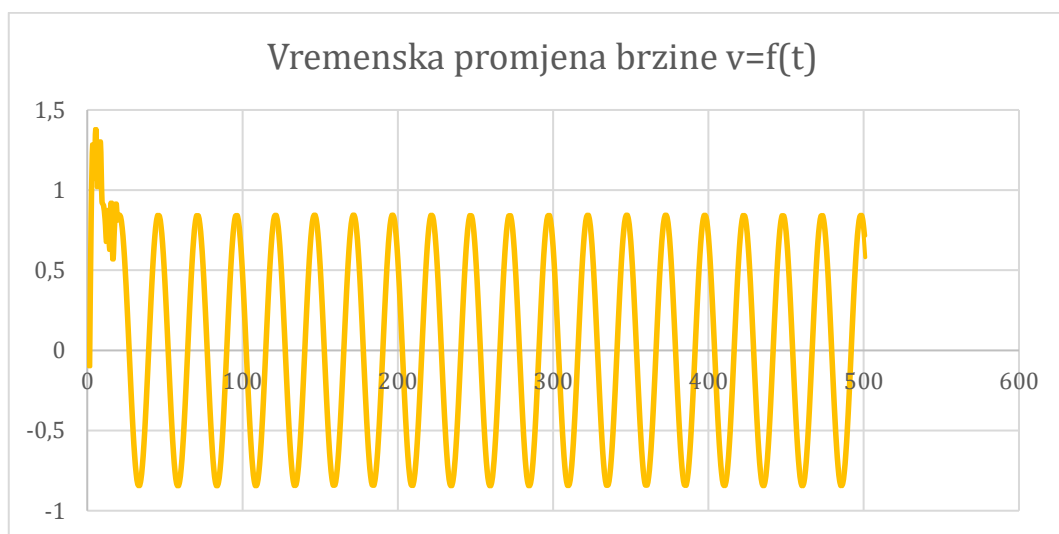
$$y = \left(\frac{1}{m}\right)(-2,4 - cx) \quad (6.3)$$

Nakon što smo definirali korak  $h$  i uvjete diferencijalne jednačbe, putem Runge-Kutta metode nalazimo aproksimaciju rješenja pravcem unutar koraka  $h$ . Za dobivanje nove vrijednosti moramo zbrojiti početne vrijednosti i promjene (prvu derivaciju) pomnoženu s korakom  $h$ . Kako bi dobili prvu derivaciju, prethodno moramo izračunati nagib tangente.

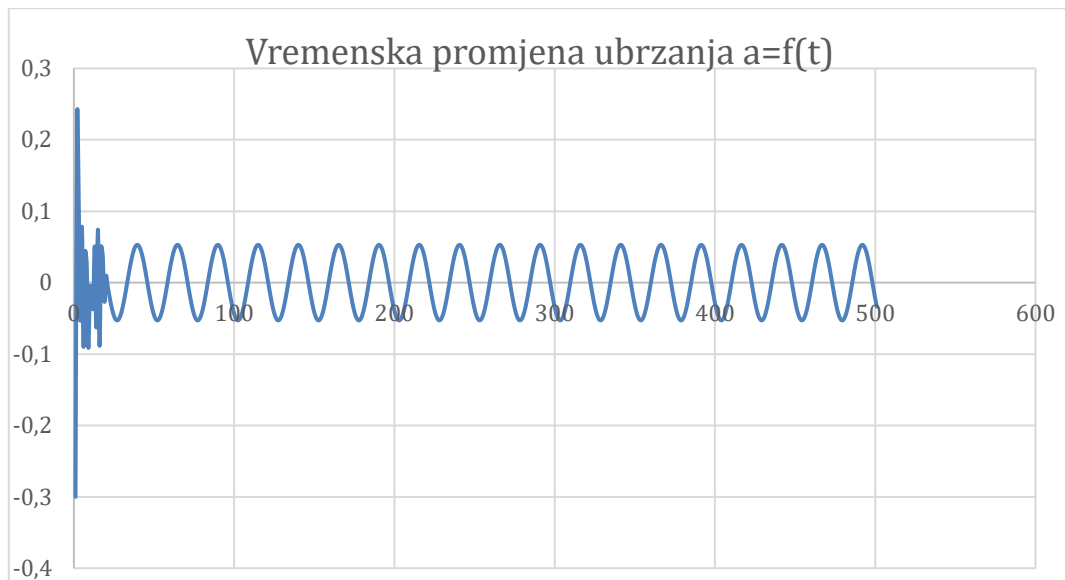
Na sljedećim slikama prikazani su grafički prikazi dobivenih rezultata za model lijepljenje-klizanje s konstantnom silom.



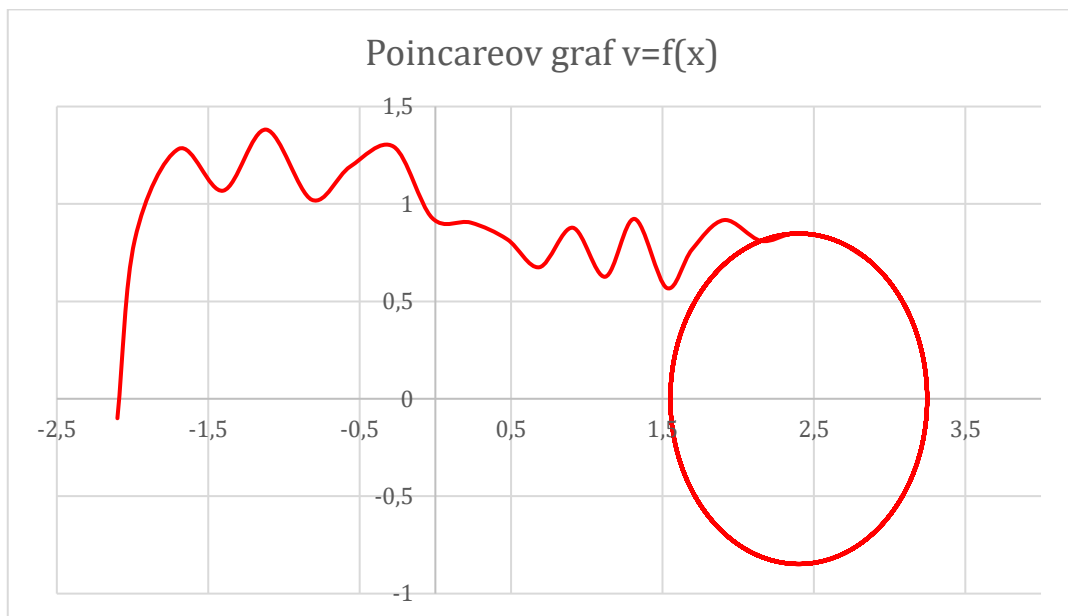
Slika 6.6. Dijagram vremenske promjene pomaka  $x$



Slika 6.7. Dijagram vremenske promjene brzine  $v$



Slika 6.8. Dijagram vremenske promjene ubrzanja  $a$



Slika 6.9. Poincareov graf promjene brzine u ovisnosti o pomaku

#### 6.4. Model lijepljenje-klizanje s promjenjivom silom

Za grafički prikaz simulacije lijepljenje-klizanje s promjenjivom silom moramo imati zadane sljedeće parametre:

- početni položaj  $x_0$
- početnu brzinu  $v_0$
- krajnje vrijeme simulacije  $t$
- broj koraka simulacije  $N$

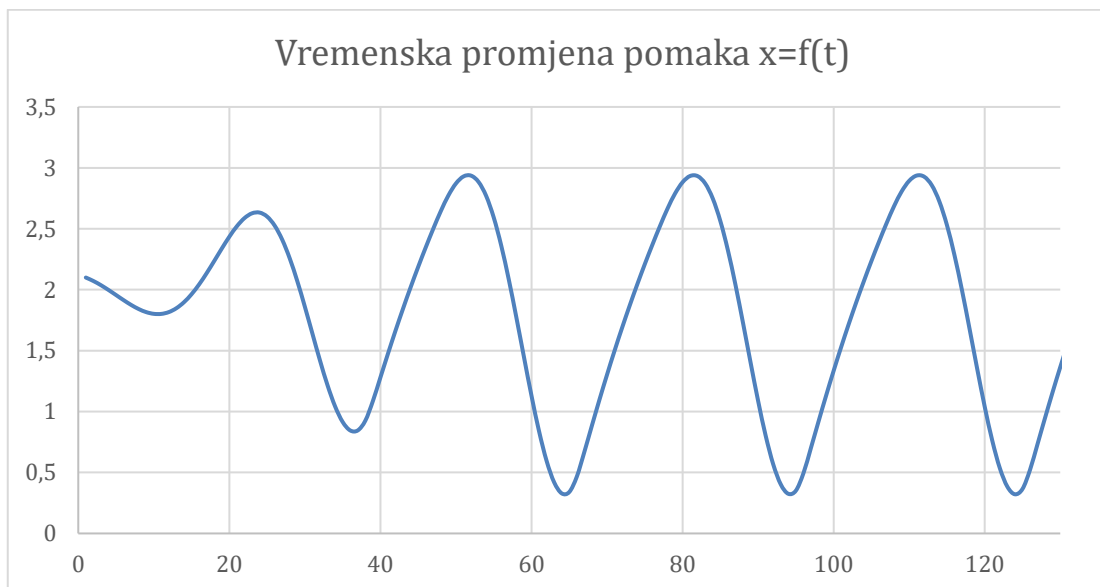
- početno vrijeme  $t_0$
- brzina gibanje trake  $v_{tr}$
- masa klizača  $m$
- krutost opruge  $c$

Broj koraka  $h$  dobivamo dijeljenjem razlike krajnjeg i početnog vremena s brojem koraka  $N$ . Ako je  $(y-v_0) < 0$  tada vrijedi:

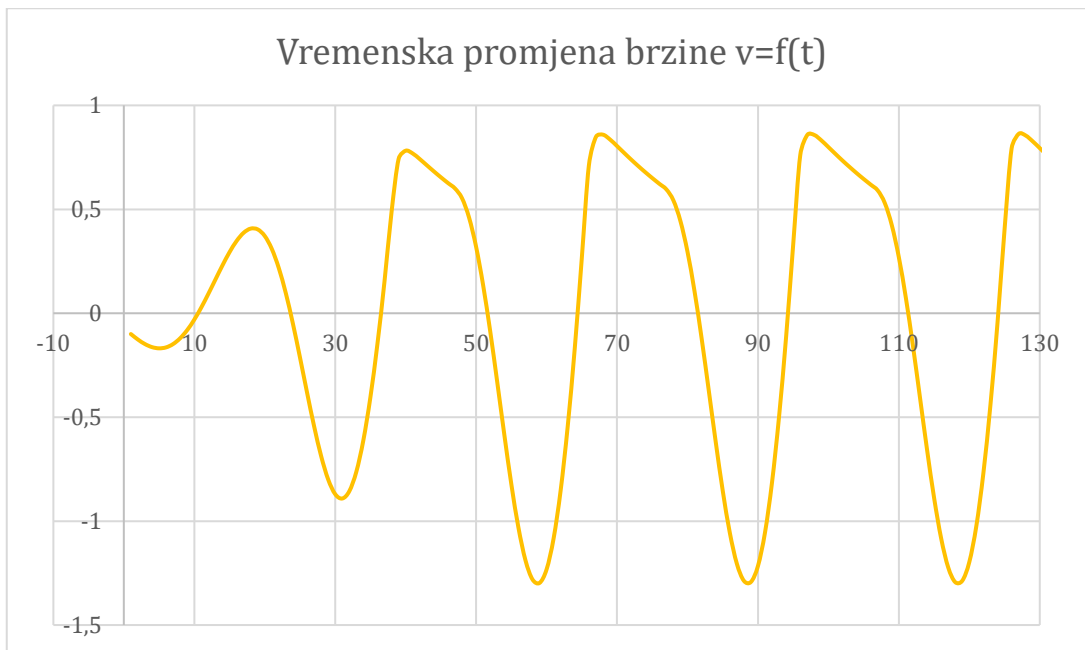
$$y = \left(\frac{1}{m}\right) (-6(y-1) - cx) \quad (6.4)$$

U suprotnome vrijedi:

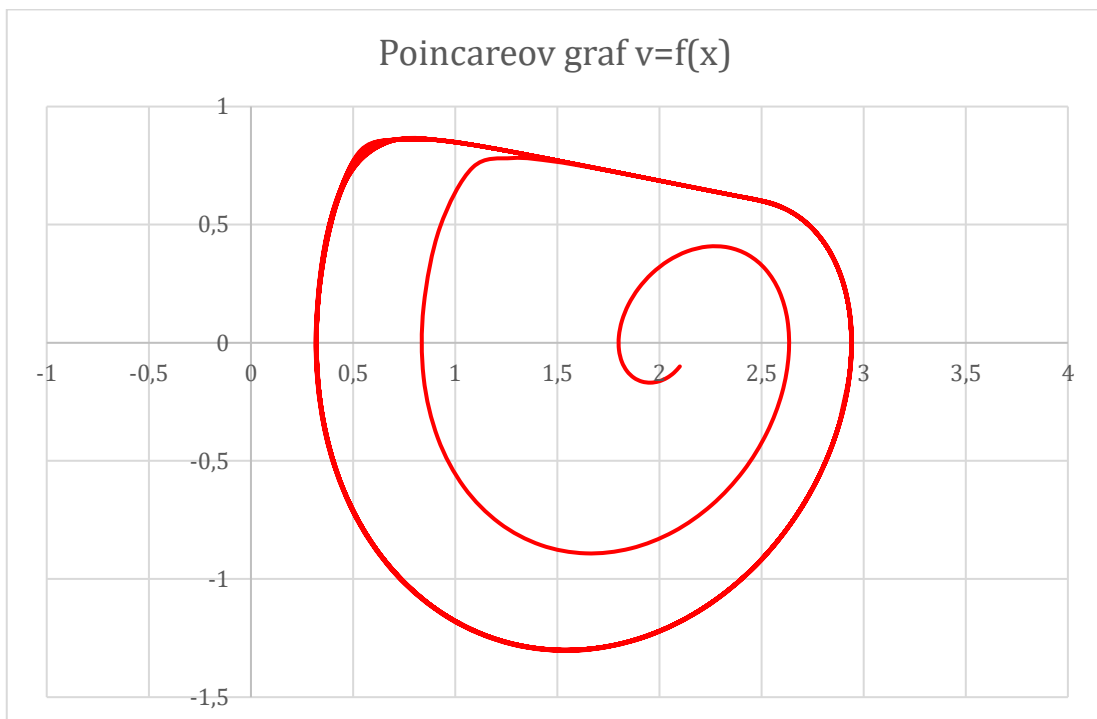
$$y = \left(\frac{1}{m}\right) (-(1 + 1,4^{(-0,5|y-1|+0,2)} \sin(y-1) - cx) \quad (6.5)$$



Slika 6.10. Dijagram vremenske promjene pomaka  $x$

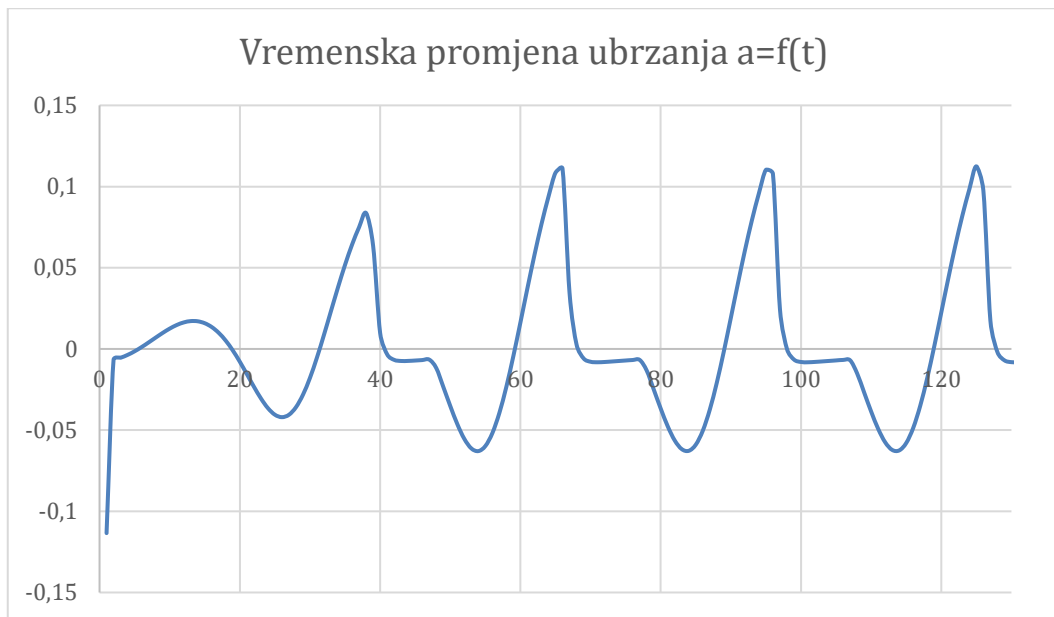


*Slika 6.11. Dijagram vremenske promjene brzine  $v$*



*Slika 6.12. Poincareov graf promjene brzine  $u$  u ovisnosti o pomaku*

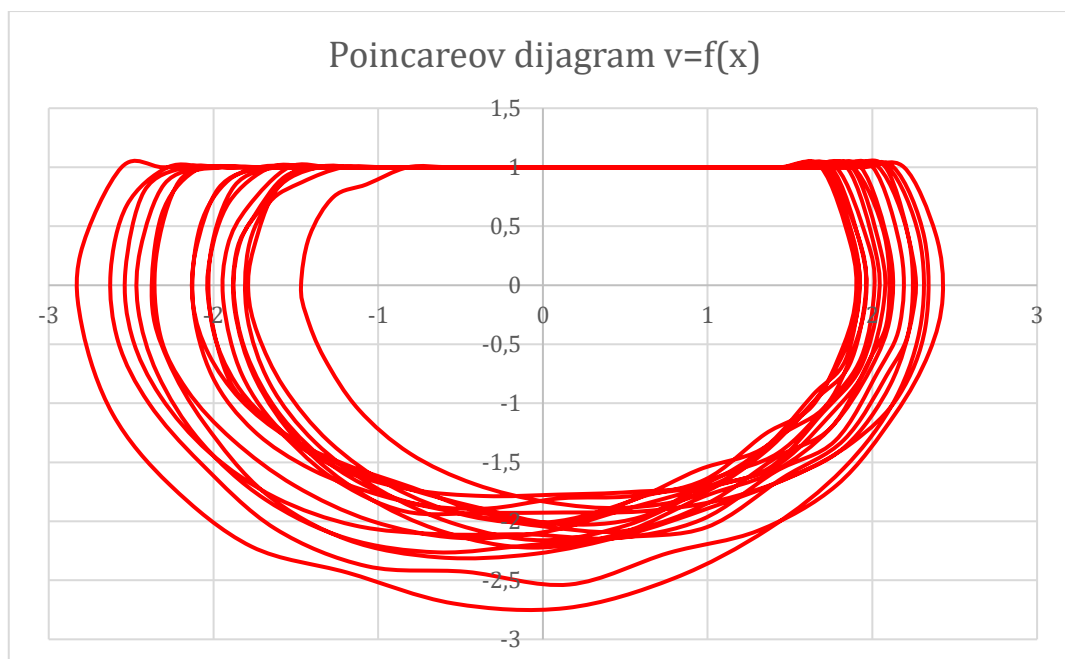




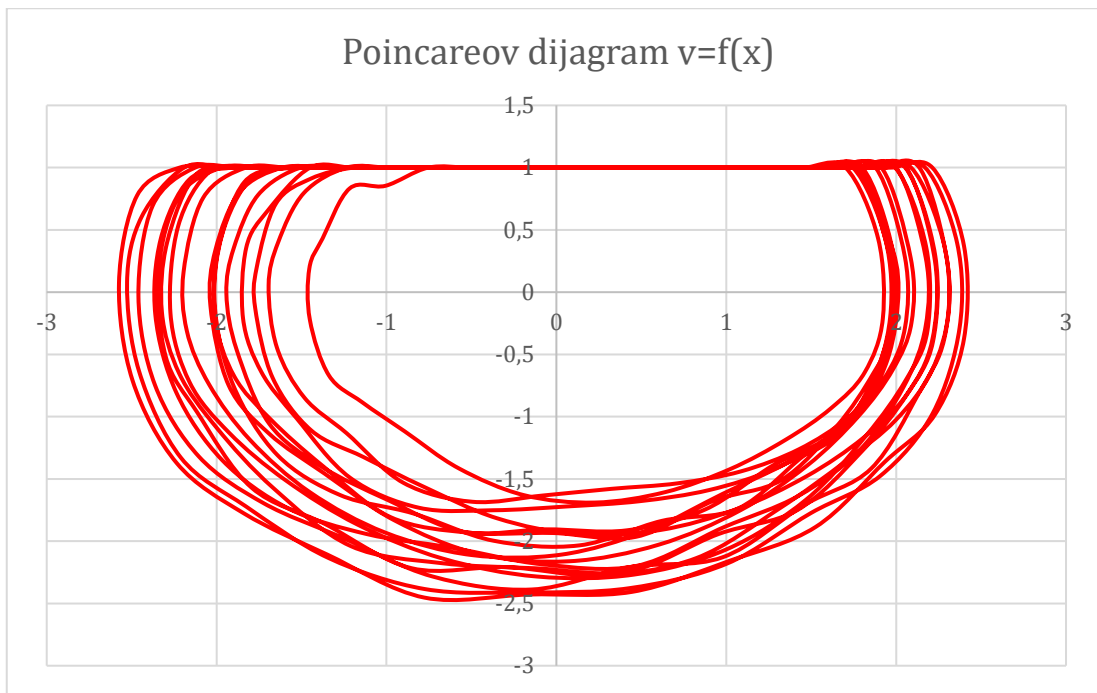
Slika 6.13. Dijagram vremenske promjene ubrzanja  $a$

### 6.5. Model kaotičnih vibracija efekta lijepljenje-klizanje

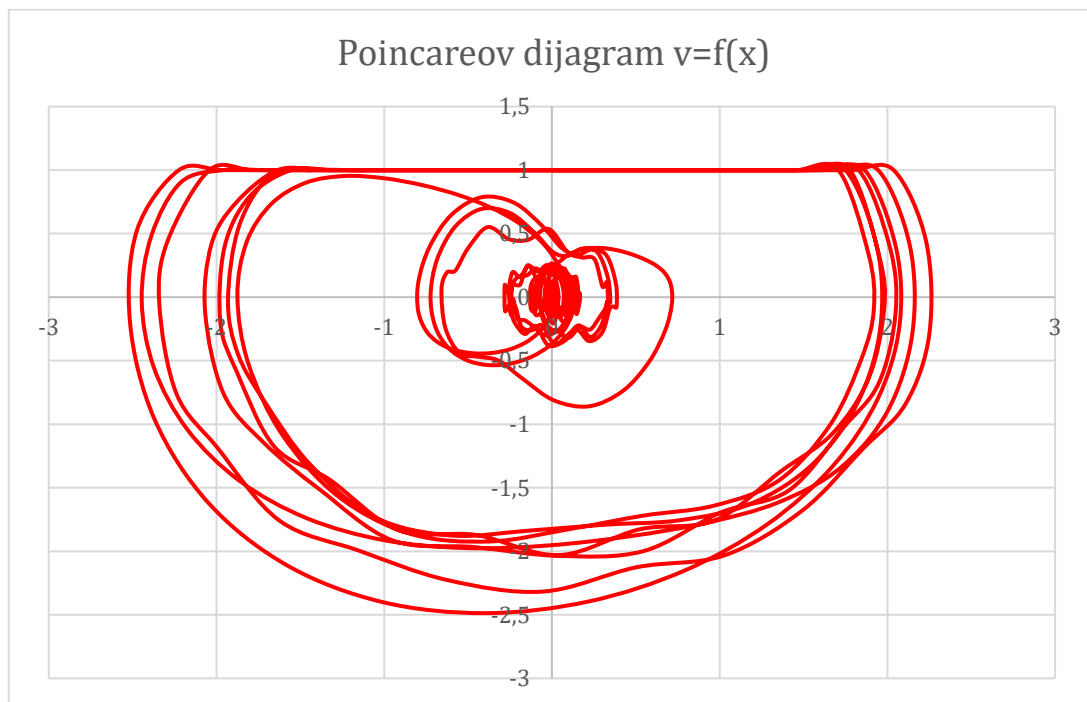
Kaotične vibracije efekta lijepljenje-klizanje su pod utjecajem vanjskih pobuda i koristi se različita vrijednost varijable  $\Omega$ . Kada je stupanj slobode sustava veći od dva, može se dogoditi bogatije dinamičko ponašanje nestabilne samouzbudne slick-slip vibracije. Na sljedećim slikama prikazane su kaotične vibracije s različitim vrijednostima  $\Omega$ .



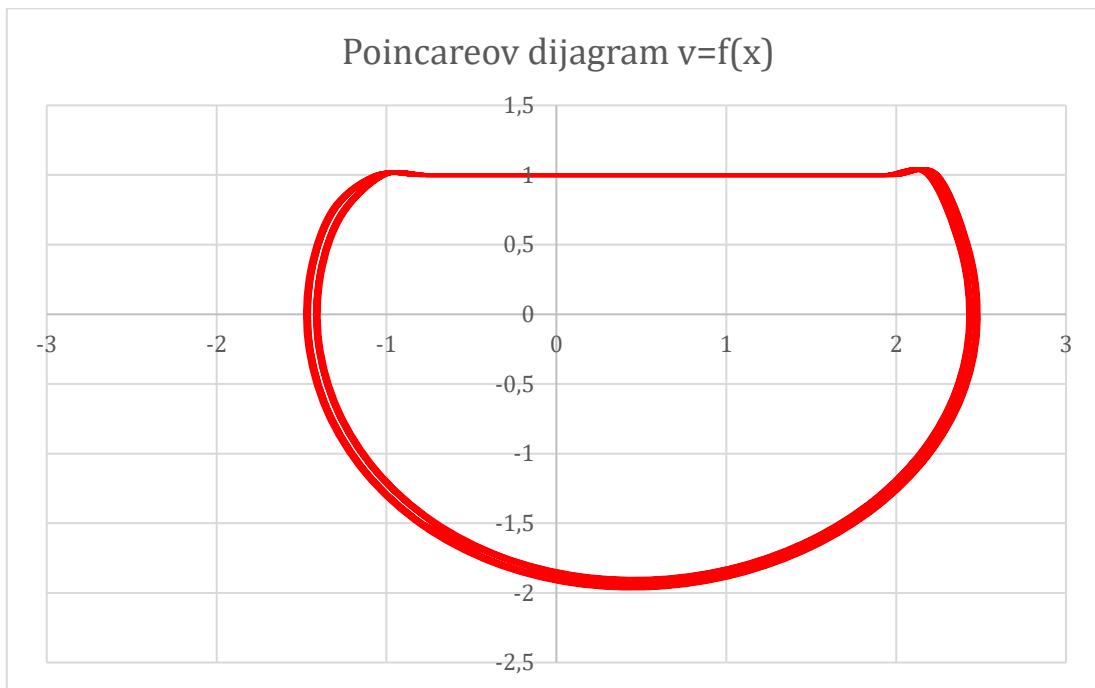
Slika 6.14. Poincareov dijagram za  $\Omega=1,65$



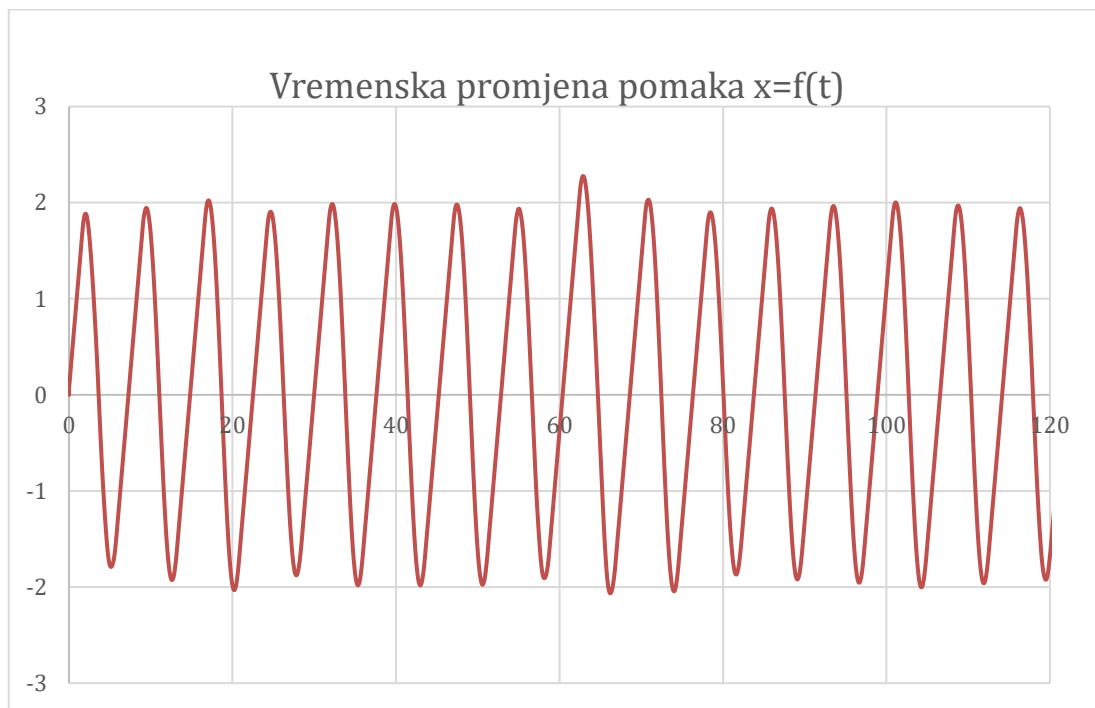
*Slika 6.15. Poincareov dijagram za  $\Omega=1,22$*



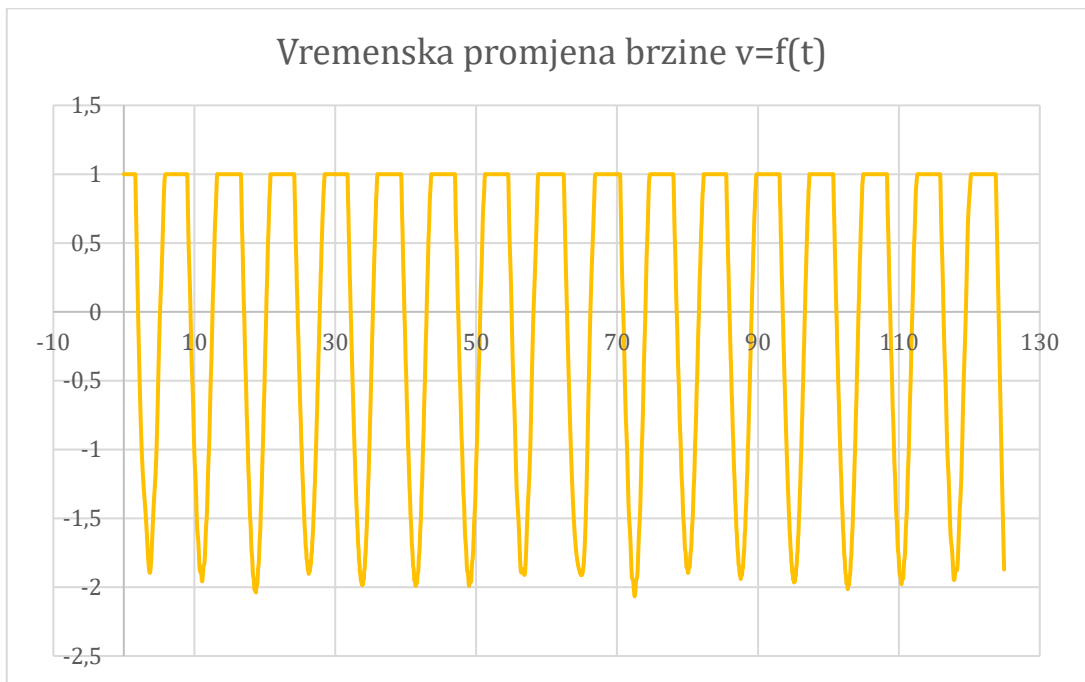
*Slika 6.16. Poincareov dijagram za  $\Omega=0,35$*



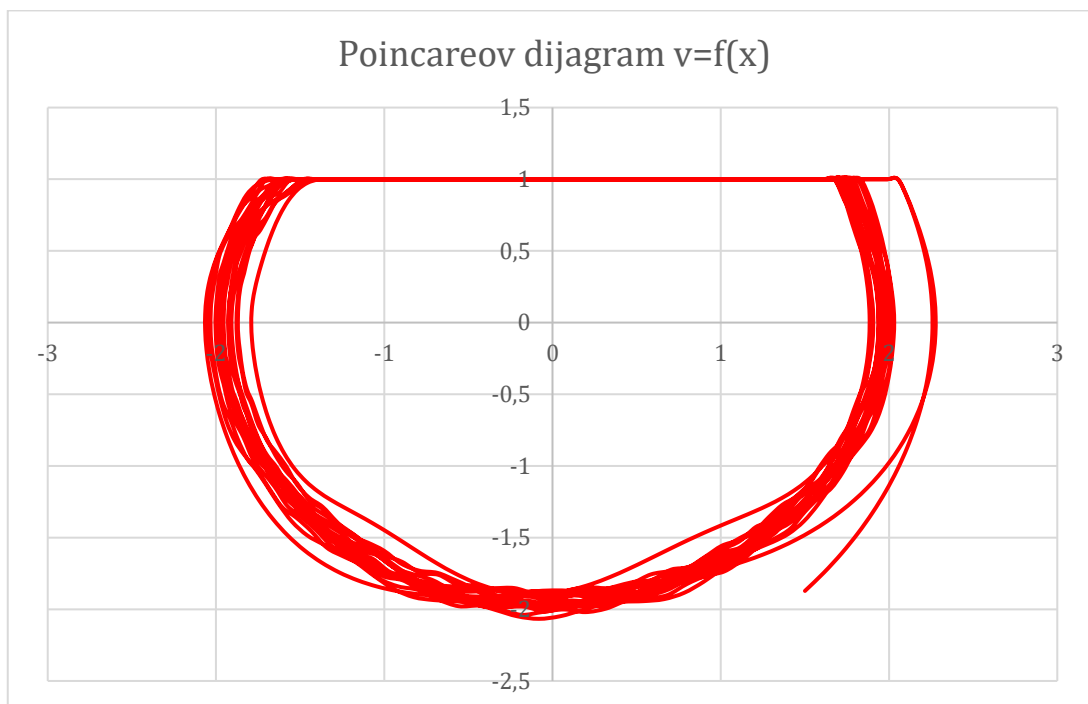
*Slika 6.17. Poincareov dijagram za  $\Omega=0$*



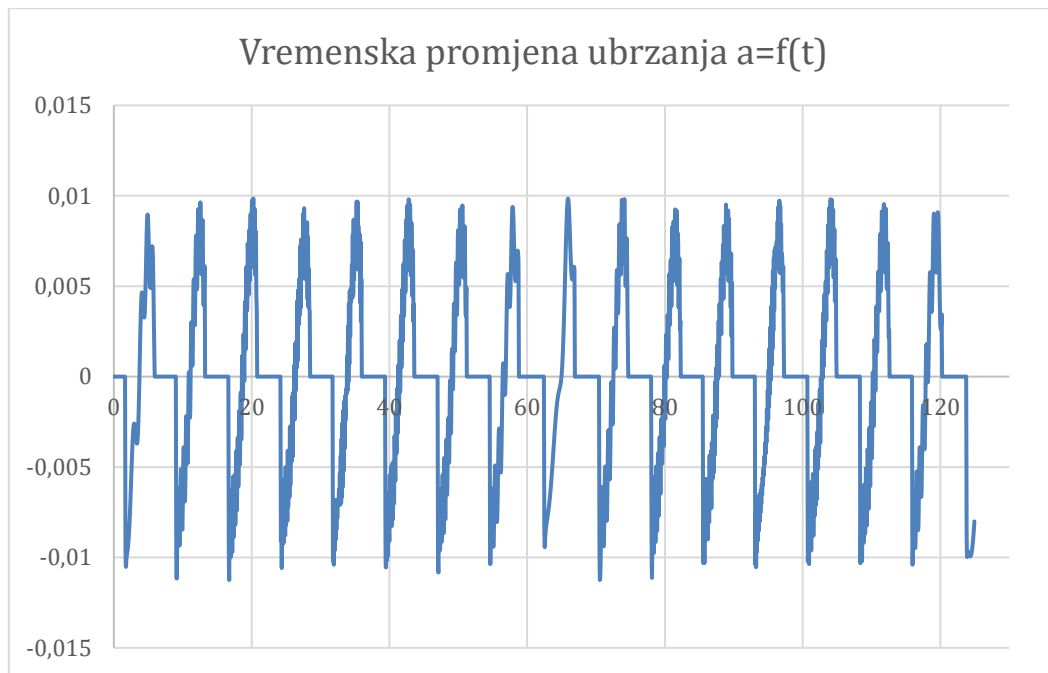
*Slika 6.18. Dijagram vremenske promjene pomaka  $x$*



*Slika 6.19. Dijagram vremenske promjene brzine  $v$*



*Slika 6.20. Poincareov dijagram promjene brzine u ovisnosti o pomaku*

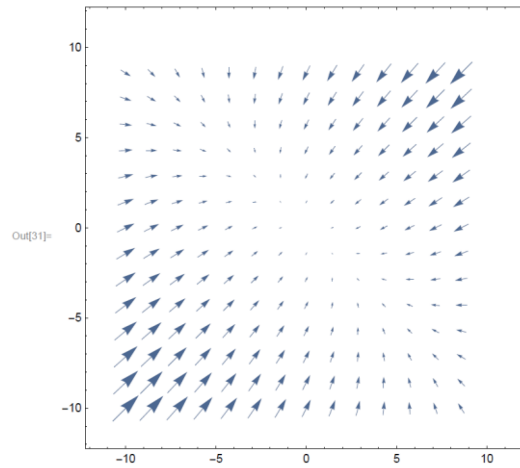


Slika 6.21. Dijagram vremenske promjene ubrzanja  $a$

## 6.6. Matematički model nestabilnosti uslijed sprezanja modova

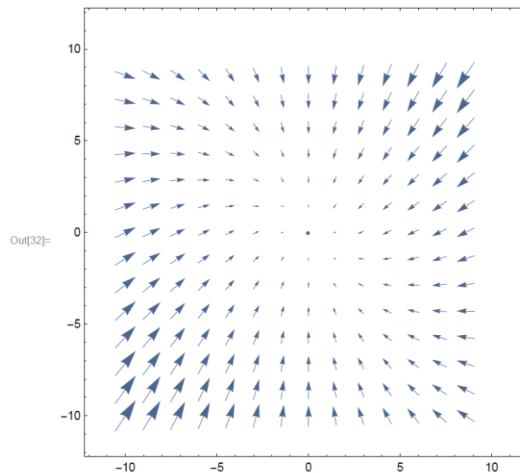
U potpoglavlju 5.4 opisan je model nestabilnosti uslijed sprezanje modova. Pokretna traka konstantne brzine  $v_B$  koju gura konstantna normalna sila  $F_N$  na blok je modeliran kao diskretna masa  $m$ . Blok drže u položaju dvije linearne opruge  $k_1$  i  $k_2$  i postoji linearna opruga  $k_3$  koja se može uzeti kao model za normalni kontakt krutost između bloka i pokretne trake. Za uzimanje u obzir trenje klizanja Coulombovog tipa pretpostavlja se da je sila trenja  $F_F$  s konstantnim koeficijentom trenja  $\mu$ . U nastavku su prikazani dobiveni grafički prikazi modela nestabilnosti uslijed sprezanja modova koji su riješeni pomoću softvera Mathematica. Rezultati ovog primjera pokazuju dobru podudarnost s onima prikazanim u [20].

```
In[31]= VectorPlot[{-2 * x - y, -x - 2 * y}, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}]
```



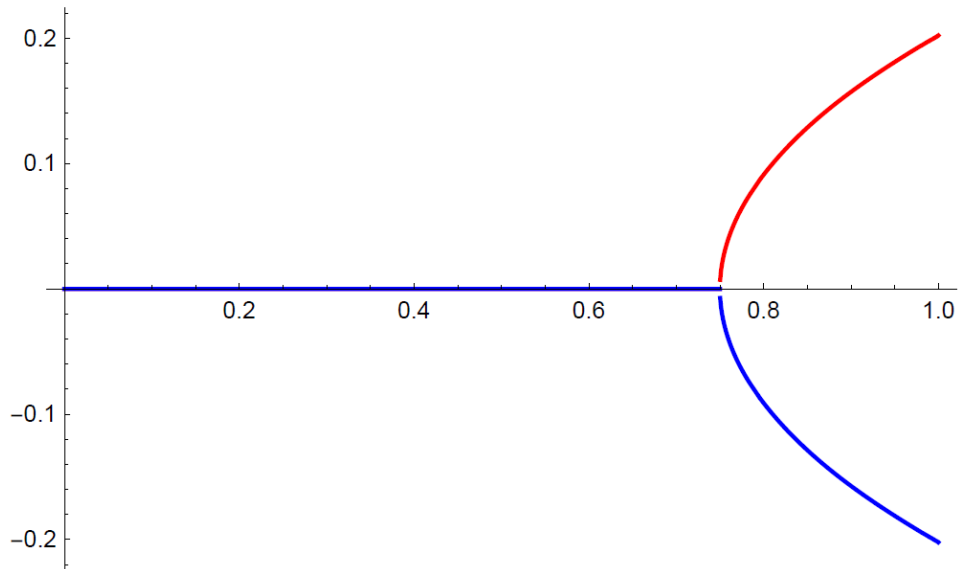
Slika 6.22. Vektorska polja sile sustava

```
In[32]= VectorPlot[{-2 * x, -x - 2 * y}, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}]
```

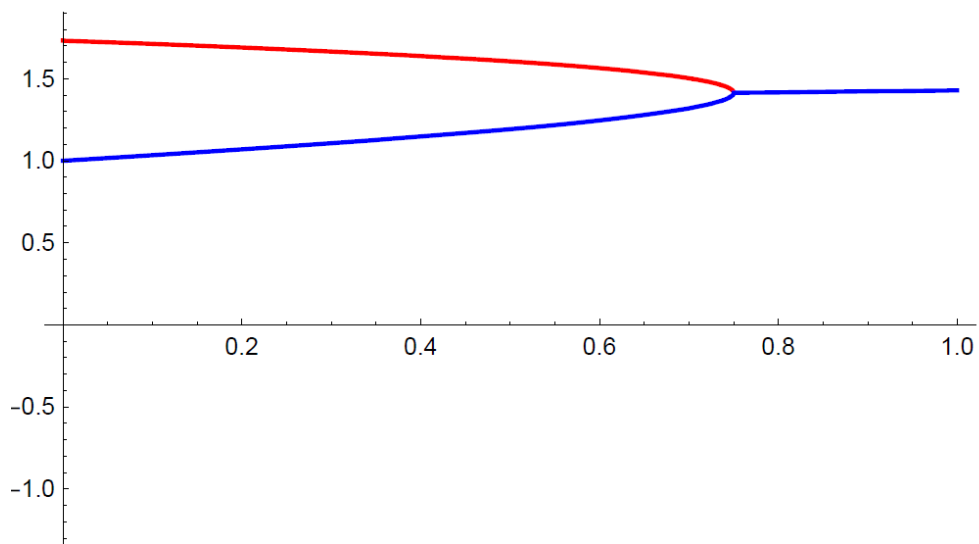


Slika 6.23. Vektorska polja sustava

Na slici 6.22 i 6.23 vektorska polja sile sustava ovisno o vrijednosti  $\Delta$ . Kada trenje postaje znatno bitno, tj. kada je  $\Delta \rightarrow 1$ , vektor polja se sve više iskrivljuje te se ova dva pravca sve više približavaju dok se konačno ne spoje u rubnoj točki  $\Delta=1$ . U nestabilnom režimu gdje je  $\Delta > 1$ , dolazi do izobličenja vektorskog polja i ono doseže toliku jačinu da niti jedan smjer pomaka nije ostao gdje bi povratna sila vratila masu natrag u ishodište izvornog pomaka. Umjesto toga, regulirajuće gibanje će pokazivati spiralno ponašanje koje odgovara formalnom izgledu složenih načina. Gibanje se sastoji od periodične izmjene energije između gibanja u ravnini i gibanja izvan ravnine i sustava trenja.



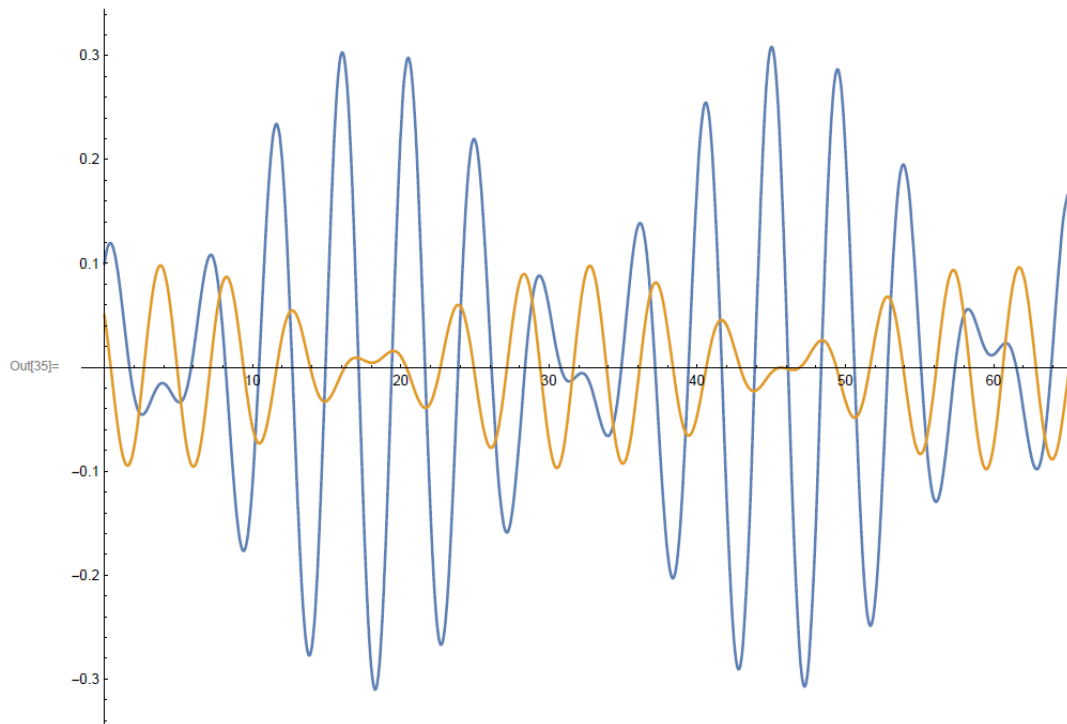
Slika 6.24. Realni dio izraza



Slika 6.25. Imaginarni dio izraza

Na slikama 6.26 i 6.27 prikazano je kako se vremenski niz faze pomaka prilagođava tijekom vremena kako bi se omogućio odgovarajući prijenos energije. Kada se energija mora prenijeti od gibanja u ravnini do gibanja izvan ravnine, oscilacija u ravnini zaostaje za oscilacijom izvan ravnine. Za slučaj kada se tok energije izokrene, tada se izokrene i fazni odnos.

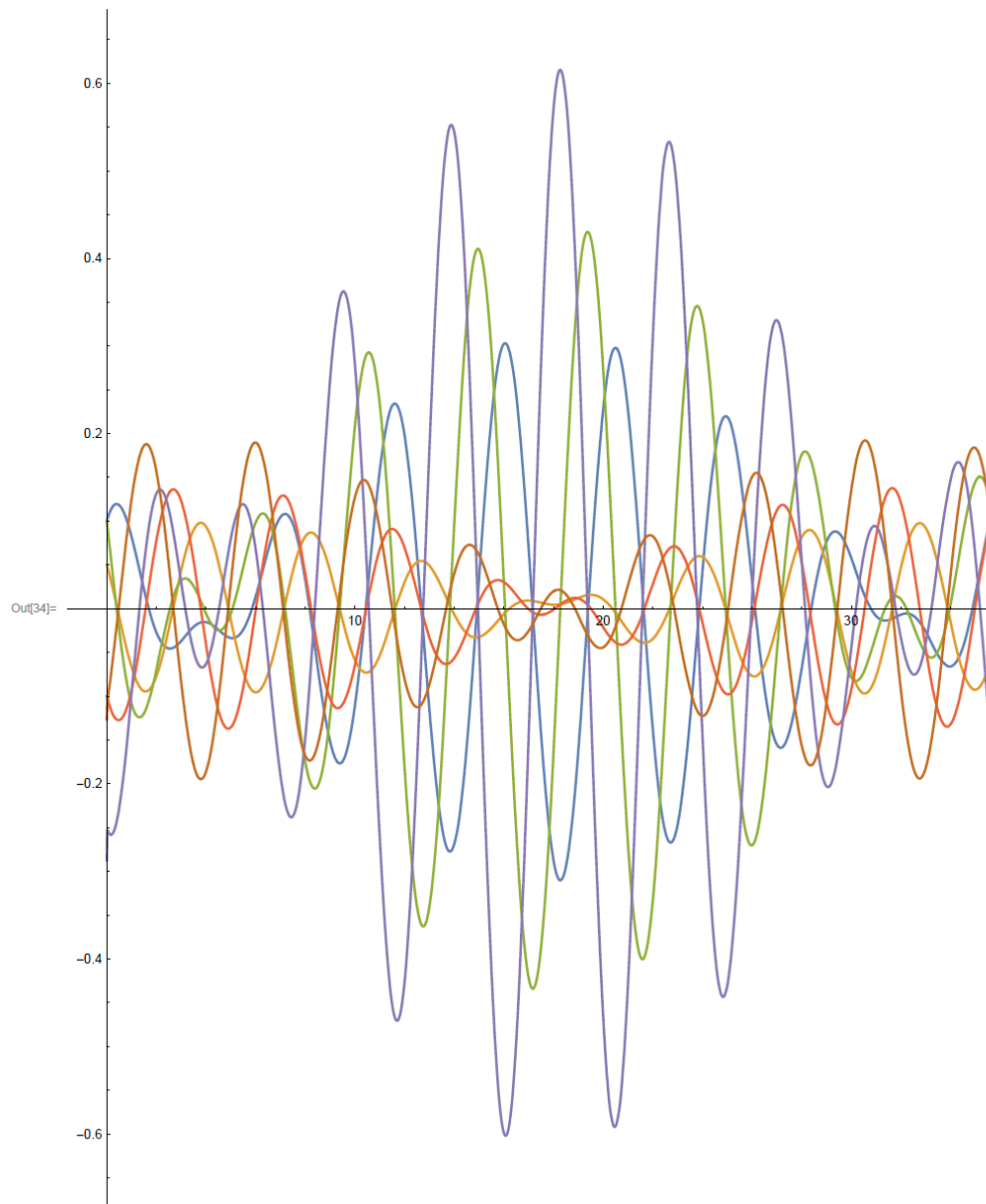
```
In[35]= Plot[Evaluate[{y[t], x[t]} /. ss], {t, 0, 75}, PlotStyle -> Automatic]
```



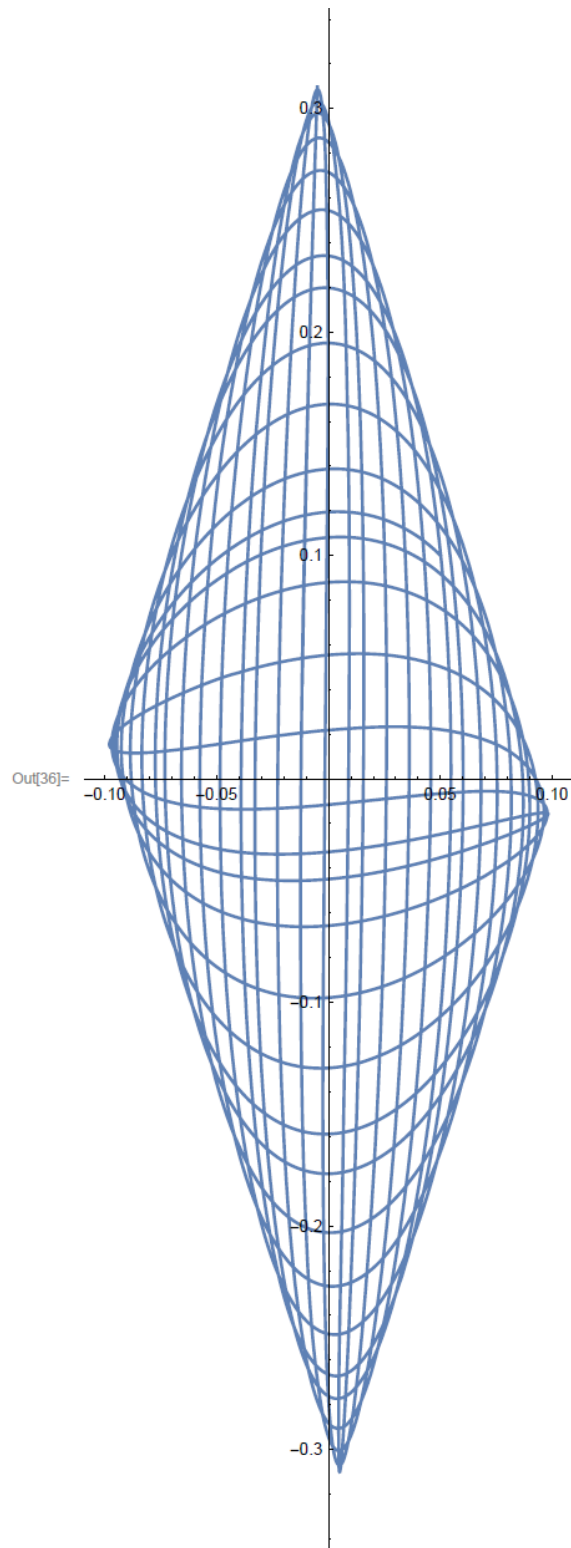
*Slika 6.26. Dijagram vremenske promjene pomaka*



```
In[34]:= Plot[Evaluate[{y[t], x[t], y'[t], x'[t], y''[t], x''[t]} /. ss],  
{t, 0, 75}, PlotStyle -> Automatic]
```



*Slika 6.27. Dijagram promjene pomaka u vremenu*



*Slika 6.28. Trodimenzionalni dijagram pomaka*

## 7. ZAKLJUČAK

Ideja ovog završnog rada je bila detaljno analizirati i napraviti matematičke modele za vibracija pobuđenih suhim trenjem. S teoretskog aspekta detaljno je obrađen fizikalni pojam trenja i svi mehanizmi vezani za njegovo pojavljivanje u prirodi i tehničkoj praksi. Nadalje opisani su osnovni mehanizmi nestabilnosti koji izazivaju samouzbudne vibracije, kao i fizikalni modeli i njihova matematička formulacija. Za osnovne mehanizme nestabilnosti koji izazivaju samouzbudne vibracije nadalje su razvijeni i izrađeni matematički i numerički modeli pomoću programskih paketa Mathematica, Excel i VBA. Pomoću istih je izrađeno nekoliko primjera koji ilustrativno potkrepljuju opisane nelinearne dinamičke efekte kao i njihove matematičke i numeričke modele. Između tih primjera nalaze se i dva primjera koja potvrđuju rezultate matematičkih modela obrađenih u relevantnoj svjetskoj literaturi.

## LITERATURA

1. S interneta, [https://www.stle.org/files/What\\_is\\_tribology/Tribology](https://www.stle.org/files/What_is_tribology/Tribology), pogledano 15. kolovoza 2022.
2. S interneta, <https://www.sci.news/physics/science-ancient-egyptians-wet-sand-01894.html>, pogledano 16. kolovoza 2022.
3. S interneta, <https://www.elecrow.com/cnc-turning-service.html>, pogledano 16. kolovoza 2022.
4. Jurković, Z.: Proizvodni strojevi, alati i naprave, predavanje s kolegija, Rijeka, 2021.
5. Chen, G. S.; Liu, X.: "Friction Dynamics: Principles and Applications", Woodhead Publishing, Sawston, 2016.
6. S interneta, <https://sredanovich.wordpress.com/2014/01/30/kako-rjesavati-zadatke-koji-ukljucuju-trenje/>, pogledano 18. kolovoza 2022.
7. S interneta, <https://bit.ly/3Udv5kd>, pogledano 19. kolovoza 2022.
8. S interneta, <http://shorturl.at/ejMY9>, pogledano 20. kolovoza 2022.
9. S interneta, <https://www.stem.ba/fizika/tutorijali/item/20-trenje>, pogledano 20. kolovoza 2022.
10. Wencai, Y.: "Reflection Seismology: Theory, Data Processing and Interpretation", Elsevier, Amsterdam, 2014.
11. S interneta, <https://tehnika.lzmk.hr/tehnickaenciklopedija/vibracije.pdf>, pogledano 25. kolovoza 2022.
12. Glišović, J.; Radonjić, R.; Miloradović, D.: "Experimental Method for Analyzing Friction Phenomenon Related to Drum Brake Squeal", Tribology in Industry, 32(4): 28-35. str., Kragujevac, 2010.
13. Sinclair, D.; Manville, N.: "Frictional vibrations", Journal of Applied Mechanics, 22, 13-207. str., Lund, 1955.
14. S interneta, <https://phoenixautosshop.com/auto-repair-brake-systems/>, pogledalo 25. kolovoza 2022.
15. Spurr, R. T.: "A theory of brake squeal", Proceedings of Automobile Division, 33-52. str., California, 1961.
16. Ghazaly, N. M.; El-Sharkawy, M.; Ahmed, I.: "A Review of Automotive Brake Squeal Mechanisms", Journal of Mechanical Design and Vibration, 1(1), 5-9. str., Cairo, 2013.
17. North, N. R.: "Disc brake squeal", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 38, 169-176. str., California, 1976.

18. Li, Z.: "Non-smooth Dynamic Behaviour of Friction-induced Self-excited Vibration", The University of Liverpool, Liverpool, 2017.
19. Jordan, D. W.; Smith, P.: "Nonlinear Ordinary Differential Equations", Oxford University Press, New York, 2007.
20. Hofmann, N.; Fischer, M.; Allgaier, R.; Gaul, L.: "A minimal model for studying properties of the mode - coupling type instability in friction induced oscillations", Mechanics research Communications, 29, 197-205. str., Amsterdam, 2009.

## POPIS SLIKA

Slika 2.1. Klizanje velikog kipa uz pomoć maziva [2] .....	2
Slika 2.2. Tokarenje [3].....	3
Slika 2.3. Tipični primjeri trošenja u strojarstvu [4] .....	3
Slika 2.4. Tipični primjeri trošenja u strojarstvu [6] .....	4
Slika 2.5. Usporedni prikaz suhog i trenja uz podmazivanje [7] .....	5
Slika 2.6. Prikaz suhog trenja [9] .....	5
Slika 3.1. Prikaz osnovnih elemenata vibracijskih modela [11] .....	9
Slika 3.2. Prikaz karakteristika linearnih (a) i nelinearnih (b) opruga [11] .....	10
Slika 4.1. Prikaz negativnog prigušivanja [12] .....	12
Slika 4.2. Sklop kočionog diska [14] .....	13
Slika 4.3. Grafički prikaz koeficijenta trenja kod stick-slip efekta [12] .....	13
Slika 4.4. Prikaz faza stick-slip efekta tijekom vremena [4].....	14
Slika 4.5. Djelovanje stick -slip efekta [4] .....	14
Slika 4.6. Prikaz mehanizma sprag-slip [16].....	15
Slika 4.7. Sprezanje modova između komponenti kočnica [16] .....	16
Slika 5.1. Sustav s jednim stupanjem slobode sustava masa-opruga-remen [18] .....	17
Slika 5.2. Model masa-opruga-remen s jednim stupanjem slobode [18] .....	19
Slika 5.3. Model masa-remen s jednim stupnjem slobode i s kinematičkom pobudom [18].....	20
Slika 5.4. Model sa dva stupnja slobode [18] .....	22
Slika 5.5. Model krutog štapa s pokretnim remenom [18].....	23
Slika 6.1. Fazni dijagram za $x_0=1,5$ .....	26
Slika 6.2. Fazni dijagram za $x_0=0$ .....	26
Slika 6.3. Fazni dijagram za $x_0=3$ .....	27
Slika 6.4. Fazni dijagram za $x_0=2,05$ .....	27
Slika 6.5. Fazni dijagram ukupnih početnih uvjeta .....	28
Slika 6.6. Dijagram vremenske promjene pomaka $x$ .....	29
Slika 6.7. Dijagram vremenske promjene brzine $v$ .....	29
Slika 6.8. Dijagram vremenske promjene ubrzanja $a$ .....	30
Slika 6.9. Poincareov graf promjene brzine $u$ u ovisnosti o pomaku .....	30
Slika 6.10. Dijagram vremenske promjene pomaka $x$ .....	31
Slika 6.11. Dijagram vremenske promjene brzine $v$ .....	32
Slika 6.12. Poincareov graf promjene brzine $u$ u ovisnosti o pomaku .....	32
Slika 6.13. Dijagram vremenske promjene ubrzanja $a$ .....	33

Slika 6.14. Poincareov dijagram za $\Omega=1,65$ .....	33
Slika 6.15. Poincareov dijagram za $\Omega=1,22$ .....	34
Slika 6.16. Poincareov dijagram za $\Omega=0,35$ .....	34
Slika 6.17. Poincareov dijagram za $\Omega=0$ .....	35
Slika 6.18. Dijagram vremenske promjene pomaka x .....	35
Slika 6.19. Dijagram vremenske promjene brzine v .....	36
Slika 6.20. Poincareov dijagram promjene brzine u ovisnosti o pomaku .....	36
Slika 6.21. Dijagram vremenske promjene ubrzanja a.....	37
Slika 6.22. Vektorska polja sile sustava .....	38
Slika 6.23. Vektorska polja sustava .....	38
Slika 6.24. Realni dio izraza.....	39
Slika 6.25. Imaginarni dio izraza .....	39
Slika 6.26. Dijagram vremenske promjene pomaka .....	40
Slika 6.27. Dijagram promjene pomaka u vremenu.....	41
Slika 6.28. Trodimenzionalni dijagram pomaka .....	42

## SAŽETAK

U ovom završnom radu obrađeni su mehanizmi nestabilnosti koji izazivaju samouzbudne vibracije. Za svaki je mehanizam detaljno opisana teoretska pozadina kao i matematička formulacija pojedinačnog mehanizma. U programskim paketima Excel, VBA i Mathematica izrađena su programska rješenja za svaki od matematičkih modela pobudnih mehanizama, te su na posljepku analizirani grafički prikazi dobiveni korištenjem numeričkih metoda.

**Ključne riječi:** vibracije, trenje, stick-slip efekt, suho trenje, mehanizmi izazvani trenjem



## **ABSTRACT**

In this final paper, the mechanisms of instability that cause self-induced vibrations are discussed. For each mechanism, the theoretical background as well as the mathematical formulation of the individual mechanism is described in detail. In the program packages Excel, VBA and Mathematica, program solutions were created for each of the mathematical models of the excitation mechanisms, and finally the graphical representations obtained using numerical methods were analyzed.

**Keywords:** vibration, friction, stick-slip, sprag-slip, dry friction, friction-induced mechanisms