

# Utjecaj tijela zupčanika na naprezanja u njegovom korijenu zuba

---

**Par, Filip**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:190:378204>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-15**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Engineering](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI

**TEHNIČKI FAKULTET**

Diplomski sveučilišni studij strojarstva

Diplomski rad

**UTJECAJ TIJELA ZUPČANIKA NA NAPREZANJA U  
NJEGOVOM KORIJENU ZUBA**

Rijeka, siječanj 2023.

Filip Par

0069081378

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Diplomski sveučilišni studij strojarstva

Diplomski rad

**UTJECAJ TIJELA ZUPČANIK NA NAPREZANJA U  
NJEHOVOM KORIJNU ZUBA**

Mentor: Prof. dr. sc. Marina Franulović

Rijeka, siječanj 2023.

Filip Par

0069081378

Rijeka, 15. ožujka 2022.

Zavod: **Zavod za konstruiranje u strojarstvu**  
Predmet: **Mehaničke konstrukcije**  
Grana: **2.11.01 opće strojarstvo (konstrukcije)**

## ZADATAK ZA DIPLOMSKI RAD

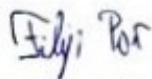
Pristupnik: **Filip Par (0069081378)**  
Studij: **Diplomski sveučilišni studij strojarstva**  
Modul: **Konstruiranje i mehatronika**

Zadatak: **Utjecaj tijela zupčanika na naprezanja u njegovom korijenu zuba / Influence of the gear body on tooth root stresses**

### Opis zadatka:

Potrebno je dimenzionirati zupčasti prijenos sa cilindričnim zupčanicima za prijenos snage 10 kW i brzinu vrtnje na pogonskom zupčaniku od 1450 min<sup>-1</sup> uz prijenosni omjer 3 primjenom programskog paketa Kisssoft, uz procjenu relevantnih utjecajnih faktora. Model gonjenog zupčanika potrebno je diskretizirati te provesti numeričku analizu naprezanja i deformacija u korijenu zuba. Za različite geometrijske karakteristike tijela zupčanika zatim je potrebno provesti veći broj analiza naprezanja i deformacija u korijenu te utvrditi optimalni dizajn.

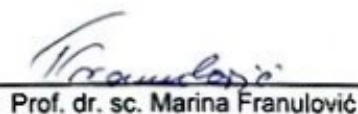
Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.



Zadatak uručen pristupniku: 21. ožujka 2022.

Rok za predaju rada: 5. srpnja 2022.

Mentor:

  
Prof. dr. sc. Marina Franulović

Predsjednik povjerenstva za  
diplomski ispit:

  
Prof. dr. sc. Kristian Lenić

## **IZJAVA**

Izjavljujem da sam diplomski rad „Utjecaj tijela zupčanika na naprezanja u njegovom korijenu“ samostalno izradio, te da sam koristio navedenu literaturu i upute mentorice prof. dr. sc. Marine Franulović.

Rijeka, siječanj 2023.

Filip Par

---

## **ZAHVALA**

Zahvaljujem se mentorici prof. dr. sc. Marina Franulović na savjetima, strpljenju i pomoći kod izrade rada. Također, zahvaljujem se obitelji i prijateljima na podršci i razumijevanju.

## Sadržaj:

1 UVOD .....	1
2 OSNOVNA O ZUPČASTIM PRIJENOSNICIMA .....	2
3 NAPREZANJE U KORIJENU ZUBA .....	6
4 METODA KONAČNIH ELEMENATA .....	11
5 CILJ RADA.....	13
5.1 Projektni proračun zupčanog prijenosa .....	13
6 DISKRETIZACIJA GONJENOG ZUPČANIKA I ANALIZA NAPREZANJA I DEFORMACIJA U KORIJENU ZUBA.....	24
6.1 Analitički proračun naprezanja u korijenu zuba pomoću <i>KISSsofta</i> .....	24
6.2 Numerička analiza raspodjele naprezanja i deformacije u korijenu zuba pomoću <i>Ansys Workbench</i> .....	25
6.2.1 Položaj točke B na početku jednostrukog zahvata u kojoj djeluje normalna sila $F_{bn}$ 25	
6.2.2 Modeliranje geometrije .....	26
6.2.3 Definiranje svojstva materijala i rubnih uvjeta .....	28
6.2.4 Diskretizacija geometrije mrežom konačnih elemenata.....	29
6.2.5 Rješenje analize.....	30
6.2.6 Provjera konvergencije mreže konačnih elemenata .....	32
6.2.7 Usporedba rezultata analitičkog proračuna i numeričke analize korijena zuba .....	35
7 UTJECAJ DEBLJINE VIJENCA GONJENOG ZUPČANIKA NA NAPREZANJE U KORIJENU ZUBA .....	37
7.1 Naprezanje i deformacija u korijenu zuba za $S_R = 4m_n$ .....	37
7.2 Naprezanje i deformacija u korijenu zuba za $S_R = 3,5m_n$ .....	39
7.3 Naprezanje i deformacija u korijenu zuba za $S_R = 3m_n$ .....	41
7.4 Naprezanje i deformacija u korijenu zuba za $S_R = 2,5m_n$ .....	42
7.5 Naprezanje i deformacija u korijenu zuba za $S_R = 2,35m_n$ .....	44
7.6 Naprezanje i deformacija u korijenu zuba za $S_R = 2m_n$ .....	45

7.7	Usporedba rezultata analitičkog proračuna i numeričke analize za različite debljine vijenca $S_R$ .....	47
8	ZAKLJUČAK .....	51
9	LITERATURA.....	52
	Popis oznaka.....	53
	Popis slika .....	56
	Popis tablica .....	59
10	SAŽETAK.....	61
11	ABSTRACT.....	62

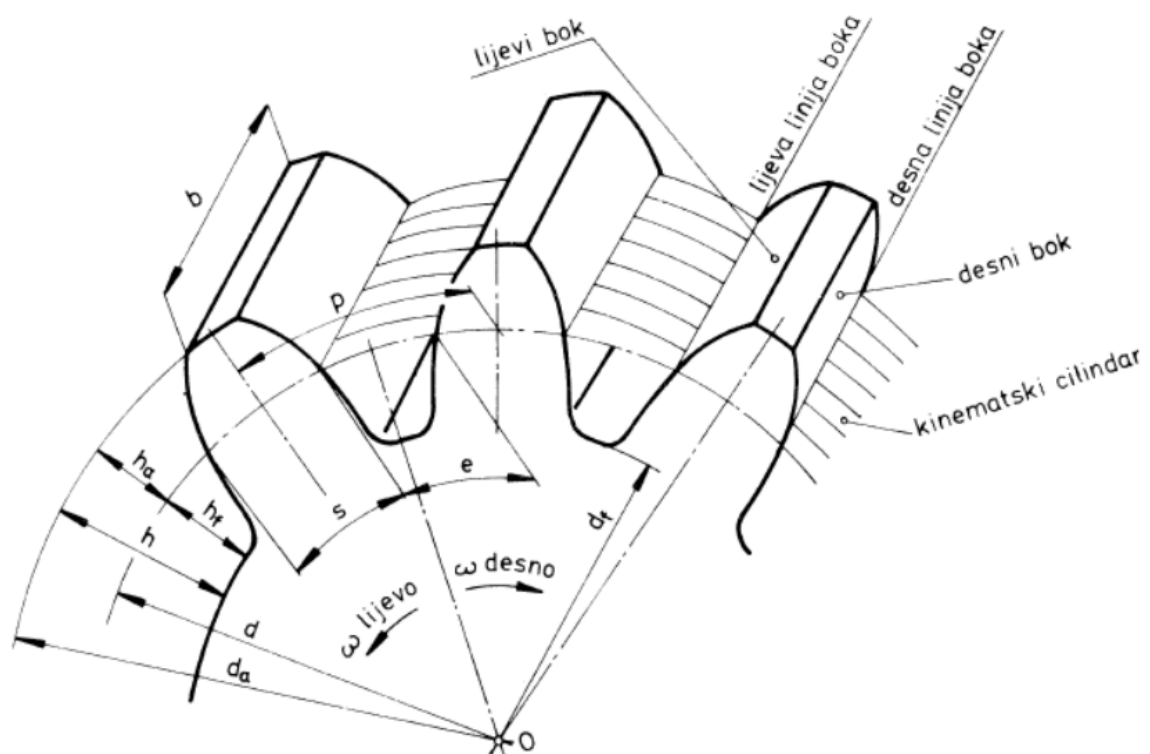


# 1 UVOD

U ovome radu potrebno je provesti istraživanje na naprezanje i deformaciju u korijenu zuba zupčanika za različite geometrijske karakteristike tijela zupčanika. Prilikom prijenosa okretnog gibanja kod zupčastih prijenosnika u zahvatu zuba javljaju se sile koje mogu dovesti do loma zuba, te na kraju može doći do kvara cijelog prijenosnika snage. Da bi se izbjegao lom zuba tj. kvar prijenosnika snage, potrebno je provesti numeričku analizu naprezanja i deformacija za kritični presjek zupčanika, a to je korijen zuba. Nadalje je potrebno mijenjati debljinu vijenca, te utvrditi kako promjena debljine vijenca utječe na naprezanje i deformaciju. Podjela rada je izvršena na dva dijela. U prvom dijelu rada objašnjene su osnove o zupčastim prijenosnicima, zatim je objašnjeno naprezanje u korijenu zuba i metoda konačnih elemenata koja je potrebna za numeričku analizu naprezanja i deformacija u korijenu zuba. Drugi dio rada temelji se na proračunu osnovne geometrije zupčanika, nakon čega je izveden detaljan proračun naprezanja u korijenu zuba u programu *KISSsoft*, te je izvedena numerička simulacija naprezanja i deformacija u korijenu zuba za različite debljine vijenca u programu *Ansys Workbench* koji se temelji na metodi konačnih elemenata. Na temelju minimalnog faktora sigurnosti protiv loma u korijenu zuba određena je minimalna debljina vijenca, te je na kraju dana usporedba rezultata.

## 2 OSNOVNA O ZUPČASTIM PRIJENOSNICIMA

Zupčanici su konstrukcijski elementi pomoću kojih se prenosi gibanje s pogonskog vratila preko pogonskog zupčanika na gonjeni zupčanik, te na gonjeno vratilo. Gibanje se prenosi zupčanicima u međusobnom zahvatu pomoću veze oblika tako da se stvara pritisak na bok zuba. Osnovna podjela zupčastih prijenosnika može se vršiti u dvije kategorije (podjela zupčastih prijenosnika s obzirom na položaj osi vratila i podjela zupčastih prijenosnika s obzirom na oblik zuba). Zupčasti prijenosnici s obzirom na položaj osi vratila mogu biti zupčanici s paralelnim osima, zupčanici kod kojih se osi sijeku i zupčanici s mimoilaznim osima. Dok s obzirom na oblik zuba kod čelnika zubi mogu biti s ravnim, pomaknutim, kosim, strelastim i lučnim zubima, a kod stožnika zubi mogu biti s ravnim, kosim, spiralnim, evolventnim i lučnim zubima. Da bi dva zupčanika u međusobnom zahvatu mogla ispravno funkcionirati moraju imati zube jednake geometrije, dok im je broj zubi uglavnom različit. Slika 2.1. prikazuje zupčanik na kojemu su kotama prikazane osnovne veličine zupčanika. U ovom slučaju se diobeni  $d$  i kinematski promjer  $d_w$  podudaraju. [1]



Slika 2.1. Zupčanik s vanjskim ozubljenjem na kojem su prikazane osnovne veličine [2]

Debljina zuba računa se kao:

$$s = \frac{p}{2} \quad (2.1.)$$

Gdje je:

$p$  – korak zuba [mm]

Širina uzubine se računa kao:

$$e \approx s = \frac{p}{2} \quad (2.2.)$$

Korak zuba  $p$  računa se kao zbroj debljine zuba  $s$  i širine uzubine  $e$ :

$$p = s + e = m \cdot \pi \quad (2.3.)$$

Modul nije mjerljiva veličina već je norma prema DIN 868, te se modulom određuju dimenzije zupčanika.

Modulom se izražava diobeni promjer  $d$ :

$$d = m \cdot z = \frac{p \cdot z}{\pi} \quad (2.4.)$$

Gdje je:

$z$  – broj zubi

Visina korijena zuba računa se prema izrazu:

$$h_f = 1,25m \quad (2.5.)$$

Tjemena visina zuba:

$$h_a = 1m \quad (2.6.)$$

Zbroj tjemene visine i visine korijena zuba daje ukupnu visinu zuba:

$$h = h_f + h_a \quad (2.7.)$$

Vanjski promjer kružnice zupčanika:

$$d_a = d + 2h_a = d + 2m \quad (2.8.)$$

Promjer kružnice zupčanika preko korijena:

$$d_f = d - 2h_f = d - 2,5m \quad (2.9.)$$

Osni razmak zupčanika:

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m(z_1 + z_2)}{2} \quad (2.10.)$$

Profil zuba pogonskog i gonjenog zupčanika treba biti izrađen tako da okomica u točki zahvata (trenutna točka dodira) na profil jednog zuba, bude također okomica na profil drugog zuba. Time se dobiva stalan prijenosni omjer što je ujedno i uvjet dobrog prijenosa zupčanika. Prilikom okretanja zupčanika točka dodira opisuje putanju koja se naziva zahvatna crta ili dodirnica. Za standardna ozubljenja ona je ravna crta, a za nestandardna ozubljenja je neka druga krivulja. Kod općeg zakona ozubljenja okomica na tangentu u točki gdje se dodiruju bokovi zuba pogonskog i gonjenog zupčanika uvijek prolazi kroz kinematski pol. Normalne komponente brzina su jednake u točki dodira, a tangencijalne se mijenjaju tijekom dodira, izazivaju klizanje bokova, a jednake su samo u kinematskom polu. Zakon ozubljenja vrijedi onda kad bokovi zuba imaju točno određeni oblik po kojem se događa zahvat. Evolventan oblik zuba je onda ako je linija po kojoj se događa zahvat zuba pravac. Evolventa je krivulja koju opisuje točka na pravcu koji se bez klizanja odvaljuje po temeljnom krugu. Značaj evolventnog ozubljenja u strojarstvu u odnosu na cikloidno ozubljenje je taj što je cikloidno ozubljenje teško za izradu i zbog drugih nedostataka. Također evolventno ozubljenje nije osjetljivo na netočnosti osnog razmaka, te je kod evolventnog ozubljenja trošenje bokova zuba veće prema korijenu. [1][2][3]

Zupčanici se izrađuju s pomakom profila da bi se postigli standardni osni razmaci, bolja svojstva ozubljenja, te da se izbjegne podrezivanje za zupčanike s malim brojem zubi. Postoje pozitivni i negativni pomaci profila, pozitivnim pomakom profila smanjuje se debljina glave zuba što može uzrokovati lom vrha zuba i povećanje debljine korijena zuba, dok negativan pomak profila ima za posljedicu povećanje debljine glave zuba i smanjenje debljine korijena zuba. [1][4]

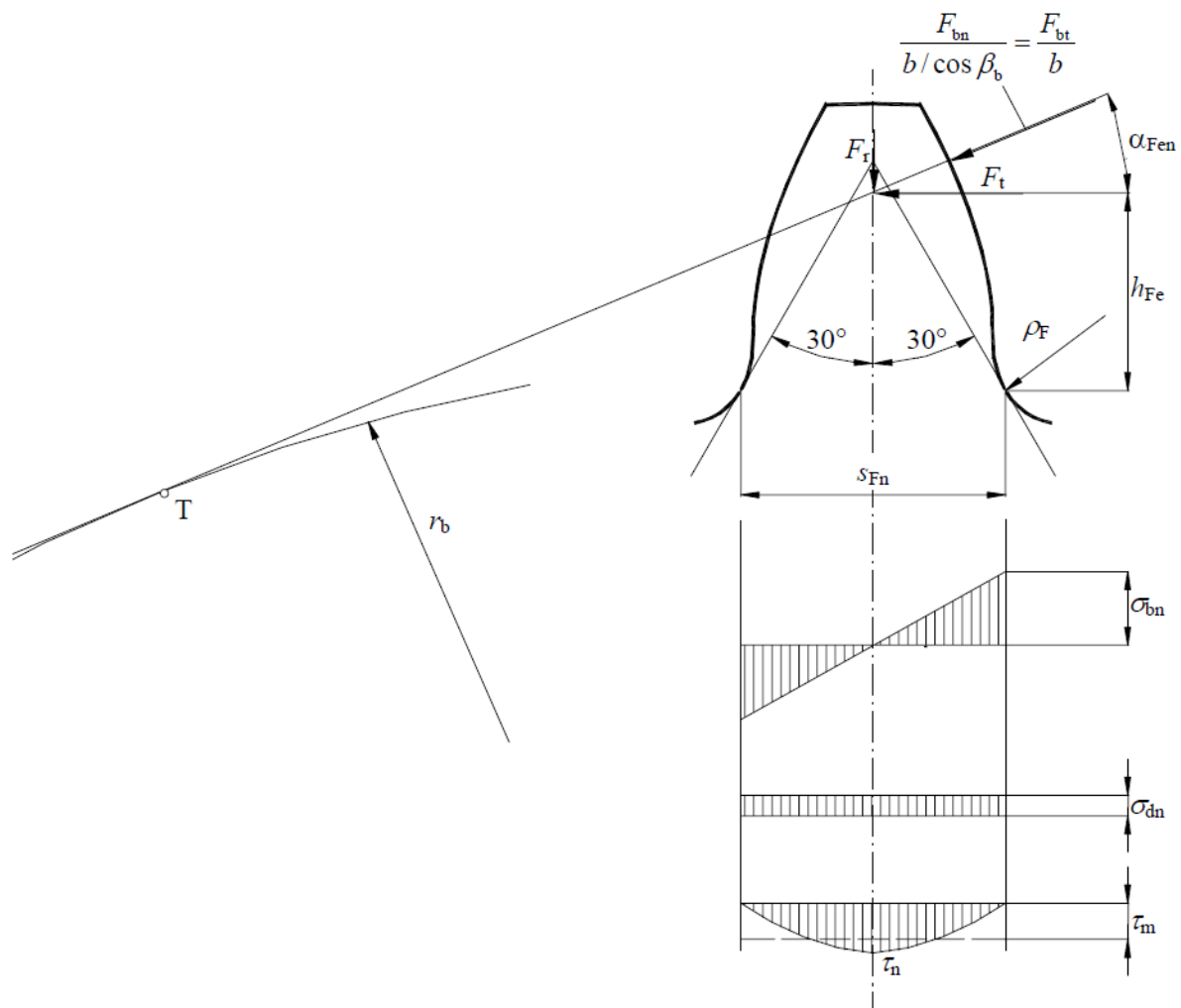
Raspodjela faktora pomaka profila treba biti takva da naprezanja u korijenu oba zuba zupčanika budu približno jednaka, brzine klizanja na vrhu zuba pogonskog zupčanika budu malo veće od

one na vrhu zuba gonjenog zupčanika i da se raspodjelom osigura izbjegavanje ekstremnih vrijednosti specifičnog klizanja.

Da bi se osigurala pravilna neprekinuta rotacija spregnutih zupčanika mora sljedeći par zuba ući u zahvat nego je prvi par zubi iz zahvata izašao. Mora postojati period prekrivanja kada su dva para zuba u zahvatu. Ako se dalje nastavi promatranje rotacije, onda prvi par zubi izlazi iz zahvata i u zahvatu ostaju samo dva zuba drugog para. Za vrijeme dvostrukog zahvata naprezanja na boku zuba su manja zbog toga što se opterećenje dijeli na dva zuba, tj. pola opterećenja će se prenijeti na jedan zub u prvom zupčastom paru, a pola na drugi zub u sljedećem zupčastom paru.

### 3 NAPREZANJE U KORIJENU ZUBA

Slika 3.1. prikazuje položaj normalne sile  $F_{bn}$  na zub zupčanika zbog koje se javljaju opterećenja. Normalna sila  $F_{bn}$  može se rastaviti na tangencijalnu silu  $F_t$  i radijalnu silu  $F_r$ . Posljedica tangencijalne sile  $F_t$  je savijanje zuba zupčanika, te se zbog toga u korijenu zuba javljaju vlačna i tlačna opterećenja. Vlačno opterećena strana korijena zuba zupčanika je mjesto nastajanja pukotina, te se iz tog razloga u proračun uzima vlačno naprezanje  $\sigma_{bn}$  kao mjerodavno naprezanje. Radi radijalne sile  $F_r$  javlja se tlačno naprezanje  $\sigma_{dn}$  i posmično naprezanje  $\tau_m$  ali zbog toga što su njihove vrijednosti manje od vlačnog naprezanja  $\sigma_{bn}$  ne uzimaju se u proračun kao mjerodavne vrijednosti. Presjek  $s_{Fn}$  koji je mjerodavan za proračun naprezanja dobije se tako da se povuku tangente na krivulju korijena zuba koje sa simetralom zatvaraju kut od  $30^\circ$ . [4]



Slika 3.1. Naprezanje u korijenu zuba [4]

Ako su zubi zupčanika izrađeni sa standardnim ozubljenjem ili ako zupčanici imaju stupanj prekrivanja profila  $2 < \varepsilon_\alpha < 3$  može se odrediti naprezanje u korijenu zuba prema *ISO 6336* po metodi B. Za određivanje faktora sigurnosti protiv loma u korijenu zuba  $S_F$  neophodno je odrediti stvarno naprezanje u korijenu zuba i dozvoljeno naprezanje. Faktor sigurnosti protiv loma u korijenu zuba  $S_F$  računa se prema:

$$S_F = \frac{\text{dozvoljeno naprezanje}}{\text{stvarno naprezanje}} = \frac{\sigma_{FE} \cdot Y_{NT} \cdot Y_\delta \cdot Y_R \cdot Y_X}{\sigma_F} \quad (3.1.)$$

Brojnik označava dozvoljeno naprezanje, a nazivnik stvarno naprezanje.  $\sigma_{FE}$  je ishodišna trajna dinamička čvrstoća materijala koju je moguće očitati iz tablice ili dijagrama.  $Y_{NT}$  je faktor trajnosti koji se očitava iz dijagrama, dok za neograničenu trajnost iznosi  $Y_{NT} = 1$ .  $Y_\delta$  je faktor utjecaja osjetljivosti materijala na koncentraciju naprezanja, te se uzima da je  $Y_\delta \approx 1$ .  $Y_R$  je faktor hrapavosti, te je ovisan o materijalu i obradi.  $Y_X$  je faktor veličine i očitava se iz tablica. [4]

Dakle, postoji više utjecajnih faktora koje treba uzeti u obzir za izračun faktora sigurnosti u korijenu zuba zupčanika. Zbog toga u proračun treba uzeti u obzir utjecaj točnosti oblika boka i korijena zuba, utjecaj zareza, izbor materijala i odgovarajuće toplinske obrade, pogonske uvjete, te predviđenu trajnost. Uobičajene vrijednosti faktora sigurnosti protiv loma za prijenosnike s trajnim pogonom su oko 1,6, a za prijenosnike s povremenim pogonom su vrijednosti oko 1,4.

Za određivanje stvarnog naprezanja  $\sigma_F$  u korijenu zuba potrebno je poznavati nazivno naprezanje i utjecajne faktore koji se javljaju zbog vanjskih utjecaja, odstupanja pri izradi samog ozubljenja i jednolike raspodjele.

Stvarno naprezanje  $\sigma_F$  računa se prema:

$$\sigma_F = \sigma_{F0} \cdot K_A \cdot K_{F\alpha} \cdot K_{F\beta} \cdot K_V \quad (3.2.)$$

Gdje je  $K_A$  faktor primjene koji uzima u obzir prekoračenje nazivnog momenta te ovisi o pogonskim uvjetima. Faktor unutarnjeg dinamičkog opterećenja  $K_V$  uzima u obzir dinamičko opterećenje koje nastaje posebno zbog odstupanja koraka i profila zubi u zahvatu. Ta odstupanja nastaju zbog ograničene točnosti izrade zupčanika zbog čega i nastaju same uzbudne oscilacije. U zahvatu zupčanik s nejednakim koracima  $p_e$  može ubrzavati i usporavati pri promjeni parova zubi u zahvatu što za posljedicu ima pojavu unutarnjih dinamičkih sila. Za podkritično područje ( $N \leq 0,85$ ) faktor  $K_V$  računa se prema [5]:

$$K_V = N \cdot K + 1 \quad (3.3.)$$

Gdje je  $N$  omjer stvarne brzine vrtnje ( $n_1$ ) i rezonantne brzine vrtnje ( $n_{E1}$ ) zupčanika:

$$N = \frac{n_1}{n_{E1}} \quad (3.4.)$$

Faktor  $K$  moguće je izračunati prema formuli:

$$K = C_{v1} \cdot B_p + C_{v2} \cdot B_f + C_{v3} \cdot B_k \quad (3.5.)$$

Faktori  $C$  i  $B$  mogu se očitati iz dijagrama i tablica, te se njima uzima utjecaj oblika zuba i krutost na dinamičko opterećenje. Kod kritičnog i nadkritičnog područja vrijede izrazi za  $K_V$ , ali s drugim faktorima što treba uzeti u obzir.

Faktor raspodjele opterećenja na zube koji su istovremeno u zahvatu  $K_{F\alpha}$  za

$\varepsilon_\gamma \leq 2$  računa se prema:

$$K_{F\alpha} = \frac{\varepsilon_\gamma}{2} \cdot \left( 0,9 + 0,4 \cdot \frac{c_\gamma \cdot (f_{pe} - \gamma_\alpha)}{\frac{F_{tH}}{b}} \right) \quad (3.6.)$$

$\varepsilon_\gamma > 2$  računa se prema:

$$K_{F\alpha} = 0,9 + 0,4 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (\varepsilon_\gamma - 1)}{\varepsilon_\gamma}} \cdot \frac{c_\gamma \cdot (f_{pe} - \gamma_\alpha)}{\frac{F_{tH}}{b}} \quad (3.7.)$$

Vrijednosti  $\varepsilon_\gamma$  ukupni stupanj prekrivanja,  $c_\gamma$  srednja vrijednost krutosti zupčanog para u zahvatu i  $F_{tH}$  korigirana računaska sila, potrebno je izračunati. Dok je  $\gamma_\alpha$  istrošenost boka zuba potrebno očitati iz dijagrama, a dozvoljene vrijednosti za  $f_{pe}$  odstupanje koraka na zahvatnoj crti nalaze se u tablicama.

Da bi se odredio faktor nejednolike raspodjele opterećenja po uzdužnoj liniji boka zuba  $K_{F\beta}$  potrebno je odrediti faktor nejednolike raspodjele opterećenja po širini zuba  $K_{H\beta}$  prema:

za

$$\frac{F_{\beta y} \cdot c_\gamma}{2 \cdot \frac{F_m}{b}} \geq 1 \quad (3.8.)$$

vrijedi

$$K_{H\beta} = \sqrt{\frac{2 \cdot F_{\beta y} \cdot c_\gamma}{\frac{F_m}{b}}} \quad (3.9.)$$



te za

$$\frac{F_{\beta y} \cdot c_Y}{2 \cdot \frac{F_m}{b}} < 1 \quad (3.10.)$$

vrijedi

$$K_{H\beta} = 1 + \frac{F_{\beta y} \cdot c_Y}{\frac{F_m}{b}} \quad (3.11.)$$

Vrijednosti za ukupno odstupanje bočne linije zuba  $F_{\beta y}$  nalaze se u tablici, a srednja obodna sila po širini zuba  $F_m$  računa se prema:

$$F_m = F_t \cdot K_A \cdot K_V \quad (3.12.)$$

Slijedi da je  $K_{F\beta}$  onda:

$$K_{F\beta} = K_{H\beta}^{N_F} \quad (3.13.)$$

Gdje se eksponent  $N_F$  određuje izrazom:

$$N_F = \frac{\left(\frac{b}{h}\right)^2}{1 + \frac{b}{h} + \left(\frac{b}{h}\right)^2} \quad (3.14.)$$

Po metodi B nazivno naprezanje u korijenu zuba određuje se sljedećom formulom:

$$\sigma_{F0-B} = \sigma_{bn} \cdot Y_S \cdot Y_{\beta} = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_F \cdot Y_S \cdot Y_{\beta} \quad (3.15.)$$

Naprezanje  $\sigma_{bn}$  zbog savijanja se dobije prema:

$$\sigma_{bn} = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_F \quad (3.16.)$$

Gdje je  $Y_F$  faktor oblika zuba koji se računa prema izrazu:

$$Y_F = \frac{6 \cdot \left(\frac{h_{Fe}}{m_n}\right) \cos \alpha_{Fe n}}{\left(\frac{s_{Fn}}{m_n}\right)^2 \cos \alpha_n} \quad (3.17.)$$

Širina korijena zuba može se odrediti prema izrazu:

$$s_{Fn} = m_n \cdot \left[ z_n \cdot \sin \left( \frac{\pi}{3} - \vartheta \right) + \sqrt{3} \cdot \left( \frac{X}{\cos \vartheta} - \frac{\rho_{fP}}{m_n} \right) \right] \quad (3.18.)$$

Gdje je  $z_n$  fiktivni broj zubi, dok je sa  $\rho_{fP}$  označen polumjer zaobljenja korijena zuba osnovnog profila.

Faktor korekcije naprezanja  $Y_S$  može se odrediti prema izrazu:

$$Y_S = (1,2 \cdot 0,13 \cdot L) \cdot q_s \left[ \frac{1}{1,21 + \frac{2,3}{L}} \right] \quad (3.19.)$$

Omjer debljine i visine zuba  $L$  računa se prema izrazu:

$$L = \frac{S_{Fn}}{h_{Fe}} \quad (3.20.)$$

Parametar zarez:

$$q_s = \frac{S_{Fn}}{2\rho_F} \quad (3.21.)$$

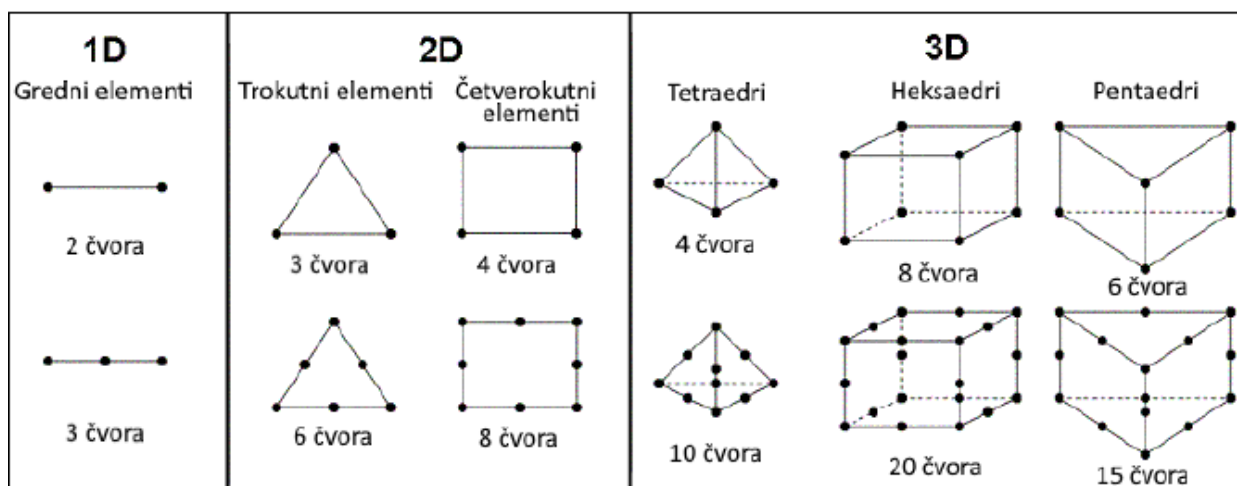
Faktor koji uzima u obzir nagib zuba  $Y_\beta$  računa se prema izrazu:

$$Y_\beta = 1 - \varepsilon_\beta \cdot \frac{\beta}{120^\circ} \quad (3.22.)$$

Gdje je  $\beta$  nagib zuba, dok  $\varepsilon_\beta$  označava stupanj prekrivanja koraka. Za ravne zube  $Y_\beta = 1$ .

## 4 METODA KONAČNIH ELEMENATA

Kod zupčanika se metodom konačnih elemenata može odrediti naprezanje i deformacija u svakoj točki na zubu zupčanika kod statičkog opterećenja i mjesto nastanka pukotine odnosno mjesto loma zuba zupčanika. Iz tog razloga rezultati dobiveni metodom konačnih elemenata mogu služiti kao provjera rezultata dobivenih analitičkim proračunom naprezanja u korijenu zuba. Metoda konačnih elemenata (*eng. Finite element method*) najčešće je korištena numerička metoda kod primjene numeričke analize u inženjerstvu. Metoda se temelji na diskretizaciji odgovarajućeg geometrijskog modela. Određeni geometrijski model se zamjeni s većim brojem relativno malim konačnim elementima koji su međusobno povezani, te svi zajedno čine mrežu konačnih elemenata. Slika 4.1. prikazuje jednodimenzijske, dvodimenzijske i trodimenzijske vrste konačnih elemenata. Najčešća primjena jednodimenzijskih elemenata je kod diskretizacije grednih nosača gdje se greda može promatrati kao jednodimenzijski problem. Kod dvodimenzijskih problema kao što je tankostjena posuda kod koje je jedna dimenzija zanemarivo mala u odnosu na druge dvije koriste se dvodimenzijski elementi, dok se trodimenzionalni elementi koriste za diskretizaciju nepravilne trodimenzionalne geometrije. [6]



Slika 4.1. Osnovne vrste konačnih elemenata [6]

Ako se želimo što više približiti stvarnom rješenju broj konačnih elemenata se povećava ali time se povećava procesorsko vrijeme rješavanja problema i potrebno je više memorijskog prostora. Iz tog razloga je važno da se gustoća mreže konačnih elemenata optimalno definira. Svaki element sastoji se od čvorova koji su međusobno povezani nodalnim linijama. Vrijednost u svakom čvoru dobije se pomoću interpolacijskih funkcija. [6]

Na slici 4.2. prikazan je dio zupčanika koji je diskretiziran metodom konačnih elemenata. Kod analize zupčanika nije potrebno modelirati cijeli zupčanik već nekoliko ili jedan zub zupčanika kod kojeg je potrebno definirati granične uvjete i mrežu konačnih elemenata. Veća gustoća mreže konačnih elemenata je na vlačno opterećenom dijelu korijena zuba, zbog toga što se promatra naprezanje u korijenu zuba koje je veće na vlačnoj strani u odnosu na tlačnu stranu, te zbog toga da bi se što više približili stvarnom rješenju.



*Slika 4.2. Diskretizacija zuba zupčanika mrežom konačnih elemenata [6]*

Polazna točka svake numeričke analize je ispravno postavljanje rubnih uvjeta. Kod statičkih strukturalnih analiza osnovni rubni uvjeti su opterećenja i ograničenja stupnjeva slobode u čvorovima. Ostali zubi zupčanika mogu se zamijeniti s nepomičnim osloncima, dok je za silu potrebno odrediti položaj djelovanja kako bi se ispravno provela numerička analiza.

## 5 CILJ RADA

U ovome radu potrebno je dimenzionirati zupčasti prijenos s cilindričnim zupčanicima za prijenos snage 10 kW i brzinu vrtnje na pogonskom zupčaniku od  $1450 \text{ min}^{-1}$  uz prijenosni omjer 3 primjenom programskog paketa *KISSsoft*, uz procjenu relevantnih utjecajnih faktora. Nakon dimenzioniranja zupčastog prijenosa potrebno je diskretizirati, te izvršiti numeričku analizu naprezanja i deformacija u korijenu zuba. Zatim je potrebno mijenjati geometrijske karakteristike tijela zupčanika te provesti veći broj analiza naprezanja i deformacija u korijenu zuba, te utvrditi optimalni dizajn zupčanika.

U prvom dijelu, projektni proračun je potrebno provesti analitički do provjere uvjeta razmaka osi zupčanika. Sljedeće je potrebno dobivene osnovne vrijednosti upotrijebiti za projektni proračun u programskom paketu *KISSsoft* da bi se odredila potrebna geometrija zupčanika. Nadalje je potrebno model gonjenog zupčanika diskretizirati u *Ansys Workbenchu*, te provesti numeričku analizu naprezanja i deformacija u korijenu zuba zupčanika. Dobivene vrijednosti iz numeričke analize potrebno je usporediti s podacima koji su dobiveni analitički pomoću programskog paketa *KISSsoft*. Drugi dio temelji se na promjeni geometrijskih karakteristika tijela zupčanika u *KISSsoftu* i *Ansys Workbenchu*, da bi se pomoću analize naprezanja i deformacija u korijenu zuba utvrdio optimalan dizajn gonjenog zupčanika.

### 5.1 Projektni proračun zupčanog prijenosa

Kod projektnog proračuna zupčastog prijenosa potrebno je pomoću ulaznih podataka (tablica 5.1.) analitički izračunati vrijednosti koji će se upotrijebiti za kontrolni proračun u programskom paketu *KISSsoft*.

Tablica 5.1. Ulazni podaci

Snaga, $P$ [kW]	10
Brzina okretaja, $n$ [ $\text{min}^{-1}$ ]	1450
Prijenosni omjer, $i$	3

Razmak osi zupčanika za poznatu ulaznu snagu računa se prema sljedećoj formuli:

$$a \geq K_1 (i_z + 1) \sqrt[3]{\frac{P}{\psi_{bd} \cdot n} \cdot \frac{i_z + 1}{i_z} \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{H\alpha} \cdot K_{H\beta} \cdot \left(\frac{S_{Hmin}}{\sigma_{Hlim}}\right)^2} \quad (5.1.)$$

Gdje je:

$K_1$  – faktor ovisan o vrsti ozubljenja

$\psi_{bd}$  – faktor širine zuba

$K_A$  – pogonski faktor

$K_V$  – faktor unutrašnjih dinamičkih sila

$K_{H\alpha}$  – faktor raspodjele opterećenja na pojedine zube pri opterećenju bokova zuba

$K_{H\beta}$  – faktor raspodjele opterećenja po dužini boka pri opterećenju bokova zuba

$S_{Hmin}$  – minimalna sigurnost na pitting

$\sigma_{Hlim}$  – dinamička čvrstoća za dodirni pritisak

Pošto većina faktora koji utječu na razmak osi nije poznata potrebno ih je odrediti prema [7].

- Faktor ovisan o vrsti ozubljenja  $K_1$ :

U tablici 5.2. prikazani su faktori ovisni o vrsti ozubljenja. Za daljnji proračun su uzeti ravni zubi.

*Tablica 5.2. Faktor ovisan o vrsti ozubljenja [7]*

Vrsta ozubljenja	$K_1$
Ravni zubi	7650
Kosi zubi	6840

Faktor za ravne zube iznosi:

$$K_1 = 7650 \quad (5.2.)$$

- Faktor širine zuba  $\psi_{bd}$ :

Faktor širine zuba za zupčanike sa otvrdnutim zubima (cementirani i kaljeni) može se odrediti pomoću sljedeće formule:

$$\psi_{bd} \approx (0,1 \dots 0,3 \dots 0,5) + \frac{i}{20} \quad (5.3.)$$

Izračunati faktor širine zuba iznosi:

$$\psi_{bd} = 0,45 \quad (5.4.)$$

- Pogonski faktor  $K_A$ :

Pogonski faktor uzima u obzir dodatna vanjska dinamička opterećenja. Ta dodatna vanjska dinamička opterećenja mogu biti izazvana pogonskim i radnim strojem. Već prilikom samog uključivanja pogonskog i radnog stroja mogu se javiti značajni udari, koji su kroz svoj rad promjenjive karakteristike. Tablica 5.3. prikazuje pogonski faktor koji ovisi o vrsti opterećenja pogonskog i radnog stroja. [2]

*Tablica 5.3. Pogonski faktor [7]*

POGONSKI STROJ	RADNI STROJ			
	jednakomjeran rad	umjereni udari	jači udari	snažni udari
jednakomjeran rad	1	1,25	1,5	1,75
lagani udari	1,1	1,35	1,6	1,85
umjereni udari	1,25	1,5	1,75	2 i više
jaki udari	1,5	1,75	2	2,25 i više

Iz tablice 5.3. usvojen je pogonski faktor  $K_A$  s obzirom na jednakomjeran rad pogonskog stroja i s obzirom na umjereni udar radnog stroja.

Očitani pogonski faktor  $K_A$  iznosi:

$$K_A = 1,25 \quad (5.5.)$$

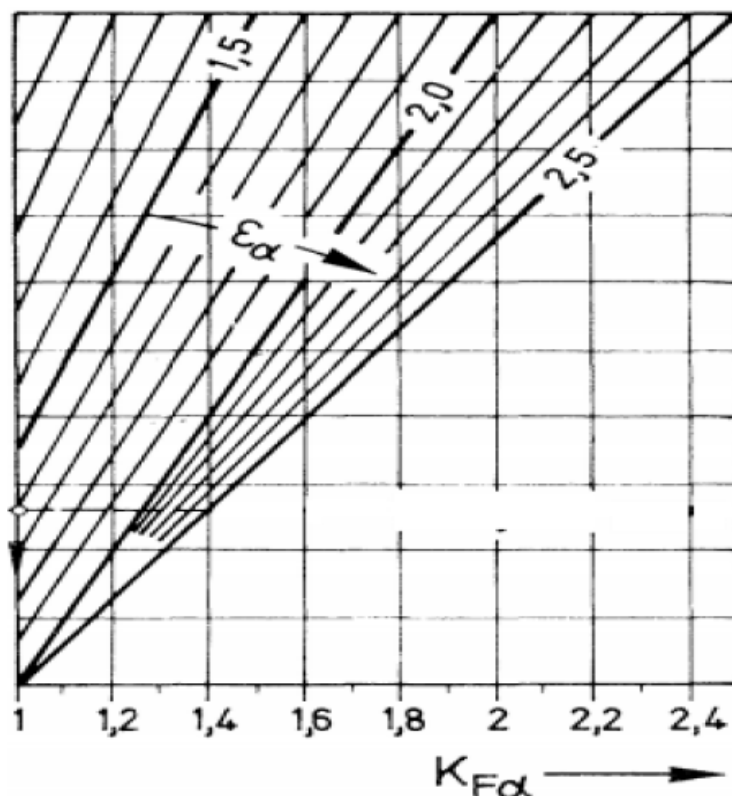
- Faktor unutrašnjih dinamičkih sila  $K_V$ :

Faktorom  $K_V$  uzeta su u obzir dinamička opterećenja koja se javljaju zbog ograničene točnosti izrade zupčanika. Uzbudne oscilacije javljaju se kao posljedica odstupanja koraka i odstupanja profila zupčanika. Mogu nastati manje ili veće oscilacije vratila i drugih okretnih masa koje za posljedicu imaju dodatno dinamičko opterećenje zupčanika, a ovise o omjeru uzbudnih oscilacija i rezonantne frekvencije tj. vlastite frekvencije sustava. Vrijednost faktora unutarnjih dinamičkih sila  $K_V$  može se odabrati iz dijagrama, dok je u našem slučaju odabrana iskustvena vrijednost faktora unutarnjih dinamičkih sila  $K_V$  koji iznosi [2]:

$$K_V = 1,1 \quad (5.6.)$$

- Faktor raspodjele opterećenja na pojedine zube pri opterećenju bokova zuba  $K_{H\alpha}$ :

Faktorom  $K_{H\alpha}$  uzeta je neravnomjernost sile  $F_{bn}$  na pojedine zube kada je stupanj prekrivanja profila  $\epsilon_\alpha > 1$ . Taj faktor definiran je korektivnim faktorom  $q_L$  koji je omjer ukupne sile i sile koju uzima jedan par zubi u zahvatu. Pošto je faktor raspodjele opterećenja  $K_{H\alpha}$  za proračun boka zuba jednak faktoru  $K_{F\alpha}$  kod proračuna korijena zuba, moguće ga je očitati iz dijagrama (Slika 5.1.) koji je u ovisnosti s korektivnim faktorom  $q_L$  i u ovisnosti sa stupnjem prekrivanja profila  $\epsilon_\alpha$ . [2]



Slika 5.1. Faktor raspodjele opterećenja  $K_{F\alpha}$  [2]



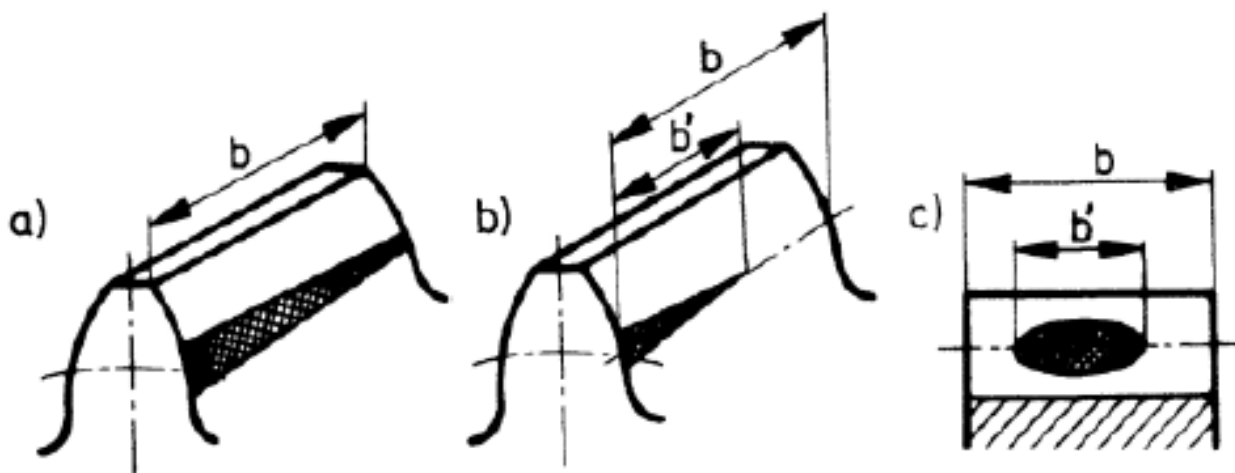
Očitani faktor  $K_{H\alpha}$  koji je jednak faktoru  $K_{F\alpha}$  iznosi:

$$K_{H\alpha} = 1,1 \quad (5.7.)$$

- Faktor raspodjele opterećenja po dužini boka pri opterećenju bokova zuba  $K_{H\beta}$ :

Ovim faktorom uzima se u obzir nejednoliko raspoređeno opterećenje duž boka zuba, koje se javlja kao posljedica odstupanja paralelnosti osi zupčanika, nepravilnog nalijeganja zuba i odstupanja uzdužne linije boka zuba [2]. Slika 5.2. prikazuje vrste raspodjele opterećenja po bokovima zuba koja mogu biti:

- Nošenje opterećenja po cijeloj dužini boka zuba
- Nošenje opterećenja na jednom dijelu dužine boka zuba
- Nošenje opterećenja na ispupčenom dijelu boka zuba



Slika 5.2. Vrste raspodjele opterećenja po dužini boka zuba [2]

Faktor raspodjele opterećenja  $K_{H\beta}$  najčešće se kreće u rasponu:

$$1 < K_{H\beta} < 2 \quad (5.8.)$$

Usvojeni faktor  $K_{H\beta}$  iznosi:

$$K_{H\beta} = 1,65 \quad (5.9.)$$

- Minimalna sigurnost na pitting  $S_{Hmin}$ :

Ovim faktorom osiguravaju se bokovi zuba protiv zamornih oštećenja površinskog sloja materijala. Faktor minimalne sigurnosti na pitting kreće se u rasponu:

$$S_{Hmin} \approx 1 \dots 1,5 \quad (5.10.)$$

Usvojena je srednja vrijednost faktora minimalne sigurnosti na pitting iznosi:

$$S_{Hmin} = 1,25 \quad (5.11.)$$

- Dinamička čvrstoća na dodirni pritisak  $\sigma_{Hlim}$ :

Dinamička čvrstoća na dodirni pritisak ovisi o vrsti materijala iz kojeg su zupčanici izrađeni. Tablica 5.4. prikazuje mehanička svojstva materijala za Čelik Č4732, Razred 1, HRC50, Tip B(AGMA) koji je odabran za ovaj proračun.

*Tablica 5.4. Mehanička svojstva materijala za Čelik Č4732, Razred 1, HRC50, Tip B(AGMA)*

Mehaničko svojstvo	Oznaka i mjerna jedinica	Vrijednost
Modul elastičnosti	$E$ , [MPa]	206840
Poissonov koeficijent	$\nu$	0,3
Gustoća materijala	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	7830
Granica tečenja	$\sigma_s$ , [MPa]	900
Trajna dinamička čvrstoća površine boka zuba	$\sigma_{Hlim}$ , [MPa]	1170
Trajna dinamička čvrstoća korijena zuba	$\sigma_{Flim}$ , [MPa]	150
Vlačna čvrstoća	$\sigma_B$ , [MPa]	1000

Iz tablice 5.4. očitana trajna dinamička čvrstoća površine boka zuba  $\sigma_{Hlim}$  iznosi:

$$\sigma_{Hlim} = 1170 \text{ MPa} \quad (5.12.)$$

Nakon svih određenih vrijednosti potrebnih za određivanje razmaka osi zupčanika, uvrštavanjem tih vrijednosti u izraz (5.1.), dobivamo da razmak osi zupčanika iznosi:

$$a \geq 7650 \cdot (3 + 1) \cdot \sqrt[3]{\frac{10}{0,45 \cdot 1450} \cdot \frac{3+1}{3} \cdot 1,25 \cdot 1,1 \cdot 1,1 \cdot 1,65 \cdot \left(\frac{1,25}{1170}\right)^2} \quad (5.13.)$$

Izračunati razmak osi zupčanika  $a$  mora biti:

$$a \geq 118,59 \text{ mm} \quad (5.14.)$$

Tablica 5.5. prikazuje standardne razmake osi zupčanika, s time da je poželjno vrijednosti u zagradama izbjeći ako je to moguće.

*Tablica 5.5. Standardne vrijednosti razmaka osi zupčanika [7]*

$a$ [mm]	50	63	80	100	125	(140)	160	(180)	200	(224)	250
	(280)	315	(355)	400	(450)	500	(560)	630	710	800	1000

Iz tablice 5.5. odabrana prva veća vrijednost razmaka osi zupčanika iznosi:

$$a = 125 \text{ mm} \quad (5.15.)$$

Nadalje modul za zupčanike s tvrdim bokovima zuba računa se prema izrazu:

$$m_n = 0,1 \frac{a \cdot i}{(1+i)^2} \quad (5.16.)$$

Izračunati modul iznosi:

$$m_n = 0,1 \frac{125 \cdot 3}{(1+3)^2} = 2,34 \text{ mm} \quad (5.17.)$$

Tablica 5.6. prikazuje standardne module raspoređene u dva prioriteta, s time da je preporučeno uzeti modul prvog prioriteta.

*Tablica 5.6. Standardne vrijednosti modula [5]*

1. Prioritet	1	1,25	1,5	2	2,5	3	4	5	6	8	10	12	16	20	25	32	40	50	60
2. Prioritet	1,25	1,375	1,75	2,25	2,75	3,5	4,5	5,5	7	9	11	14	18	22	28	36			

Iz tablice 5.6. uzeta je prva veća standardna vrijednost modula 1. prioriteta koja iznosi:

$$m_n = 2,5 \quad (5.18.)$$

Kod pogonskog zupčanika broj zubi  $z_1$  računa se prema izrazu:

$$z_1 = \frac{2a \cdot \cos \beta}{m_n(i+1)} \quad (5.19.)$$

Gdje je  $\beta$  kut nagiba zuba koji je za zupčanike s ravnim zubima  $\beta = 0^\circ$ .

Izračunati broj zubi pogonskog zupčanika  $z_1$  iznosi:

$$z_1 = \frac{2 \cdot 125 \cdot \cos 0^\circ}{2,5(3+1)} = 25 \quad (5.20.)$$

Kod gonjenog zupčanika broj zubi  $z_2$  računa se prema izrazu:

$$z_2 = i \cdot z_1 \quad (5.21.)$$

Izračunati broj zubi gonjenog zupčanika  $z_2$  iznosi:

$$z_2 = 3 \cdot 25 = 75 \quad (5.22.)$$

Zbog toga što  $z_1$  i  $z_2$  ne mogu imati zajedničkog djelitelja, odabrani broj zubi gonjenog zupčanika  $z_2$  iznosi:

$$z_2 = 74 \quad (5.23.)$$

Diobeni promjer pogonskog zupčanika  $d_1$  moguće je izračunati pomoću formule:

$$d_1 = m_n \cdot z_1 \quad (5.24.)$$

Izračunati diobeni promjer pogonskog zupčanika  $d_1$  iznosi:

$$d_1 = 2,5 \cdot 25 = 62,5 \text{ mm} \quad (5.25.)$$

Diobeni promjer gonjenog zupčanika  $d_2$  moguće je izračunati pomoću formule:

$$d_2 = m_n \cdot z_2 \quad (5.26.)$$

Izračunati diobeni promjer gonjenog zupčanika  $d_2$  iznosi:

$$d_2 = 2,5 \cdot 74 = 185 \text{ mm} \quad (5.27.)$$

Širinu gonjenog zupčanika  $b_2$  moguće je izračunati pomoću formule:

$$b_2 = b = \psi_{bd} \cdot d_1 \quad (5.28.)$$

Izračunata širina gonjenog zupčanika  $b_2$  iznosi:

$$b_2 = 0,45 \cdot 62,5 = 28,125 \text{ mm} \quad (5.29.)$$

Usvojena širina gonjenog zupčanika je uzeta proizvoljno i znatno je povećana u odnosu na izračunatu širinu  $b_2 = 28,125 \text{ mm}$ , te iznosi  $b_2 = 37 \text{ mm}$ . Povećanjem širine gonjenog zupčanika izbjegava se moguće vitoperenje zupčanika tijekom rada.

Usvojena širina gonjenog zupčanika  $b_2$ :

$$b_2 = b = 37 \text{ mm} \quad (5.30.)$$

Širinu pogonskog zupčanika  $b_1$  moguće je izračunati pomoću formule:

$$b_1 = b + (2 \dots 10) \quad (5.31.)$$

Izračunata širina pogonskog zupčanika  $b_1$  iznosi:

$$b_1 = 37 + 2 = 39 \text{ mm} \quad (5.32.)$$

Nadalje je potrebno nakon izračunatih osnovnih dimenzija dva zupčanika, provjeriti da li izračunati razmak osi zadovoljava uvjet da teoretski razmak osi  $a_d$  mora biti manji ili jednak stvarnom izračunatom razmaku osi  $a$ .

$$a_d \leq a \quad (5.33.)$$

Teoretski razmak osi  $a_d$  moguće je izračunati pomoću formule:

$$a_d = \frac{d_1 + d_2}{2} \quad (5.34.)$$

Izračunati teoretski razmak osi  $a_d$  iznosi:

$$a_d = \frac{62,5 + 185}{2} = 123,75 \quad (5.35.)$$

Pošto je teoretski razmak osi  $a_d$  manji od izračunatog razmaka osi  $a$ , slijedi da je uvjet razmaka zadovoljen pošto vrijedi:

$$a_d = 123,75 \text{ mm} \leq a = 125 \text{ mm} \quad (5.36.)$$

Nakon inicijalnog analitičkog proračuna osnovnih dimenzija zupčanika, ulaznim podacima iz tablice 5.7. ulazi se u proračun u programskom paketu *KISSsoft*.

Tablica 5.7. Ulazni podaci osnovnih dimenzija zupčanika za proračun u programskom paketu KISSsoft

Snaga, $P$ [kW]	10
Brzina okretaja, $n$ [ $\text{min}^{-1}$ ]	1450
Modul, $m_n$	2,5
Razmak osi, $a$ [mm]	125
Broj zubi pogonskog zupčanika, $z_1$	25
Broj zubi gonjenog zupčanika, $z_2$	74
Širina pogonskog zupčanika, $b_1$ [mm]	39
Širina gonjenog zupčanika, $b_2$ [mm]	37
Kut nagiba boka osnovnog profila ozubljenja, $\alpha$ [ $^\circ$ ]	20
Materijal izrade zupčanika	Čelik Č4732, Razred 1, HRC50, Tip B (AGMA)
Ulje podmazivanja	ISO-VG 46

Slika 5.3. prikazuje korisničko sučelje programskog paketa KISSsoft gdje su uneseni ulazni podaci iz tablice 5.7., te je pomoću tih podataka generirana geometrija zupčanika.

Geometry

Tooth geometry: symmetric

Normal module  $m_n$ : 2.5000 mm

Normal pressure angle  $\alpha_n$ : 20.0000  $^\circ$

Gear 1: spur gear

Helix angle at reference circle  $\beta$ : 0.0000  $^\circ$

Center distance  $a$ : 125.0000 mm

Number of teeth: Gear 1: 25, Gear 2: 74

Facewidth: Gear 1: 39.0000 mm, Gear 2: 37.0000 mm

Profile shift coefficient: Gear 1: 0.3674, Gear 2: 0.1510

Quality (ISO 1328:2013) A: Gear 1: 6, Gear 2: 6

Material and lubrication

Gear 1: Through hardening steel, Steel, Grade 1, HRC50, Type B(AGMA), flame/ind. hardened, AGMA2001: with Type B hardness pattern (only flank hardened)

Gear 2: Through hardening steel, Steel, Grade 1, HRC50, Type B(AGMA), flame/ind. hardened, AGMA2001: with Type B hardness pattern (only flank hardened)

Lubrication: Oil bath lubrication, Oil: ISO-VG 46

Rating

Driving gear: Gear 1

Working flank gear 1: right flank

Gear 1 direction of rotation: clockwise

Required service life  $H$ : 20000.0000 h

Reference gear: Gear 1

Speed  $|n_1|$ : 1450.0000 1/min

Torque  $|T_1|$ : 65.8572 Nm

Power  $|P|$ : 10.0000 kW

Calculation method

Factors, root, flank: ISO 6336:2019

Scuffing: No calculation

Tooth flank fracture: No calculation

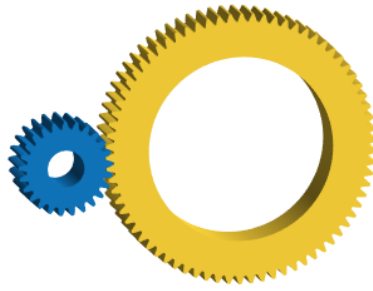
Micropitting: ISO/TS 6336-22

Subsurface fatigue: DNV 41.2

Reliability: No calculation

Slika 5.3. Prikaz ulaznih podataka u korisničkom sučelju KISSsoft

Slika 5.4. prikazuje generiranu geometriju zupčanika u programskom paketu KISSsoft. Plavom bojom je označeni pogonski zupčanik, a gonjeni je označen žutom bojom.



Slika 5.4. Geometrija zupčanika u KISSsoftu

Tablica 5.8. prikazuje osnovne dimenzije pogonskog i gonjenog zupčanika, dobivene pomoću KISSsofta.

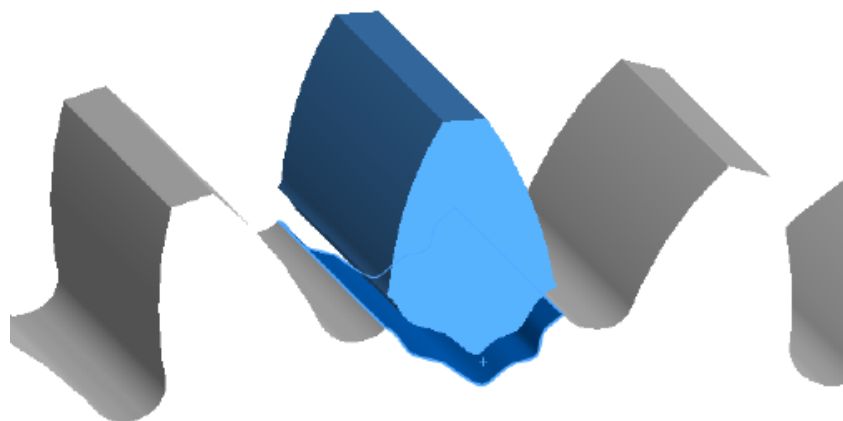
Tablica 5.8. Osnovne dimenzije pogonskog i gonjenog zupčanika

Pogonski zupčanik	
Broj zubi, $z_1$	25
Širina zupčanika, $b_1$ [mm]	39
Diobeni promjer, $d_1$ [mm]	62,5
Vanjski promjer zupčanika, $d_{a1}$ [mm]	69,2302
Promjer preko korijena zupčanika, $d_{f1}$ [mm]	57,8399
Modul, $m_n$ [mm]	2,5
Kut zahvata, $\alpha$ [°]	20
Materijal	Čelik Č4732, Razred 1, HRC50, Tip B (AGMA)
Gonjeni zupčanik	
Broj zubi, $z_2$	74
Širina zupčanika, $b_2$ [mm]	37
Diobeni promjer, $d_2$ [mm]	185
Vanjski promjer zupčanika, $d_{a2}$ [mm]	190,6399
Promjer preko korijena zupčanika, $d_{f2}$ [mm]	179,1752
Modul, $m_n$ [mm]	2,5
Kut zahvata, $\alpha$ [°]	20
Materijal	Čelik Č4732, Razred 1, HRC50, Tip B (AGMA)

Pomoću podataka iz tablice 5.8. izvršen je kontrolni proračun zuba zupčanika, te je izvršena provjera naprezanja u korijenu zuba gonjenog zupčanika. Poznavanjem naprezanja u korijenu zuba gonjenog zupčanika određen je faktor sigurnosti protiv loma u korijenu zuba za materijal Čelik Č4732, Razred 1, HRC 50, Tip B (AGMA).

## 6 DISKRETIZACIJA GONJENOG ZUPČANIKA I ANALIZA NAPREZANJA I DEFORMACIJA U KORIJENU ZUBA

Prije same diskretizacije gonjenog zupčanika potrebno je utvrditi da li zadovoljava analitičko dobiveno nazivno naprezanje u korijenu zuba, da bi se rezultati mogli usporediti s numeričkim rezultatima, te da bi se utvrdilo da li je pravilno diskretiziran gonjeni zupčanik. Kod napreznja zupčanika, kritično naprezanje se javlja na vlačno opterećenoj strani korijena zuba. To kritično naprezanje ne smije biti veće od maksimalnog dopuštenog napreznja jer u suprotnom dolazi do loma zuba zupčanika u korijenu zuba (Slika 6.1.).



Slika 6.1. Lom zuba zupčanika u korijenu zuba [6]

### 6.1 Analitički proračun napreznja u korijenu zuba pomoću *KISSsofta*

Da bi analitički proračun napreznja u korijenu zuba bio zadovoljen, potrebno je da faktor sigurnosti protiv loma zupčanika u korijenu zuba  $S_F$  bude veći od minimalnog faktora sigurnosti protiv loma  $S_{Fmin}$ . Taj minimalni faktor sigurnosti  $S_{Fmin}$  odabran je prema *ISO 6336* standardu, te iznosi:

$$S_{Fmin} = 1,4 \quad (6.1.)$$

Kako je izraz za izračun faktora sigurnosti protiv loma u korijenu zuba (3.1) objašnjen prethodno, ovdje će se usporediti izračunati faktor sigurnosti  $S_F$  pomoću *KISSsofta* s minimalnim faktorom sigurnosti  $S_{Fmin}$ . Tablica 6.1. prikazuje vrijednosti faktora sigurnosti i nazivnog napreznja za gonjeni zupčanik.



Tablica 6.1. Vrijednosti nazivnog naprezanja i faktora sigurnosti dobiveni pomoću KISSsofta

Gonjeni zupčanik	
Nazivno naprezanje u korijenu zuba, $\sigma_{F0}$ [MPa]	67,31
Faktor sigurnosti protiv loma u korijenu zuba, $S_{F2}$	1,7

Kako vrijedi:

$$S_{F2} \geq S_{Fmin} = 1,7 \geq 1,4 \quad (6.2.)$$

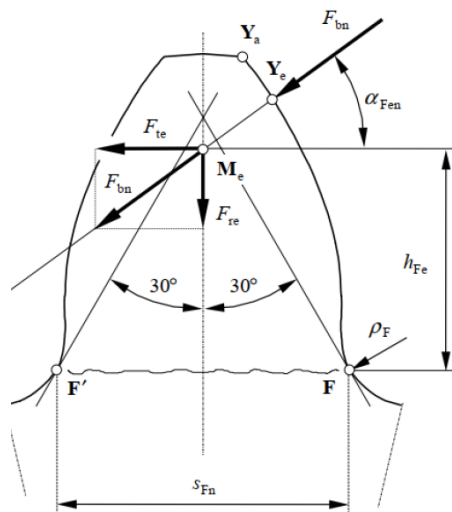
Zaključuje se da analitički proračun korijena zuba zadovoljava.

## 6.2 Numerička analiza raspodjele naprezanja i deformacije u korijenu zuba pomoću *Ansys Workbench*

*Ansys Workbench* je programski alat u kojem se vrši numerička analiza gonjenog zupčanika pomoću metode konačnih elemenata. Prije same numeričke analize gonjenog zupčanika neophodno je poznavati položaj točke B na početku jednostrukog zahvata u kojoj djeluje normalna sila  $F_{bn}$ . Nadalje je potrebno modelirati geometriju, definirati svojstva materijala i rubne uvjete, te na kraju diskretizirati geometriju gonjenog zupčanika. Nakon izvršene numeričke analize raspodjele naprezanja i deformacija u korijenu zuba zupčanika potrebno je odraditi provjeru konvergencije rezultata, tko da se mijenja broj konačnih elemenata kojom je geometrija diskretizirana. Kad rješenje konvergira potrebno je izvršiti usporedbu rezultata numeričke analize i analitičke analize, te utvrditi da li rješenje numeričke analize zadovoljava.

### 6.2.1 Položaj točke B na početku jednostrukog zahvata u kojoj djeluje normalna sila $F_{bn}$

Da bi se numerički model ispravno definirano potrebno je poznavati položaj točke B. Najveće vlačno naprezanje pojavit će se u korijenu zuba ukoliko se promatra sila u točki B. U točki B zubi iz dvostrukog zahvata ulaze u jednostruki zahvat, te normalna sila  $F_{bn}$  djeluje na jedan zub zupčanika. Slika 6.2. prikazuje položaj točke B u kojoj djeluje normalna sila  $F_{bn}$ .



Slika 6.2. Položaj točke B u kojoj djeluje normalna sila  $F_{bn}$

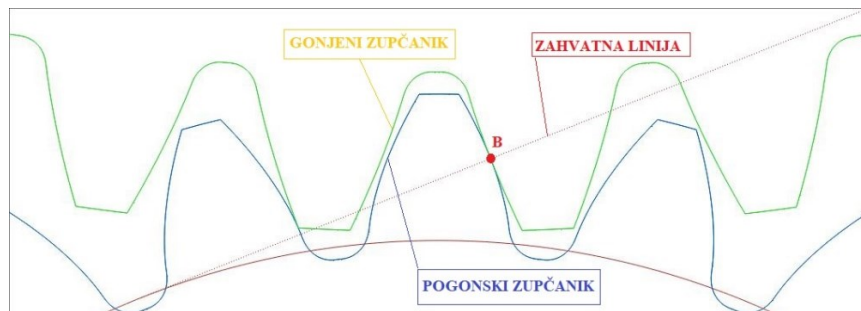
Na temelju podataka iz analitičkog proračuna pomoću *KISSsofta* određene su dimenzije za određivanje položaja točke B (tablica 6.2.).

Tablica 6.2. Vrijednosti dimenzija za određivanje položaja točke B

Gonjeni zupčanik			
$h_{Fe}$ [mm]	$s_{Fn}$ [mm]	$\rho_F$ [mm]	$\alpha_{Fen}$ [°]
3,03	5,60	1,18	20,89

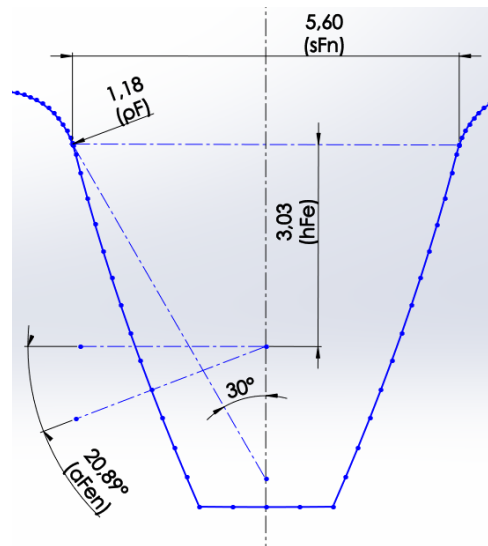
### 6.2.2 Modeliranje geometrije

Da bi ispravno modelirali geometriju gonjenog zupčanika za numeričku analizu, potrebno je evolventni profil gonjenog zupčanika iz *KISSsofta* u *dxf* formatu prebaciti u programski paket *SolidWorks*. Slika 6.3. prikazuje zahvat pogonskog i gonjenog zupčanika u točki B.



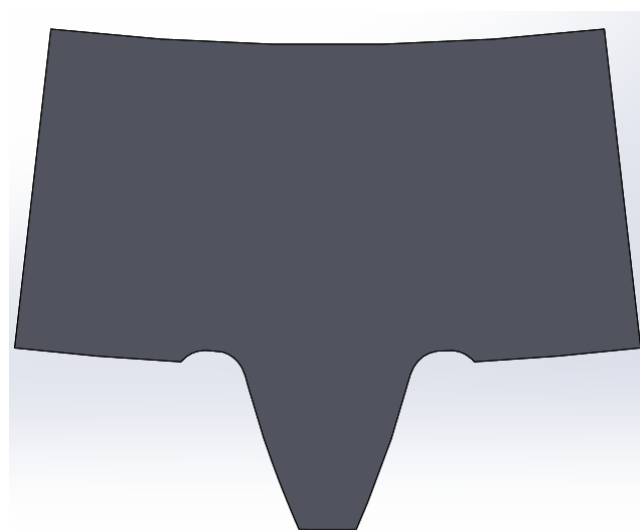
Slika 6.3. Zahvat zupčanika u točki B

Pošto je unijeta geometrija iz *KISSsofta* u *SolidWorks* rezultirala podjelom geometrije ozubljenja, pomoću funkcije spline spojena je geometrija ozubljenja u jednu cjelinu koja je jednaka evolventnom profilu. Nadalje je potrebno pomoću podataka iz tablice 6.2. odrediti hvatište normalne sile  $F_{bn}$ . Slika 6.4. prikazuje geometriju evolventnog ozubljenja gonjenog zupčanika s određenim hvatištem normalne sile.



*Slika 6.4. Zub gonjenog zupčanika*

Gonjeni zupčanik je modeliran tako da je modeliran samo jedan zub zupčanika. Razlog tome je zato što bi modeliranje cijelog zupčanika kod numeričke analize zakompliciralo numerički model tj. povećalo bi se vrijeme rješavanja analize, te bi se povećala kompjutorska memorija same datoteke. Slika 6.5. prikazuje pojednostavljeni model gonjenog zupčanika u *SolidWorksu*.



*Slika 6.5. Pojednostavljeni model gonjenog zupčanika*

Nakon generirane geometrije zupčanika u *SolidWorksu*, potrebno je generiranu geometriju unijeti u *Ansys Workbench*.

### 6.2.3 Definiranje svojstva materijala i rubnih uvjeta

Nadalje prije početka same numeričke analize potrebno je definirati svojstva materijala i rubne uvjete u *Ansys Workbenchu*. Slika 6.6. prikazuje svojstva materijala u *Ansys Workbenchu* prema podacima koji se nalaze se u tablici 5.4.

	A	B	C
1	Property	Value	Unit
2	Material Field Variables	Table	
3	Density	7830	kg m <sup>-3</sup>
4	Isotropic Elasticity		
5	Derive from	Young's Modulus and Poisson...	
6	Young's Modulus	2,0684E+05	MPa
7	Poisson's Ratio	0,3	
8	Bulk Modulus	1,7237E+11	Pa
9	Shear Modulus	7,9554E+10	Pa

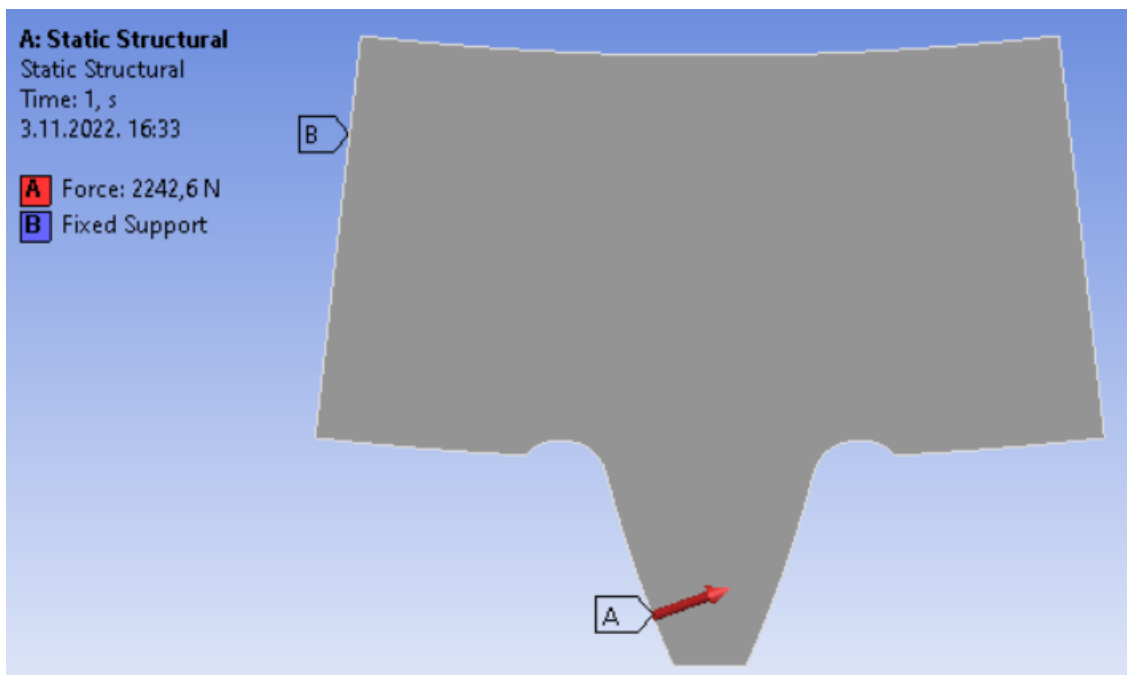
*Slika 6.6. Mehanička svojstva materijala za Čelik Č4732, Razred 1, HRC50, Tip B (AGMA)*

Rubni uvjeti koji će se postaviti za statičku strukturalnu analizu su opterećenje i ograničenje stupnjeva slobode gibanja. Zub zupčanika je opterećen silom  $F_{bn}$  prema podacima iz *KISSsofta* (tablica 6.3.), te je sila smještena u kritičnu točku zahvata.

*Tablica 6.3. Vrijednosti sila koje djeluju na zub zupčanika prema podacima iz KISSsofta*

Normalna sila, $F_{bn}$ [N]	2242,7
Tangencijalna sila, $F_t$ [N]	2107,4
Radijalna sila, $F_r$ [N]	767

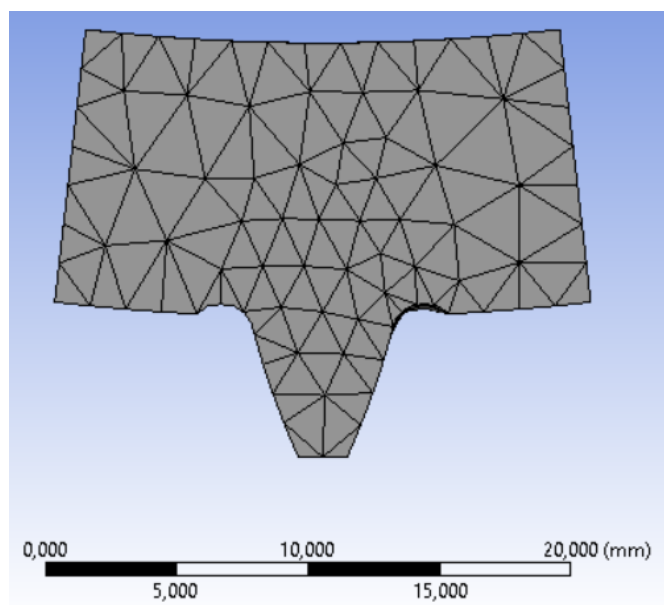
Kod ograničenja stupnjeva slobode gibanja, ograničeni su svi stupnjevi slobode unutarnjeg vijenca zupčanika osim rotacije oko osi z globalnog koordinatnog sustava. Slika 6.7. prikazuje definirane rubne uvjete u *Ansys Workbenchu*.



*Slika 6.7. Definiranje rubnih uvjeta*

#### 6.2.4 Diskretizacija geometrije mrežom konačnih elemenata

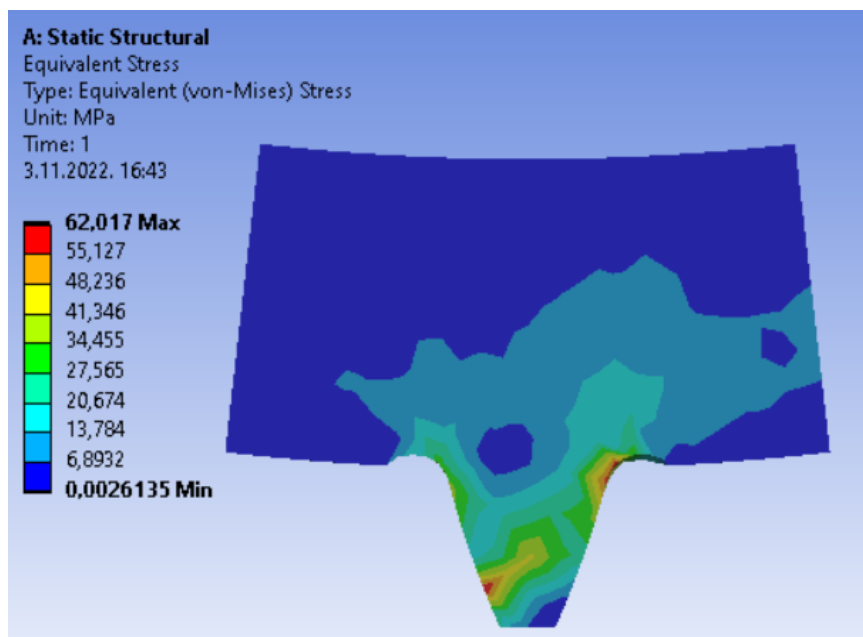
Geometrija gonjenog zupčanika u prvom koraku diskretizirana je tetraedarskom mrežom veličine elementa 1,5 mm. Slika 6.8. prikazuje diskretiziranu geometriju gonjenog zupčanika mrežom konačnih elemenata.



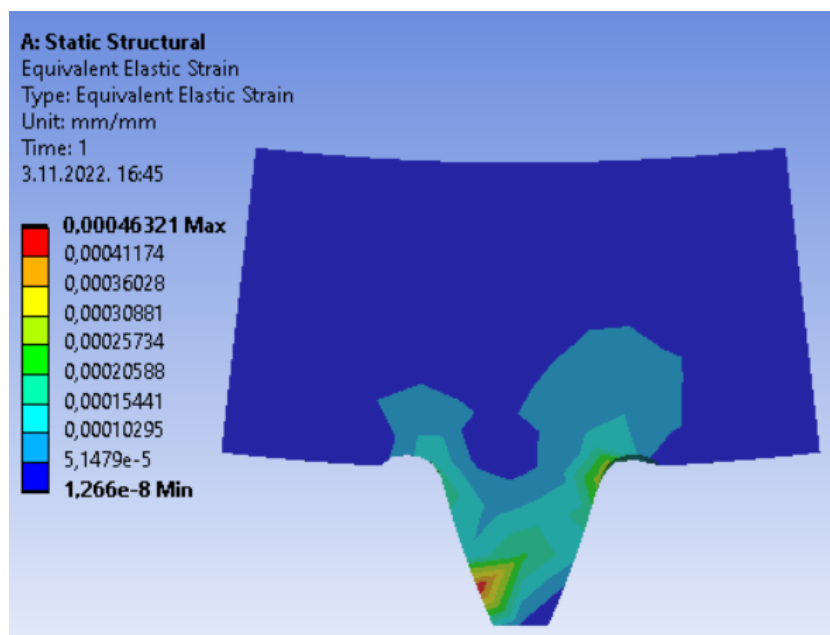
*Slika 6.8. Diskretizirana geometrija gonjenog zupčanika*

## 6.2.5 Rješenje analize

Rezultati analize su naprezanja i deformacije na vlačno opterećenom dijelu korijena zuba izračunati prema *Von Misesovoj* teoriji. Slika 6.9. i slika 6.10 prikazuju ekvivalentna naprezanja i deformacija prema *Von Misesu*.



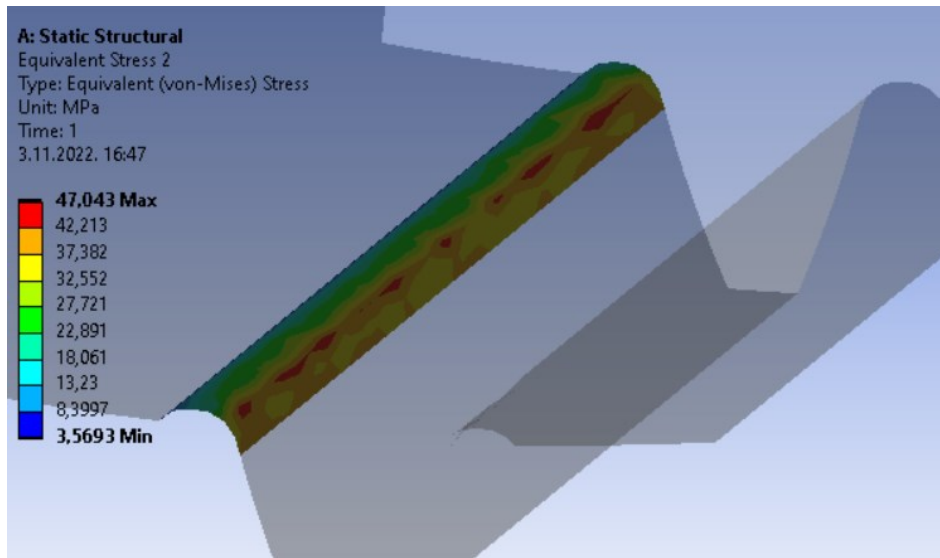
Slika 6.9. Ekvivalentna naprezanja prema *Von Misesu*



Slika 6.10. Ekvivalentne deformacije prema *Von Misesu*

Iz slike 6.9. i slike 6.10. se može zaključiti da zbog koncentrirane sile u točki dolazi do velikih lokalnih naprezanja i deformacija blizu hvatišta sile što nepoželjno utječe na rezultate analize. Analizu naprezanja i deformacija je potrebno vršiti samo na vlačno opterećenom korijenu zuba. Prema *Von Misesu* najveće ekvivalentno naprezanje na vlačno opterećenoj strani korijena zuba iznosi (Slika 6.11.):

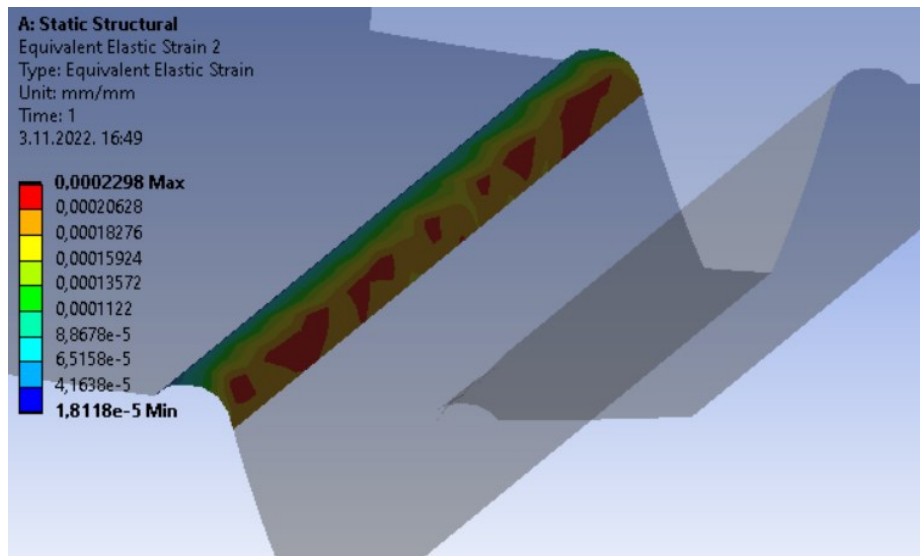
$$\sigma_{eq} = 47,043 \text{ MPa} \quad (6.3.)$$



*Slika 6.11. Ekvivalentno naprezanje u korijenu zuba gonjenog zupčanika prema Von Misesu*

Dok najveća ekvivalentna deformacija prema *Von Misesu* na vlačno opterećenoj strani korijena zuba iznosi (Slika 6.12.):

$$\varepsilon_{eq} = 0,0002298 \frac{\text{mm}}{\text{mm}} \quad (6.4.)$$



*Slika 6.12. Ekvivalentna deformacija u korijenu zuba gonjenog zupčanika prema Von Misesu*

Usporedbom rezultata naprezanja analitičke i numeričke analize dobiva se veliko odstupanje u rezultatima koje iznosi 30,11%. Razlog tome je relativno velika veličina konačnih elemenata kojom je geometrija gonjenog zupčanika diskretizirana. Da bi dobili što točnije rezultate numeričke analize potrebno je izvršiti konvergenciju mreže.

#### 6.2.6 Provjera konvergencije mreže konačnih elemenata

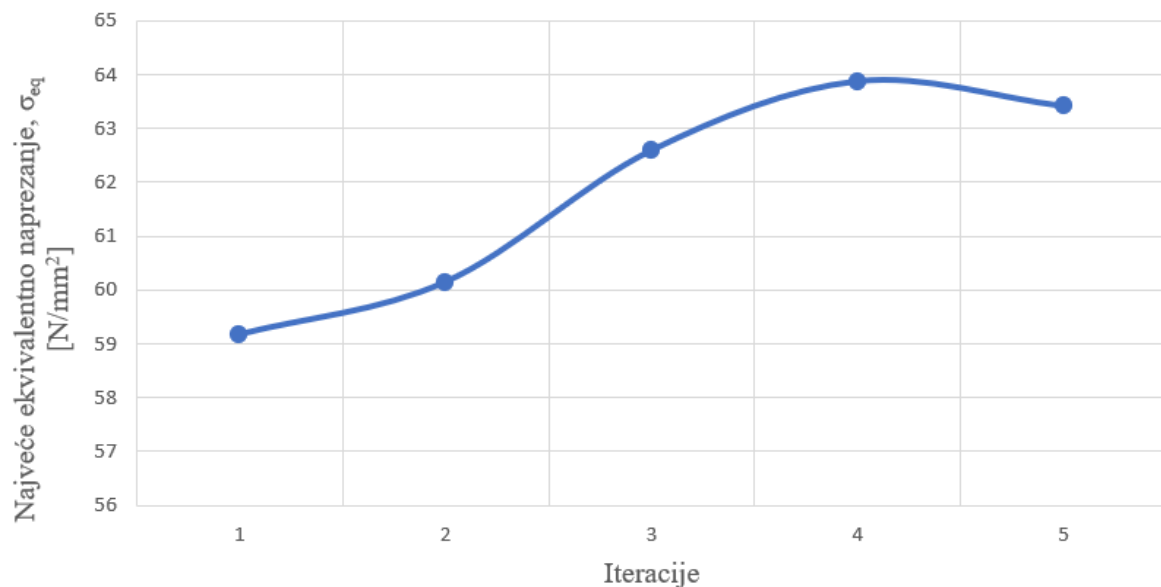
Kod provjere konvergencije mreže potrebno je odrediti veličinu i broj elemenata da rezultati konvergiraju tj. potrebno je osigurati nepromjenjivost rezultata. Provjera konvergencije će se vršiti u nekoliko koraka mijenjanjem veličine i broja konačnih elemenata tako dugo dok razlika u rezultatima u zadnja dva koraka ne bude unutar 1%. Tablica 6.4. prikazuje najveće ekvivalentno naprezanje na vlačno opterećenoj strani korijena zuba, dok se u svakom sljedećem koraku mijenja veličina elementa, broj elementa i broj čvorova.



Tablica 6.4. Rezultati konvergencije mreže

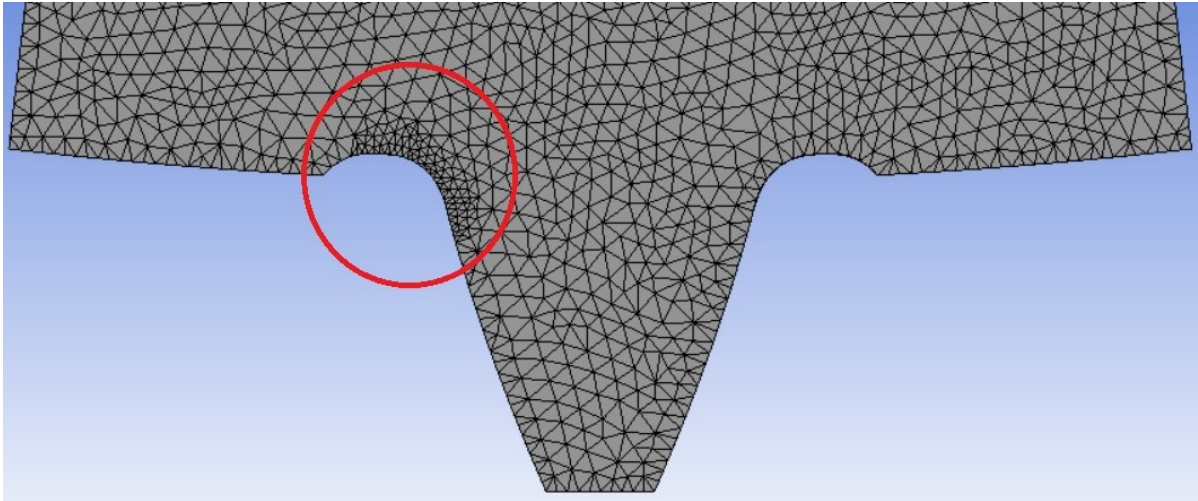
Iteracija	Veličina elementa [mm]	Najveće ekvivalentno naprezanje, $\sigma_{eq}$ [MPa]	Broj elementa	Broj čvorova
1.	1,2	59,172	13626	22099
2.	0,8	60,147	21449	35510
3.	0,5	62,591	50425	83831
4.	0,3	63,873	108821	181956
5.	0,2	63,411	285199	476682

Kako razlika u najvećim ekvivalentnim naprezanjima u četvrtom i petom koraku iteracije iznosi 0,72 %, zaključujemo da je rješenje mreže konvergiralo. Slika 6.13. prikazuje dijagram rezultata konvergencije mreže, gdje se na apscisi nalaze koraci iteracije, dok se na ordinati nalaze vrijednosti najvećih ekvivalentnih naprezanja za vlačno opterećenu stranu korijena zuba.



Slika 6.13. Dijagram konvergencije mreže konačnih elemenata

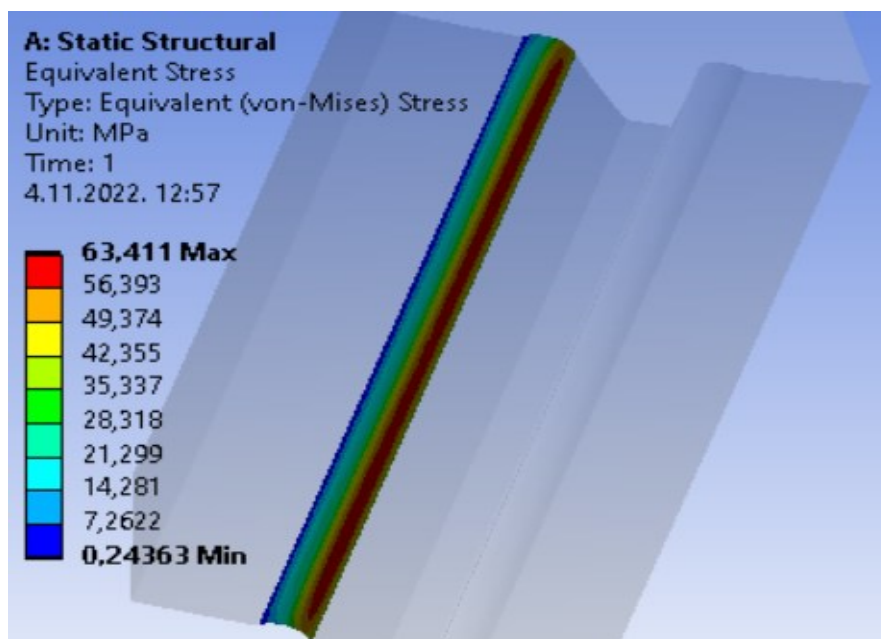
Slika 6.14. prikazuje diskretiziranu mrežu iz petog koraka. Crvenim krugom je označeno područje gušće mreže na vlačno opterećenoj strani zuba zbog toga jer je to područje promatranja same numeričke analize.



Slika 6.14. Povećanje gustoće mreže na vlačno opterećenoj strani zuba

Slika 6.15. prikazuje najveće ekvivalentno naprežanje na vlačno opterećenoj strani korijena zuba iz petog koraka konvergencije mreže prema *Von Misesu* koje iznosi:

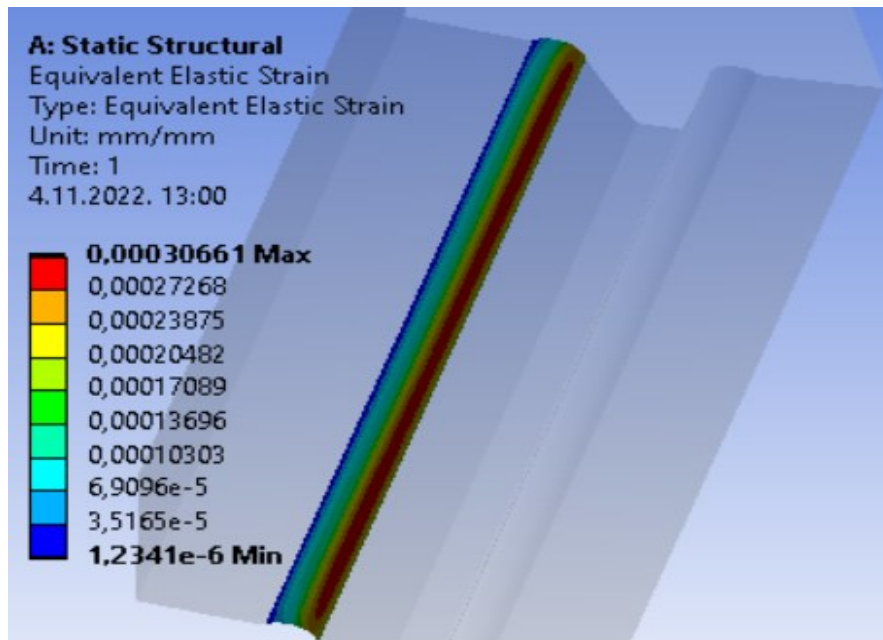
$$\sigma_{eq} = 63,411 \text{ MPa} \quad (6.5.)$$



Slika 6.15. Naprežanje na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika

Na slici 6.16. je prikazana najveća ekvivalentna deformacija na vlačno opterećenoj strani korijena zuba prema *Von Misesu* koja iznosi:

$$\varepsilon_{eq} = 0,00030661 \frac{\text{mm}}{\text{mm}} \quad (6.6.)$$



Slika 6.16. Deformacija na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika

### 6.2.7 Usporedba rezultata analitičkog proračuna i numeričke analize korijena zuba

Rezultate dobivene iz numeričke analize potrebno je usporediti s rezultatima iz analitičkog proračuna. Tablica 6.5. prikazuje rezultate naprezanja gonjenog zupčanika u korijenu zuba na vlačno opterećenoj strani iz analitičkog proračuna prema izrazima iz standarda *ISO 6336 B* i rezultate ekvivalentnih naprezanja iz numeričke analize prema *Von Misesu*.

Tablica 6.5. Rezultati analitičkog proračuna i numeričke analize

Gonjeni zupčanik	
Analitički proračun, $\sigma_{F0}$ [MPa]	67,31
Najveće ekvivalentno naprezanje prema <i>Von Misesu</i> , $\sigma_{eq}$ [MPa]	63,411

Pomoću podataka iz tablice 6.5. izračunato je odstupanje rezultata analitičkog proračuna i numeričke analize prema:

$$\frac{\sigma_{F0} - \sigma_{eq}}{\sigma_{eq}} \cdot 100 \quad (6.7.)$$

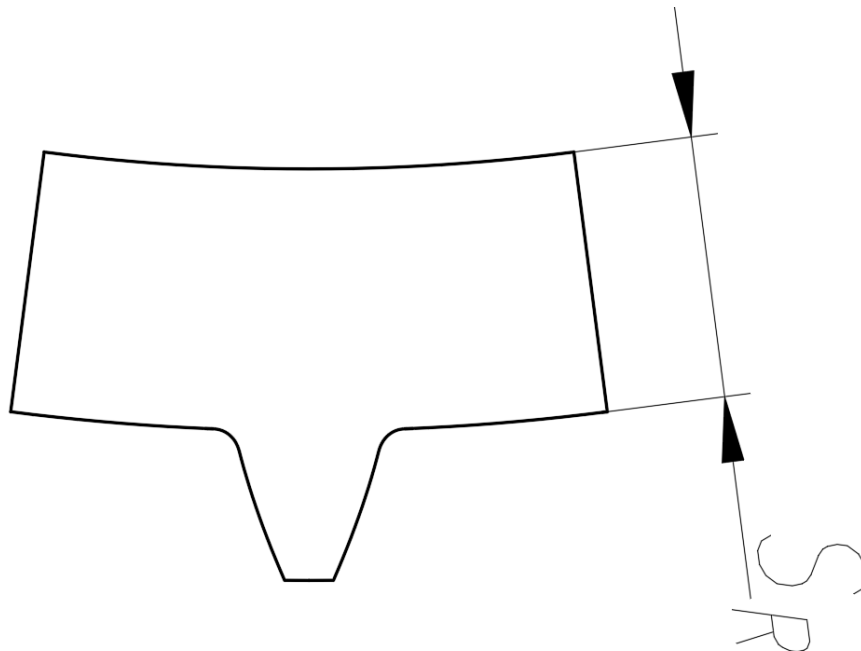
Slijedi da odstupanje u rezultatima iznosi:

$$\frac{67,31-63,411}{67,31} \cdot 100 = 5,79\% \quad (6.8.)$$

Iz usporedbe rezultata možemo zaključiti da postoji određena razlika između naprezanja u korijenu zuba dobivenih analitičkim proračunom i numeričke analize. Odstupanje u naprezanjima iznosi 5,79 % iz čega možemo zaključiti da je numerička analiza dovoljno točna u odnosu na analitički proračun pošto je odstupanje manje od 10%.

## 7 UTJECAJ DEBLJINE VIJENCA GONJENOG ZUPČANIK NA NAPREZANJE U KORIJENU ZUBA

Nadalje potrebno je provesti analitičke proračune i numeričke analize za različite debljine vijenca, te utvrditi kako utječe promjena debljine vijenca na naprezanje i deformaciju u korijenu zuba. Nakon provedenih analiza potrebno je usporediti rezultate analitičkog proračuna i numeričke analize, te je potrebno utvrditi optimalni dizajn zupčanika. Kod numeričke analize upotrijebljena veličina mreže bit će mreža konvergencije rezultata iz prethodnog poglavlja.



*Slika 7.1. Debljina vijenca gonjenog zupčanika*

### 7.1 Naprezanje i deformacija u korijenu zuba za $S_R = 4m_n$

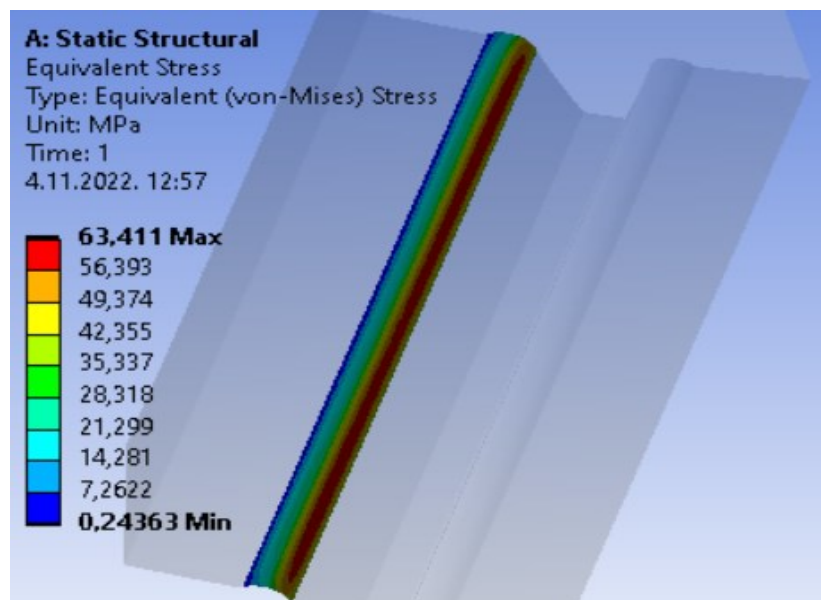
Tablica 7.1. prikazuje analitičke vrijednosti nazivnog naprezanja i faktora sigurnosti protiv loma u korijenu zuba gonjenog zupčanika pomoću *KISSsofta* za debljinu vijenca  $S_R = 4m_n$ .

Tablica 7.1. Vrijednosti nazivnog naprezanja i faktora sigurnosti gonjenog zupčanika za debljinu vijenca  $S_R = 4m_n$

Nazivno naprezanje u korijenu zuba, $\sigma_{F0}$ [MPa]	67,31
Faktor sigurnosti protiv loma u korijenu zuba, $S_{F2}$	1,7

Slika 7.2. prikazuje najveće ekvivalentno naprezanje prema *Von Misesu* na vlačno opterećenoj strani korijena zuba za debljinu vijenca  $4m_n$  koje iznosi:

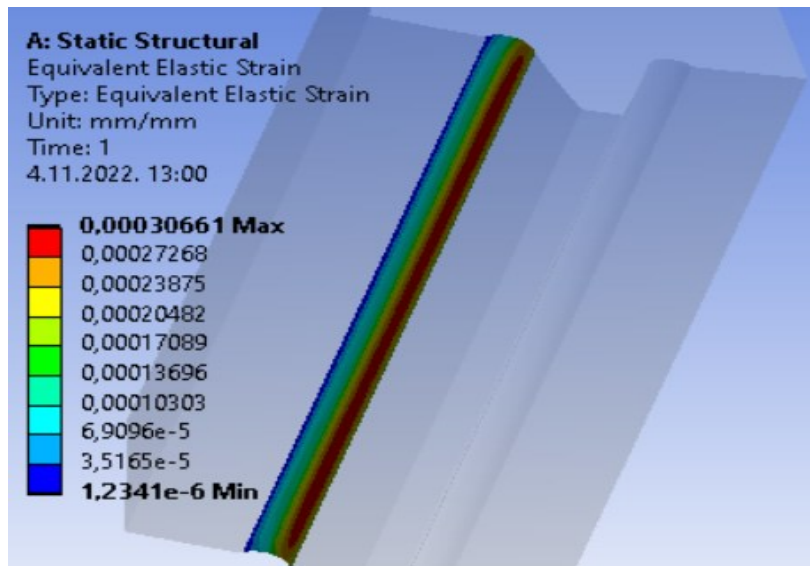
$$\sigma_{eq} = 63,411 \text{ MPa} \quad (7.1.)$$



Slika 7.2. Naprezanje na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika za debljinu vijenca  $S_R = 4m_n$

Na slici 7.3. je prikazana najveća ekvivalentna deformacija na vlačno opterećenoj strani korijena zuba prema *Von Misesu* koja iznosi:

$$\varepsilon_{eq} = 0,00030661 \frac{\text{mm}}{\text{mm}} \quad (7.2.)$$



Slika 7.3. Deformacija na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika za debljinu vijenca  $S_R = 4m_n$

## 7.2 Naprezanje i deformacija u korijenu zuba za $S_R = 3,5m_n$

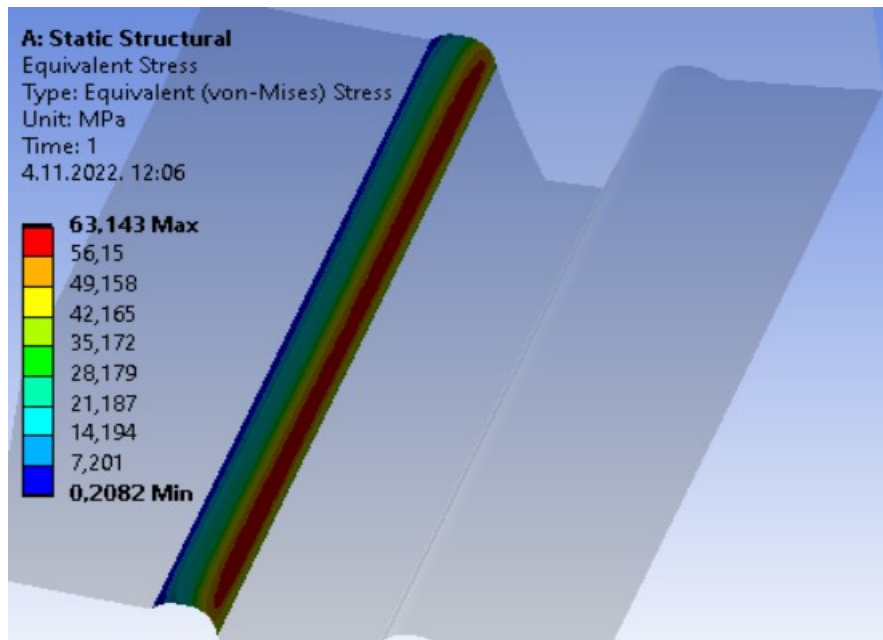
Tablica 7.2. prikazuje vrijednosti nazivnog naprezanja i faktora sigurnosti protiv loma u korijenu zuba gonjenog zupčanika pomoću *KISSsofta* za debljinu vijenca  $S_R = 3,5m_n$ .

Tablica 7.2. Vrijednosti nazivnog naprezanja i faktora sigurnosti gonjenog zupčanika za debljinu vijenca  $S_R = 3,5m_n$

Nazivno naprezanje u korijenu zuba, $\sigma_{F0}$ [MPa]	67,31
Faktor sigurnosti protiv loma u korijenu zuba, $S_{F2}$	1,7

Slika 7.4. prikazuje najveće ekvivalentno naprezanje prema *Von Misesu* na vlačno opterećenoj strani korijena zuba za debljinu vijenca  $S_R = 3,5m_n$  koje iznosi:

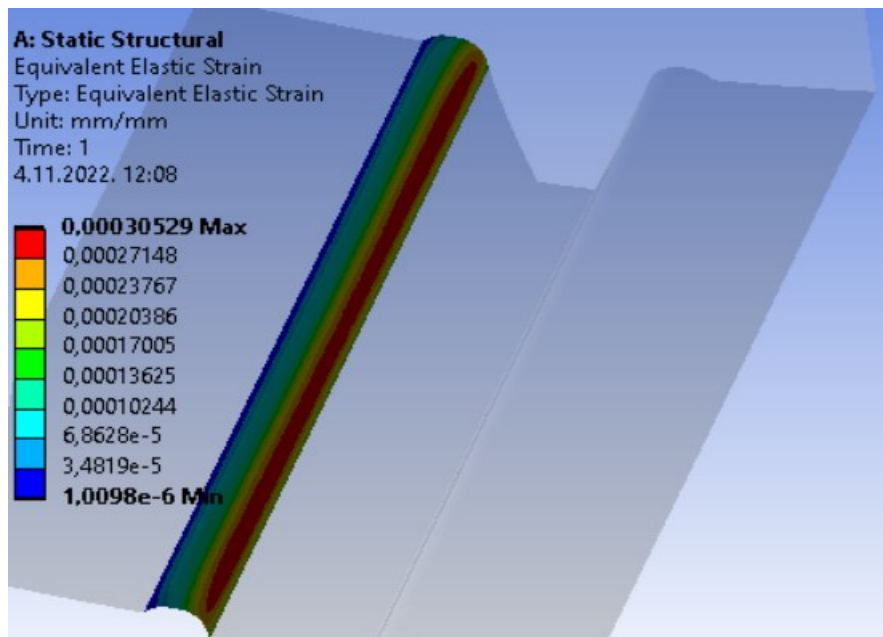
$$\sigma_{eq} = 63,143 \text{ MPa} \quad (7.3.)$$



Slika 7.4. Naprezanje na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika za debljinu vijenca  $S_R = 3,5m_n$

Na slici 7.5. je prikazana najveća ekvivalentna deformacija na vlačno opterećenoj strani korijena zuba prema *Von Misesu* koja iznosi:

$$\varepsilon_{eq} = 0,00030529 \frac{\text{mm}}{\text{mm}} \quad (7.4.)$$



Slika 7.5. Deformacija na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika za debljinu vijenca  $S_R = 3,5m_n$



### 7.3 Naprezanje i deformacija u korijenu zuba za $S_R = 3m_n$

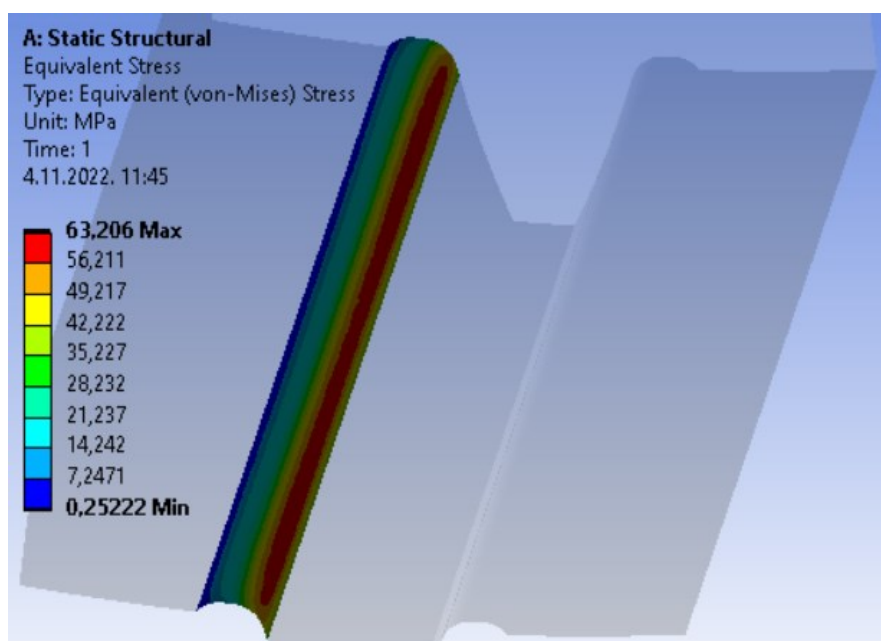
Tablica 7.3. prikazuje vrijednosti nazivnog naprezanja i faktora sigurnosti protiv loma u korijenu zuba gonjenog zupčanika pomoću *KISSsofta* za debljinu vijenca  $S_R = 3m_n$ .

*Tablica 7.3. Vrijednosti nazivnog naprezanja i faktora sigurnosti gonjenog zupčanika za debljinu vijenca  $S_R = 3m_n$*

Nazivno naprezanje u korijenu zuba, $\sigma_{F0}$ [MPa]	67,31
Faktor sigurnosti protiv loma u korijenu zuba, $S_{F2}$	1,7

Slika 7.6. prikazuje najveće ekvivalentno naprezanje prema *Von Misesu* na vlačno opterećenoj strani korijena zuba za debljinu vijenca  $S_R = 3m_n$  koje iznosi:

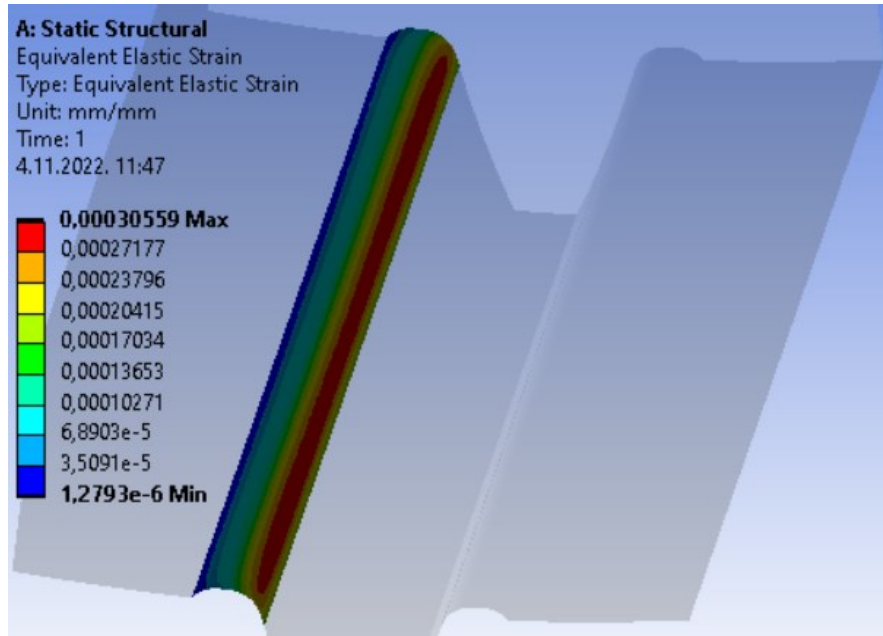
$$\sigma_{eq} = 63,206 \text{ MPa} \quad (7.5.)$$



*Slika 7.6. Naprezanje na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika za debljinu vijenca  $S_R = 3m_n$*

Na slici 7.7. je prikazana najveća ekvivalentna deformacija na vlačno opterećenoj strani korijena zuba prema *Von Misesu* koja iznosi:

$$\varepsilon_{eq} = 0,00030559 \frac{\text{mm}}{\text{mm}} \quad (7.6.)$$



Slika 7.7. Deformacija na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika za debljinu vijenca  $S_R = 3m_n$

#### 7.4 Naprežanje i deformacija u korijenu zuba za $S_R = 2,5m_n$

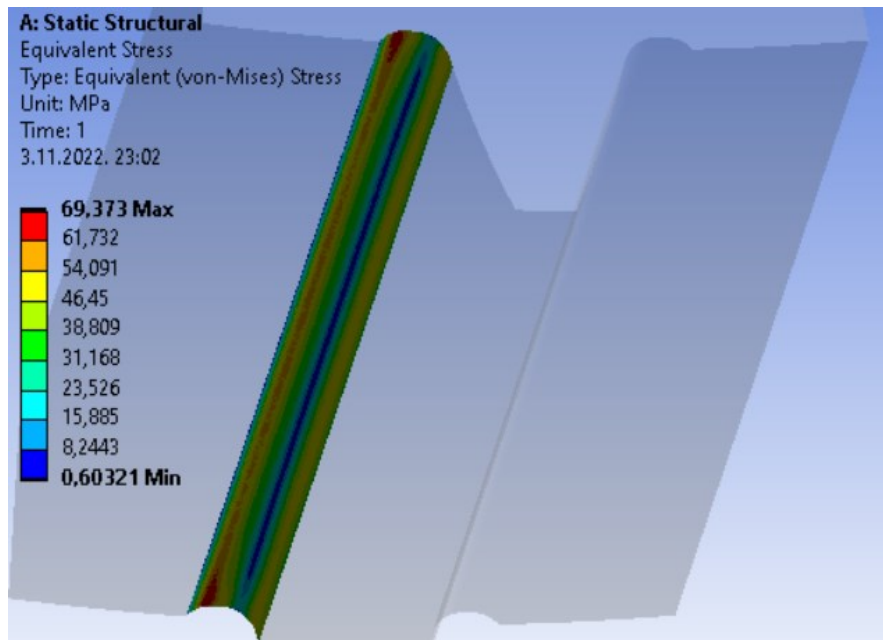
Tablica 7.4. prikazuje vrijednosti nazivnog naprežanja i faktora sigurnosti protiv loma u korijenu zuba gonjenog zupčanika pomoću *KISSsofta* za debljinu vijenca  $S_R = 2,5m_n$ .

Tablica 7.4. Vrijednosti nazivnog naprežanja i faktora sigurnosti gonjenog zupčanika za debljinu vijenca  $S_R = 2,5m_n$

Nazivno naprežanje u korijenu zuba, $\sigma_{F0}$ [MPa]	74,72
Faktor sigurnosti protiv loma u korijenu zuba, $S_{F2}$	1,53

Slika 7.8. prikazuje najveće ekvivalentno naprežanje prema *Von Misesu* na vlačno opterećenoj strani korijena zuba za debljinu vijenca  $S_R = 2,5m_n$  koje iznosi:

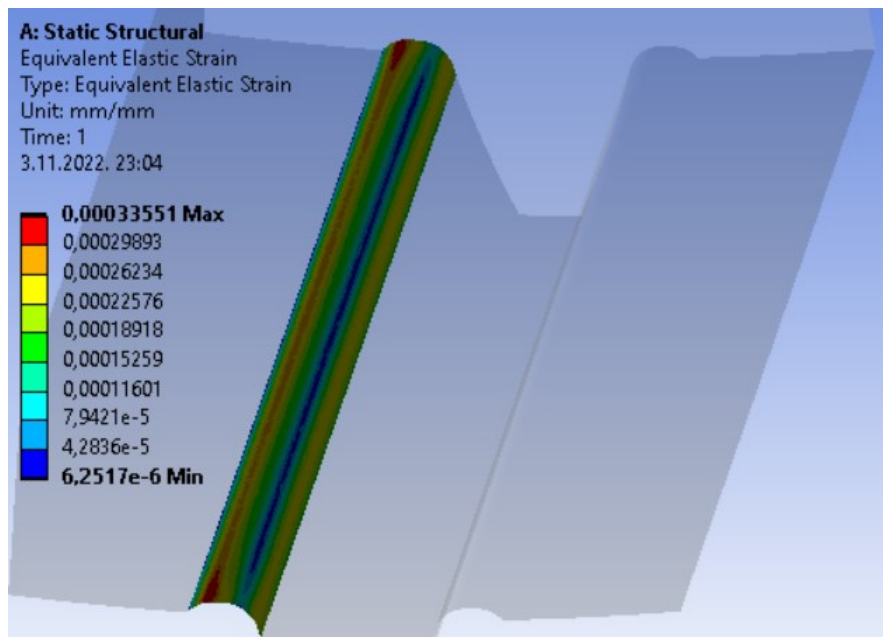
$$\sigma_{eq} = 69,373 \text{ MPa} \quad (7.7.)$$



Slika 7.8. Naprezanje na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika za debljinu vijenca  $S_R = 2,5m_n$

Na slici 7.9. je prikazana najveća ekvivalentna deformacija na vlačno opterećenoj strani korijena zuba prema *Von Misesu* koja iznosi:

$$\varepsilon_{eq} = 0,00033551 \frac{\text{mm}}{\text{mm}} \quad (7.8.)$$



Slika 7.9. Deformacija na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika za debljinu vijenca  $S_R = 2,5m_n$

## 7.5 Naprezanje i deformacija u korijenu zuba za $S_R = 2,35m_n$

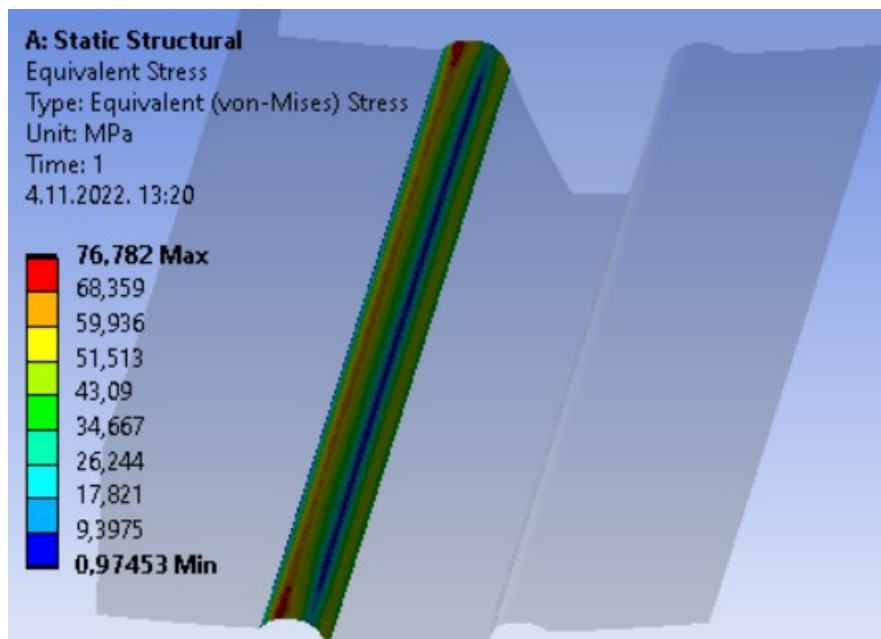
Tablica 7.5. prikazuje vrijednosti nazivnog naprezanja i faktora sigurnosti protiv loma u korijenu zuba gonjenog zupčanika pomoću *KISSsofta* za debljinu vijenca  $S_R = 2,35m_n$ .

*Tablica 7.5. Vrijednosti nazivnog naprezanja i faktora sigurnosti gonjenog zupčanika za debljinu vijenca  $S_R = 2,35m_n$*

Nazivno naprezanje u korijenu zuba, $\sigma_{F0}$ [MPa]	81,38
Faktor sigurnosti protiv loma u korijenu zuba, $S_{F2}$	1,41

Slika 7.10. prikazuje najveće ekvivalentno naprezanje prema *Von Misesu* na vlačno opterećenoj strani korijena zuba za debljinu vijenca  $S_R = 2,35m_n$  koje iznosi:

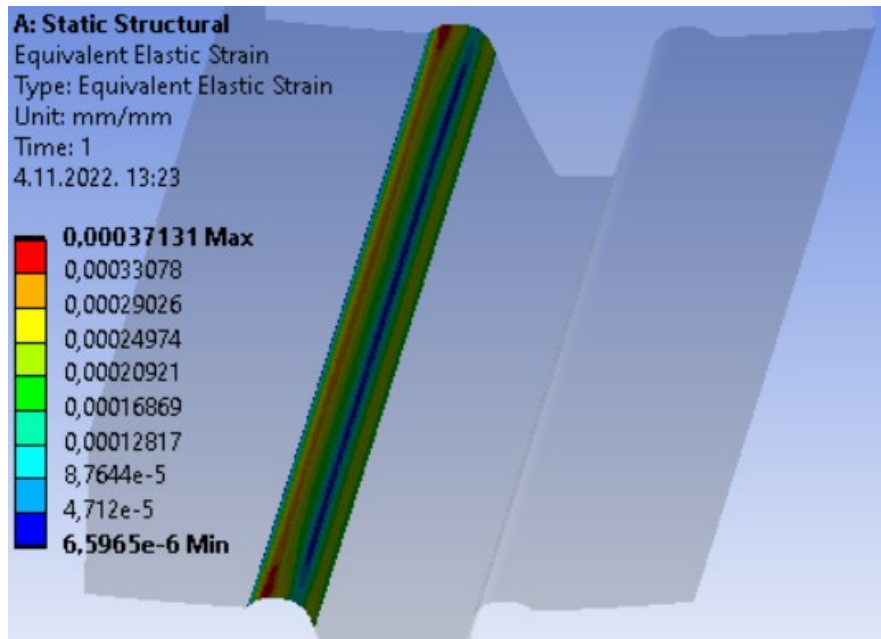
$$\sigma_{eq} = 76,782 \text{ MPa} \quad (7.9.)$$



*Slika 7.10. Naprezanje na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika za debljinu vijenca  $S_R = 2,35m_n$*

Na slici 7.11. je prikazana najveća ekvivalentna deformacija na vlačno opterećenoj strani korijena zuba prema *Von Misesu* koja iznosi:

$$\varepsilon_{eq} = 0,00037131 \frac{\text{mm}}{\text{mm}} \quad (7.10.)$$



Slika 7.11. Deformacija na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika za debljinu vijenca  $S_R = 2,35m_n$

### 7.6 Naprežanje i deformacija u korijenu zuba za $S_R = 2m_n$

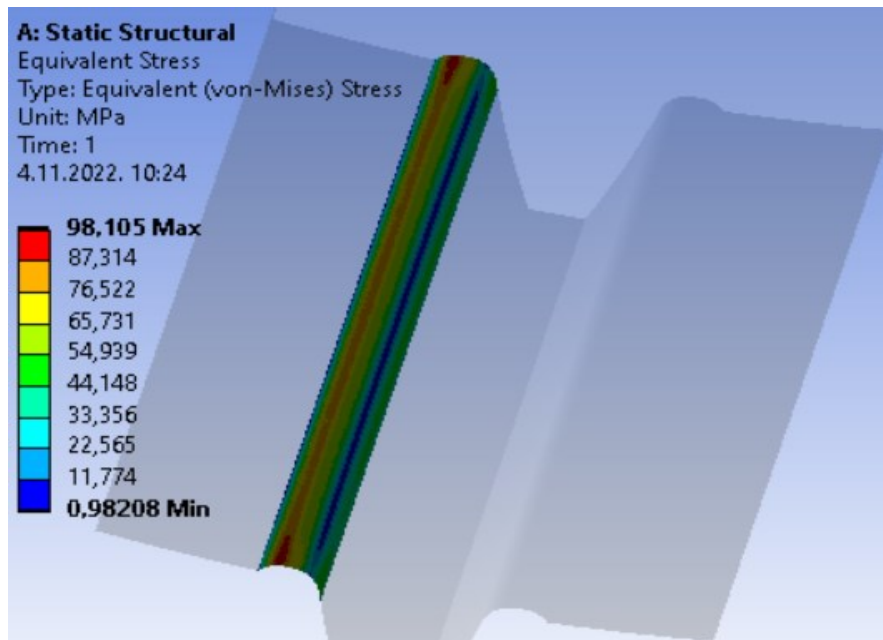
Tablica 7.6. prikazuje vrijednosti nazivnog naprežanja i faktora sigurnosti protiv loma u korijenu zuba gonjenog zupčanika pomoću *KISSsofta* za debljinu vijenca  $S_R = 2m_n$ .

Tablica 7.6. Vrijednosti nazivnog naprežanja i faktora sigurnosti gonjenog zupčanika za debljinu vijenca  $S_R = 2m_n$

Nazivno naprežanje u korijenu zuba, $\sigma_{F0}$ [MPa]	98,75
Faktor sigurnosti protiv loma u korijenu zuba, $S_{F2}$	1,16

Slika 7.12. prikazuje najveće ekvivalentno naprežanje prema *Von Misesu* na vlačno opterećenoj strani korijena zuba za debljinu vijenca  $S_R = 2m_n$  koje iznosi:

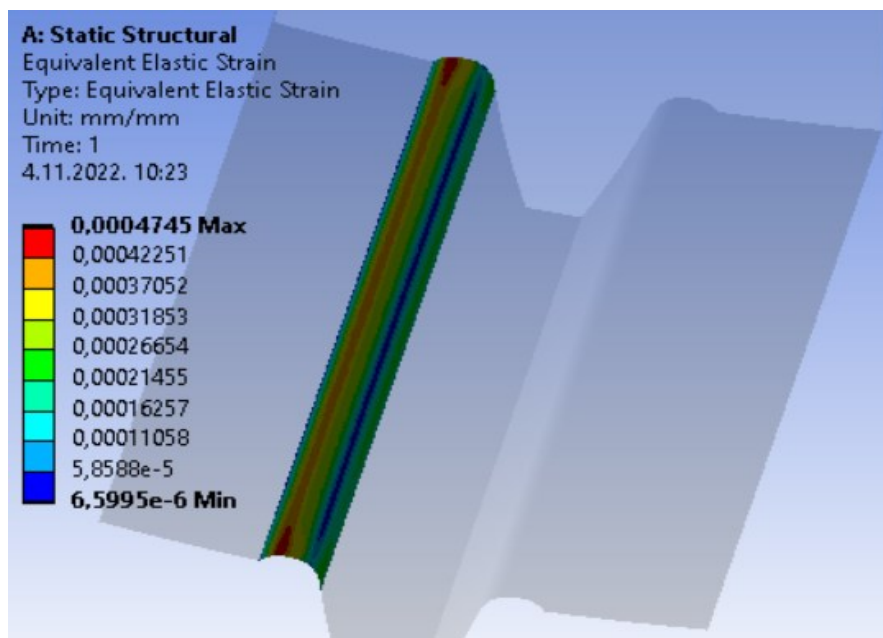
$$\sigma_{eq} = 98,105 \text{ MPa} \quad (7.11.)$$



Slika 7.12. Naprežanje na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika za debljinu vijenca  $S_R = 2m_n$

Na slici 7.13. je prikazana najveća ekvivalentna deformacija na vlačno opterećenoj strani korijena zuba prema *Von Misesu* koja iznosi:

$$\varepsilon_{eq} = 0,0004745 \frac{\text{mm}}{\text{mm}} \quad (7.12.)$$



Slika 7.13. Deformacija na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika za debljinu vijenca  $S_R = 2m_n$

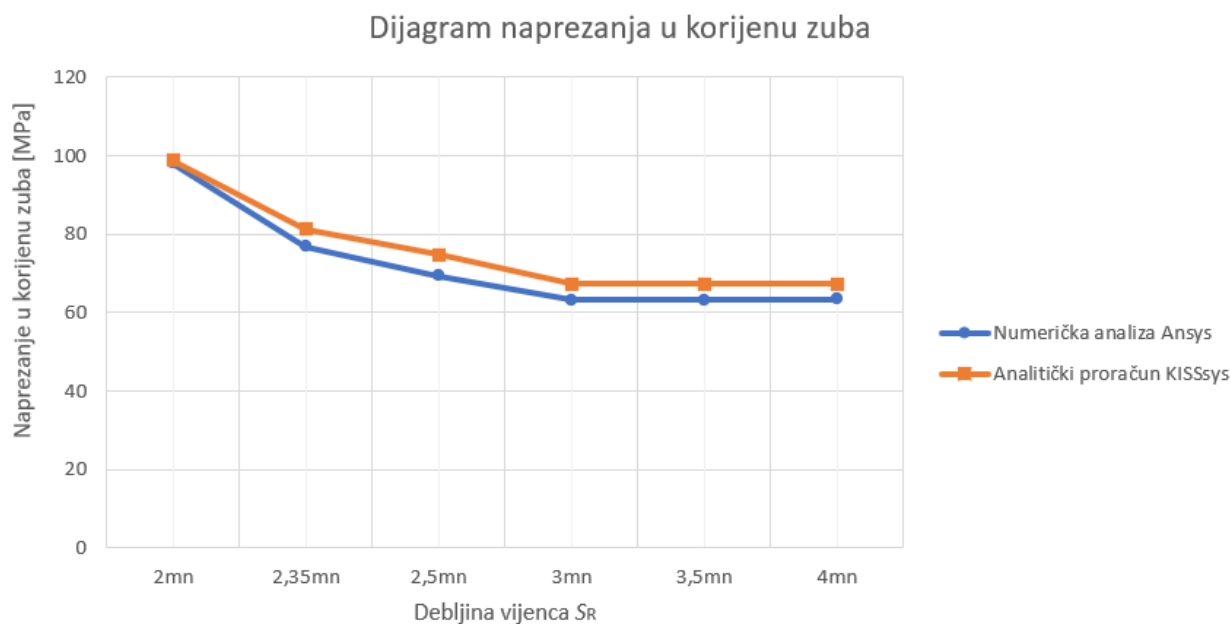
## 7.7 Usporedba rezultata analitičkog proračuna i numeričke analize za različite debljine vijenca $S_R$

Sa slika iz prethodnih poglavlja moguće je vidjeti naprezanja i deformacije u korijenu zuba za različite debljine vijenca gonjenog zupčanika. Tablica 7.7. prikazuje odstupanje naprezanja analitičkog proračuna i numeričke analize korijena zuba gonjenog zupčanika za različite debljine vijenca.

*Tablica 7.7. Vrijednosti odstupanja naprezanja analitičkog proračuna i numeričke analize za različite debljine vijenca  $S_R$*

Debljina vijenca $S_R$	Analitički proračun $\sigma_{F0}$ [MPa]	Numerička analiza $\sigma_{eq}$ [MPa]	Odstupanje $\left(\frac{\sigma_{F0}-\sigma_{eq}}{\sigma_{F0}} \cdot 100\right)$ [%]
$4m_n$	67,31	63,411	5,79 %
$3,5m_n$	67,31	63,143	6,19 %
$3m_n$	67,31	63,206	6,10 %
$2,5m_n$	74,72	69,373	7,16 %
$2,35m_n$	81,38	76,782	5,65 %
$2m_n$	98,75	98,105	0,65 %

Slika 7.14. prikazuje dijagram naprezanja analitičkog proračuna i numeričke analize korijena zuba gonjenog zupčanika za različite debljine vijenca.



Slika 7.14. Dijagram naprezanja u korijenu zuba analitičkog proračuna i numeričke analize za različite debljine vijenca

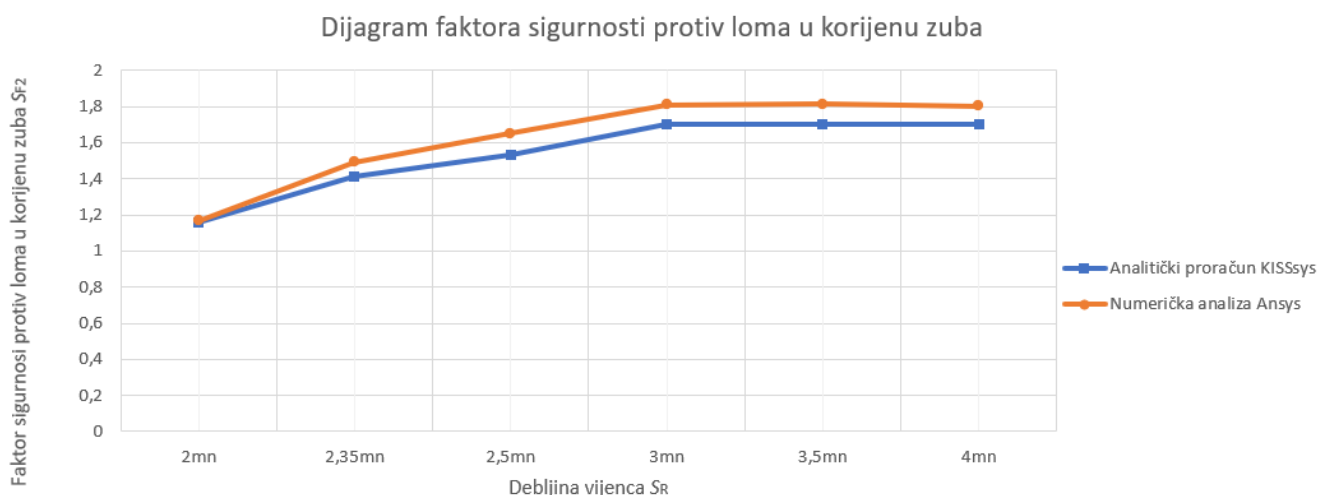
Tablica 7.8. prikazuje odstupanje faktora sigurnosti protiv loma u korijenu zuba gonjenog zupčanika za analitički proračun i numeričku analizu, te za različite debljine vijenca.

Tablica 7.8. Vrijednosti odstupanja faktora sigurnosti analitičkog proračuna i numeričke analize za različite debljine vijenca  $S_R$

Debljina vijenca $S_R$	Analitički proračun $S_{F2}$	Numerička analiza $S_{Fnum2}$	Odstupanje $\left(\frac{S_{F2}-S_{Fnum2}}{S_{F2}} \cdot 100\right)$ [%]
$4m_n$	1,7	1,80	5,88 %
$3,5m_n$	1,7	1,81	6,47 %
$3m_n$	1,7	1,81	6,47 %
$2,5m_n$	1,53	1,65	7,84 %
$2,35m_n$	1,41	1,49	5,67 %
$2m_n$	1,16	1,17	0,86 %

Slika 7.15. prikazuje dijagram faktora sigurnosti protiv loma u korijenu zuba gonjenog zupčanika analitičkog proračuna i numeričke analize za različite debljine vijenca.





Slika 7.15. Dijagram faktora sigurnosti protiv loma u korijenu zuba analitičkog proračuna i numeričke analize za različite debljine vijenca

Iz dobivenog dijagrama (slika 7.15.) moguće je vidjeti da smanjenjem debljine vijenca  $S_R$  do  $3m_n$  vrijednost faktora sigurnosti u korijenu zuba  $S_{F2}$  je konstantna vrijednost, dok daljnjim smanjivanjem debljine vijenca  $S_R$  faktor sigurnosti u korijenu zuba  $S_{F2}$  opada.

Kako vrijedi da faktor sigurnosti u korijenu zuba gonjenog zupčanika  $S_{F2}$  prema *ISO 6336* standardu mora biti:

$$S_{F2} \geq S_{Fmin} = 1,4 \quad (7.13.)$$

Iz dijagrama (Slika 7.15.) pomoću jednadžbe pravca moguće je odrediti optimalnu debljinu vijenca gonjenog zupčanika za analitički proračun  $S_{Ra}$  i numeričku analizu  $S_{Rn}$ .

Za analitički proračun optimalna debljina vijenca gonjenog zupčanika  $S_{Ra}$  za minimalni faktor sigurnosti protiv loma  $S_{Fmin}$  iznosi:

$$S_{Ra} = 2m_n + \frac{2m_n - 2,35m_n}{1,16 - 1,41} \cdot (1,4 - 1,16) = 2,336m_n \quad (7.14.)$$

Za numeričku analizu optimalna debljina vijenca gonjenog zupčanika  $S_{Rn}$  za minimalni faktor sigurnosti protiv loma  $S_{Fmin}$  iznosi:

$$S_{Rn} = 2m_n + \frac{2m_n - 2,35m_n}{1,17 - 1,49} \cdot (1,4 - 1,17) = 2,25m_n \quad (7.15.)$$

Odstupanje optimalne debljine vijenca analitičkog proračuna  $S_{Ra}$  i numeričke analize  $S_{Rn}$  iznosi:

$$\frac{2,336m_n - 2,25m_n}{2,336m_n} \cdot 100 = 3,68 \% \quad (7.16.)$$

Iz usporedbe rezultata možemo zaključiti da postoji određena razlika između optimalne debljine vijenca analitičkog proračuna  $S_{Ra}$  i numeričke analize  $S_{Rn}$ . Odstupanje optimalne debljine vijenca iznosi 3,68 % iz čega možemo zaključiti da je numerička analiza dovoljno točna u odnosu na analitički proračun.

## 8 ZAKLJUČAK

U ovome radu provedeno je istraživanje na naprezanje u korijenu zuba za različite debljine vijenca. Prvi dio rada obrađuje teorijski pristup u kojemu su objašnjene osnove o zupčastim prijenosnicima, objašnjeno je naprezanje u korijenu zuba i na kraju je objašnjena metoda konačnih elemenata što nam olakšava razumijevanje drugog dijela rada. U drugom dijelu rada proveden je proračun do provjere uvjeta razmaka osi zupčanika. Dobivene osnovne vrijednosti upotrijebljene su za projektni proračun u programskom paketu *KISSsoft*, da bi se odredila potrebna geometrija zupčanika. Nadalje je izrađen model gonjenog zupčanika u *SolidWorksu* kako bi se mogla izvršiti diskretizacija u *Ansys Workbenchu*. Vrijednosti numeričke analize uspoređene su s analitičkim vrijednostima iz *KISSsofta*, te je izračunato odstupanje u rezultatima. Nakon pravilne diskretizacije gonjenog zupčanika provedene su analize naprezanja i deformacija za različite debljine vijenca. Iz dobivenih rezultata može se utvrditi da se naprezanje u korijenu zuba ne mijenja do debljine vijenca  $3m_n$  nakon čega daljnjom promjenom debljine vijenca, naprezanja u korijenu zuba počinju sve više rasti. Za minimalni faktor sigurnosti protiv loma u korijenu zuba kod analitičkog proračuna određena debljina vijenca iznosi  $2,336m_n$ , dok kod numeričke analize debljina vijenca iznosi  $2,25m_n$ . Istraživanje u ovom radu služi kao definicija procedure da se može primijeniti za bilo koju drugu geometriju zupčanika tako da se odredi debljina vijenca, a da ne dođe do loma u korijenu zuba zupčanika za neke druge ulaze parametre.

## 9 LITERATURA

- [1] Jerko P.; Branko P.: „Elementi Stojeva“, Zagreb, 2014.
- [2] Oberšmit, E.: „Ozubljenja i zupčanici“, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 1990.
- [3] Herceg, Zdravko. "Odziv materijala korijena zuba zupčanika." Diplomski rad, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, 2020. <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:190:792910>
- [4] Franulović, M. "Influence of base pitch deviation on stresses in involute gearing."  
Master's thesis, Faculty of Engineering, University of Rijeka, Rijeka (2003).
- [5] Obsieger, B.: „Prijenosi sa zupčanicima“, Rijeka, 2006.
- [6] Kovaček, Adriano. "Numerička analiza naprezanja zuba zupčanika." Master's thesis, University of Rijeka, Faculty of Engineering, 2021. <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:190:150562>
- [7] „Proračun jednostupanjskog zupčanog reduktora“, Elementi strojeva II, 2016.

## Popis oznaka

Oznaka	Opis	Mjerna jedinica
$s$	debljina zuba	mm
$p$	korak zuba	mm
$e$	širina uzubine	mm
$m$	modul	
$d$	diobeni promjer	mm
$z$	broj zubi	
$h_f$	visina korijena zuba	mm
$h_a$	tjemena visina	mm
$h$	ukupna visina zuba	mm
$d_a$	vanjski promjer zupčanika	mm
$d_f$	promjer kružnice zupčanika preko korijena	mm
$a$	osni razmak zupčanika	mm
$S_F$	faktor sigurnosti protiv loma u korijenu zuba	
$\sigma_{FE}$	ishodišna trajna dinamička čvrstoća materijala	MPa
$Y_{NT}$	faktor trajnosti	
$Y_\delta$	faktor utjecaja osjetljivosti materijala na koncentraciju naprezanja	
$Y_R$	faktor hrapavosti	
$Y_X$	faktor veličine	
$\sigma_F$	stvarno naprezanje	MPa
$\sigma_{F0}$	nazivno naprezanje	MPa
$K_A$	faktor primjene	
$K_{F\alpha}$	faktor raspodjele opterećenja na zube koji su istovremeno u zahvatu	
$K_{F\beta}$	faktor nejednolike raspodjele opterećenja po uzdužnoj liniji boka zuba	
$K_V$	faktor unutarnjeg dinamičkog opterećenja	
$n$	stvarna brzina vrtnje	$\text{min}^{-1}$
$n_E$	rezonantna brzina vrtnje	$\text{min}^{-1}$
$N$	omjer stvarne brzine vrtnje i rezonantne brzine vrtnje	

$\varepsilon_\gamma$	ukupni stupanj prekrivanja	
$c_\gamma$	srednja vrijednost krutosti zupčanog para u zahvatu	
$F_{tH}$	korrigirana računaska sila	N
$y_\alpha$	istrošenost boka zuba	
$f_{pe}$	odstupanje koraka na zahvatnoj crti	
$K_{H\beta}$	faktor nejednolike raspodjele opterećenja po širini zuba	
$F_{\beta y}$	ukupno odstupanje bočne linije zuba	N
$F_m$	srednja obodna sila po širini zuba	N
$F_t$	tangencijalna sila	N
$\sigma_{bn}$	naprezanje zbog savijanja	MPa
$Y_F$	faktor oblika zuba	
$s_{Fn}$	širina korijena zuba	mm
$z_n$	fiktivni broj zubi	
$\rho_{fP}$	polumjer zaobljenja korijena zuba osnovnog profila	mm
$Y_S$	faktor korekcije naprezanja	
$L$	omjer debljine i visine zuba	
$q_s$	parametar zarez	
$Y_\beta$	faktor koji uzima u obzir nagib zuba	
$\beta$	nagib zuba	°
$\varepsilon_\beta$	stupanj prekrivanja koraka	
$P$	snaga	kW
$i$	prijenosni omjer	
$K_1$	faktor ovisan o vrsti ozubljenja	
$\psi_{bd}$	faktor širine zuba	
$K_{H\alpha}$	faktor raspodjele opterećenja na pojedine zube pri opterećenju bokova zuba	
$S_{Hmin}$	minimalna sigurnost na pitting	
$\sigma_{Hlim}$	dinamička čvrstoća na dodirni pritisak	MPa
$E$	modul elastičnosti	MPa
$\rho$	gustoća materijala	MPa
$\nu$	Poissonov koeficijent	
$\sigma_S$	granica tečenja	MPa

$\sigma_{Flim}$	trajna dinamička čvrstoća korijena zuba	MPa
$\sigma_B$	vlačna čvrstoća	MPa
$b$	širina zupčanika	mm
$a_d$	teoretski razmak osi	mm
$\alpha$	kut nagiba boka osnovnog profila ozubljenja	°
$S_{Fmin}$	minimalni faktor sigurnosti	
$\rho_F$	polumjer zakrivljenosti korijena	mm
$\alpha_{Fen}$	kut pod kojim sila djeluje na zub	°
$h_{Fe}$	krak sile	mm
$F_{bn}$	normalna sila	N
$F_r$	radijalna sila	N
$\sigma_{eq}$	ekvivalentno naprezanje	MPa
$\epsilon_{eq}$	ekvivalentna deformacija	mm/mm
$S_R$	debljina vijenca	mm
$S_{Ra}$	optimalna debljina vijenca za analitički proračun	mm
$S_{Rn}$	optimalna debljina vijenca za numeričku analizu	mm

## Popis slika

Slika 2.1. Zupčanik s vanjskim ozubljenjem na kojemu su prikazane osnovne veličine [2].....	2
Slika 3.1. Naprezanje u korijenu zuba [4].....	6
Slika 4.1. Osnovne vrste konačnih elemenata [6].....	11
Slika 4.2. Diskretizacija zuba zupčanika mrežom konačnih elemenata [6].....	12
Slika 5.1. Faktor raspodjele opterećenja $K_{Fa}$ [2].....	16
Slika 5.2. Vrste raspodjele opterećenja po dužini boka zuba [2].....	17
Slika 5.3. Prikaz ulaznih podataka u korisničkom sučelju KISSsoft.....	22
Slika 5.4. Geometrija zupčanika u KISSsoftu.....	23
Slika 6.1. Lom zuba zupčanika u korijenu zuba [6].....	24
Slika 6.2. Položaj točke B u kojoj djeluje normalna sila $F_{bn}$ .....	26
Slika 6.3. Zahvat zupčanika u točki B.....	26
Slika 6.4. Zub gonjenog zupčanika.....	27
Slika 6.5. Pojednostavljen model gonjenog zupčanika.....	27
Slika 6.6. Mehanička svojstva materijala za Čelik Č4732, Razred 1, HRC50, Tip B (AGMA).....	28
Slika 6.7. Definiranje rubnih uvjeta.....	29
Slika 6.8. Diskretizirana geometrija gonjenog zupčanika.....	29
Slika 6.9. Ekvivalentna naprezanja prema Von Misesu.....	30
Slika 6.10. Ekvivalentne deformacije prema Von Misesu.....	30
Slika 6.11. Ekvivalentno naprezanje u korijenu zuba gonjenog zupčanika prema Von Misesu.....	31
Slika 6.12. Ekvivalentna deformacija u korijenu zuba gonjenog zupčanika prema Von Misesu.....	32
Slika 6.13. Dijagram konvergencije mreže konačnih elemenata.....	33



Slika 6.14. Povećanje gustoće mreže na vlačno opterećenoj strani zuba.....	34
Slika 6.15. Naprezanje na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika.....	34
Slika 6.16. Deformacija na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika.....	35
Slika 7.1. Debljina vijenca gonjenog zupčanika.....	37
Slika 7.2. Naprezanje na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika za debljinu vijenca $S_R = 4m_n$ .....	38
Slika 7.3. Deformacija na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika za debljinu vijenca $S_R = 4m_n$ .....	39
Slika 7.4. Naprezanje na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika za debljinu vijenca $S_R = 3,5m_n$ .....	40
Slika 7.5. Deformacija na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika za debljinu vijenca $S_R = 3,5m_n$ .....	40
Slika 7.6. Naprezanje na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika za debljinu vijenca $S_R = 3m_n$ .....	41
Slika 7.7. Deformacija na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika za debljinu vijenca $S_R = 3m_n$ .....	42
Slika 7.8. Naprezanje na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika za debljinu vijenca $S_R = 2,5m_n$ .....	43
Slika 7.9. Deformacija na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika za debljinu vijenca $S_R = 2,5m_n$ .....	43
Slika 7.10. Naprezanje na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika za debljinu vijenca $S_R = 2,35m_n$ .....	44
Slika 7.11. Deformacija na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika za debljinu vijenca $S_R = 2,35m_n$ .....	45
Slika 7.12. Naprezanje na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika za debljinu vijenca $S_R = 2m_n$ .....	46
Slika 7.13. Deformacija na vlačno opterećenoj strani korijena zuba gonjenog zupčanika za debljinu vijenca $S_R = 2m_n$ .....	46

Slika 7.14. Dijagram naprezanja u korijenu zuba analitičkog proračuna i numeričke analize za različite debljine vijenca.....	48
Slika 7.15. Dijagram faktora sigurnosti protiv loma u korijenu zuba analitičkog proračuna i numeričke analize za različite debljine vijenca.....	49

## Popis tablica

Tablica 5.1. Ulazni podaci.....	13
Tablica 5.2. Faktor ovisan o vrsti ozubljenja [7].....	14
Tablica 5.3. Pogonski faktor [7].....	15
Tablica 5.4. Mehanička svojstva materijala za Čelik Č4732, Razred 1, HRC50, Tip B (AGMA).....	18
Tablica 5.5. Standardne vrijednosti razmaka osi zupčanika [7].....	19
Tablica 5.6. Standardne vrijednosti modula [5].....	19
Tablica 5.7. Ulazni podaci osnovnih dimenzija zupčanika za proračun u programskom paketu KISSsoft.....	22
Tablica 5.8. Osnovne dimenzije pogonskog i gonjenog zupčanika.....	23
Tablica 6.1. Vrijednosti nazivnog naprezanja i faktora sigurnosti dobiveni pomoću KISSsofta.....	25
Tablica 6.2. Vrijednosti dimenzija za određivanje položaja točke B.....	26
Tablica 6.3. Vrijednosti sila koje djeluju na zub zupčanika prema podacima iz KISSsofta.....	28
Tablica 6.4. Rezultati konvergencije mreže.....	33
Tablica 6.5. Rezultati analitičkog proračuna i numeričke analize.....	35
Tablica 7.1. Vrijednosti nazivnog naprezanja i faktora sigurnosti gonjenog zupčanika za debljinu vijenca $S_R = 4m_n$ .....	38
Tablica 7.2. Vrijednosti nazivnog naprezanja i faktora sigurnosti gonjenog zupčanika za debljinu vijenca $S_R = 3,5m_n$ .....	39
Tablica 7.3. Vrijednosti nazivnog naprezanja i faktora sigurnosti gonjenog zupčanika za debljinu vijenca $S_R = 3m_n$ .....	41
Tablica 7.4. Vrijednosti nazivnog naprezanja i faktora sigurnosti gonjenog zupčanika za debljinu vijenca $S_R = 2,5m_n$ .....	42
Tablica 7.5. Vrijednosti nazivnog naprezanja i faktora sigurnosti gonjenog zupčanika za debljinu vijenca $S_R = 2,35m_n$ .....	44

Tablica 7.6. Vrijednosti nazivnog naprezanja i faktora sigurnosti gonjenog zupčanika za debljinu vijenca $S_R = 2m_n$ .....	45
Tablica 7.7. Vrijednosti odstupanja naprezanja analitičkog proračuna i numeričke analize za različite debljine vijenca $S_R$ .....	47
Tablica 7.8. Vrijednosti odstupanja faktora sigurnosti analitičkog proračuna i numeričke analize za različite debljine vijenca.....	48

## 10 SAŽETAK

U ovom radu provedena je numerička analiza naprezanja i deformacija na vlačno opterećenoj strani gonjenog zupčanika za različite debljine vijenca. Prvi dio rada predstavlja teorijsku osnovu o zupčastim prijenosnicima, objašnjeno je naprezanje u korijenu zuba i na kraju je objašnjena metoda konačnih elemenata. U drugom dijelu rada diskretiziran je gonjeni zupčanik, te su nakon svega izvedeni analitički proračuni i numeričke analize za različite debljine vijenca gonjenog zupčanika. Izvedeno je ukupno 12 simulacija za 6 različitih konfiguracija gonjenog zupčanika. Usporedba rezultata analitičkog proračuna i numeričke analize otkrila je sličnosti za određene konfiguracije gonjenog zupčanika, dok u nekim slučajevima razlike su značajne. Na kraju je utvrđena optimalna debljina vijenca za minimalni faktor sigurnosti protiv loma u korijenu zuba.

**Ključne riječi:** *zupčasti prijenosnici, naprezanje u korijenu zuba, metoda konačnih elemenata, KISSsoft, Ansys Workbench, debljina vijenca*

## 11 ABSTRACT

In this study, a numerical analysis of stresses and deformations on the tensile side of the driven gear was performed for different rim thicknesses. The first part of thesis presents the theoretical basis of gear transmissions, the stress in the root of the tooth is also explained and finally the finite element method. In the second part of the thesis, the driven gear was discretized, and after all, analytical calculations and numerical analyzes were performed for different rim thicknesses of the driven gear. A total of 12 simulations were performed for 6 different driven gear configurations. A comparison of the results of the analytical calculation and the numerical analysis revealed similarities for certain configurations for the driven gear, while in some cases the differences are significant. In the end, the optimal rim thickness was determined for the minimum factor of safety against fracture in the root.

**Key words:** *toothed gears, stress in the root of the tooth, finite element method, KISSsoft, Ansys Workbench, rim thickness*