

# PRORAČUN ŠUMA POJASNE BRANE S DVA PODRUČJA GUŠENJA

---

**Nonveiller, Dominik**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:190:916252>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-22**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Engineering](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI

**TEHNIČKI FAKULTET**

Diplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Diplomski rad

**PRORAČUN ŠUMA POJASNE BRANE S DVA PODRUČJA  
GUŠENJA**

Rijeka, rujan 2023.

Dominik Nonveiller  
0069083330

SVEUČILIŠTE U RIJECI

**TEHNIČKI FAKULTET**

Diplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Diplomski rad

**PRORAČUN ŠUMA POJASNE BRANE S DVA PODRUČJA  
GUŠENJA**

Mentor: doc. dr. sc. Nino Stojković

Rijeka, rujan 2023.

Dominik Nonveiller  
0069083330

Rijeka, 15. ožujka 2023.

Zavod: **Zavod za automatiku i elektroniku**  
Predmet: **Analogna obrada signala**  
Grana: **2.03.03 elektronika**

## ZADATAK ZA DIPLOMSKI RAD

Pristupnik: **Dominik Nonveiller (0069083330)**  
Studij: **Sveučilišni diplomski studij elektrotehnike**  
Modul: **Automatika**

Zadatak: **Proračun šuma pojasne brane s dva područja gušenja / Noise Calculation for Band Rejection Filter with Two Stop-bands**

### Opis zadatka:

Potrebno je proračunati elemente pojasne brane 2. reda s dva područja gušenja i provesti analizu šuma. Frekvencije gušenja su 50 Hz i 1 kHz. Prikazati frekvencijske karakteristike i vremenske odzive zadanog filtra. Proračun izvršiti u programskom paketu MATLAB i dobivene rezultate provjeriti pomoću programa SPICE. Realizirati filter kroz maketu za laboratorijsku uporabu i provesti mjerenja frekvencijskih karakteristika. Za dodatne informacije javiti se mentoru.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Zadatak uručen pristupniku: 20. ožujka 2023.

Mentor:

Prof. dr. sc. Nino Stojković

Predsjednik povjerenstva za  
diplomski ispit:

Prof. dr. sc. Dubravko Franković

## IZJAVA

Sukladno članku 8. Pravilnika o diplomskom radu, diplomskom ispitu i završetku diplomskih sveučilišnih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od siječnja 2020., izjavljujem da sam samostalno izradio diplomski rad prema zadatku preuzetom dana 20. ožujka 2023.

Rijeka, 20.8.2023

  
Dominik Nonveiller

*Ovom prilikom želim se zahvaliti svima onima koji su me podržavali na putu ka ovom uspjehu. Posebno se želim zahvaliti svojim roditeljima i prijateljima koji su uvijek bili uz mene. Hvala i svim profesorima i kolegama koji su bili uz mene tokom ovih 5 godina i koji su mi pružili jedno nezaboravno životno iskustvo. Na kraju posebno želim zahvaliti profesoru N. Stojkoviću i asistentu Z. Šverku na svojoj pomoći i vođenju prilikom pisanja ovog rada.*

---

## Sadržaj

<b>1. UVOD</b>	<b>3</b>
<b>2. OPĆENITO O ELEKTRIČNIM FILTRIMA</b>	<b>4</b>
2.1. Podjela filtara . . . . .	4
2.2. Parametri filtra . . . . .	5
2.3. Prijenosne funkcije . . . . .	5
2.4. Butterworthova aproksimacija . . . . .	8
2.5. Spektralna gustoća napona šuma . . . . .	10
<b>3. IZRAČUN I ANALIZA FILTARSKIH KARAKTERISTIKA NORMIRANOG FIL- TRA</b>	<b>13</b>
3.1. Prijenosna funkcija $H(s)$ . . . . .	14
3.2. Funkcija mreže $H(j\omega)$ . . . . .	14
3.3. Amplitudno frekvencijske karakteristike $ H(j\omega) $ i $A(\omega)$ . . . . .	14
3.4. Fazno frekvencijska karakteristika $\varphi(\omega)$ . . . . .	16
3.5. Grupno vrijeme kašnjenja $\tau_g(\omega)$ . . . . .	17
3.6. Raspored polova i nula . . . . .	18
3.7. Impulsni odziv $h(t)$ . . . . .	19
3.8. Odziv na step $a(t)$ . . . . .	20
3.9. Proračun vrijednosti elemenata . . . . .	21
<b>4. IZRAČUN I ANALIZA FILTARSKIH KARAKTERISTIKA DENORMIRANIH FILTARA</b>	<b>23</b>
4.1. Granične frekvencije $f_1$ i $f_2$ . . . . .	23
4.2. Prijenosne funkcije $H(s)$ . . . . .	23
4.3. Funkcije mreže $H(j\omega)$ . . . . .	24
4.4. Amplitudno frekvencijske karakteristike $ H(j\omega) $ i $A(\omega)$ . . . . .	24
4.5. Fazno frekvencijska karakteristika $\varphi(\omega)$ . . . . .	27
4.6. Grupna vremena kašnjenja $\tau_g(\omega)$ . . . . .	28
4.7. Raspored polova i nula . . . . .	30
4.8. Impulsni odziv $h(t)$ . . . . .	31
4.9. Odziv na step $a(t)$ . . . . .	32
4.10. Proračun vrijednosti elemenata . . . . .	34

---

4.11. Analiza Šuma . . . . .	34
<b>5. LTSpice simulacija</b>	<b>38</b>
<b>6. PROJEKTIRANJE TISKANE PLOČICE</b>	<b>45</b>
<b>7. ANALIZA ANALIZATOROM MREŽE</b>	<b>47</b>
<b>8. Zaključak</b>	<b>50</b>
<b>Literatura</b>	<b>51</b>
<b>Popis oznaka i kratica</b>	<b>52</b>
<b>Sažetak i ključne riječi</b>	<b>53</b>
<b>Summary and key words</b>	<b>54</b>
<b>Dodatak A</b>	<b>55</b>



---

## 1. UVOD

Tema ovog rada jest proračun šuma pojasne brane s dva područja gušenja. Za daljnje razumijevanje ovog rada prvo je potrebno objasniti što je to uopće električni filter. Analogni filtri su elektronički uređaji koji se koriste za filtriranje signala u analognim sustavima mijenjajući spektar ulaznog signala. Odnosno njihova uloga je propuštanje komponenti signala unutar nekog frekvencijskog pojasa, dok se ostale komponente guše. U idealnom slučaju filter svojim djelovanjem ne unosi u sustav nove komponente signala, već samo mijenja postojeće.

Ovisno o građi filtra, filter može biti pasivni ili aktivni. Pasivni električni filtri građeni su od osnovnih elektroničkih komponenti: otpornika, zavojnice i kondenzatora, dok aktivni električni filtri pored navedenih komponenti sadrže i aktivni element koji je najčešće operacijsko ili strminsko pojačalo. Red filtra ovisi o broju reaktivnih elemenata unutar filtra.

Osim na pasivne i aktivne, filtre možemo podijeliti i s obzirom na frekvencijski pojas propuštanja signala. S obzirom na pojas propuštanja signala postoje četiri osnovna tipa filtera:

- Nisko propusni filtri (NP) – propuštaju samo signal do granične frekvencije
- Visoko propusni filtri (VP) – propuštaju signale iznad granične frekvencije
- Pojasno propusni filtri (PP) – propuštaju signal koji se nalazi između gornje i donje granične frekvencije
- Pojasna brana (PB) – guše signal koji se nalazi između gornje i donje granične frekvencije

U ovom diplomskom radu biti će realizirana pojasna brana općom filterarskom sekcijom 2. reda s 4 operacijska pojačala. Prvo će biti proračunate: prijenosna funkcija, raspored polova i nula, frekvencijske i vremenske karakteristike normiranog filtra zadanih parametara. Potom će se normirana prijenosna funkcija denormirati na dvije centralne frekvencije i proračunati raspored polova i nula, frekvencijske i vremenske karakteristike i šum denormiranih filtera. Svi proračuni biti će obavljani unutar računalnog programa "Matlab". Dobiveni rezultati će se provjeriti pomoću računalnog programa "LTspice". Nakon što se rezultati potvrde filter će biti fizički realiziran na PCB pločici, a frekvencijske karakteristike ispitane pomoću analizatora mreže.

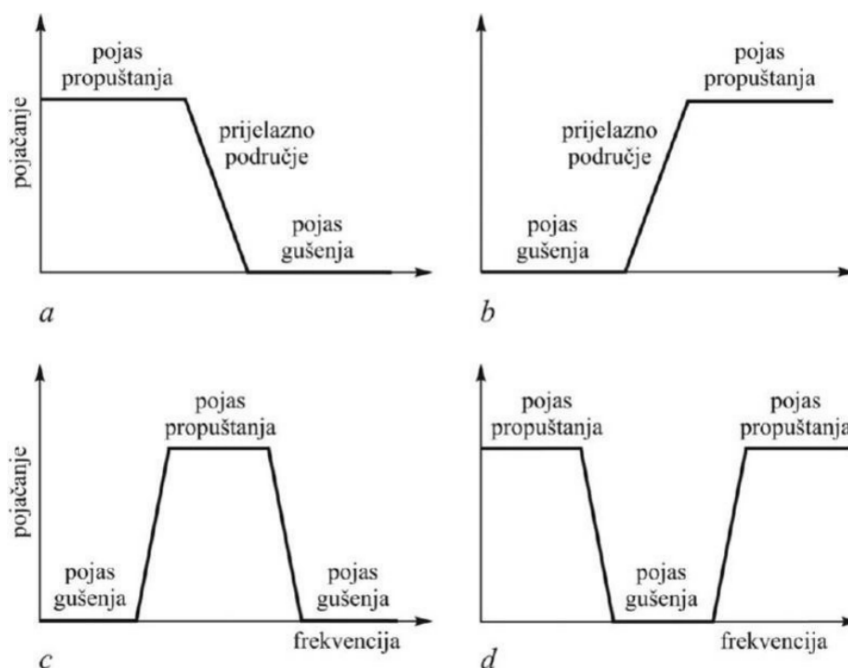
## 2. OPĆENITO O ELEKTRIČNIM FILTRIMA

### 2.1. Podjela filtara

S obzirom na oblik frekvencijske karakteristike, analogni filtri se mogu podijeliti na selektivne filtre i korektore. Selektivni filtri imaju izražena područja propuštanja i gušenja. Amplituda izlaznog signala u području gušenja približno je jednaka nuli, dok amplituda izlaznog signala u području propuštanja ovisi o pojačanju samog filtra. Za razliku od selektivnih filtara, korektori nemaju strogo odijeljeno područje propuštanja i gušenja, te se koriste za ispravljanje postojećih amplitudno frekvencijskih i fazno frekvencijskih karakteristika.

Kao što je već rečeno, selektivne filtre možemo podijeliti i s obzirom na frekvencijski pojas propuštanja signala. S obzirom na pojas propuštanja signala postoje četiri osnovna tipa filtara:

- Nisko propusni filtri (NP) – propuštaju samo signal do granične frekvencije
- Visoko propusni filtri (VP) – propuštaju signale iznad granične frekvencije
- Pojasno propusni filtri (PP) – propuštaju signal koji se nalazi između gornje i donje granične frekvencije
- Pojasna brana (PB) – guše signal koji se nalazi između gornje i donje granične frekvencije



Slika 2.1. Frekvencijske karakteristike električnih filtara: a) nisko propusni; b) visoko propusni; c) pojasno propusni; d) pojasna brana [1]

---

## 2.2. Parametri filtra

Parametri filtra su vrijednosti i karakteristike koje definiraju ponašanje filtra i izgled njegovih frekvencijskih i vremenskih karakteristika.

- Pojačanje filtra  $k$ : Pojačanje filtra je omjer amplitude izlaznog i ulaznog signala u području propuštanja filtra. Pojačanje filtra može biti i negativno, što znači da su ulazni i izlazni signal u protufazi. Pojačanje filtra dano je sljedećim izrazom

$$k = \frac{V_{out}}{V_{in}}. \quad (2.1)$$

- Granične frekvencije  $\omega_g, \omega_1, \omega_2$ : Granične frekvencije označavaju frekvencije na kojima izlazni signal ima pojačanje od  $-3 \text{ dB}$  ili  $0,707$  u odnosu na nominalno pojačanje filtra  $k$  u području propuštanja. Granična frekvencija nam služi kao indikator granice područja propuštanja i područja gušenja. Kod NP i VP filtra postoji samo jedna granična frekvencija  $\omega_g$ , dok kod PP i PB filtra postoje donja granična frekvencija  $\omega_1$  i gornja granična frekvencija  $\omega_2$ .

- Centralna frekvencija  $\omega_0$ : Centralna frekvencija predstavlja geometrijsku sredinu gornje i donje granične frekvencije, što znači da je simetrična na logaritamskoj skali. Centralna frekvencija kod pojasne brane predstavlja točku maksimalnog gušenja. Centralna frekvencija računa se sljedećim izrazom

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}. \quad (2.2)$$

- Frakcionalna širina propusta  $B$ : Parametar  $B$  opisuje širinu frekvencijskog pojasa kod PP i PB filtra koji propušta, odnosno blokira signal u odnosu na centralnu frekvenciju  $\omega_0$ . Frakcionalna širina propusta predstavlja opseg frekvencija koje signal zauzima unutar datog pojasa. Parametar  $B$  obrnuto je proporcionalan sa selektivnosti filtra. Frakcionalna širina propusta računa se sljedećim izrazom

$$B = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}. \quad (2.3)$$

- Red filtra  $n$ : Red filtra označava broj reaktivnih elemenata unutar filtra, odnosno broj polova njegove prijenosne funkcije. Viši red filtra znači strmiju amplitudno frekvencijsku karakteristiku i uže prijelazno područje. Brzina opadanja amplitudno frekvencijske karakteristike iznosi  $-20 \text{ dB}$  po polu prijenosne funkcije. Može se zaključiti da red filtra uvelike utječe na njegovu kvalitetu filtriranja.

## 2.3. Prijenosne funkcije

Prijenosna funkcija  $H(s)$  predstavlja vezu ulaznog i izlaznog signala u  $s$  domeni. Odnosno vrijedi

$$Y(s) = H(s)X(s), \quad (2.4)$$

---

gdje je:

$H(s)$ -prijenosna funkcija sustava,

$X(s)$ -ulazni signal zapisan u  $s$  domeni,

$Y(s)$ -izlazni signal zapisan u  $s$  domeni,

$s$ -kompleksna Laplaceova varijabla koja ima realni i imaginarni dio  $s = \sigma + j\omega$ .

Prijenosna funkcija  $H(s)$  je Laplaceova transformacija impulsnog odziva sustava  $h(t)$ , odnosno vrijedi

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_{t=0}^{\infty} h(t)e^{-st} dt. \quad (2.5)$$

Izraz (2.4) sada se može zapisati pomoću konvolucije

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_0^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau. \quad (2.6)$$

SVAKU prijenosnu funkciju možemo zapisati kao kombinaciju polova, nula i pojačanja sustava. Ovo može biti korisno zato što polovi, nule i pojačanje u potpunosti opisuju ponašanje sustava. Prijenosna funkcija zapisana na taj način ima sljedeću formu

$$H(s) = k \frac{\prod_{m=1}^M (s - s_{0m})}{\prod_{n=1}^N (s - s_{pn})}, \quad (2.7)$$

gdje  $s_{0m}$  označava nule sustava, a  $s_{pn}$  polove sustava. Nule i polovi mogu biti realne vrijednosti ili konjugirano kompleksni parovi. Nule su vrijednosti argumenata  $s$  za koju funkcija poprima vrijednost 0, dok su polovi vrijednosti argumenata za koje vrijednost funkcije teži u beskonačnost.

Vrijednost polova prijenosne funkcije određuje da li je sustav stabilan. Naime sustav je striktno stabilan ako za pobudu konačne amplitude i odziv ima konačan iznos. Iz definicije stabilnosti može se zaključiti da je sustav stabilan samo onda kad mu se svi polovi prijenosne funkcije nalaze u lijevoj poluravnini kompleksne  $s$  ravnine, odnosno onda kada realni dio kompleksnog argumenta ima negativnu vrijednost.

Uvede li se u prijenosnu funkciju supstitucija  $s \rightarrow j\omega$  dobije se funkcija mreže koja opisuje frekvencijske karakteristike sustava u stacionarnom stanju, odnosno opisuje faznu i amplitudnu karakteristiku izlaznog signala sustava pobuđenog sinusnom u odnosu na njegovu frekvenciju. Funkcija mreže može se zapisati u sljedećem obliku

$$H(j\omega) = \text{Re}[H(j\omega)] + j\text{Im}[H(j\omega)], \quad (2.8)$$

odnosno

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}, \quad (2.9)$$

gdje  $|H(j\omega)|$  predstavlja amplitudno frekvencijsku karakteristiku, a  $\varphi(\omega)$  fazno frekvencijsku karakteristiku.

Amplitudno frekvencijska karakteristika računa se sljedećom relacijom

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}[H(j\omega)]^2 + \operatorname{Im}[H(j\omega)]^2}. \quad (2.10)$$

Amplitudno frekvencijska karakteristika se nerijetko prikazuje u decibelima, sljedećom relacijom

$$A(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|. \quad (2.11)$$

Fazno frekvencijska karakteristika računa se sljedećom relacijom

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \arctan \frac{\operatorname{Im}[H(j\omega)]}{\operatorname{Re}[H(j\omega)]} & \text{za } \begin{cases} \operatorname{Im}[H(j\omega)] > 0 \ \& \ \operatorname{Re}[H(j\omega)] > 0, \\ \operatorname{Im}[H(j\omega)] < 0 \ \& \ \operatorname{Re}[H(j\omega)] > 0, \end{cases} \\ 180^\circ + \arctan \frac{\operatorname{Im}[H(j\omega)]}{\operatorname{Re}[H(j\omega)]} & \text{za } \begin{cases} \operatorname{Im}[H(j\omega)] < 0 \ \& \ \operatorname{Re}[H(j\omega)] < 0, \\ \operatorname{Im}[H(j\omega)] > 0 \ \& \ \operatorname{Re}[H(j\omega)] < 0. \end{cases} \end{cases} \quad (2.12)$$

Derivacijom fazno frekvencijske karakteristike dobije se grupno vrijeme kašnjenja

$$\tau_g = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}. \quad (2.13)$$

Grupno vrijeme kašnjenja označava količinu vremena koja je potrebna da se određene spektralne komponente signala propagiraju kroz sustav.

Osim frekvencijskih karakteristika postoje i one vremenske. Od najvećeg značaja u analizi sustava su impulsni i skokoviti odzivi.

Impulsni odziv je odziv sustava na pobudu delta funkcijom i računa se sljedećom relacijom

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \{H(s)\}. \quad (2.14)$$

Skokoviti odziv je odziv sustava na pobudu jediničnom stepenicom i računa se sljedećom relacijom

$$a(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ H(s) \frac{1}{s} \right\}. \quad (2.15)$$

U sljedećoj tablici prikazani su opći oblici prijenosnih funkcija 1. i 2. reda selektivnih filtara.

Tablica 2.1. opći oblici prijenosnih funkcija 1. i 2. reda selektivnih filtara

n	NP	VP	PP	PB
1.	$k \frac{\omega_g}{s + \omega_g}$	$k \frac{s}{s + \omega_g}$	/	/
2.	$k \frac{\omega_g^2}{s^2 + \frac{\omega_g}{Q} + \omega_g^2}$	$k \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_g}{Q} + \omega_g^2}$	$k \frac{\frac{\omega_0}{Q} s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$	$k \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_g}{Q} + \omega_g^2}$

U praksi se filtri često dizajniraju na taj način da se odabere prototip NP filtra po odgovarajućoj aproksimaciji (Butterworthovoj Chebyshevoj, Besselovoj...), odgovarajućeg reda te se na prototipu

provede transformacija u željeni filter željenih parametara. Filtarske transformacije dane su u sljedećoj tablici.

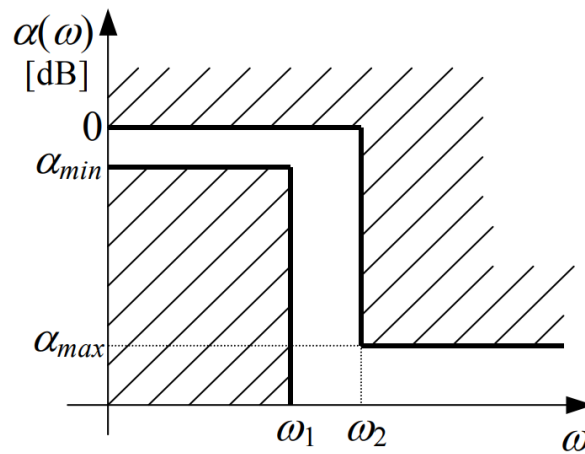
Tablica 2.2. Filtarske transformacije

NP→NP	NP→VP	NP→PP	NP→PB
$s \rightarrow \frac{s}{\omega_g}$	$s \rightarrow \frac{\omega_g}{s}$	$s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs}$	$s \rightarrow \frac{Bs}{s^2 + \omega_0^2}$

## 2.4. Butterworthova aproksimacija

Idealne filtarske karakteristike nije moguće fizički ostvariti, međutim moguće im se približiti. U tu svrhu razvijene su filtarske aproksimacije NP filtra iz kojih se filtarskim transformacijama može dobiti željena filtarska karakteristika. U realizaciji nisko propusnog filtra moraju biti zadovoljeni zahtjevi specifikacija, stabilnosti i izvedivosti. Ovisno o zahtjevima postoji nekoliko oblika filtarskih aproksimacija. Tako postoji Butterworthova aproksimacija koja je maksimalno glatka, Besselova aproksimacija koja ima linearnu fazu, Chebysheva aproksimacija sa valovitošću u području propuštanja i mnoge druge.

Sve filtarske aproksimacije NP filtra nastoje zadovoljiti uvjete prikazane ljeđećom slikom.



Slika 2.2. Specifikacije amplitudno frekvencijske karakteristike NP filtra [2]

Gdje je  $\alpha_{min}$  maksimalno gušenje u području propuštanja, a  $\alpha_{max}$  maksimalno propuštanje u području gušenja.

Kako bi se zadovoljili uvjeti sa slike (2.2) NP prototipi moraju imati sljedeći oblik

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + |K(j\omega)|^2}}. \quad (2.16)$$

Sada je cilj pronaći karakterističnu funkciju  $K(j\omega)$ .

U ovom radu proračuni su rađeni po Butterworthovoj aproksimaciji, stoga će se ovo poglavlje bazirati na tu aproksimaciju. Butterworthova aproksimacija ima karakterističnu funkciju sljedećeg

oblika

$$|K(j\omega)|^2 = C^2\omega^{2n}, \quad (2.17)$$

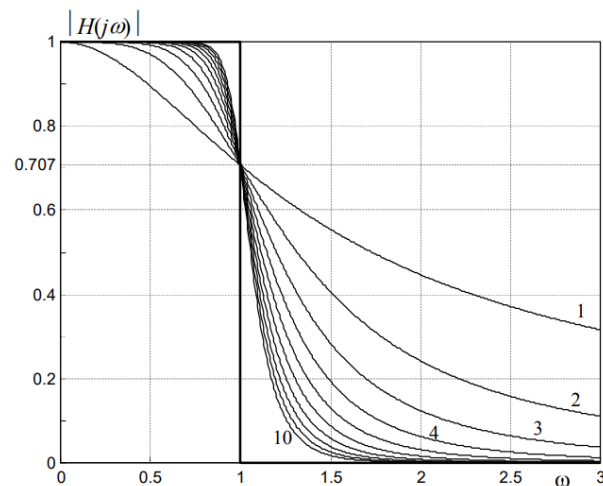
gdje je  $C$  konstanta, a  $n$  red filtra. Uzme li se uvjet da pojačanje na graničnoj frekvenciji  $\omega_g$  iznosi  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , karakteristična funkcija poprima sljedeći oblik

$$|K(j\omega)|^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^{2n}. \quad (2.18)$$

Provede li se normiranje na graničnu frekvenciju  $\omega_g = 1$ , dobije se sljedeća amplitudno frekvencijska karakteristika

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}}. \quad (2.19)$$

Ova amplitudno frekvencijska karakteristika prikazana je na sljedećoj slici.



Slika 2.3. Amplitudno frekvencijske karakteristike Butterworthovih aproksimacija [2]

Na slici (2.3) mogu se uočiti sljedeće karakteristike:

- za  $\omega = 0 \rightarrow |H(j\omega)| = 1$ ,
- za  $\omega = \omega_g = 1 \rightarrow |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,
- za  $\omega = \infty \rightarrow |H(j\omega)| = 0$ .

Sada je potrebno iz izraza (2.19) dobiti prijenosnu funkciju aproksimacija. Kvadrira li se izraz (2.19) dobije se

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H(-j\omega) = \frac{1}{1 + \omega^{2n}}. \quad (2.20)$$

Provede li se u gornjem izrazu supstitucija  $\omega \rightarrow \frac{s}{j}$  dobije se

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-s^2)^n} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{2n} (s - s_k)}, \quad (2.21)$$

---

gdje su  $s_k$  rješenja jednadžbe

$$(-s^2)^n = -1. \quad (2.22)$$

Vrijednosti  $s_k$  predstavljaju nule prijenosne funkcije. Nule sa negativnim realnim djelom predstavljaju nule funkcije  $H(s)$ , a nule sa pozitivnim realnim djelom nule funkcije  $H(-s)$ . Uzmemo li se za  $s_k$  samo vrijednosti koje pripadaju funkciji  $H(s)$  dobije se prijenosna funkcija Butterworthove aproksimacije

$$H(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (s - s_k)}. \quad (2.23)$$

Prvih 10 Butterworthovih aproksimacija dano je u tablici (A1) u dodatku A.

## 2.5. Spektralna gustoća napona šuma

Spektralna gustoća napona šuma je mjera za opisivanje razine šuma u električnim krugovima, elektroničkim komponentama ili sustavima. Šum u signalima je skup neželjenih signala koji se superponira korisnom dijelu signala. Šum se ne može izbjeći ili ukloniti, ali ga je moguće minimizirati ispravnom izvedbom sklopa. Općenito, što je niža spektralna gustoća napona šuma nekog sklopa, to će on biti manje osjetljiv na vanjske smetnje i pružiti će bolju kvalitetu signala. Postoji više vrsta šuma, međutim u ovom radu će biti obrađen samo bijeli, odnosno termalni šum.

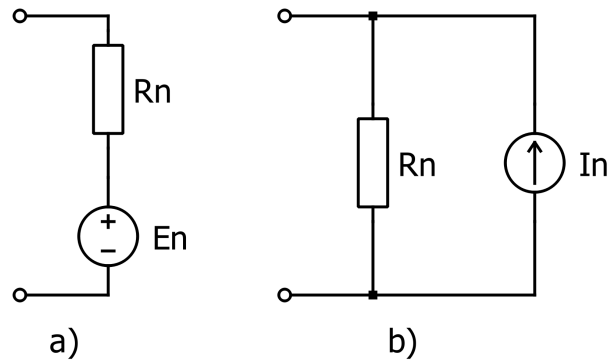
Termalni šum je jedan od glavnih izvora šuma u električnim krugovima i elektroničkim komponentama. Nastaje zbog termalne agitacije materijala te je prisutan u gotovo svim električnim elementima. Povećana temperatura unutar elementa uzrokuje brže kretanje elektrona što stvara fluktuacije električnog naboja koje se manifestiraju kao šum u signalu. Ovaj je šum neovisan o primijenjenom naponu i frekvencijski ravnomjerno raspoređen.

Već je rečeno da je termalni šum prisutan u gotovo svim komponentama, međutim u ovom radu će se raspravljati samo o šumu u komponentama PB filtra 2. reda, odnosno o šumu u: otporniku, kondenzatoru i operacijskom pojačalu.

Iako šum unutar kondenzatora postoji, on će unutar ovoga rada biti zanemaren. Naime šum unutar kondenzatora posljedica je parazitskih otpora kondenzatora i njegov doprinos ukupnome šumu je zanemariv.

Termalni šum otpornika se može prikazati serijski spojenim naponskim izvorom ili paralelno spojenim strujnim izvorom, kao što je dano na sljedećoj slici.





Slika 2.4. Nadomjesne sheme termičkog šuma u otporniku: a) naponskim izvorom, b) strujnim izvorom

Vrijednost strujnog izvora šuma kod otpornika računa se sljedećim izrazom

$$I_{n,k} = \sqrt{\frac{4kT\Delta f}{R_k}}, \quad (2.24)$$

dok se vrijednost naponskog izvora šuma kod otpornika računa sljedećim izrazom

$$E_{n,k} = \sqrt{4kT\Delta f R_k}, \quad (2.25)$$

gdje je:

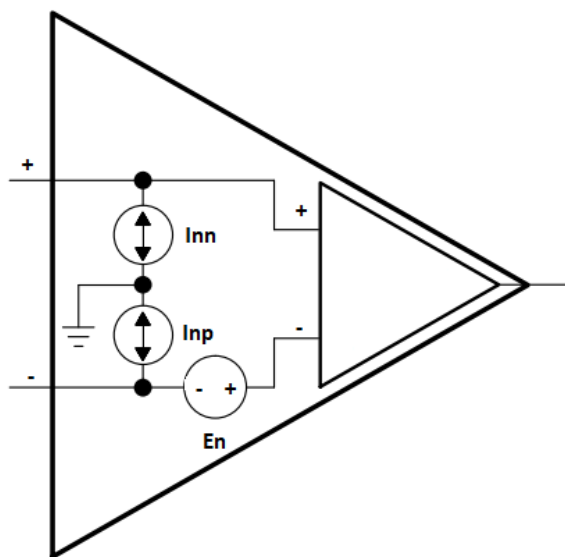
$k = 1,3806 \cdot 10^{-23}$ -Boltzmannova konstanta,

$T$ -temperatura u Kelvinima,

$\Delta f$ -frekvencijska širina pojasa,

$R_k$ -vrijednost otpora u Ohmima.

Termalni šum operacijskog pojačala sastoji se od naponske i strujne komponente i može se prikazati kao što je dano na sljedećoj slici.



Slika 2.5. Nadomjesna shema šuma u operacijskom pojačalu

---

Iznosi strujnog i naponskog izvora šuma deklarirani su u tehničkoj dokumentaciji pojačala. Budući da je doprinos naponskog izvora šuma ukupnom šumu višestruko veći od doprinosa strujnih izvora, strujni se izvori nerijetko zanemaruju.

Ukupna efektivna vrijednost šuma u sustavu računa se sljedećim izrazom

$$U_n^2(\omega) = \sum^m |T_{I,k}(j\omega)|^2 I_{n,k}^2 + \sum^n |T_{V,l}(j\omega)|^2 E_{n,l}^2, \quad (2.26)$$

gdje su:

$|T_{I,k}(j\omega)|$  prijenosna impedancija izlaznog napona i ulazne struje šuma,

$|T_{V,l}(j\omega)|$  prijenosna funkcija izlaznog napona i ulaznog napona šuma.

Kao numerički pokazatelj šuma u frekvencijskom pojasu često se koristi efektivna vrijednost šuma koja se računa sljedećim izrazom

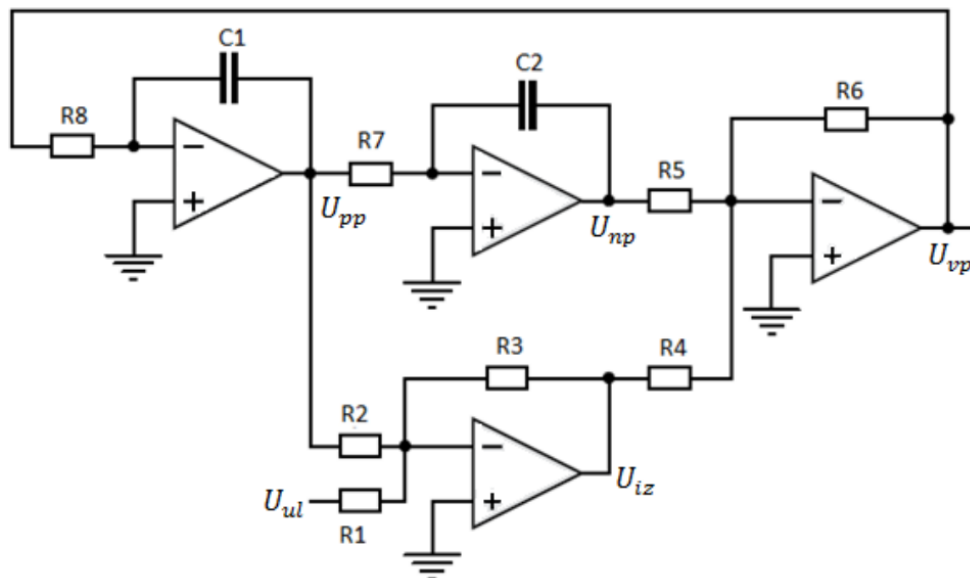
$$E_n = \sqrt{\int_{\omega_1}^{\omega_2} U_n^2(\omega) d\omega}. \quad (2.27)$$

### 3. IZRAČUN I ANALIZA FILTARSKIH KARAKTERISTIKA NORMIRANOG FILTRA

U ovom poglavlju računa se normirana prijenosna funkcija željenog filtra, na temelju koje se potom računa: raspored polova i nula, vremenski i frekvencijski odzivi kao i grupno vrijeme kašnjenja i vrijednosti elemenata. Željeni filter je pojasna brana 2. reda, a prijenosna funkcija filtra računat će se po Butterworthovoj aproksimaciji i biti će normirana po frekvenciji, odnosno  $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ . Parametri filtra dani su u tablici (3.1). Filter je izveden općom filtarskom sekcijom 2. reda koja je prikazana slikom (3.1).

Tablica 3.1. Parametri filtra

$B$	0,1
$\omega_0$	1
$k$	-1



Slika 3.1. Shema filtra [3]

Uvrštavanjem parametara iz tablice (3.1) u sljedeći sustav jednadžbi dobiju se granične frekvencije datog filtra.

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\omega_1 \omega_2}, \\ B\omega_0 &= \omega_2 - \omega_1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Granične frekvencije izračunate preko ovih relacija priložene su u sljedećoj tablici.

Tablica 3.2. Granične frekvencije filtra

$\omega_1$	0,9512 rad/s
$\omega_2$	1,0512 rad/s

### 3.1. Prijenosna funkcija $H(s)$

Da bi se došlo do prijenosne funkcije filtra prvo je potrebno izabrati odgovarajući prototip NP filtra. U ovome slučaju to je prijenosna funkcija NP filtra 1. reda dobivena Butterworthovom aproksimacijom. Koefficienti prijenosne funkcije dobivaju se iščitavanjem iz tablice (A1) u dodatku A. Prijenosna funkcija prototipnog NP filtra glasi

$$H(s) = \frac{k}{s+1} = \frac{-1}{s+1}. \quad (3.2)$$

Sljedeće što je potrebno učiniti jest provesti transformaciju prijenosne funkcije NP filtra kako bi se dobila željena prijenosna funkcija. NP→PB transformacija glasi

$$s \rightarrow \frac{Bs}{s^2 + \omega_0^2}. \quad (3.3)$$

Provede li se transformacija izraza (3.2) uz parametre iz tablice (3.1) dobije se željena prijenosna funkcija

$$H(s) = -\frac{s^2 + 1}{s^2 + 0,1s + 1}. \quad (3.4)$$

### 3.2. Funkcija mreže $H(j\omega)$

Supstitucijom  $s \rightarrow j\omega$  u izrazu (3.4) dobije se funkcija mreže koja glasi

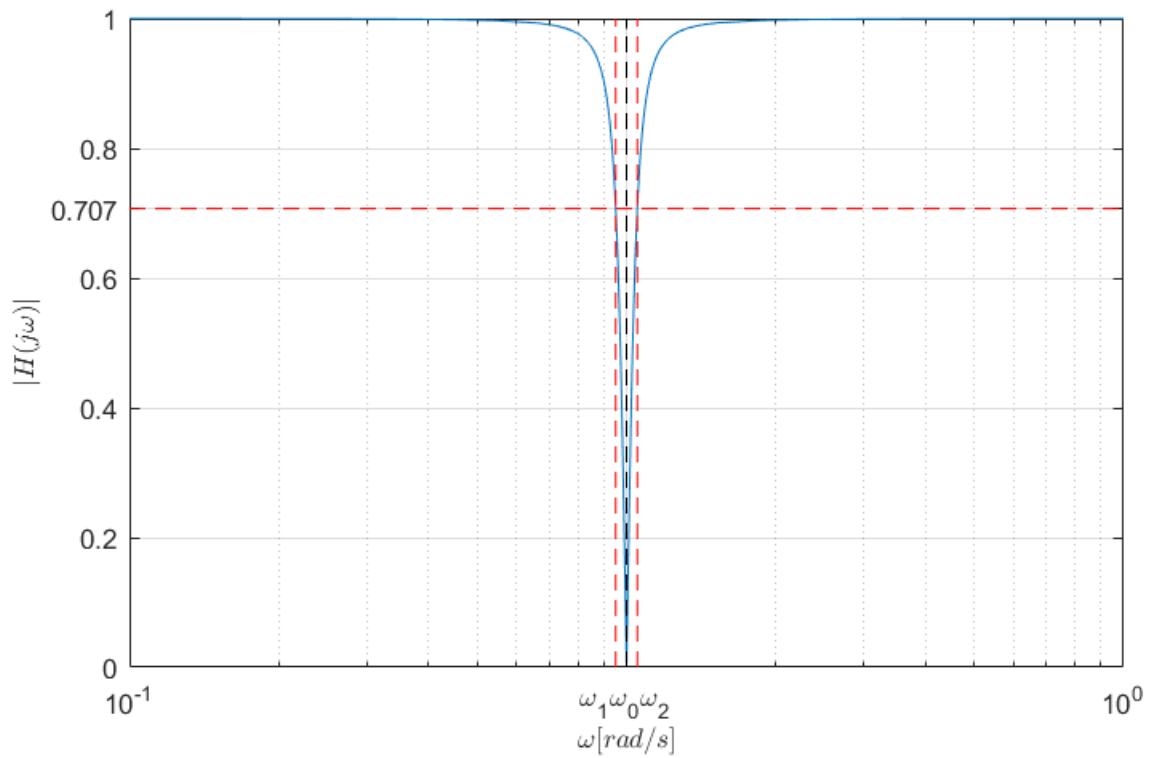
$$H(j\omega) = \frac{-\omega^2 + 1}{\omega^2 - 0,1j\omega - 1}. \quad (3.5)$$

### 3.3. Amplitudno frekvencijske karakteristike $|H(j\omega)|$ i $A(\omega)$

Amplitudno frekvencijska karakteristika  $|H(j\omega)|$  dobije se na sljedeći način

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{-\omega^2 + 1}{\omega^2 - 0,1j\omega - 1} \right| = \frac{|-\omega^2 + 1|}{\sqrt{\omega^4 - 1,99\omega^2 + 1}}. \quad (3.6)$$

Grafički prikazano.

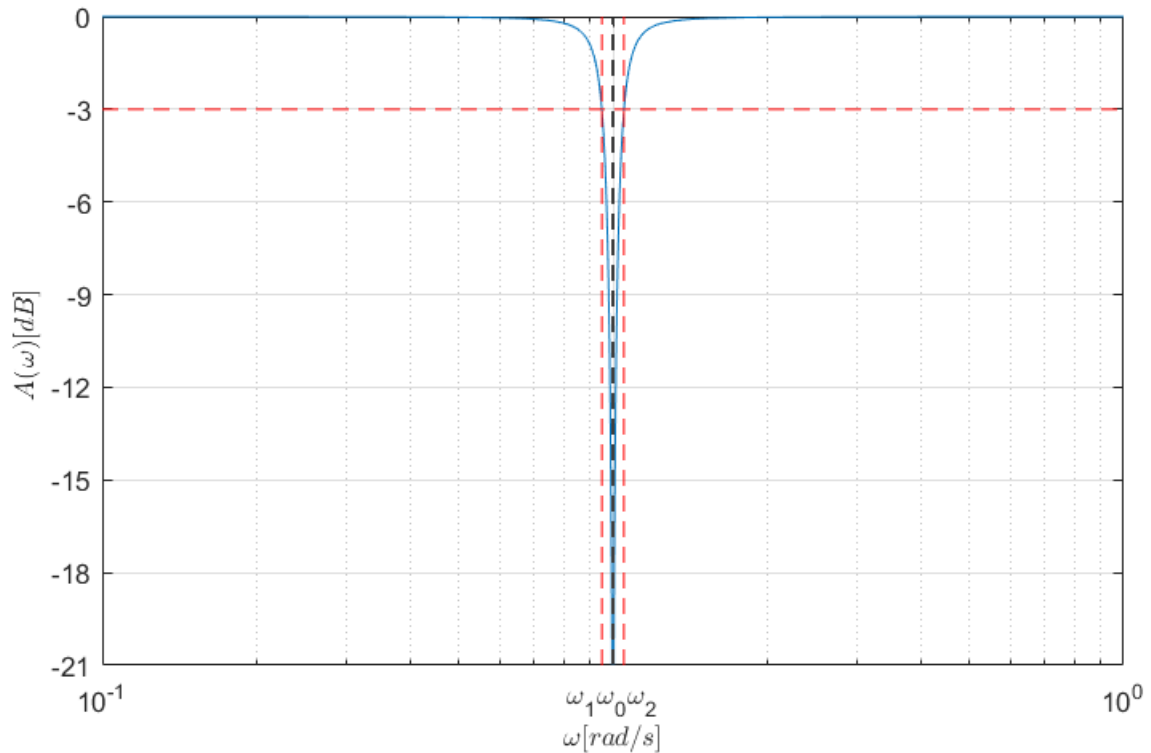


Slika 3.2. Grafički prikaz amplitudno frekvencijske karakteristike  $|H(j\omega)|$

Amplitudno frekvencijska karakteristika u decibelima dobije se na sljedeći način

$$A(\omega) = 20 \log (|H(j\omega)|) = 20 \log \left( \frac{|-\omega^2 + 1|}{\sqrt{\omega^4 - 1,99\omega^2 + 1}} \right). \quad (3.7)$$

Grafički prikazano.



Slika 3.3. Grafički prikaz amplitudno frekventijske karakteristike  $A(\omega)$

Na amplitudno frekventijskim karakteristikama danim na slikama (3.2) i (3.3) vidljivo je da filter postiže maksimalno gušenje na centralnoj frekvenciji  $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$  te da karakteristika siječe pojačanje od 0, 707 odnosno  $-3 \text{ dB}$  na graničnim frekvencijama danim u tablici (3.2), što odgovara očekivanim rezultatima.

### 3.4. Fazno frekventijska karakteristika $\varphi(\omega)$

Fazno frekventijska karakteristika dobije se uvrsti li se izraz (3.5) u sljedeću relaciju

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \arctan \frac{\text{Im}[H(j\omega)]}{\text{Re}[H(j\omega)]} & \text{za } \begin{cases} \text{Im}[H(j\omega)] > 0 \ \& \ \text{Re}[H(j\omega)] > 0, \\ \text{Im}[H(j\omega)] < 0 \ \& \ \text{Re}[H(j\omega)] > 0, \end{cases} \\ 180^\circ + \arctan \frac{\text{Im}[H(j\omega)]}{\text{Re}[H(j\omega)]} & \text{za } \begin{cases} \text{Im}[H(j\omega)] < 0 \ \& \ \text{Re}[H(j\omega)] < 0, \\ \text{Im}[H(j\omega)] > 0 \ \& \ \text{Re}[H(j\omega)] < 0. \end{cases} \end{cases} \quad (3.8)$$

Za ovaj slučaj vrijedi:

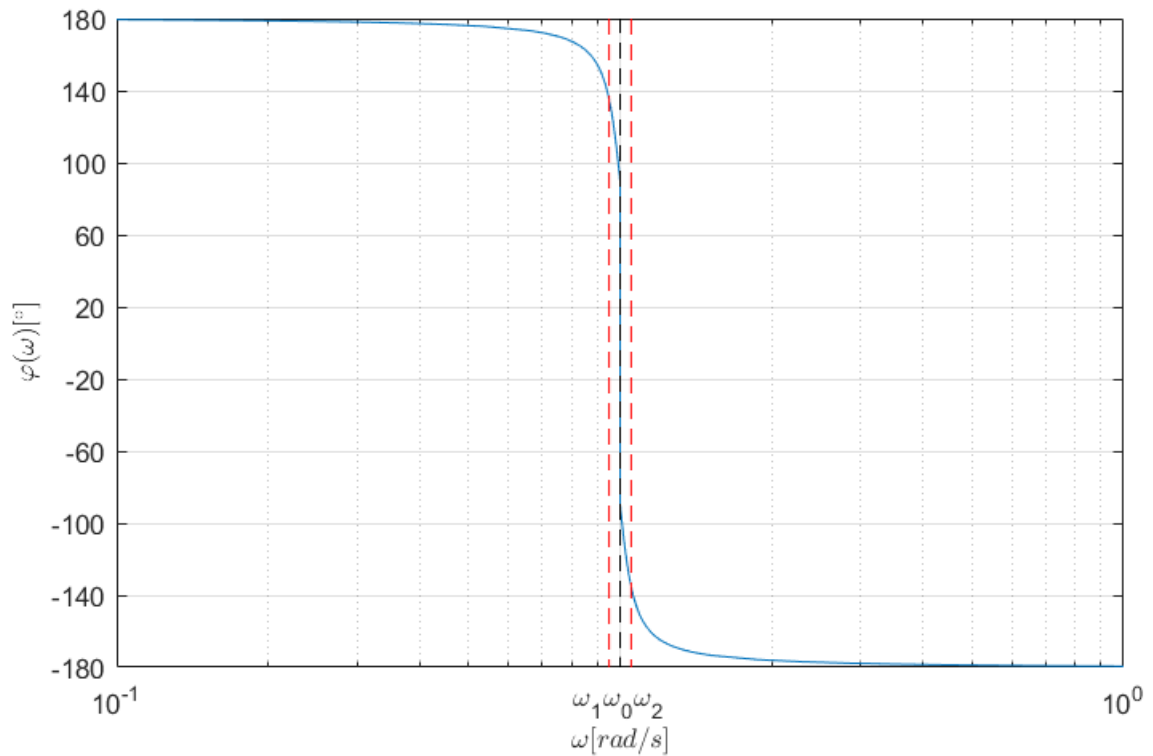
$$\text{Im}[H(j\omega)] = -0,1\omega^3 + 0,1\omega < 0, \quad (3.9)$$

$$\text{Re}[H(j\omega)] = -\omega^4 + 2\omega^2 - 1 < 0. \quad (3.10)$$

Iz čega proizlazi

$$\varphi(\omega) = 180^\circ + \arctan \frac{-0,1\omega^3 + 0,1\omega}{-\omega^4 + 2\omega^2 - 1}. \quad (3.11)$$

Grafički prikazano.



Slika 3.4. Grafički prikaz fazno frekvencijske karakteristike  $\varphi(\omega)$

### 3.5. Grupno vrijeme kašnjenja $\tau_g(\omega)$

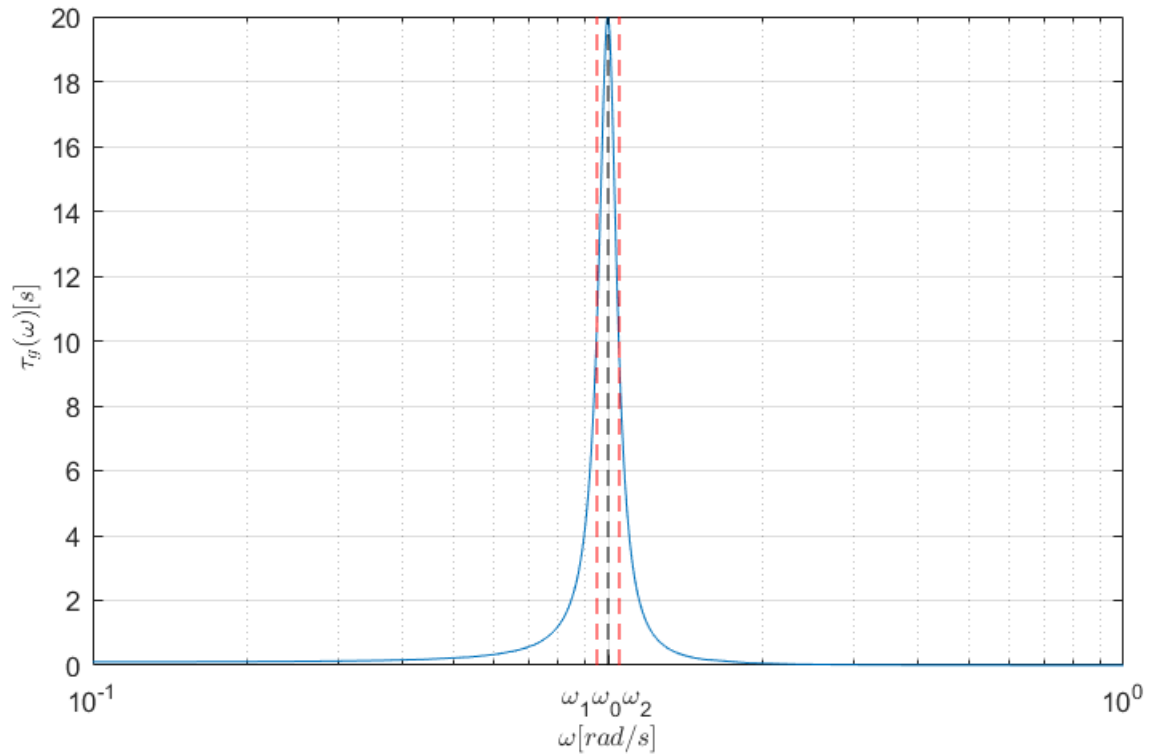
Grupno vrijeme kašnjenja definirano je sljedećim izrazom

$$\tau_g = \frac{-d\varphi(\omega)}{d\omega}. \quad (3.12)$$

Uvrštavanjem izraza (3.11) u gornji izraz dobije se

$$\tau_{Ag}(\omega) = \frac{0,1\omega^2 + 0,1}{\omega^4 - 1,99\omega^2 + 1}. \quad (3.13)$$

Grafički prikazano.



Slika 3.5. Grafički prikaz grupnog vremena kašnjenja  $\tau_g(\omega)$

### 3.6. Raspored polova i nula

Nule prijenosne funkcije dobiju se izjednačavanjem brojnika prijenosne funkcije s nulom

$$s^2 + 1 = 0, \quad (3.14)$$

dok se polovi prijenosne funkcije dođu izjednačavanjem nazivnika sa nulom

$$s^2 + 0,1s + 1 = 0. \quad (3.15)$$

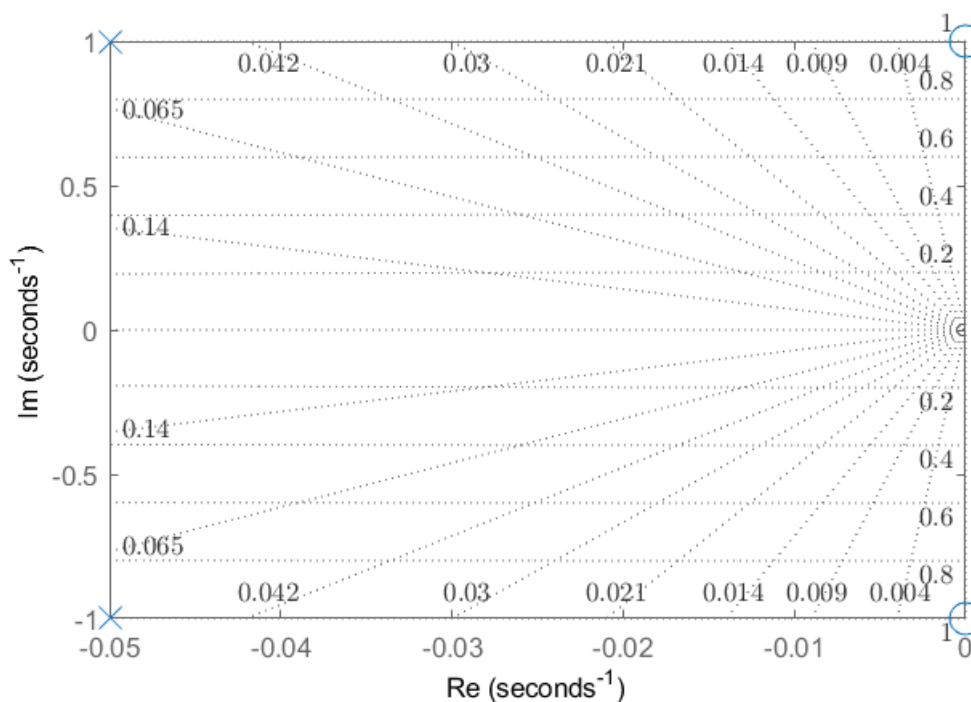
Na ovaj način dobiju se sljedeći polovi i nule.

Tablica 3.3. Raspored polova i nula

$s_0$	$\pm j$
$s_p$	$-0,05 \pm 0,999j$

Grafički prikazano.





Slika 3.6. Grafički prikaz rasporeda nula i polova

Iz vrijednosti u tablici (3.3) i sa slike (3.6) vidi se da se svi polovi prijenosne funkcije nalaze u lijevoj poluravnini kompleksne ravnine  $s$ , što znači da je sustav stabilan.

### 3.7. Impulsni odziv $h(t)$

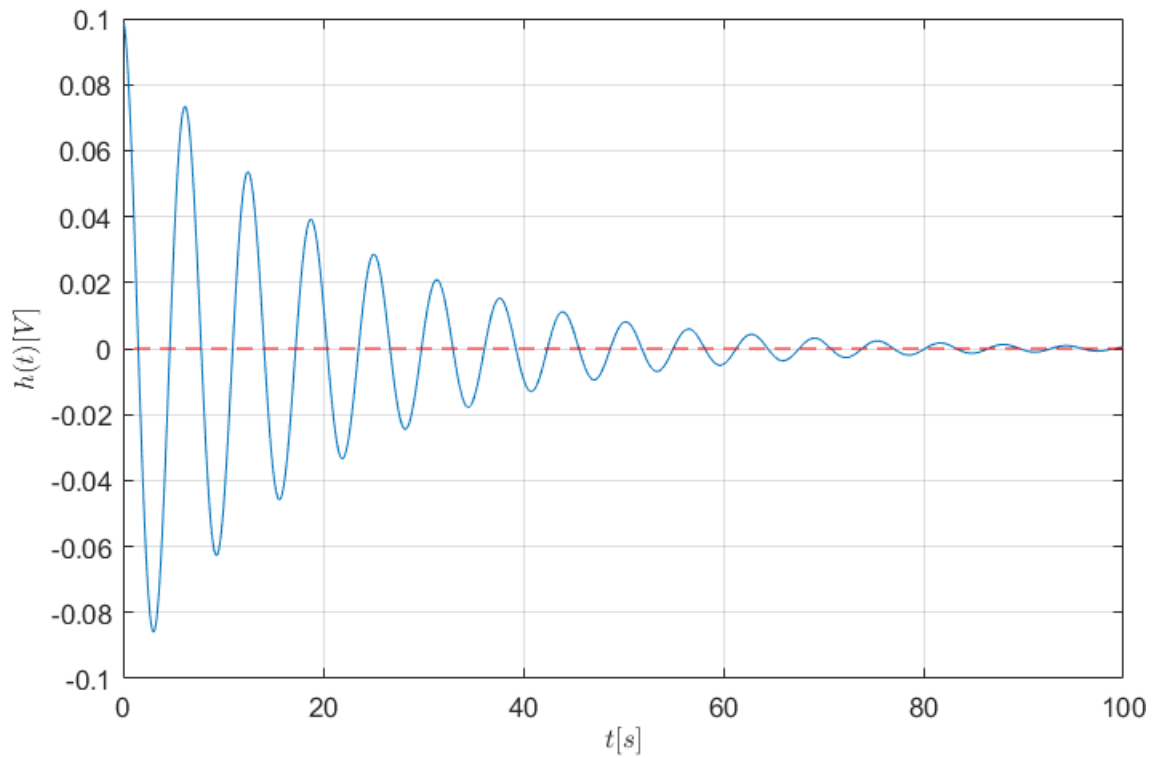
Impulsni odziv prijenosne funkcije dobije se računanjem inverza njezine Laplaceove transformacije

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \{H(s)\}. \quad (3.16)$$

Uvrštavanjem izraza (3.4) u gornji izraz dobije se

$$h(t) = -\delta(t) + 0,1e^{-0,05t} (\cos (0,9987t) - 0,05 \sin (0,9987t)). \quad (3.17)$$

Grafički prikazano.



Slika 3.7. Grafički prikaz impulsnog odziva  $h(t)$

### 3.8. Odziv na step $a(t)$

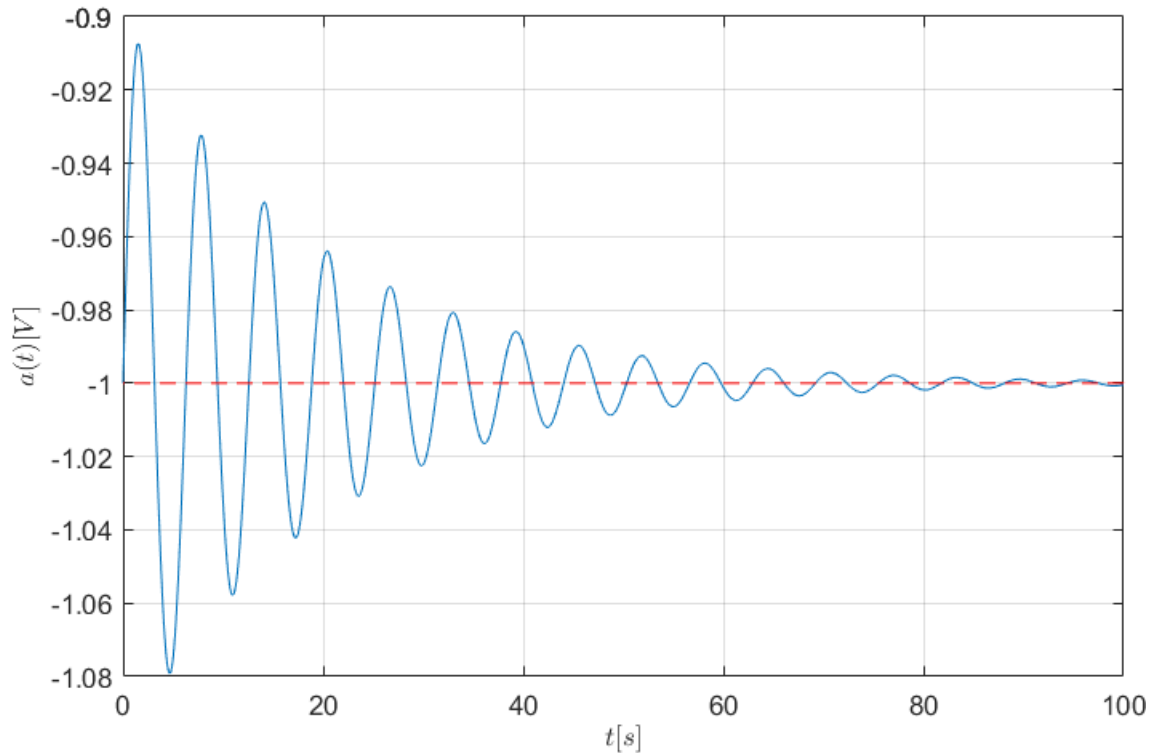
Odziv prijenosne funkcije na step dobije se pomoću sljedeće relacije

$$a(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ H(s) \frac{1}{s} \right\}. \quad (3.18)$$

Uvrštavanjem izraza (3.4) u gornji izraz dobije se

$$a(t) = -1 + 0,1e^{-0,05t} \sin(0,9987t). \quad (3.19)$$

Grafički prikazano.



Slika 3.8. Grafički prikaz odziva na step  $a(t)$

### 3.9. Proračun vrijednosti elemenata

Ako znamo da prijenosna funkcija PB filtra 2. reda sa slike (3.1) ima sljedeći opći izraz

$$H(s) = -\frac{R_3}{R_1} \frac{s^2 + \frac{R_6}{R_5 R_7 R_8 C_1 C_2}}{s^2 + \frac{R_3 R_6}{R_2 R_4 R_8 C_1} s + \frac{R_6}{R_5 R_7 R_8 C_1 C_2}}, \quad (3.20)$$

odnosno

$$H(s) = k \frac{s^2 + \omega_z^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}. \quad (3.21)$$

Uspoređujući izraze (3.20) i (3.21) sa prijenosnom funkcijom (3.4) dolazi se do sljedećih relacija:

$$\omega_0 = 1 = \sqrt{\frac{R_6}{R_5 R_7 R_8 C_1 C_2}}, \quad (3.22)$$

$$Q = 10 = \omega_0 \frac{R_2 R_4 R_8 C_1}{R_3 R_6}, \quad (3.23)$$

$$k = -1 = -\frac{R_3}{R_1}. \quad (3.24)$$

Budući da je dobiven sustav 3 jednačbe sa 10 nepoznanica, 7 nepoznanica se može proizvoljno postaviti vrijednost. Pretpostavi li se

$$R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = R_7 = R_8 = C_1 = 1, \quad (3.25)$$

dobiju se sljedeće vrijednosti elemenata.

---

*Tablica 3.4. Vrijednosti elemenata normiranog filtra*

Element	Vrijednost elementa
$R_{1n}$	1
$R_{2n}$	1
$R_{3n}$	1
$R_{4n}$	1
$R_{5n}$	1
$R_{6n}$	0,1
$R_{7n}$	1
$R_{8n}$	1
$C_{1n}$	1
$C_{2n}$	0,1

---

## 4. IZRAČUN I ANALIZA FILTARSKIH KARAKTERISTIKA DENORMIRANIH FILTARA

U ovom poglavlju denormirati će se prijenosna funkcija normiranog filtra iz prethodnog poglavlja. Denormiranje će se obaviti na dvije frekvencije:  $50 \text{ Hz}$  i  $1 \text{ kHz}$ . Potom će se za dobivene filtre izračunati: raspored polova i nula, vremenski i frekvencijski odzivi, grupno vrijeme kašnjenja i vrijednosti elemenata. Dodatno tome za svaki filter obaviti će se analiza šuma.

### 4.1. Granične frekvencije $f_1$ i $f_2$

Granične frekvencije se dobivaju preko sljedećih relacija:

$$f_1 = \omega_{1n} f_0, \quad (4.1)$$

$$f_2 = \omega_{2n} f_0. \quad (4.2)$$

Uvrste li se u gornje relacije granične frekvencije normiranog filtra iz tablice (3.2), te centralne frekvencije  $f_0 = 50 \text{ Hz}$  i  $f_0 = 1 \text{ kHz}$ , dobiju se sljedeće vrijednosti. graničnih frekvencija

Tablica 4.1. Granične frekvencije filtara

	$f_0 = 50 \text{ Hz}$	$f_0 = 1 \text{ kHz}$
$f_1$	47,56 Hz	951,2 Hz
$f_2$	52,56 Hz	1051,2 Hz

### 4.2. Prijenosne funkcije $H(s)$

Da bi se došlo do željenih prijenosnih funkcija filtara na normiranoj prijenosnoj funkciji (3.4) mora se obaviti sljedeća transformacija

$$s \rightarrow \frac{s}{\omega_0} = \frac{s}{2\pi f_0}. \quad (4.3)$$

Uvrste li se u gornju relaciju centralne frekvencije  $f_0 = 50 \text{ Hz}$ , odnosno  $f_0 = 1 \text{ kHz}$  i provede li se transformacija (4.3), dobiju se sljedeće prijenosne funkcije:

$$H_{50 \text{ Hz}}(s) = -\frac{s^2 + 9,868 \cdot 10^4}{s^2 + 31,41s + 9,868 \cdot 10^4}, \quad (4.4)$$

$$H_{1 \text{ kHz}}(s) = -\frac{s^2 + 3,947 \cdot 10^7}{s^2 + 628,38s + 3,947 \cdot 10^7}. \quad (4.5)$$

### 4.3. Funkcije mreže $H(j\omega)$

Supstitucijom  $s \rightarrow j\omega$  u izrazima (4.4) i (4.5) dobiju se funkcije mreže denormiranih filtera koje glase:

$$H_{50Hz}(j\omega) = \frac{-\omega^2 + 9,868 \cdot 10^4}{\omega^2 - 31,41j\omega - 9,868 \cdot 10^4}, \quad (4.6)$$

$$H_{1kHz}(j\omega) = \frac{-\omega^2 + 3,947 \cdot 10^7}{\omega^2 - 628,38j\omega - 3,947 \cdot 10^7}. \quad (4.7)$$

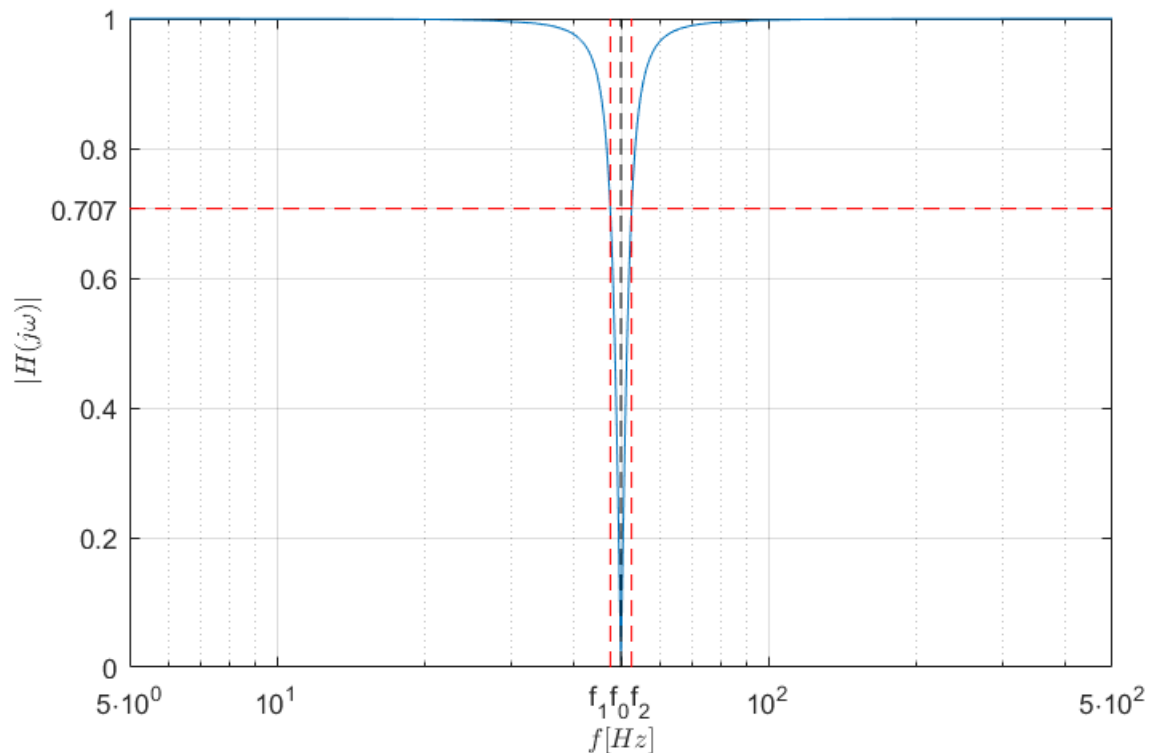
### 4.4. Amplitudno frekvencijske karakteristike $|H(j\omega)|$ i $A(\omega)$

Amplitudno frekvencijske karakteristike  $|H(j\omega)|$  dobiju se na sljedeći način

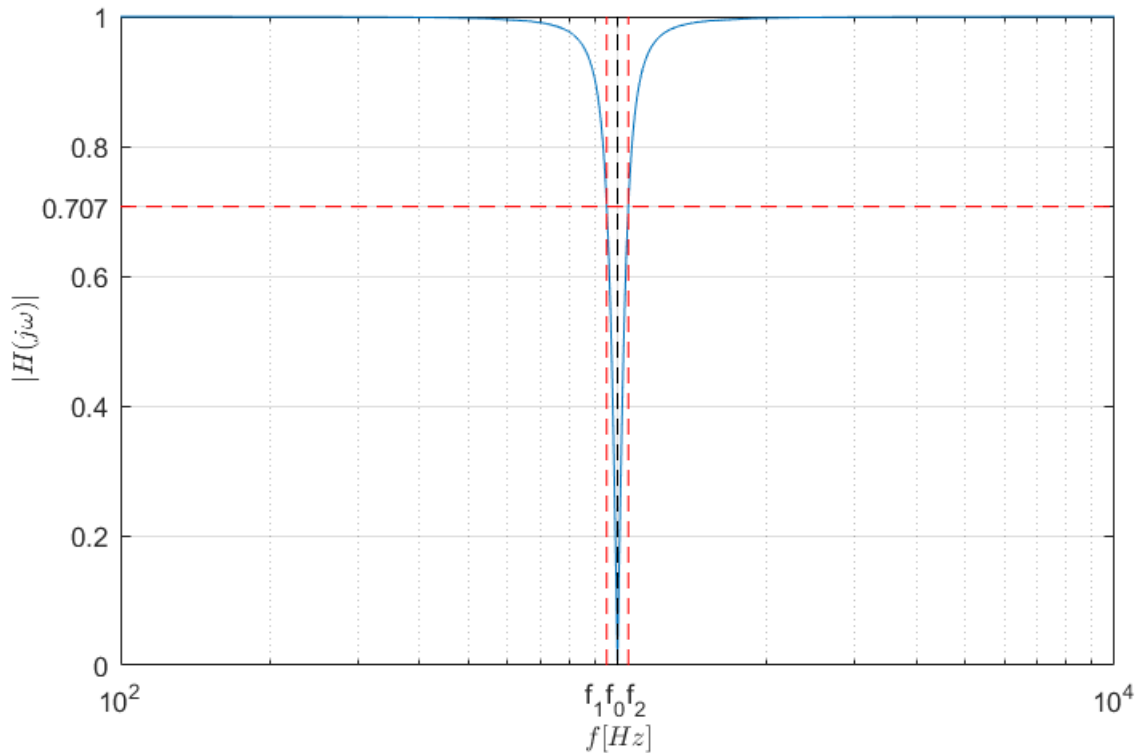
$$|H_{50Hz}(j\omega)| = \left| \frac{-\omega^2 + 9,868 \cdot 10^4}{\omega^2 - 31,41j\omega - 9,868 \cdot 10^4} \right| = \frac{|-\omega^2 + 9,868 \cdot 10^4|}{\sqrt{\omega^4 - 1,964 \cdot 10^5 \omega^2 + 9,74 \cdot 10^9}}, \quad (4.8)$$

$$|H_{1kHz}(j\omega)| = \left| \frac{-\omega^2 + 3,947 \cdot 10^7}{\omega^2 - 628,31j\omega - 3,947 \cdot 10^7} \right| = \frac{|-\omega^2 + 3,947 \cdot 10^7|}{\sqrt{\omega^4 - 7,857 \cdot 10^7 \omega^2 + 1,559 \cdot 10^{15}}}. \quad (4.9)$$

Grafički prikazano.



Slika 4.1. Grafički prikaz amplitudno frekvencijske karakteristike  $|H(j\omega)|$  za  $f_0 = 50 \text{ Hz}$



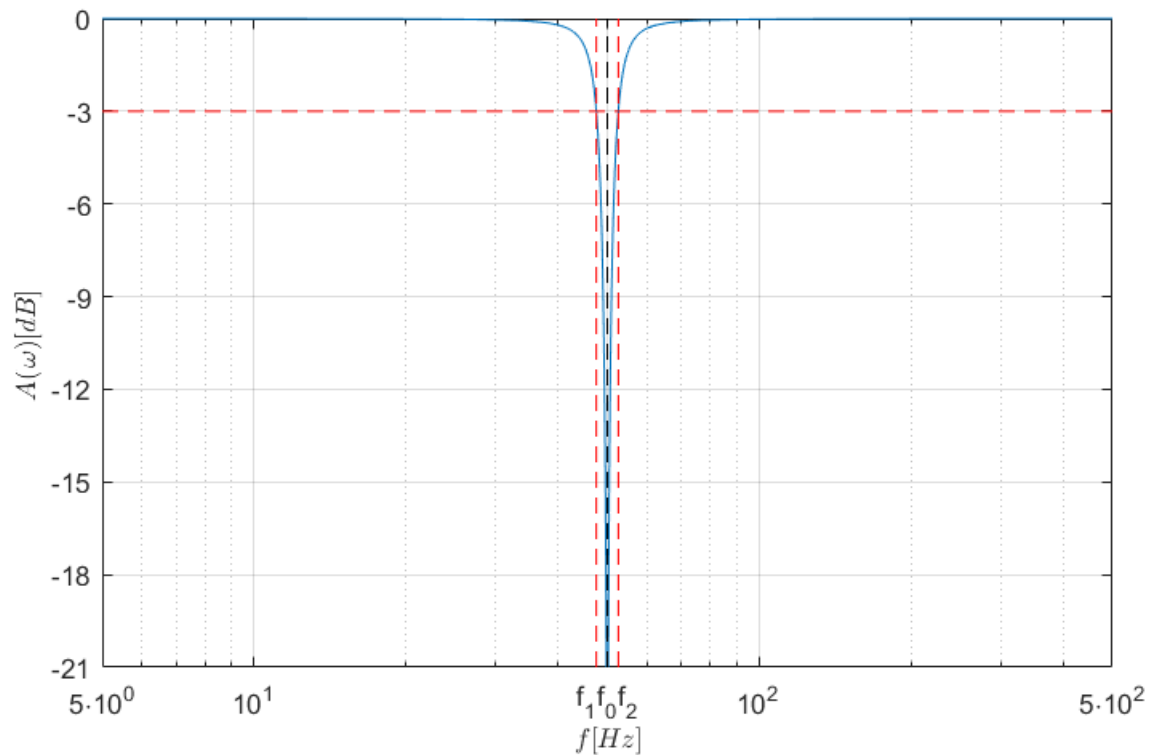
Slika 4.2. Grafički prikaz amplitudno frekvencijske karakteristike  $|H(j\omega)|$  za  $f_0 = 1$  kHz

Amplitudno frekvencijske karakteristike u decibelima dobiju se na sljedeći način

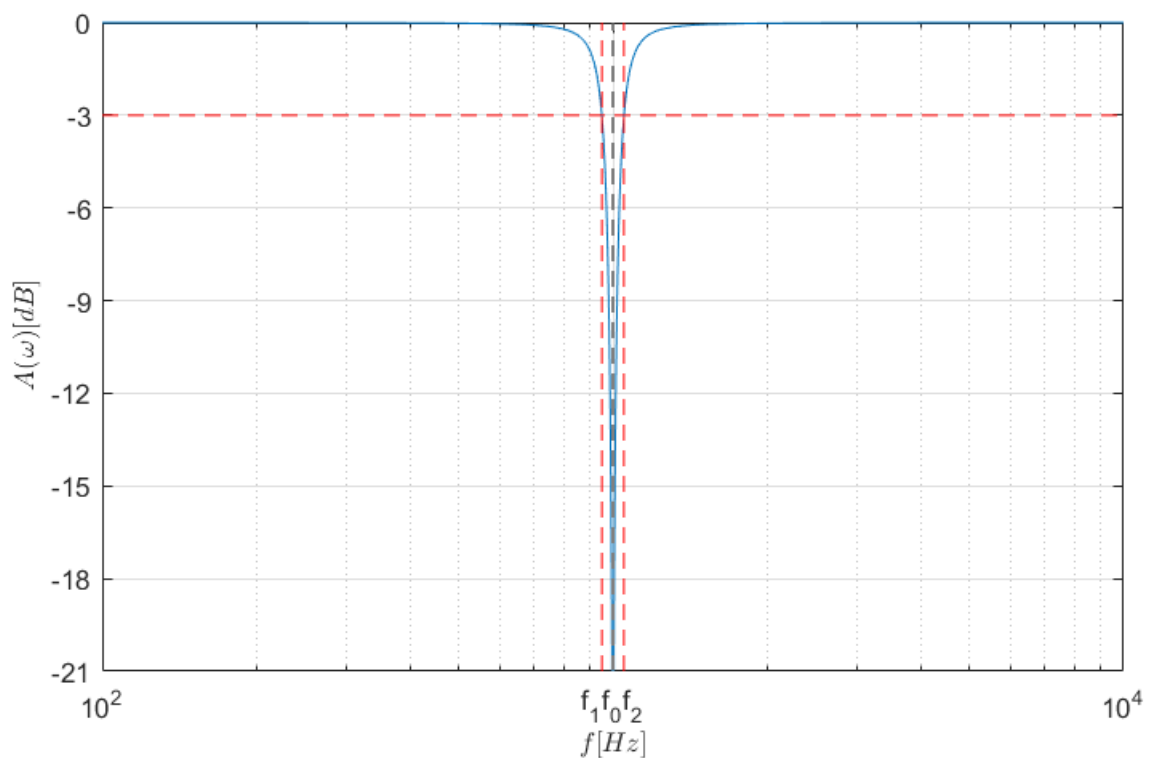
$$A_{50Hz}(\omega) = 20 \log (|H_{50Hz}(j\omega)|) = 20 \log \left( \frac{|-\omega^2 + 9,869 \cdot 10^4|}{\sqrt{\omega^4 - 1,964 \cdot 10^5 \omega^2 + 9,74 \cdot 10^9}} \right), \quad (4.10)$$

$$A_{1kHz}(\omega) = 20 \log (|H_{1kHz}(j\omega)|) = 20 \log \left( \frac{|-\omega^2 + 3,948 \cdot 10^7|}{\sqrt{\omega^4 - 7,857 \cdot 10^7 \omega^2 + 1,559 \cdot 10^{15}}} \right). \quad (4.11)$$

Grafički prikazano.



Slika 4.3. Grafički prikaz amplitudno frekventijske karakteristike  $A(\omega)$  za  $f_0 = 50\text{ Hz}$



Slika 4.4. Grafički prikaz amplitudno frekventijske karakteristike  $A(\omega)$  za  $f_0 = 1\text{ kHz}$

Na amplitudno frekventijskim karakteristikama danim na slikama: (4.1), (4.2) i (4.3), (4.4) vidljivo je da filtri postižu maksimalno gušenje na centralnoj frekvenciji  $f_0 = 50\text{ Hz}$ , odnosno



$f_0 = 1 \text{ kHz}$  te da karakteristike sijeku pojačanje od 0,707, odnosno  $-3 \text{ dB}$  na graničnim frekvencijama danim u tablici (4.1), što odgovara očekivanim rezultatima.

#### 4.5. Fazno frekvencijska karakteristika $\varphi(\omega)$

Kao što stoji u poglavlju (3.4.), fazno frekvencijske karakteristike za date slučajeve računaju se sljedećom relacijom

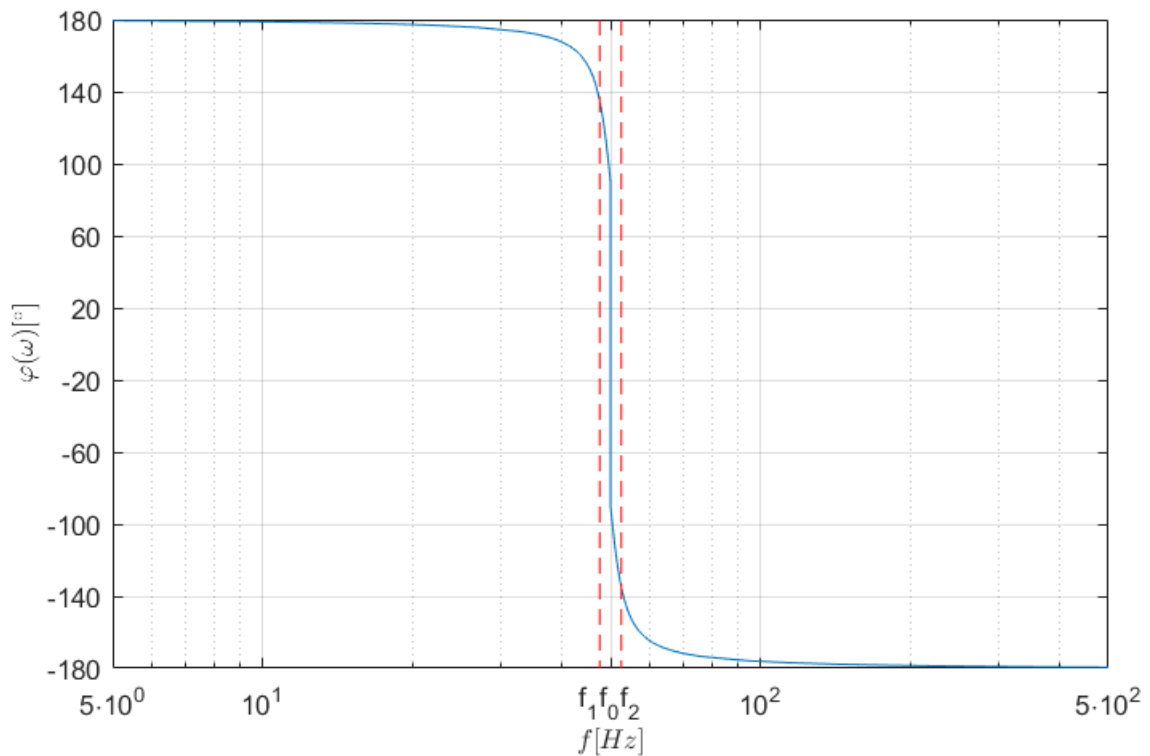
$$\varphi(\omega) = 180^\circ + \arctan \frac{\text{Im}[H(j\omega)]}{\text{Re}[H(j\omega)]}. \quad (4.12)$$

Uvrste li se izrazi (4.6) i (4.7) u gornju relaciju dobiju se sljedeće fazno frekvencijske karakteristike:

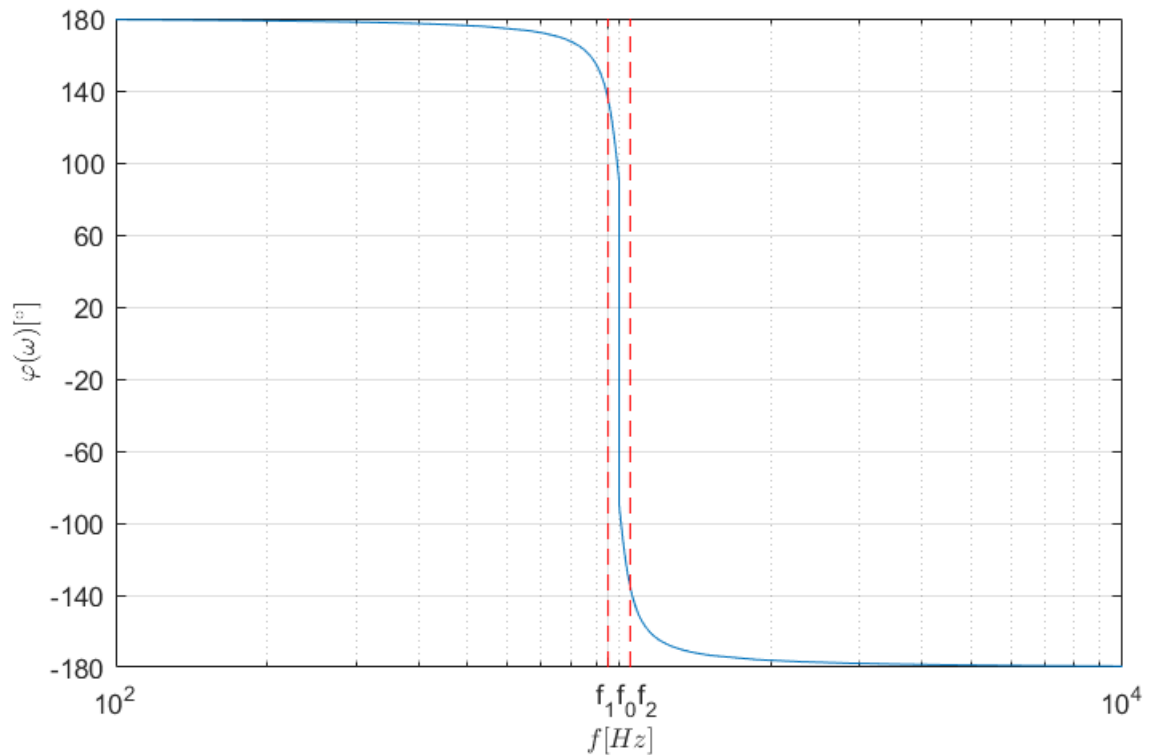
$$\varphi_{50\text{Hz}}(\omega) = 180^\circ + \arctan \frac{-31,41\omega^3 + 310 \cdot 10^4\omega}{-\omega^4 + 1,974 \cdot 10^5\omega^2 - 9,74 \cdot 10^9}, \quad (4.13)$$

$$\varphi_{1\text{kHz}}(\omega) = 180^\circ + \arctan \frac{-628,38\omega^3 + 2,48 \cdot 10^{10}\omega}{-\omega^4 + 7,894 \cdot 10^7\omega^2 - 1,558 \cdot 10^{15}}. \quad (4.14)$$

Grafički prikazano.



Slika 4.5. Grafički prikaz fazno frekvencijske karakteristike  $\varphi(\omega)$  za  $f_0 = 50 \text{ Hz}$



Slika 4.6. Grafički prikaz fazno frekvencijske karakteristike  $\varphi(\omega)$  za  $f_0 = 1 \text{ kHz}$

#### 4.6. Grupna vremena kašnjenja $\tau_g(\omega)$

Grupno vrijeme kašnjenja definirano je sljedećim izrazom

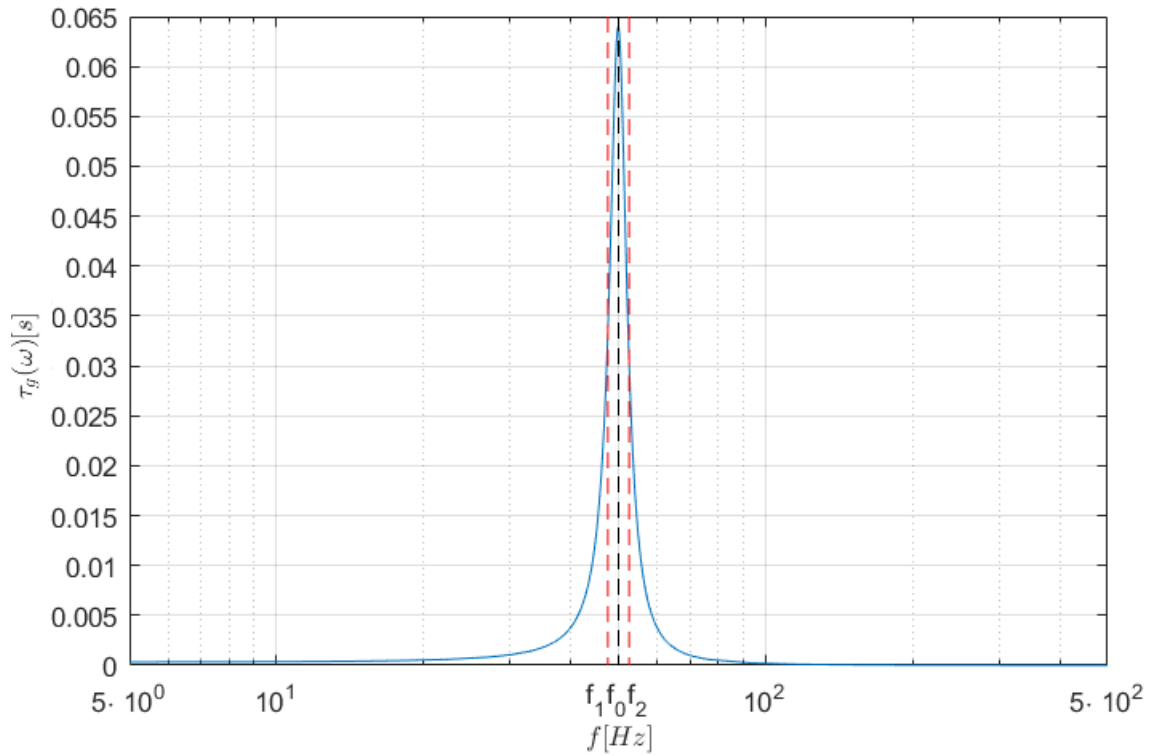
$$\tau_g = \frac{-d\varphi(\omega)}{d\omega}. \quad (4.15)$$

Uvrštavanjem izraza (4.13) i (4.14) u gornji izraz dobiju se sljedeći izrazi:

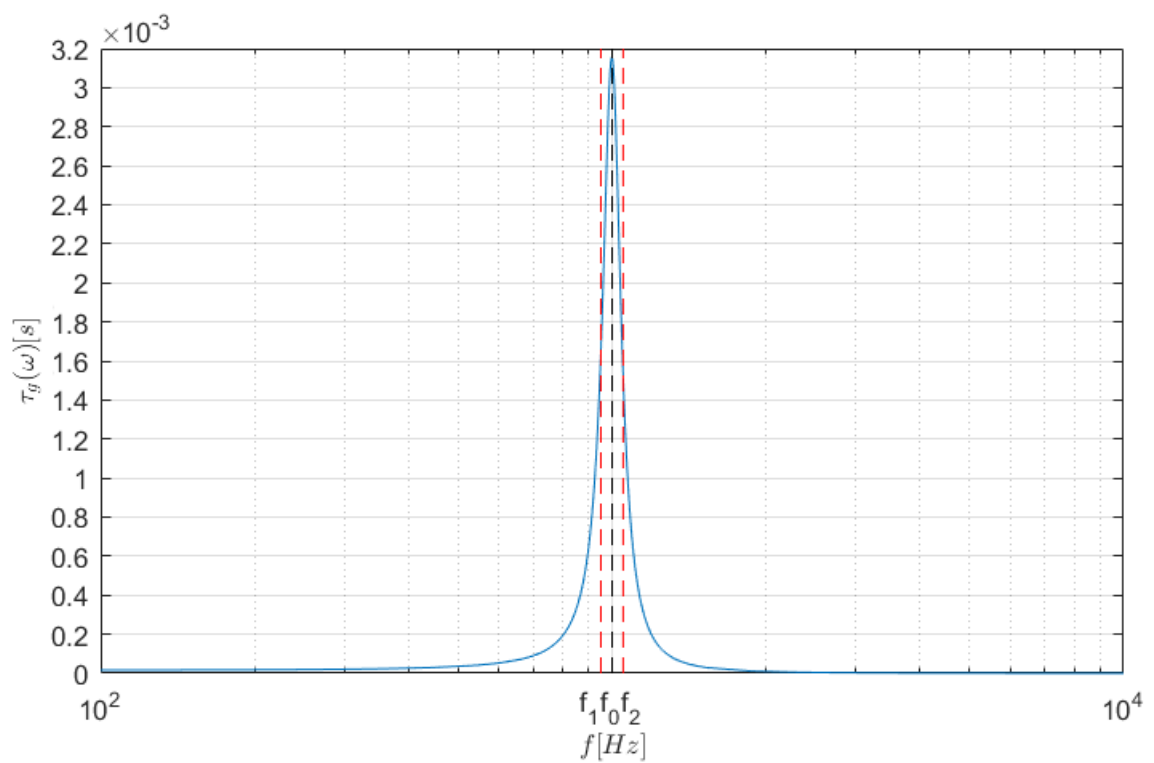
$$\tau_{g50Hz}(\omega) = \frac{31,41\omega^2 + 310 \cdot 10^4}{\omega^4 - 1,964 \cdot 10^5\omega^2 + 9,74 \cdot 10^9}, \quad (4.16)$$

$$\tau_{g1kHz}(\omega) = \frac{628,38\omega^2 + 2,48 \cdot 10^{10}}{\omega^4 - 7,857 \cdot 10^7\omega^2 + 1,559 \cdot 10^{15}}. \quad (4.17)$$

Grafički prikazano.



Slika 4.7. Grafički prikaz grupnog vremena kašnjenja  $\tau_g(\omega)$  za  $f_0 = 50$  Hz



Slika 4.8. Grafički prikaz grupnog vremena kašnjenja  $\tau_g(\omega)$  za  $f_0 = 1$  kHz

#### 4.7. Raspored polova i nula

Nule prijenosne funkcije dobiju se izjednačavanjem brojnika prijenosne funkcije s nulom

$$f_0 = 50Hz : s^2 + 9,868 \cdot 10^4 = 0, \quad (4.18)$$

$$f_0 = 1kHz : s^2 + 3,947 \cdot 10^7 = 0, \quad (4.19)$$

dok se polovi prijenosne funkcije dođu izjednačavanjem nazivnika sa nulom

$$f_0 = 50Hz : s^2 + 31,41s + 9,868 \cdot 10^4 = 0, \quad (4.20)$$

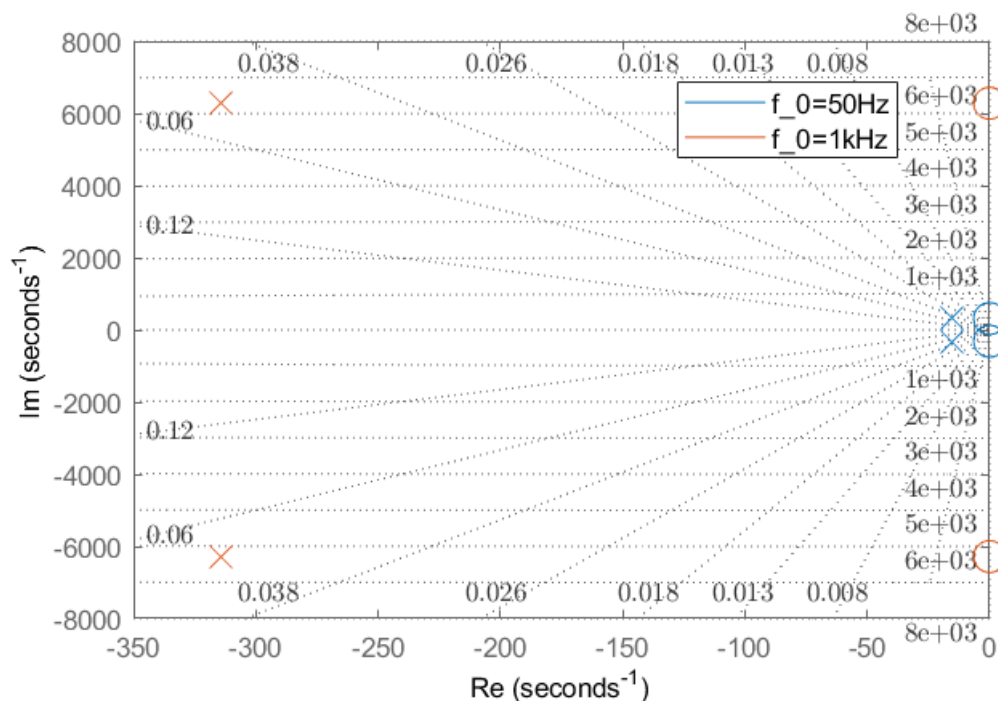
$$f_0 = 1kHz : s^2 + 628,38s + 3,947 \cdot 10^7 = 0. \quad (4.21)$$

Na ovaj način dobiju se sljedeći polovi i nule.

Tablica 4.2. Raspored polova i nula

	$f_0 = 50Hz$	$f_0 = 1kHz$
$s_0$	$314 \pm j$	$\pm 6280j$
$s_p$	$-15,7 \pm 314j$	$-314 \pm 6280j$

Grafički prikazano.



Slika 4.9. Grafički prikaz rasporeda nula i polova

Iz vrijednosti u tablici (4.2) i sa slike (4.9) vidi se da se svi polovi prijenosnih funkcija nalaze u lijevoj poluravnini kompleksne ravnine  $s$ , što znači da su oba sustava stabilna.

#### 4.8. Impulsni odziv $h(t)$

Impulsni odziv prijenosne funkcije dobije se računanjem inverza njezine Laplaceove transformacije

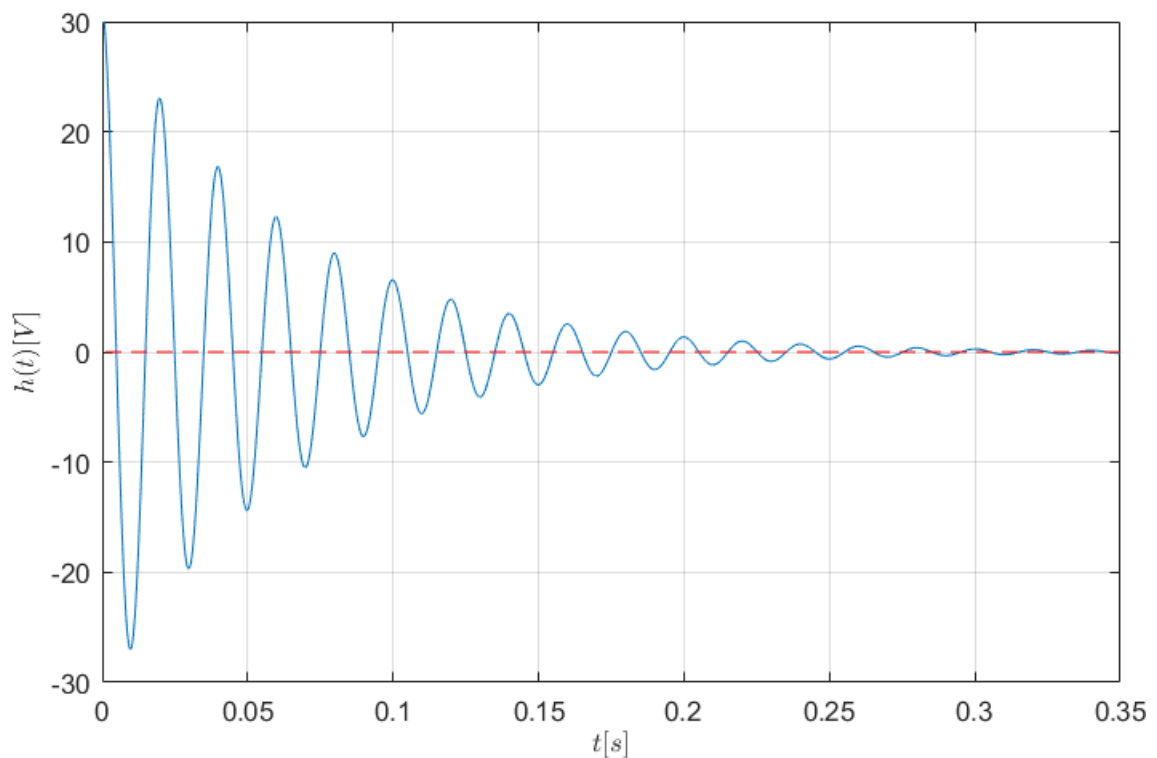
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \{H(s)\}. \quad (4.22)$$

Uvrštavanjem izraza (4.4) i (4.5) u gornji izraz dobije se:

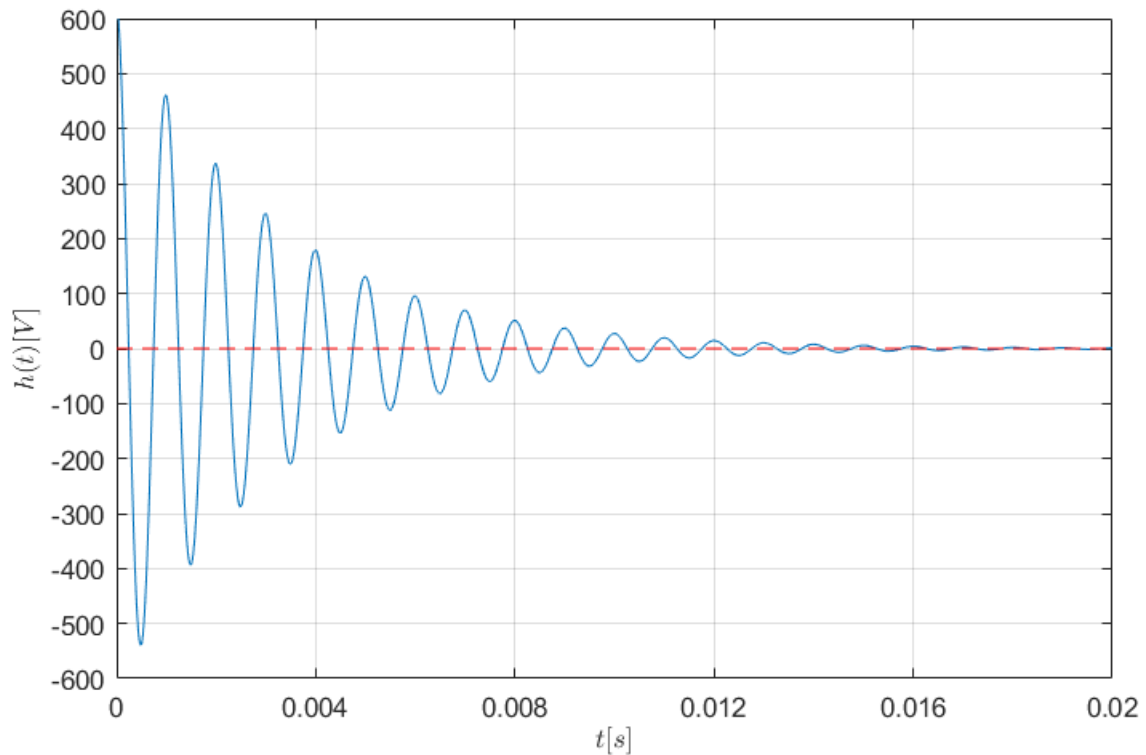
$$h_{50Hz}(t) = -\delta(t) + 31,42e^{-15,71t} (\cos(313,77t) - 0,05 \sin(313,77t)), \quad (4.23)$$

$$h_{1kHz}(t) = -\delta(t) + 628,31e^{-314,16t} (\cos(6275,33t) - 0,05 \sin(6275,33t)). \quad (4.24)$$

Grafički prikazano.



Slika 4.10. Grafički prikaz impulsnog odziva  $h(t)$  za  $f_0 = 50$  Hz



Slika 4.11. Grafički prikaz impulsnog odziva  $h(t)$  za  $f_0 = 1 \text{ kHz}$

#### 4.9. Odziv na step $a(t)$

Odziv prijenosne funkcije na step dobije se pomoću sljedeće relacije

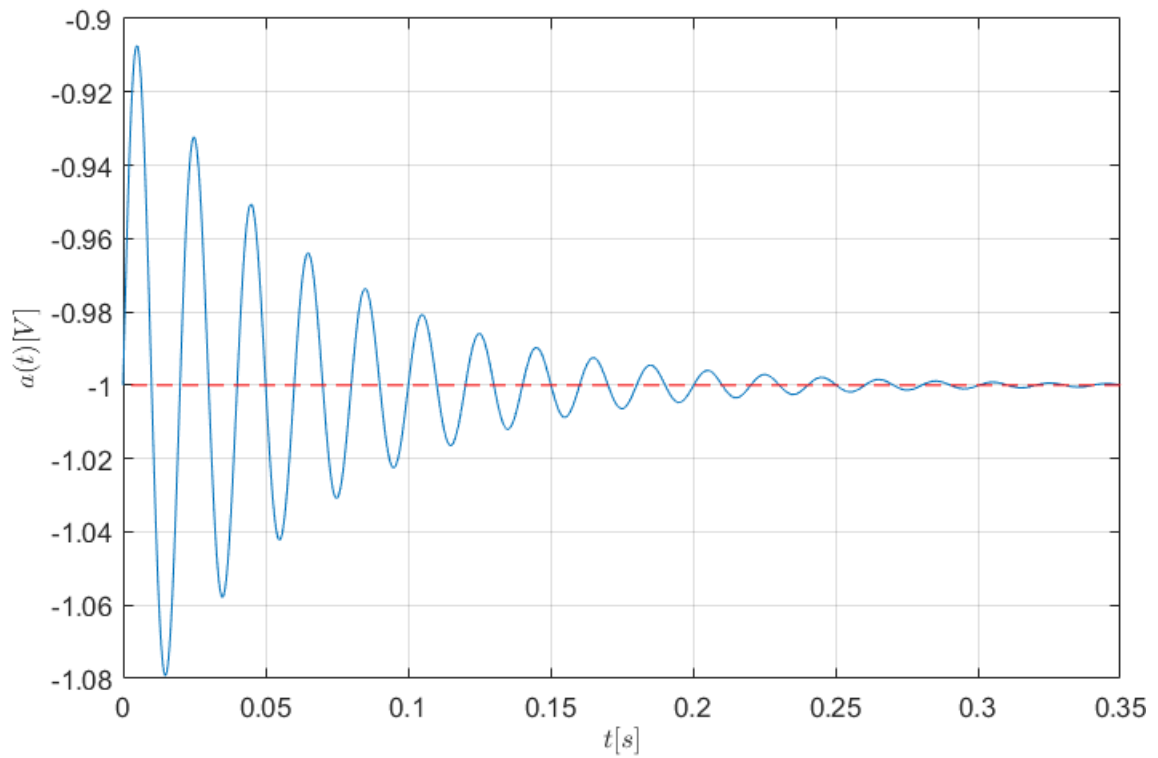
$$a(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ H(s) \frac{1}{s} \right\}. \quad (4.25)$$

Uvrštavanjem izraza (4.4) i (4.5) u gornji izraz dobije se:

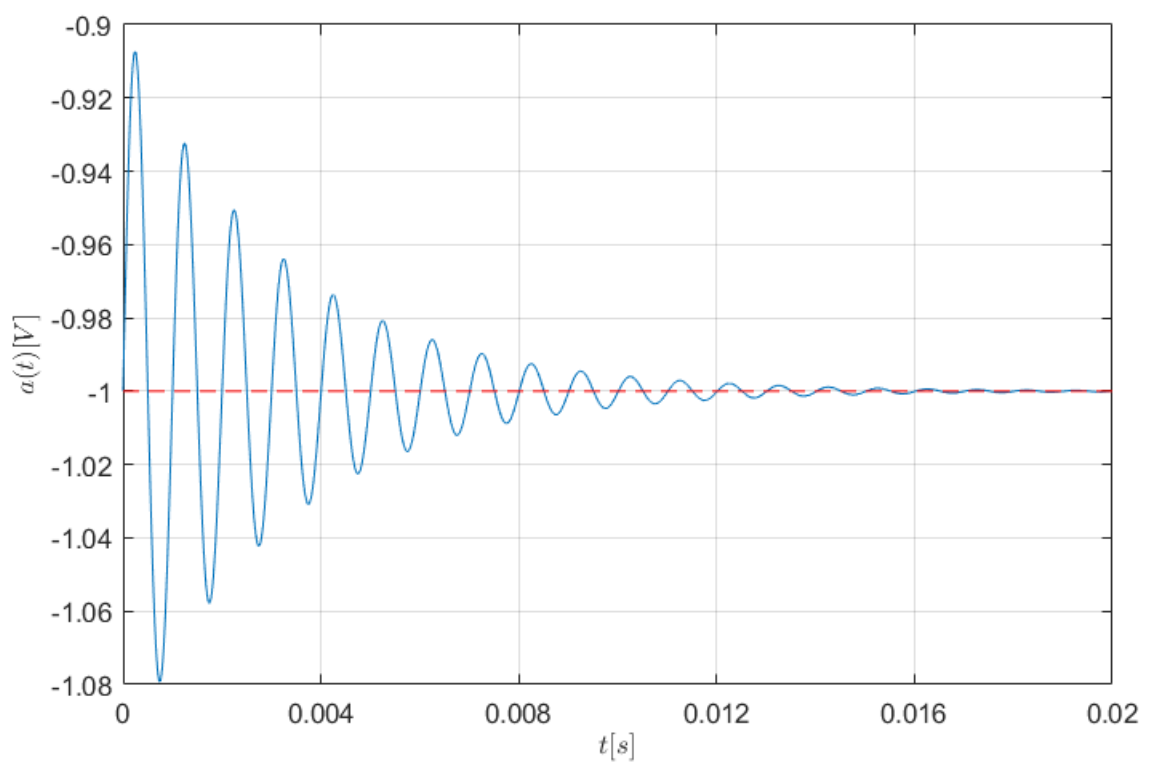
$$a_{50\text{Hz}}(t) = -1 + 0,1e^{-15,7t} \sin(313,77t), \quad (4.26)$$

$$a_{1\text{kHz}}(t) = -1 + 0,1e^{-314,16t} \sin(6275,33t). \quad (4.27)$$

Grafički prikazano.



Slika 4.12. Grafički prikaz odziva na step  $a(t)$  za  $f_0 = 50 \text{ Hz}$



Slika 4.13. Grafički prikaz odziva na step  $a(t)$  za  $f_0 = 1 \text{ kHz}$

#### 4.10. Proračun vrijednosti elemenata

Vrijednosti elemenata filtera zadanih frekvencija dobiju se denormiranjem normiranih elemenata iz tablice (3.4). Denormiranje se vrši preko sljedećih relacija:

$$R_0 = \frac{C_n}{\omega_0 C_i}, \quad (4.28)$$

$$R_i = R_0 R_{in}, \quad (4.29)$$

$$C_i = \frac{C_{in}}{R_0 \omega_0}. \quad (4.30)$$

Budući da se dvije filterne realizacije rade na istoj PCB pločici, vrijednosti otpornika za obje realizacije moraju biti jednaki, dok se karakteristike mijenjaju promjenom kapaciteta. Iz ovoga proizlazi sljedeći uvjet

$$R_{0_{50Hz}} = R_{0_{1kHz}}. \quad (4.31)$$

Uzme li se sada vrijednost  $C_1 = 100 \text{ nF}$ , za  $f_0 = 50 \text{ Hz}$  dobiju se sljedeće vrijednosti

Tablica 4.3. Vrijednosti elemenata normiranog filtra

Element	Vrijednost elementa za $f_g = 50 \text{ Hz}$	Vrijednost elementa za $f_g = 1 \text{ kHz}$
$R_1$	31831 $\Omega$	31831 $\Omega$
$R_2$	31831 $\Omega$	31831 $\Omega$
$R_3$	31831 $\Omega$	31831 $\Omega$
$R_4$	31831 $\Omega$	31831 $\Omega$
$R_5$	31831 $\Omega$	31831 $\Omega$
$R_6$	3183, 1 $\Omega$	3183, 1 $\Omega$
$R_7$	31831 $\Omega$	31831 $\Omega$
$R_8$	31831 $\Omega$	31831 $\Omega$
$C_1$	100 $\text{nF}$	5 $\text{nF}$
$C_2$	10 $\text{nF}$	0.5 $\text{nF}$

#### 4.11. Analiza Šuma

Spektralnu gustoću šuma računamo pomoću sljedećeg izraza

$$U_n^2(\omega) = \sum^m |T_{I,k}(j\omega)|^2 I_{n,k}^2 + \sum^n |T_{V,l}(j\omega)|^2 E_{n,l}^2, \quad (4.32)$$

gdje su:

$|T_{I,k}(j\omega)|$ -prijenosna impedancija izlaznog napona i ulazne struje šuma,

$|T_{V,l}(j\omega)|$ -prijenosna funkcija izlaznog napona i ulaznog napona šuma,

$I_{n,k}$ -iznos strujnog izvora šuma,

$E_{n,l}$ -iznos naponskog izvora šuma.

$I_{n,k}$  računa se sljedećom relacijom

$$I_{n,k} = \sqrt{\frac{4kT\Delta f}{R_k}}, \quad (4.33)$$



gdje je:

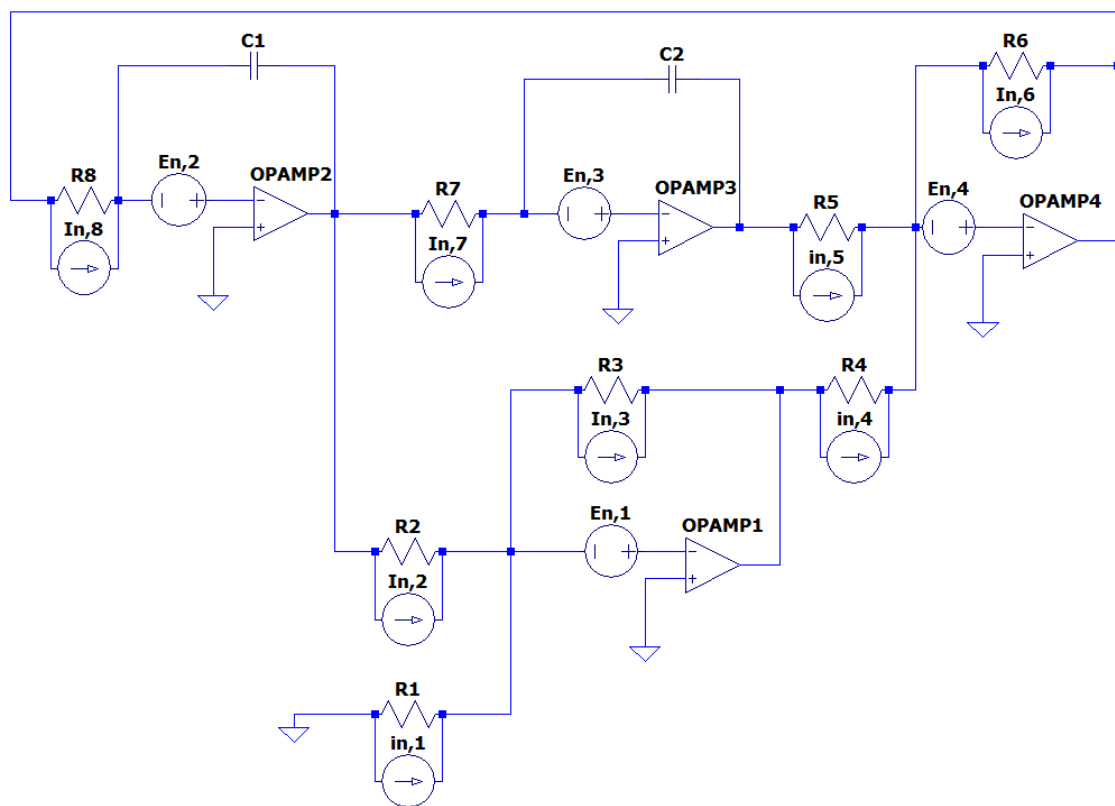
$$k = 1,3806 \cdot 10^{-23},$$

$$T = 300 \text{ K},$$

$$\Delta f = 1.$$

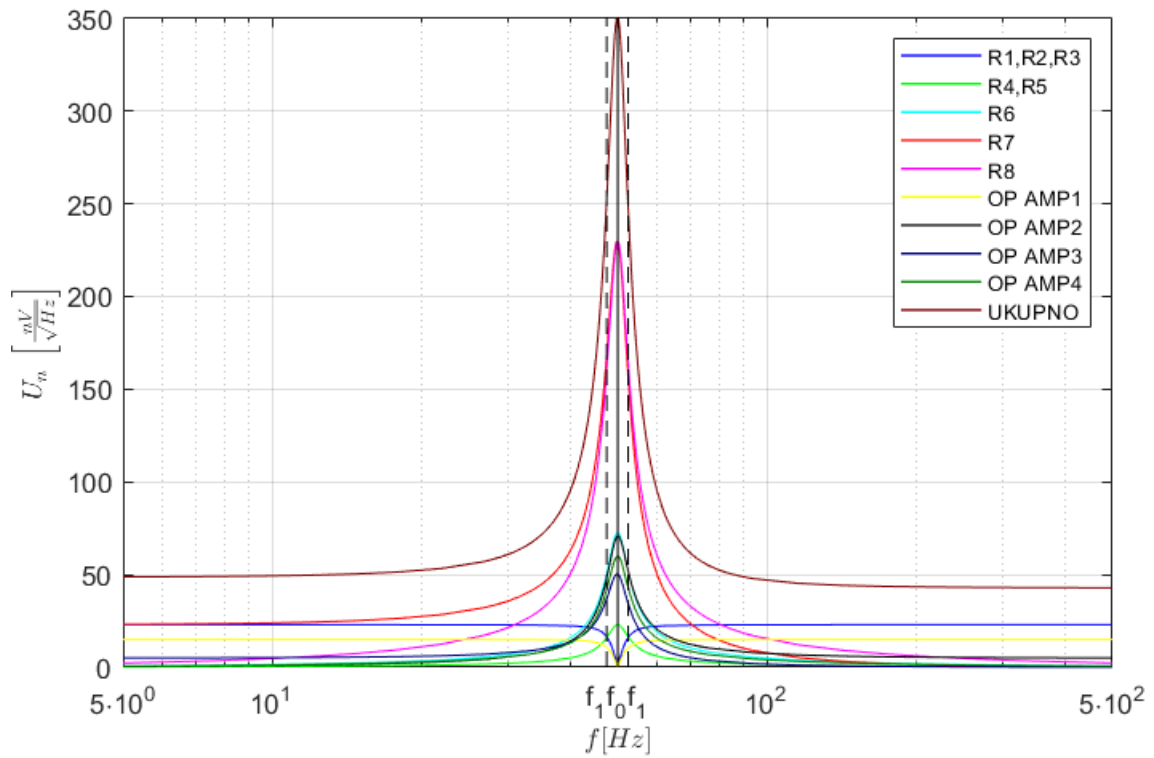
Za  $E_n$  operacijskog pojačala uzima se vrijednost iz tehničke dokumentacije i ona iznosi  $5 \frac{nV}{\sqrt{Hz}}$ .  $I_n$  operacijskog pojačala iznosi  $0,7 - 2,7 \frac{pA}{\sqrt{Hz}}$  i u ovim proračunima se zanemaruje budući da je njegov doprinos ukupnome šumu malen.

Na sljedećoj slici prikazana je ekvivalentna shema električnog šuma unutar željenog filtra prema kojoj su rađeni proračuni.

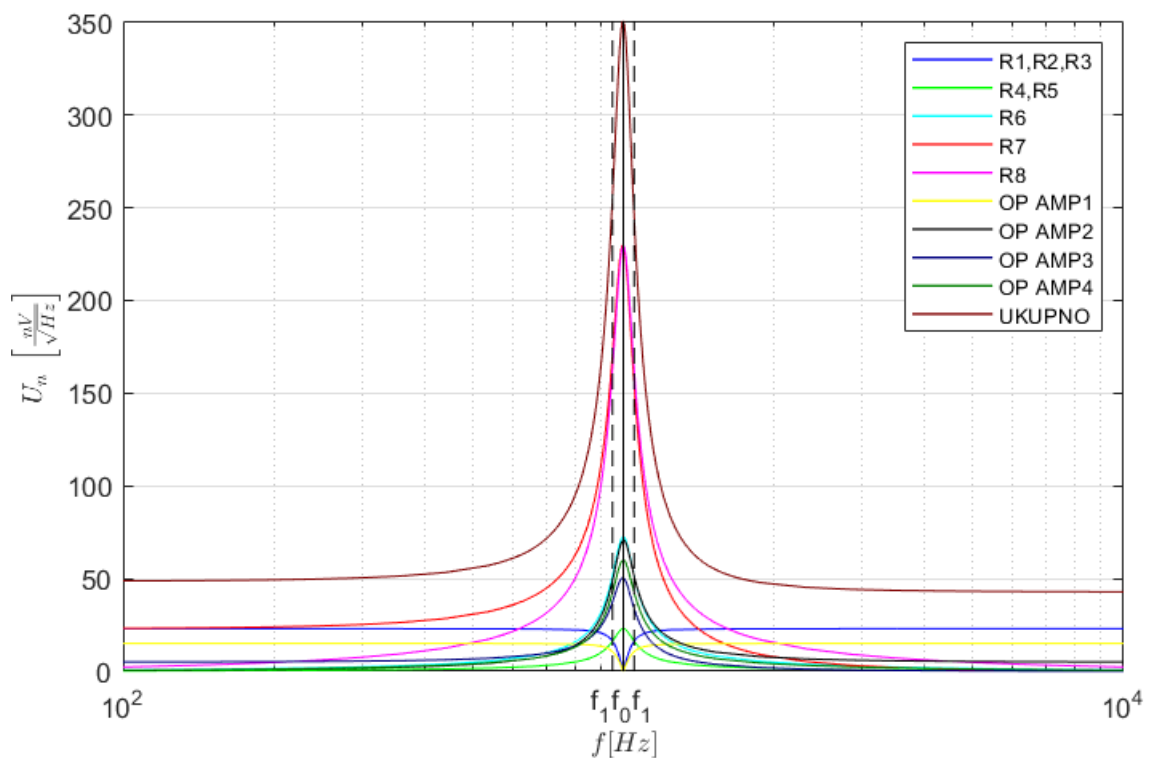


Slika 4.14. Shema električnog šuma unutar željenog filtra

Proračunat je ukupan šum te doprinos svakog elementa ukupnome šumu. Na ovaj način izračunat šum ima sljedeće valne oblike.



Slika 4.15. Grafički prikaz spektralne gustoće napona šuma za  $f_0 = 50 \text{ Hz}$



Slika 4.16. Grafički prikaz spektralne gustoće napona šuma za  $f_0 = 1 \text{ kHz}$

Kao numerički pokazatelj šuma uzima se RMS iznos šuma u nekom frekvencijskom pojasu.

---

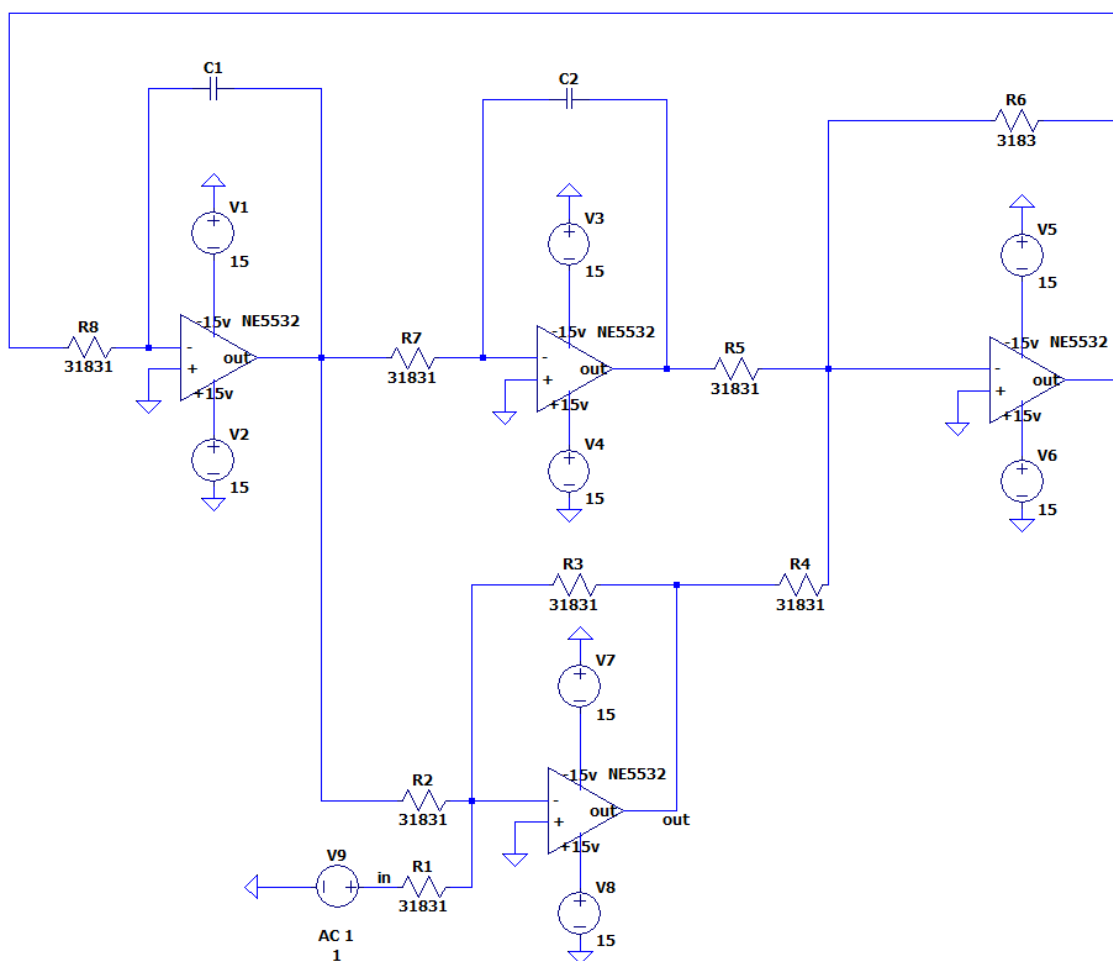
Za ovaj slučaj on glasi:

$$E_{n,f_0=50Hz} = \sqrt{\int_{2\pi \cdot 5Hz}^{2\pi \cdot 500Hz} U_n^2(\omega) d\omega} = 3,41 \mu V, \quad (4.34)$$

$$E_{n,f_0=1kHz} = \sqrt{\int_{2\pi \cdot 100Hz}^{2\pi \cdot 10kHz} U_n^2(\omega) d\omega} = 15,25 \mu V. \quad (4.35)$$

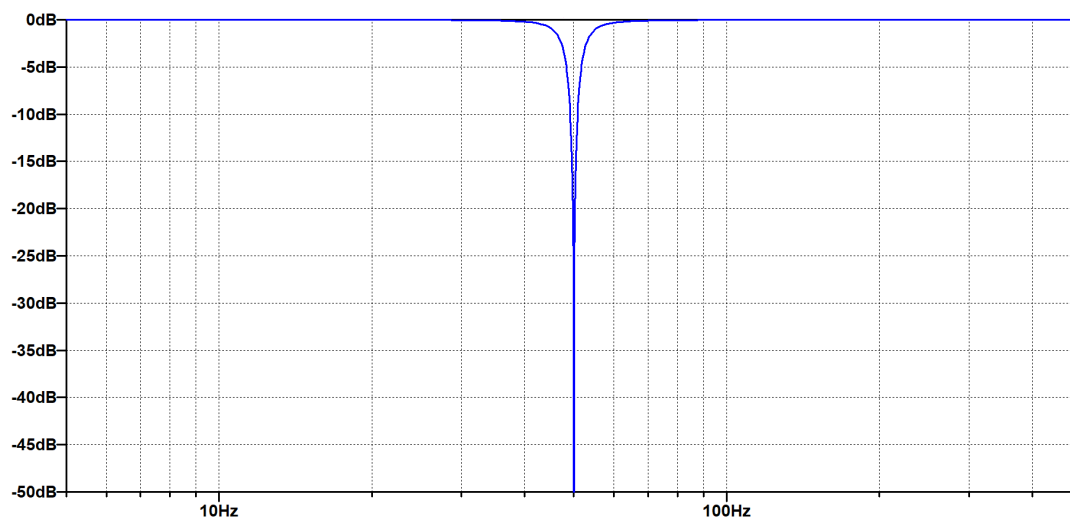
## 5. LTSpice simulacija

U ovom poglavlju provjeriti će se rezultati dobiveni u prethodnom poglavlju. U tu svrhu biti će korišten računalni program "LTSpice". "LTSpice" je računalni program za analizu elektroničkih krugova. Omogućuje korisniku da kreira željeni sklop u obliku sheme te na njemu simulira željene karakteristike. U sklopu ovog rada simulirane su frekvencijske karakteristike, grupno vrijeme kašnjenja, odziv na step i spektralna gustoća napona šuma. Shema po kojoj su rađene simulacije dana je sljedećom slikom.

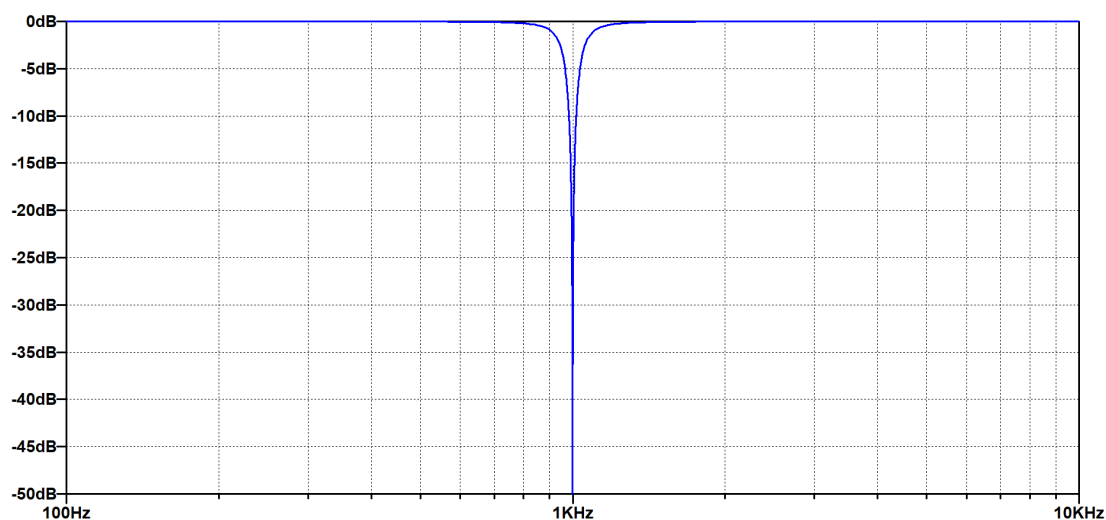


Slika 5.1. Shema željenog filtra u programskom paketu "LTSpice"

Valni oblici dobiveni simulacijom dani su u nastavku.

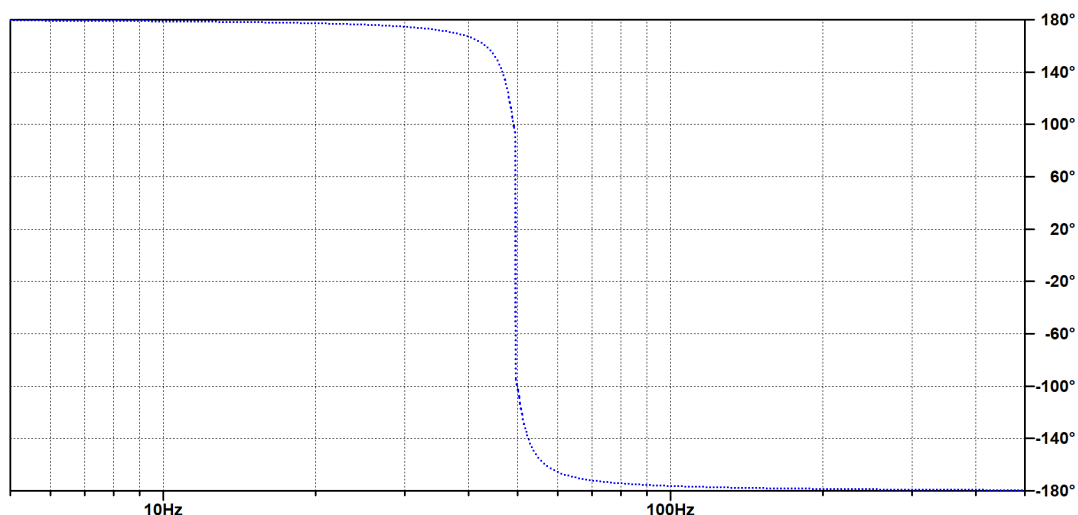


Slika 5.2. Grafički prikaz simulacije amplitudno frekvencijske karakteristike  $A(\omega)$  za  $f_0 = 50 \text{ Hz}$

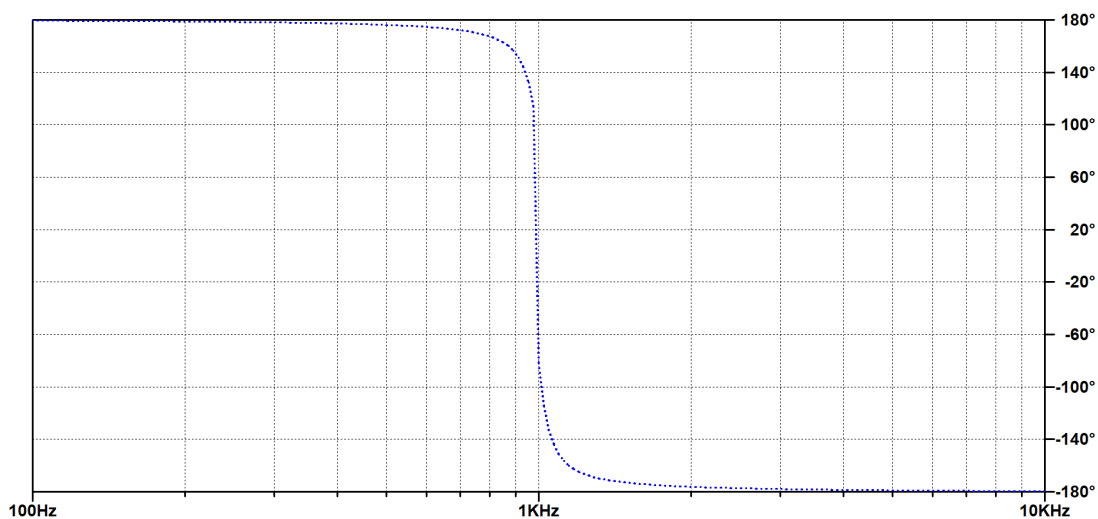


Slika 5.3. Grafički prikaz simulacije amplitudno frekvencijske karakteristike  $A(\omega)$  za  $f_0 = 1 \text{ kHz}$

Može se zaključiti da valni oblici amplitudno frekvencijskih karakteristika dobivenih unutar programskog paketa "LTSpice" odgovaraju onima proračunatim u programskom paketu "Matlab", prikazanim na slikama (4.3) i (4.4).

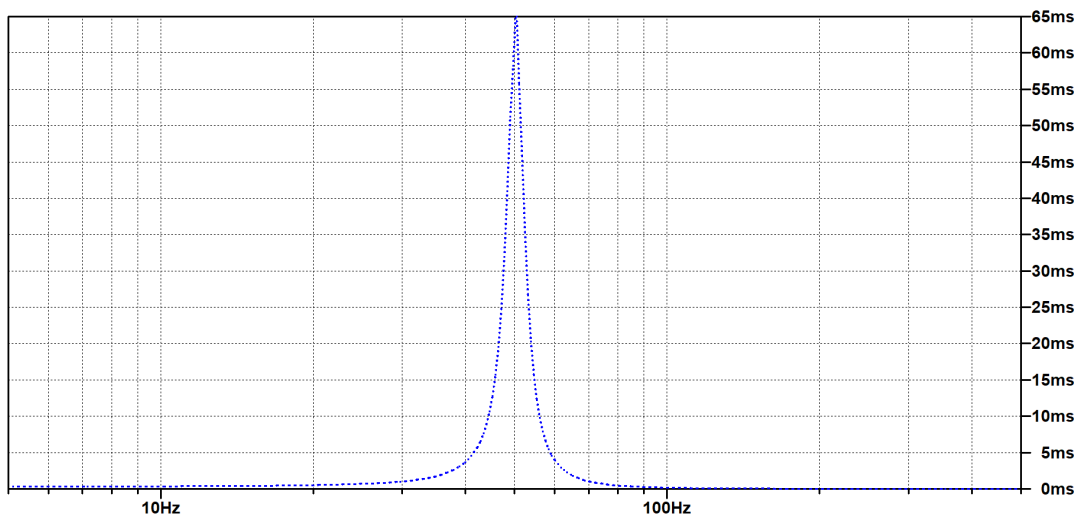


Slika 5.4. Grafički prikaz simulacije fazno frekvencijske karakteristike  $\varphi(\omega)$  za  $f_0 = 50 \text{ Hz}$

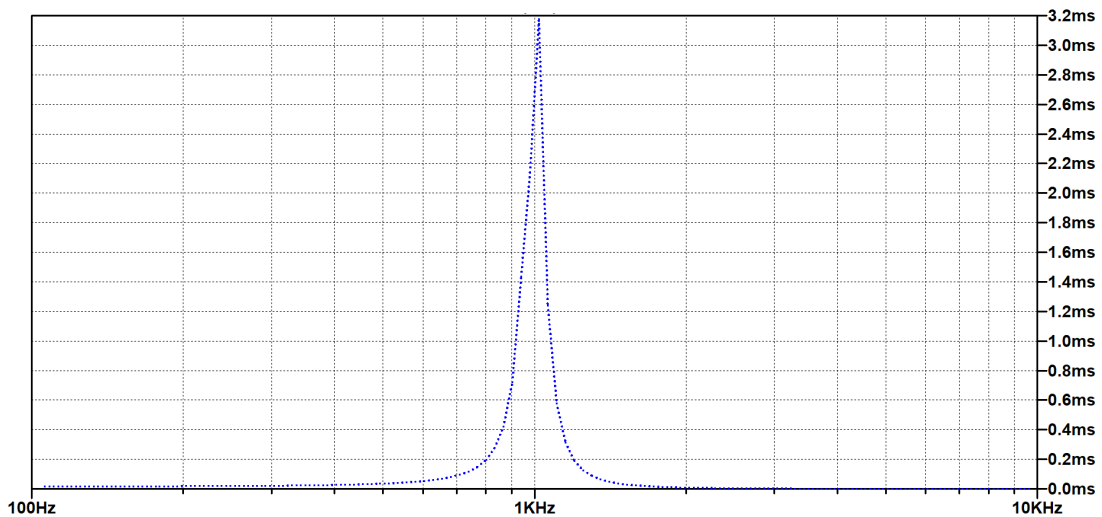


Slika 5.5. Grafički prikaz simulacije fazno frekvencijske karakteristike  $\varphi(\omega)$  za  $f_0 = 1 \text{ kHz}$

Može se zaključiti da valni oblici fazno frekvencijskih karakteristika dobivenih unutar programskog paketa "LTSpice" odgovaraju onima proračunatim u programskom paketu "Matlab", prikazanim na slikama (4.5) i (4.6).

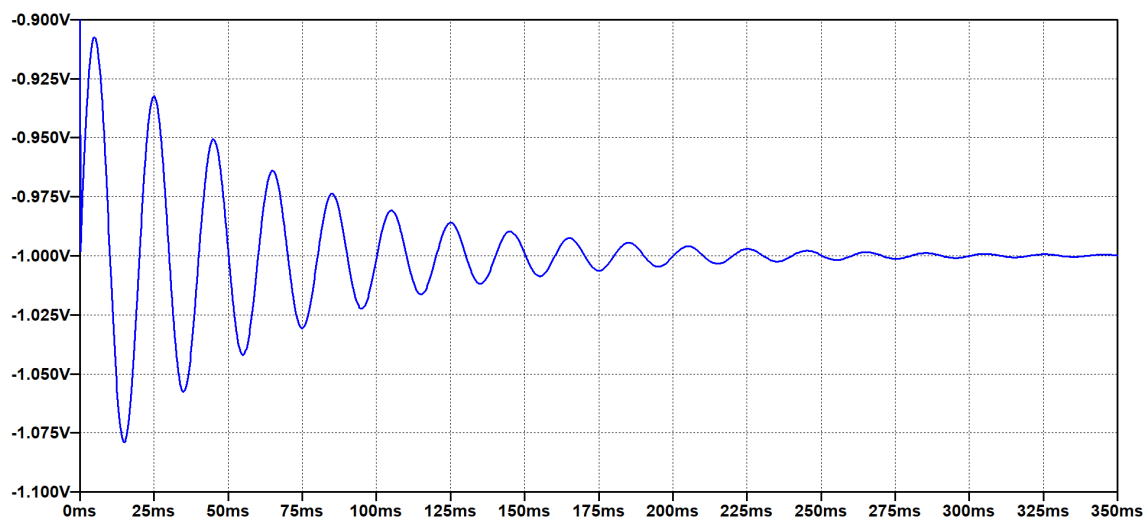


Slika 5.6. Grafički prikaz simulacije grupnog vremena kašnjenja  $\tau_g(\omega)$  za  $f_0 = 50$  Hz

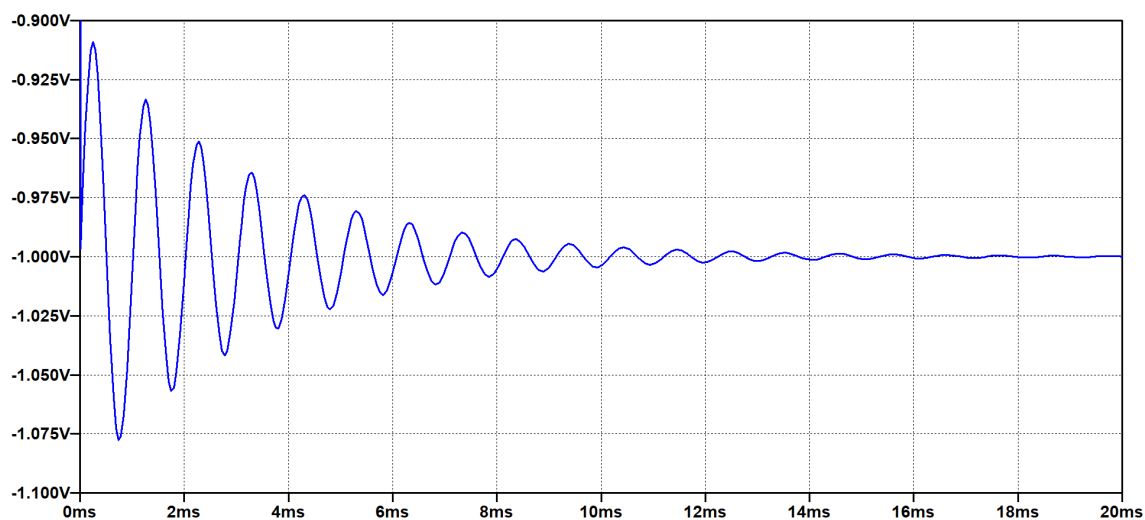


Slika 5.7. Grafički prikaz simulacije grupnog vremena kašnjenja  $\tau_g(\omega)$  za  $f_0 = 1$  kHz

Može se zaključiti da valni oblici grupnih vremena kašnjenja dobivenih unutar programskog paketa "LTSpice" odgovaraju onima proračunatim u programskom paketu "Matlab", prikazanim na slikama (4.8) i (4.7).



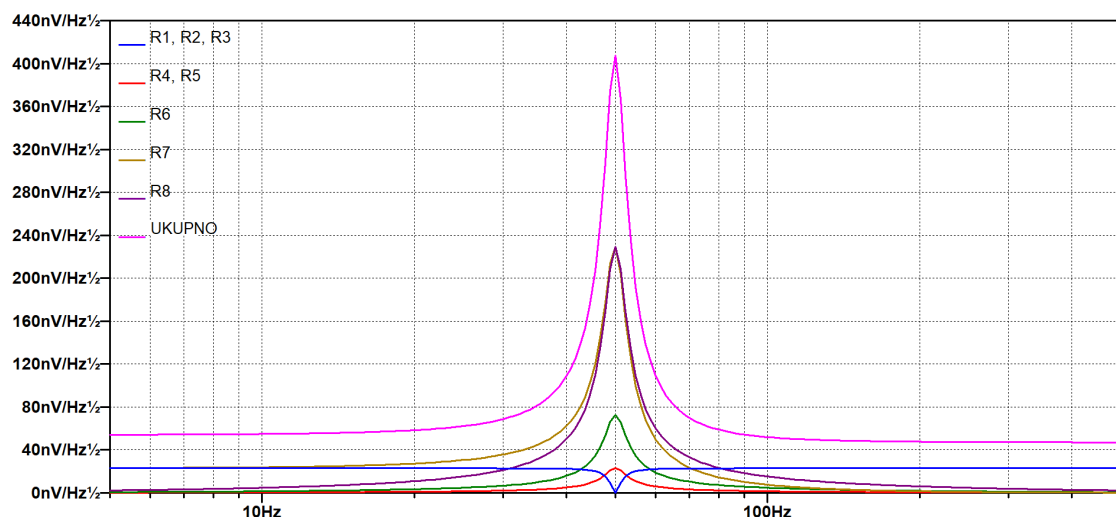
Slika 5.8. Grafički prikaz simulacije odziva na step  $a(t)$  za  $f_0 = 50 \text{ Hz}$



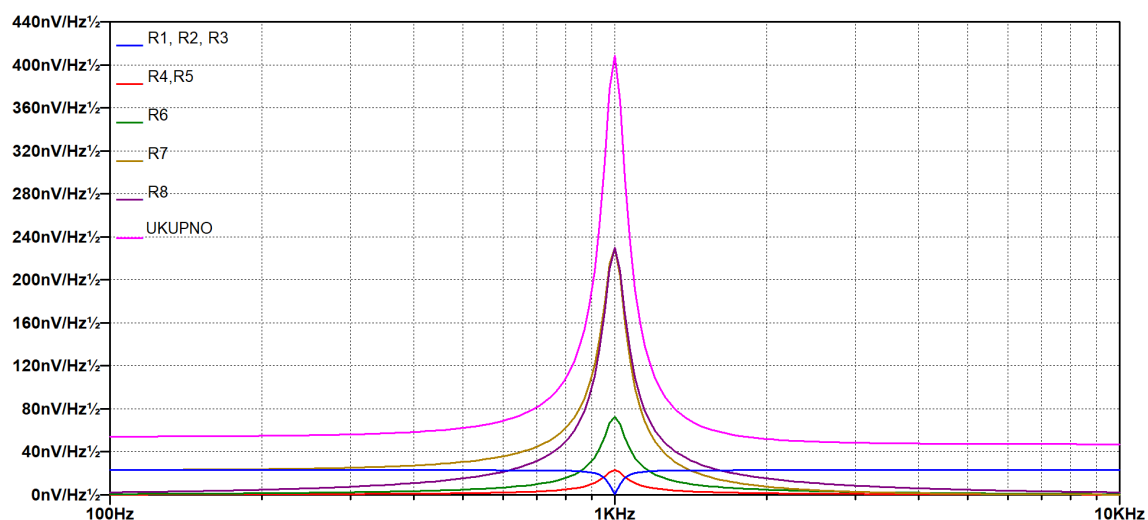
Slika 5.9. Grafički prikaz simulacije odziva na step  $a(t)$  za  $f_0 = 1 \text{ kHz}$

Može se zaključiti da valni oblici odziva na step dobivenih unutar programskog paketa "LT-Spice" odgovaraju onima proračunatim u programskom paketu "Matlab", prikazanim na slikama (4.13) i (4.12).



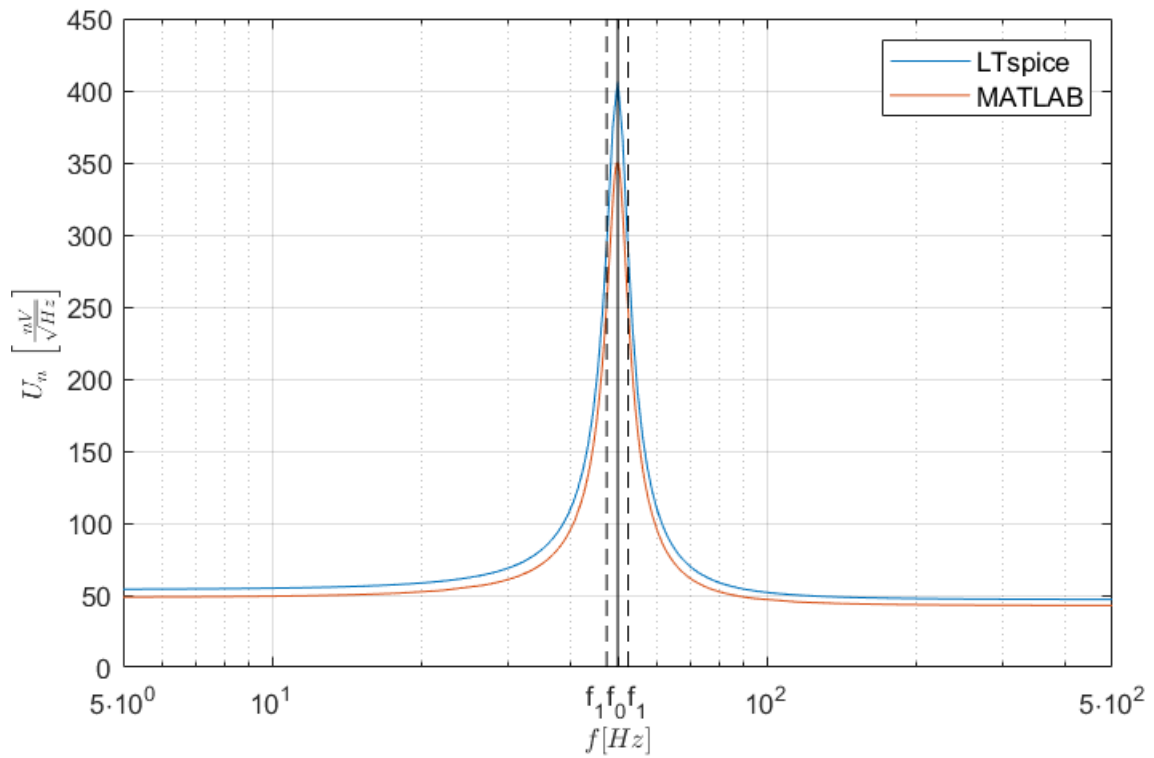


Slika 5.10. Grafički prikaz simulacije spektralne gustoće napona šuma za  $f_0 = 50 \text{ Hz}$

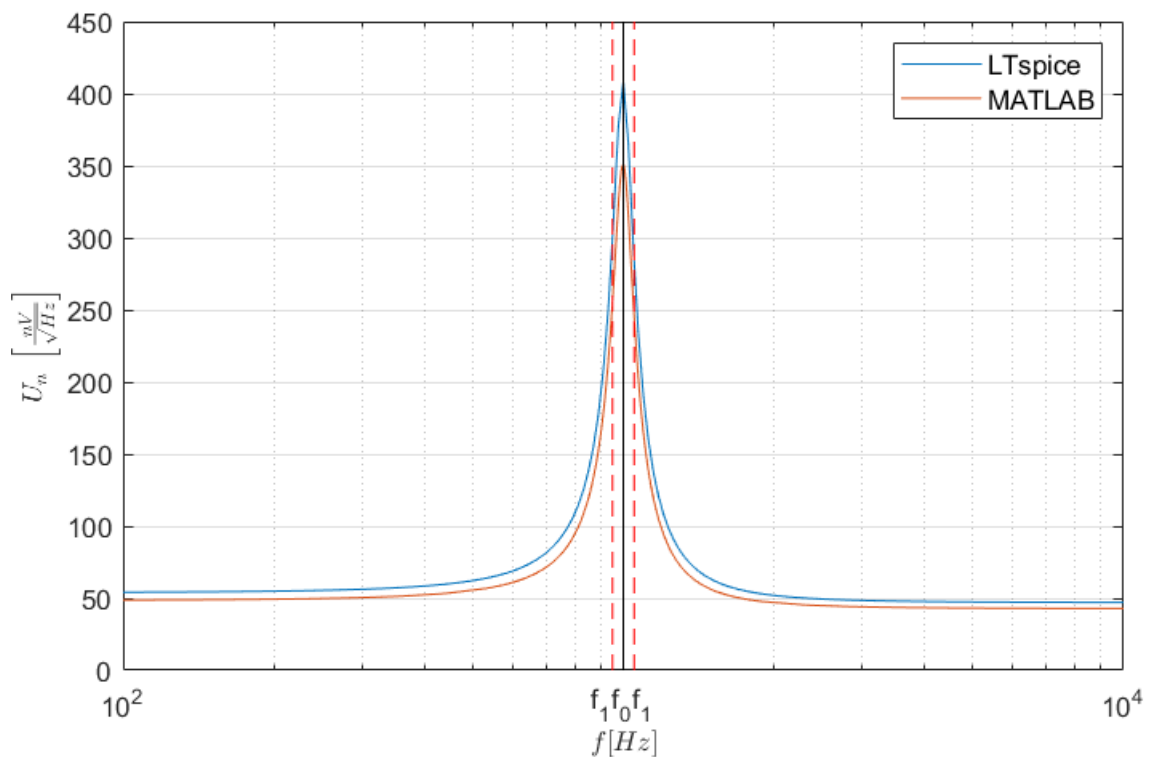


Slika 5.11. Grafički prikaz simulacije spektralne gustoće napona šuma za  $f_0 = 1 \text{ kHz}$

Može se zaključiti da valni oblici spektralne gustoće napona šuma pojedinih elemenata dobiveni unutar programskog paketa "LTSpice" odgovaraju onima proračunatim u programskom paketu "Matlab", prikazanim na slikama (4.14) i (4.15). Međutim postoji odstupanje između valnih oblika ukupne spektralne gustoće napona šuma između proračunatih i simuliranih valnih oblika. Ovo je posljedica zanemarivanja nekih komponenata šuma kao što su šum u kondenzatorima i strujni izvori šuma kod operacijskih pojačala. Usporedba simuliranih i proračunatih valnih oblika ukupne spektralne gustoće napona šuma dana je sljedećim slikama.



Slika 5.12. Usporedba proračunate i simulirane ukupne spektralne gustoće napona šuma za  $f_0 = 50 \text{ Hz}$



Slika 5.13. Usporedba proračunate i simulirane ukupne spektralne gustoće napona šuma za  $f_0 = 1 \text{ kHz}$

---

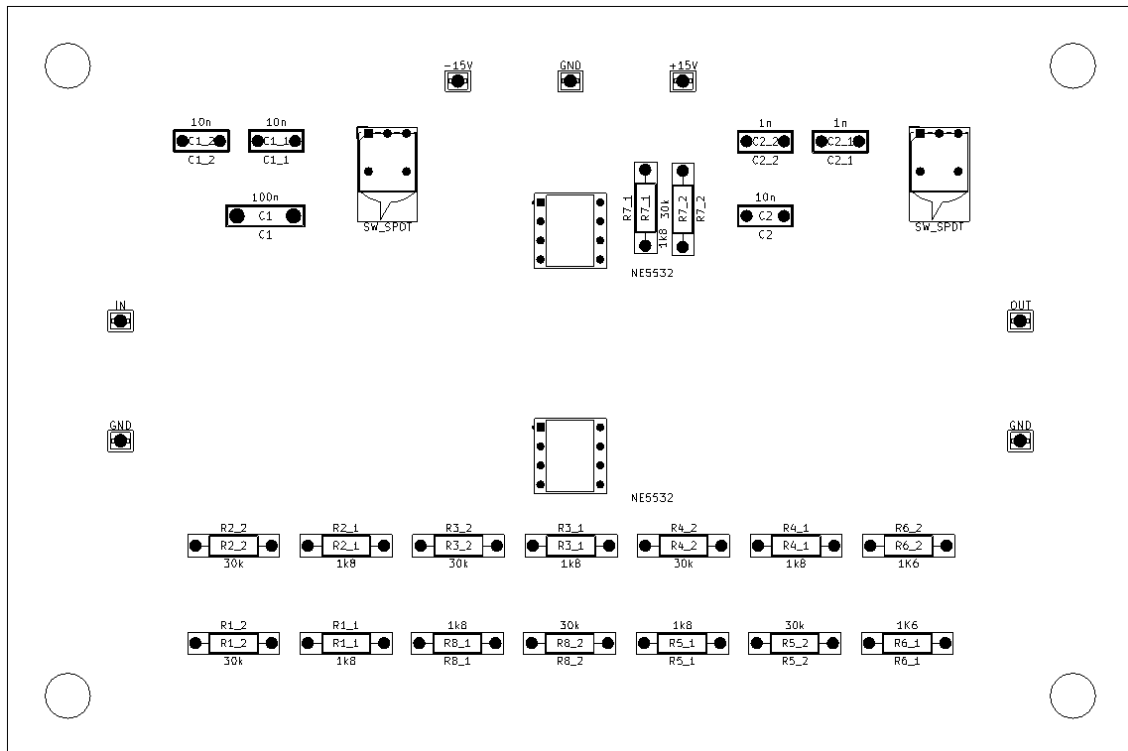
## 6. PROJEKTIRANJE TISKANE PLOČICE

U ovom poglavlju raspravljat će se o dizajniranju PCB pločice. Dizajn PCB pločice rađen je u programskom paketu "KiCad 6.0" na pločici dimenzija 10x15 cm. Kao što je već rečeno sklop je osmišljen tako da se centralna frekvencija mijenja putem dvije preklopke efektivno mijenjajući iznose kapaciteta filtra. Na daljnjim shemama ove preklopke biti će označene kao "SW\_SPDT". Izračunate elemente iz tablice (4.3) potrebno je realizirati standardnim elementima uz što manje odstupanje. Otpornici su izabrani iz "E96" otporničkog niza sa tolerancijom od 1%. Za operacijska pojačala izabrana su "NE5532" dvostruka integrirana pojačala. Realne vrijednosti elemenata uzetih za realizaciju dane su u sljedećoj tablici.

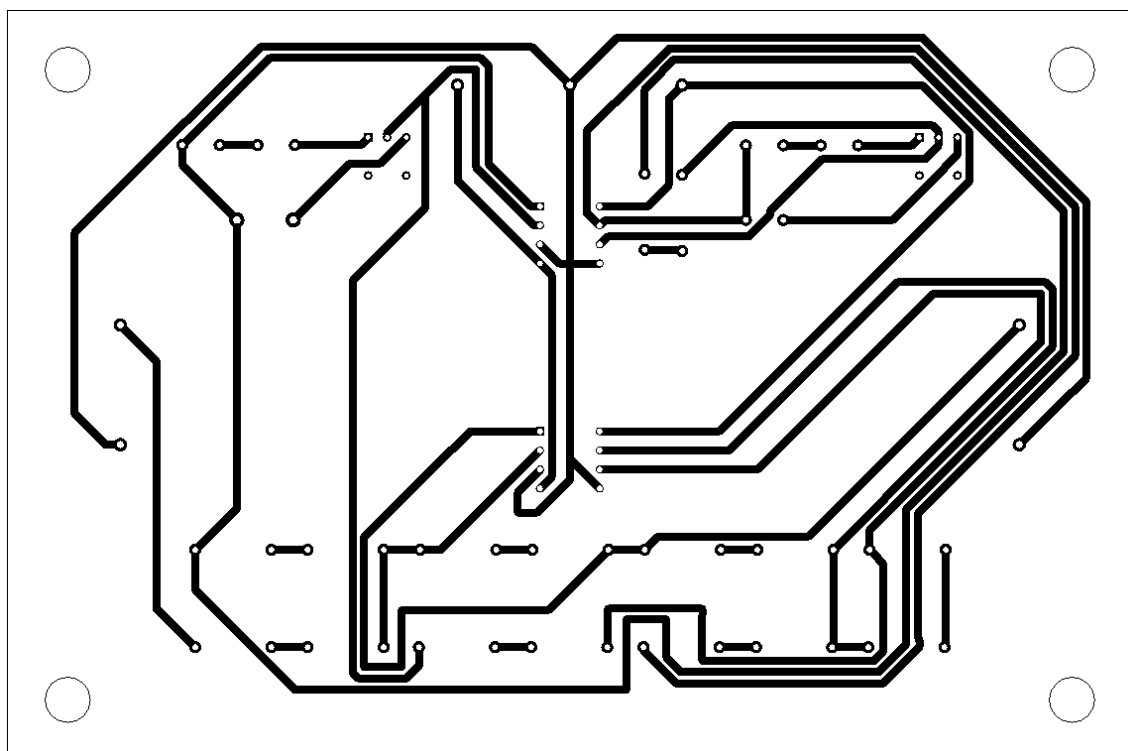
Tablica 6.1. Vrijednosti elemenata za realizaciju

Element	Vrijednosti realnih elemenata
$R_1$	$30k \Omega + 1k8 \Omega$
$R_2$	$30k \Omega + 1k8 \Omega$
$R_3$	$30k \Omega + 1k8 \Omega$
$R_4$	$30k \Omega + 1k8 \Omega$
$R_5$	$30k \Omega + 1k8 \Omega$
$R_6$	$1k6 \Omega + 1k6 \Omega$
$R_7$	$30k \Omega + 1k8 \Omega$
$R_8$	$30k \Omega + 1k8 \Omega$
$C_{1,f_0=50Hz}$	$100 nF$
$C_{2,f_0=50Hz}$	$10 nF$
$C_{1,f_0=1kHz}$	$10 nF    10 nF$
$C_{2,f_0=1kHz}$	$1 nF    1 nF$

Grafički prikaz PCB dizajna dan je na sljedećim slikama.



Slika 6.1. Prikaz rasporeda elemenata tiskane pločice

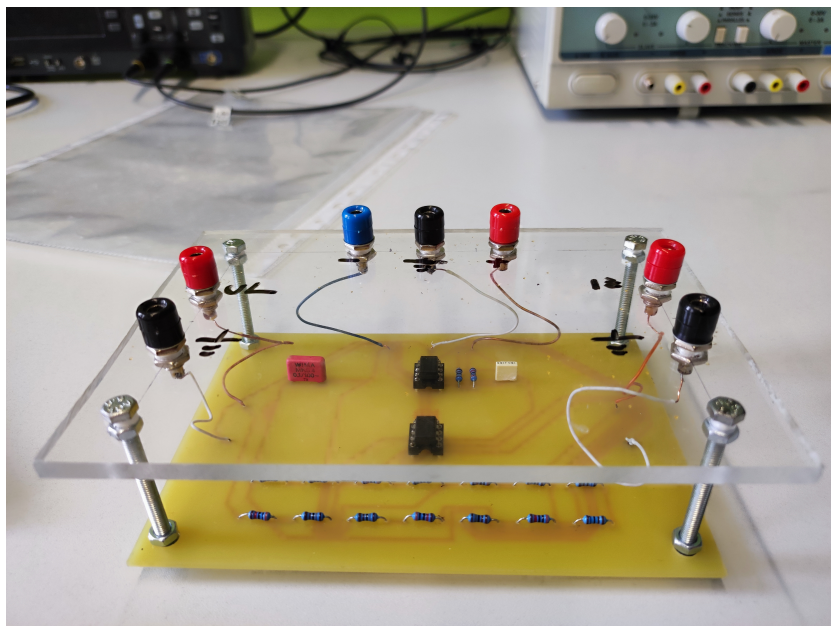


Slika 6.2. Prikaz konekcija tiskane pločice

---

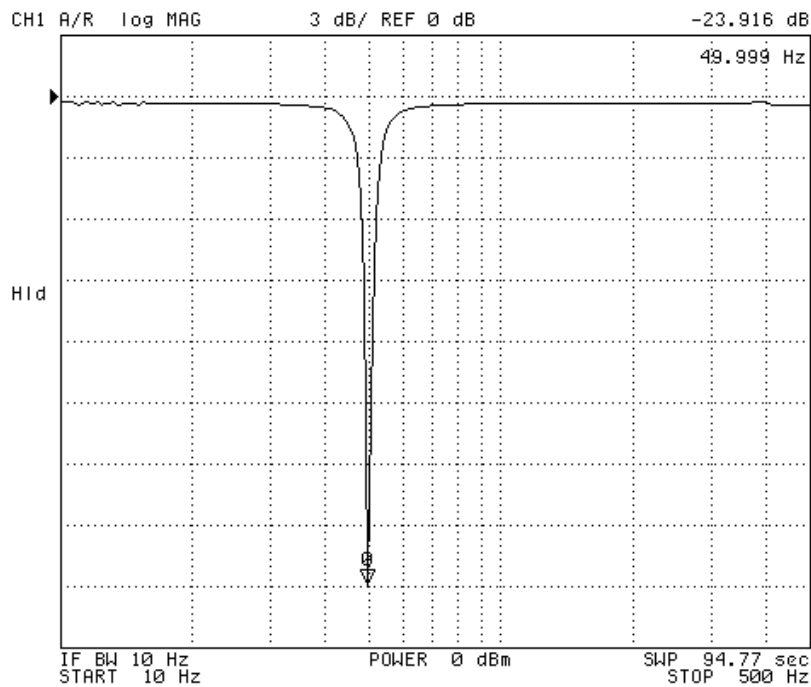
## 7. ANALIZA ANALIZATOROM MREŽE

U ovom poglavlju analizirat će se fizička realizacija filtra sa graničnom frekvencijom  $f_0 = 50 \text{ Hz}$ . Filtar je realiziran po nacrtima iz prethodnog poglavlja, zanemarujući elemente potrebne za realizaciju filtra sa graničnom frekvencijom  $1 \text{ kHz}$ . Realiziran filter prikazan je sljedećom slikom.

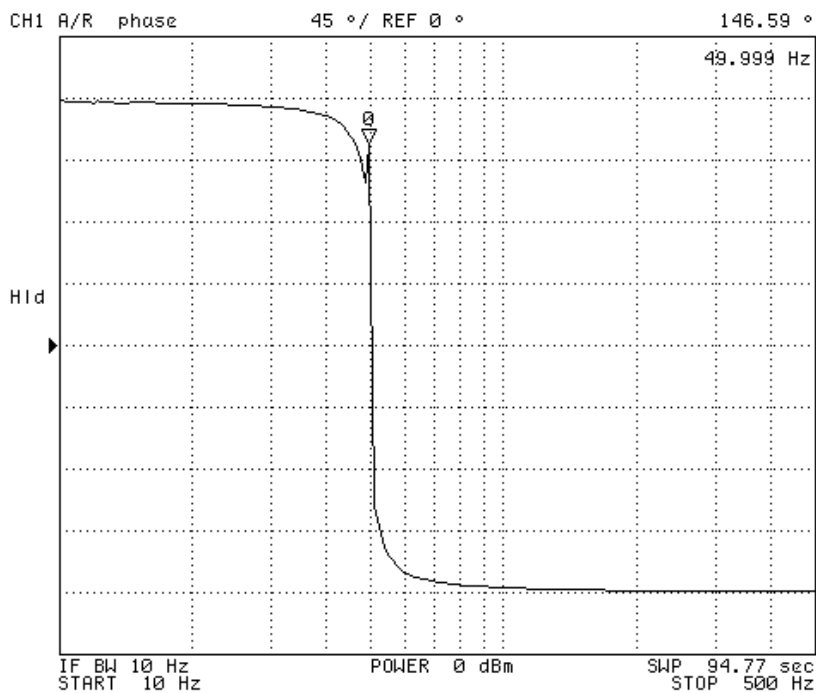


*Slika 7.1. Fizička realizacija filtra*

Na prikazanom filteru vršit će se mjerenje amplitudno frekvencijske i fazno frekvencijske karakteristike analizatorom mreže "Agilent 4395A". Cilj ovih mjerenja je dobiti valne oblike dobivene proračunima, odnosno simulacijama prikazane na slikama (4.3), (4.5) i (5.2), (5.4). Frekvencijske karakteristike dobivene analizatorom mreže dane su na sljedećim slikama.



Slika 7.2. Grafički prikaz amplitudno frekvencijske karakteristike dobivene analizom



Slika 7.3. Grafički prikaz fazno frekvencijske karakteristike dobivene analizom

Uspoređivanjem analizom dobivenih valnih oblika, (7.2) i (7.3), sa valnim oblicima dobivenih proračunima, odnosno simulacijama prikazane na slikama (4.3), (4.5) i (5.2), (5.4) može se zaključiti da filter funkcioniра kao što je i zamišljeno. Vidljiva su i neka odstupanja od idealnih karakteristika. Centralna frekvencija je pomaknuta na 49,99 Hz. Isto tako vidljivo je da maksimalno gušenje iznosi  $-23,916$  dB, dok bi ono u istom slučaju težilo ka minus beskonačnosti. Osim toga

---

na fazno frekvencijskoj karakteristici može se uočiti skok u fazi na centralnoj frekvenciji. Sve ovo su posljedice nesavršenosti elemenata, parazitskih kapaciteta i odstupanja vrijednosti elemenata od onih proračunatih.

---

## 8. Zaključak

U ovom diplomskom radu izvršeni su proračuni i analiza PB filtra 2. reda izvedenog općom filtarskom sekcijom 2. reda. Za prvi dio ovog diplomskog rada koristio se je programski paket "Matlab" unutar kojega su vršeni svi matematički proračuni. Prvo je određena normirana prijenosna funkcija željenih parametara po Butterworthovoj aproksimaciji. Za tako dobivenu prijenosnu funkciju proračunati su i grafički prikazani frekvencijski i vremenski odzivi, grupno vrijeme kašnjenja te raspored polova i nula. Zadnje što je bilo rađeno sa normiranom prijenosnom funkcijom je proračunavanje vrijednosti elemenata.

U sljedećem poglavlju dobivena normirana prijenosna funkcija se denormirala na centralne frekvencije vrijednosti  $f_0 = 50 \text{ Hz}$  i  $f_0 = 1 \text{ kHz}$ . Potom su se ponovili proračuni i prikazale karakteristike kao što je bilo učinjeno i za normiranu prijenosnu funkciju. Dodatno tome za denormirane prijenosne funkcije obavljena je i analiza šuma dvaju filtara.

Sljedeći korak je bio provjera proračunatih denormiranih karakteristika. U ovu svrhu korišten je računalni program "LTSpice". U računalnom programu "LTSpice" simulirane su frekvencijske karakteristike filtara, odziv na skokovitu pobudu, grupno vrijeme kašnjenja i spektralna gustoća napona šuma. Usporedbom proračunatih i simuliranih odziva potvrđena je ispravnost prethodnih proračuna.

Nakon provjere proračuna pristupilo se fizičkoj realizaciji filtara. Realizacija je bila zamišljena tako da se sklopu promjenom pozicije na preklopkama mijenjala centralna frekvencija. Prvi korak u realizaciji bio je odabir odgovarajućih komponenti uz što manje odstupanje od proračunatih vrijednosti. Potom je unutar programskog paketa "KiCad 6.0" napravljen nacrt PCB pločice na kojoj je filter fizički realiziran.

Na fizički realiziranom filteru, granične frekvencije  $f_0 = 50 \text{ Hz}$  vršena su mjerenja u laboratoriju. U sklopu ovih mjerenja korišten je mrežni analizator "Agilent A395A". Ovim analizatorom mreže snimljene su frekvencijske karakteristike navedenog filtra. Navedene karakteristike uspoređene su sa simuliranim i proračunatim karakteristikama iz prethodnih poglavlja. Ovom usporedbom potvrđeno je ispravno djelovanje filtra, ali su uočena i neka odstupanja koja pripisujemo nesavršenostima elemenata i mjerne opreme.



---

## Literatura

- [1] Šešelja k.: "PRORAČUN ŠUMA NP FILTRA 4. REDA S POVRATNOM VEZOM", Diplomski rad, Sveučilište u Rijeci – Tehnički fakultet, Rijeka, 2022.
- [2] Stojković N.; Mijat N.: "Analogna obrada signala", Sveučilište u Rijeci – Tehnički fakultet, Rijeka, 2004.
- [3] Šverko Z.; Stojković N.; Stojković M.: „Analogna obrada signala: PRIRUČNIK ZA STUDENTE“, Sveučilište u Rijeci – Tehnički fakultet, Rijeka, 2021.
- [4] Beriša M.: "Proračun šuma PP filtra 4. reda u CBQ strukturi", Diplomski rad, Sveučilište u Rijeci – Tehnički fakultet, Rijeka, 2022.
- [5] "Analog filters", s interneta, <https://www.analog.com/media/en/training-seminars/design-handbooks/basic-linear-design/chapter8.pdf>
- [6] Šverko Z., Stojković N., Vlahinić S., Markovinović I. "Noise and sensitivity comparison for different BP filter designs", Rijeka
- [7] Stojković N.; Kamenar E.: "Optimized Second- and Fourth- Order LP and BP Filters"

---

## Popis oznaka i kratica

NP - nisko propusni

VP - visoko propusni

PB - pojasna brana

PP - pojasni propust

R - otpor ( $\Omega$ )

C - kapacitet ( $F$ )

k - pojačanje

$\omega_0$  - centralna frekvencija ( $\frac{rad}{s}$ )

$\omega_1$  - donja granična frekvencija ( $\frac{rad}{s}$ )

$\omega_2$  - gornja granična frekvencija ( $\frac{rad}{s}$ )

$H(s)$  - prijenosna funkcija

$h(t)$  - impulsni odziv

$a(t)$  - skokoviti odziv

$|H(j\omega)|$  - amplitudo frekvencijska karakteristika

$A(\omega)$  - amplitudno frekvencijska karakteristika u decibelima ( $dB$ )

$\varphi(\omega)$  -fazno frekvencijska karakteristika ( $^\circ$ )

---

## Sažetak i ključne riječi

Tema ovog rada jest proračun šuma pojasne brane s dva područja gušenja. Filtar je realiziran općom filtarskom sekcijom 2. reda sa 4 operacijska pojačala. Analiza filtra i proračuni izvršeni su u programskom paketu "Matlab. Ovo uključuje proračune prijenosnih funkcija, frekvencijskih i vremenskih karakteristika, polova i nula, grupnog vremena kašnjenja i šuma normiranih i denormiranih prijenosnih funkcija filtara. Tako dobiveni rezultati provjereni su simulacijom u programskom paketu "LTSpice". Nakon toga projektirana je tiskana pločica u programskom paketu "KiCad 6.0", a filter je fizički realiziran. Na fizičkoj realizaciji filtra snimljene su frekvencijske karakteristike čime je potvrđeno ispravno djelovanje filtra.

**Ključne riječi:** pojasna brana, filter, Butterworthova aproksimacija, spektralna gustoća napona šuma, prijenosna funkcija, amplitudno frekvencijska karakteristika, fazno frekvencijska karakteristika, grupno vrijeme kašnjenja, impulsni odziv, odziv na step

---

## Summary and key words

The topic of this paper is the design of a bandstop filter with two damping regions. The filter is implemented using a second-order general filter section with four operational amplifiers. The analysis of the filter and calculations were performed in the "Matlab" software package. This includes calculations of transfer functions, frequency and time domain characteristics, poles and zeros, group delay, and noise of normalized and denormalized filter transfer functions. The obtained results were verified through simulation using the "LTSpice" software package. Afterward, a printed circuit board was designed using the "KiCad 6.0" software package, and the filter was physically realized. Frequency characteristics were recorded from the physical realization of the filter, confirming its proper operation.

**Keywords:** bandstop filter, filter, Butterworth approximation, spectral density of noise voltage, transfer function, amplitude frequency response, phase frequency response, group delay, impulse response, step response.

A

Tablica A1. Parametri polova prijenosnih funkcija filtara s aproksimacijom po Butterworthu

n	Re	Im	Qp	$\omega_p$	Faktori nazivnika
1	-1	0	-	1	$s + 1$
2	-0.7071068	$\pm 0.7071068$	0.7071068	1	$s^2 + 1.4142136s + 1$
3	-1 -0.5	0 $\pm 0.8660254$	- 1,0000000	1 1	$s + 1$ $s^2 + s + 1$
4	-0.9238795 -0.3826834	$\pm 0.3826834$ $\pm 0.9238795$	0.5411961 1,3065630	1 1	$s^2 + 1.847759s + 1$ $s^2 + 0.7653668s + 1$
5	-1 -0.809017 -0.309017	0 $\pm 0.5877852$ $\pm 0.9510565$	- 0.6180340 1,6180340	1 1 1	$s + 1$ $s^2 + 1.618034s + 1$ $s^2 + 0.618034s + 1$
6	-0.9659258 -0.7071068 -0.258819	$\pm 0.258819$ $\pm 0.7071068$ $\pm 0.9659258$	0.5176381 0.7071068 1,9318520	1 1 1	$s^2 + 1.9318516s + 1$ $s^2 + 1.4142136s + 1$ $s^2 + 0.517638s + 1$
7	-1 -0.9009689 -0.6234898 0.2225209	0 $\pm 0.4338837$ $\pm 0.7818315$ $\pm 0.9749279$	- 0.5549581 0.8019377 2,2469799	1 1 1 1	$s + 1$ $s^2 + 1.8019378s + 1$ $s^2 + 1.2469796s + 1$ $s^2 + 0.4450418s + 1$
8	-0.9807853 -0.8314696 -0.5555702 -0.1950903	$\pm 0.1950903$ $\pm 0.5555702$ $\pm 0.8314696$ $\pm 0.9807853$	0.5097956 0.6013449 0.8999763 2,5629158	1 1 1 1	$s^2 + 1.9615706s + 1$ $s^2 + 1.6629392s + 1$ $s^2 + 1.1111404s + 1$ $s^2 + 0.3901806s + 1$
9	-1 -0.9396926 -0.7660444 -0.5 -0.1736482	0 $\pm 0.3420201$ $\pm 0.6427876$ $\pm 0.8660254$ $\pm 0.9848078$	- 0.5320889 0.6527037 1,0000000 2,8793850	1 1 1 1 1	$s + 1$ $s^2 + 1.8793852s + 1$ $s^2 + 1.5320888s + 1$ $s^2 + s + 1$ $s^2 + 0.3472964s + 1$
10	-0.9876883 -0.8910065 -0.7071068 -0.4539905 -0.1564345	$\pm 0.1564345$ $\pm 0.4539905$ $\pm 0.7071068$ $\pm 0.8910065$ $\pm 0.9876883$	0.5062326 0.5611631 0.7071068 1,1013446 3,1962258	1 1 1 1 1	$s^2 + 1.9753766s + 1$ $s^2 + 1.782013s + 1$ $s^2 + 1.4142136s + 1$ $s^2 + 0.907981s + 1$ $s^2 + 0.312869s + 1$