Primjena slučajnih varijabli kod upravljanja projektima

Branilović, Marina

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Sveučilišni prijediplomski studij elektrotehnike

Završni rad

PRIMJENA SLUČAJNIH VARIJABLI KOD UPRAVLJANJA PROJEKTIMA

Rijeka, rujan 2023.

Marina Branilović
0069090090

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Sveučilišni prijediplomski studij elektrotehnike

Završni rad

PRIMJENA SLUČAJNIH VARIJABLI KOD UPRAVLJANJA PROJEKTIMA

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Komentor: izv. prof. dr. sc. Loredana Simčić

Rijeka, rujan 2023.

Marina Branilović
0069090090

SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET
POVJERENSTVO ZA ZAVRŠNE ISPITE

Rijeka, 13. ožujka 2023.

Zavod:	**Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike**
Predmet:	**Inženjerska matematika ET**
Grana:	**1.01.07 primijenjena matematika i matematičko modeliranje**

ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik:	**Marina Branilović (0069090090)**
Studij:	Sveučilišni prijediplomski studij elektrotehnike

Zadatak: **Primjena slučajnih varijabli kod upravljanja projektima**

Opis zadatka:

U radu je potrebno navesti temeljne pojmove teorije vjerojatnosti i precizno definirati slučajnu varijablu. Potrebno je objasniti pojam razdiobe neprekidne slučajne varijable i načine njihova zadavanja, pri čemu se posebno treba osvrnuti na trokutastu i beta razdiobu. Također je potrebno navesti temeljna svojstva navedenih razdioba u vidu njihovih numeričkih pokazatelja.
U praktičnom dijelu rada potrebno je navedene razdiobe staviti u kontekst primjene u inženjerstvu s posebnim naglaskom na primjene kod upravljanja projektima.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Branilović

Zadatak uručen pristupniku: 20. ožujka 2023.

Mentor:

Izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Loredana Simčić

Doc. dr. sc. Loredana Simčić (komentor)

Predsjednik povjerenstva za završni ispit:

Prof. dr. sc. Dubravko Franković

IZJAVA

Sukladno članku 7. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku sveučilišnih prijediplomskih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 31. ožujka 2023., izjavljujem da sam samostalno izradio/izradila završni rad prema zadatku preuzetom dana 20. ožujka 2023.

Rijeka, 8. rujan 2023

Branilović

Marina Branilović

Zahvaljujem se mentoru izv. prof. dr. sc. Ivanu Dražiću i komentorici izv. prof. dr. sc. Loredani Simčić na pomoći i savjetima prilikom pisanja završnog rada. Također se zahvaljujem svojim roditeljima na podršci u cijelokupnom školovanju i studiranju. Hvala vam.

Sadržaj

1. Uvod

Kolike su šanse da će sutra kišiti? Ili da se u trenutku kada dođemo do semafora upali crveno? Koliko je vjerojatno da će netko iz naše obitelji osvojiti na lutriji? Uvijek možemo pogađati šanse nekog događaja, no to se može i izračunati. Grane matematike koje se bave takvim situacijama nazivaju se vjerojatnost i statistika. One analiziraju, interpretiraju i prikazuju slučajne događaje, te iz tih podataka pokušavaju predvidjeti kolike su šanse da se neki događaj ostvari. Postoje dvije vrste promatranih događaja: oni koji ne ovise ni o čemu, to jest kod kojih se sve temelji isključivo na slučajnosti, poput bacanja kocke ili novčića. Druga pak vrsta događaja ovisi o prošlim zbivanjima. Na primjer, za predviđanje vremena potrebno je znati puno stvari koje bi dovele do određene prognoze.

Razvoj vjerojatnosti započeo je u 17. stoljeću s francuskim matematičarima Pierreom de Fermatom i Blaiseom Pascalom. Oni su proučavali kockanje i igre na sreću, te su, zajedno s drugim poznatim matematičarima poput Gerolama Cardana i Christiaana Huygensa pokušavali naći matematička rješenja za takve probleme. Danas vjerojatnost ima široku uporabu u raznim aspektima života. Matematika, inženjerstvo, psihologija, sociologija, ekonomija i medicina samo su neka od područja koja ju koriste za analizu svojih podataka. U ovome radu pobliže će se pogledati uporaba vjerojatnosti u projektnom menadžmentu. U projektnom menadžmentu se obično analiziraju razne stavke kao što su trajanje projekta, dostupnost resursa koji će se u projektima upotrebljavati, te rizici i zastoji koji se mogu pojaviti za vrijeme trajanja nekog projekta, u čemu teorija vjerojatnosti može uvelike pomoći.

2. Teorija skupova

Teorija vjerojatnosti bazira se na teoriji skupova, to jest vjerojatnost je broj koji na neki način opisuje neki skup. Skup je kolekcija nekih elemenata i obično se označuje velikim slovima abecede.

Podskup skupa B se definira kao skup A čiji je svaki element ujedno i element skupa B. Oznaka za podskup je $\subset$, te zapis $A \subset B$ znači da je skup A podskup skupa B.

Notacija kojom označavamo pripadnost elementa skupu je $\in$. Tako $x \in A$ govori da je x element skupa A, dok $y \notin A$ govori da y nije element skupa A.

Univerzalni skup je skup unutar kojega su sadržani svi skupovi, te se označava velikim slovom S, dok prazan skup ne sadrži niti jedan element i označava se s $\emptyset$.

Skup možemo zadati na više načina. Najčešće ga zadajemo na način

$$A = \{x, y, z\} \tag{2.1}$$

što znači da su x, y i z elementi skupa A.

Skup čiji su elementi zadani matematičkom operacijom se označava npr.

$$A = \{x^2 | x = 1, 3, 5, 6\}. \tag{2.2}$$

Tako su elementi ovog skupa 1, 9, 25 i 36. Beskonačan skup se označava npr.

$$A = \{1, 2, 3, ...\}. \tag{2.3}$$

Dva su skupa A i B jednaka ako i samo ako se svaki element skupa A nalazi i u skupu B, to jest ako je $A \subset B$ i ako je $B \subset A$.

2.1. Operacije među skupovima

Postoje četiri osnovne operacije između skupova.

Unija skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji su ili u skupu A ili u skupu B, te je jednaka logičkoj ILI operaciji. Oznaka za uniju je $\cup$.

Presjek skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze i u A i u B, te je istovjetna sa logičkom I operacijom. Oznaka za presjek je $\cap$.

Komplement skupa A je skup koji sadrži sve elemente koji se ne nalaze u skupu A, te se označava s A^C.

Razlika skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji su u skupu A, ali nisu u skupu B, te se označava s $A - B$.

2.2. Veza između teorije skupova i teorije vjerojatnosti

Vjerojatnost se obično promatra u kontekstu eksperimenata, s obzirom da unaprijed nismo sigurni hoće li se neki događaj ekperimentom realizirati. Eksperiment se sastoji od procedure i opažanja. Procedura opisuje izvođenje eksperimenta, dok opažanje označava ono što se u eksperimentu ispituje. Tako dva različita eksperimenta mogu imati istu proceduru, ali potpuno drugačije opažanje. Na primjer, u oba eksperimenta možemo baciti kocku 10 puta (ista procedura), no u jednom eksperimentu ćemo promatrati koji je broj bačen najviše puta, a u drugom koliko se puta pojavio paran broj (različita opažanja).

Budući da se kod svakog obavljanja eksperimenta pojavljuje drugačije opažanje, bilo koje moguće opažanje je ishod ili rezultat eksperimenta, te se obično označava s ω. Skup svih mogućih ishoda naziva se prostor ishoda, i obično se označava s Ω. Svi ishodi eksperimenta u prostoru ishoda su međusobno disjunktni (ako se dogodi jedno ishod, drugi ishodi u tom trenutku nisu mogući).

Slično prostoru ishoda postoji i prostor događaja koji se označava s $\mathcal{F}$. Ovi se pojmovi razlikuju u tome što prostor ishoda sadrži sve detalje o eksperimentu, dok prostor događaja sadrži samo događaje (jedan događaj je skup ishoda). Čim je eksperiment kompliciraniji i što ima više ishoda, tim je bolje promatrati prostor događaja zbog njegove jednostavnosti naprema prostoru ishoda.

Kao što je prije spomenuto, teorija skupa je temelj teorije vjerojatnosti. Tako se tri pojma iz teorije skupova, skup, element i univerzalni skup mogu poistovjetiti s pojmovima teorije vjerojatnosti. Skup sada prelazi u događaj, univerzalni skup u prostor ishoda, a element postaje ishod.

Međusobna disjunktnost događaja u prostoru događaja pokazana je sljedećim teoremom.

Teorem 2.1. *Za neki prostor događaja $B = \{B_1, B_2, ...\}$ i bilo koji događaj A, neka je $C_i = A \cap B_i$. Za $i \neq j$ događaji C_i i C_j su međusobno disjunktni i vrijedi*

$$A = C_1 \cup C_2 \cup ... \tag{2.4}$$

Primjer 2.1. *Promatra se par modema koji šalju četiri bita s jednog na drugo računalo. Za svaki se bit promatra hoće li modem detektirati točan bit (t) ili će napraviti grešku (g). Prostor ishoda sastoji se od 16 ishoda, od kojih svaki sadrži 4 slova, ili t ili g. Na primjer, ishod tttg govori da je modem prva tri bita očitao ispravno, dok je zadnji očitao neispravno.*

Nadalje, podijelimo sve ishode u 5 događaja $B = \{B_0, B_1, B_2, B_3, B_4\}$, gdje B_i označava događaj s i grešaka. Na primjer, $B_1 = \{tttg, ttgt, tgtt, gttt\}$ sadrži 4 ishoda s jednom greškom.

Recimo da je A događaj koji sadrži ishode s 2 ili više grešaka:

$$A = \{ttgg, tgtg, tggt, gtgt, ggtt, gttg, tggg, gtgg, ggtg, gggt, gggg\}. \tag{2.5}$$

Prema teoremu 2.1.

$$A = (A \cap B_0) \cup (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup (A \cap B_4). \tag{2.6}$$

Iz ovoga se zaključuje da je $B_i \subset A$ za $i = 2, 3, 4$. Tako je i $A \cap B_i = B_i$ za $i = 2, 3, 4$. Za $i = 0, 1$, $A \cap B_i = \emptyset$, te je $A = B_2 \cup B_3 \cup B_4$. Drugim riječima, događaj "ishodi s dvije ili više grešaka" je unija ishoda "dvije greške", "tri greške" i "četiri greške".

2.3. Aksiomi vjerojatnosti

Teorija vjerojatnosti bazira se na tri bitna aksioma iz kojih slijede brojni teoremi. Možemo reći da mjera vjerojatnosti P povezuje događaje s nekom numeričkom vrijednošću od 0 do 1.

Aksiom 2..1. *Za svaki događaj A, vjerojatnost događaja A je veća ili jednaka nuli.*

$$P[A] \geq 0 \tag{2.7}$$

Aksiom 2..2. *Prostor ishoda uvijek ima vjerojatnost 1 jer se u njemu nalazi svaki mogući ishod.*

$$P[\Omega] = 1 \tag{2.8}$$

Aksiom 2..3. *Za svaku prebrojivu familiju A_1, A_2... međusobno disjunktnih događaja vrijedi*

$$P[A_1 \cup A_2 \cup ...] = P[A_1] + P[A_2] + ... \tag{2.9}$$

to jest, vjerojatnost unije više disjuntnih događaja je jednaka zbroju vjerojatnosti pojedinih događaja.

2.4. Posljedice aksioma vjerojatnosti

Teorem 2.2. *Za međusobno disjunktne događaje A i B vrijedi*

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B]. \tag{2.10}$$

Teorem 2.3. *Ako je $A = A_1 \cup A_2 \cup ...A_n$ i $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$, tada vrijedi*

$$P[A] = \sum_{i=1}^{n} P[A_i]. \tag{2.11}$$

Teorem 2.4. *Vjerojatnost događaja $B = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ je suma vjerojatnosti ishoda koje sadrži zadani događaj.*

$$P[B] = \sum_{i=1}^{n} P[s_i]. \tag{2.12}$$

Dokaz. Budući da su ishodi prema definiciji međusobno disjunktni, B se može zapisati kao

$$B = s_1 \cup s_2 \cup ... \cup s_n \tag{2.13}$$

sa $s_i \cap s_j = \emptyset$ za $i \neq j$. Iz teorema 2.3 slijedi

$$P[B] = \sum_{i=1}^{n} P[s_i]. \tag{2.14}$$

$\square$

Teorem 2.5. *Za prostor ishoda $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ s jednako vjerojatnim ishodima vrijedi*

$$P[s_i] = 1/n, i \in \{1, \ldots n\} \tag{2.15}$$

Primjer 2.2. *Bacamo ispravnu kocku. Potrebno je pronaći vjerojatnost svakog ishoda te vjerojatnosti događaja A ="pao je pozitivan broj", B ="pao je prost broj" i C ="pao je broj manji ili jednak 2".*

Budući da kocka ima 6 strana, vjerojatnost svakog ishoda je

$$P[i] = 1/6 \tag{2.16}$$

za $i = 1, 2, ..., 6$.

Vjerojatnosti traženih događaja iznose:

$$P[A] = P[2] + P[4] + P[6] = 1/2 \tag{2.17}$$

$$P[B] = P[1] + P[2] + P[3] + P[5] = 2/3 \tag{2.18}$$

$$P[C] = P[1] + P[2] = 1/3 \tag{2.19}$$

Teorem 2.6. *Navedena su neka svojstva vjerojatnosti.*

1. *Vjerojatnost praznog skupa jednaka je 0.*

$$P[\emptyset] = 0. \tag{2.20}$$

2. *Vjerojatnost komplementa skupa A jednaka je*

$$P[A^C] = 1 - P[A]. \tag{2.21}$$

3. *Za događaje A i B koji nisu međusobno disjunktni vrijedi*

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]. \tag{2.22}$$

4. *Ako je $A \subset B$, vrijedi*

$$P[A] \leq P[B]. \tag{2.23}$$

Teorem 2.7. *Za bilo koji događaj A i prostor događaja $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ vrijedi*

$$P[A] = \sum_{i=1}^{n} P[A \cap B_i] \tag{2.24}$$

Primjer 2.3. *Neka tvrtka počela je pratiti dobivene telefonske pozive. Pozive po dužini svrstava u kratke (K) i duge (D), te po vrsti poziva na glasovne (G), podatkovne (P) i faks (F).*

Događaji K i D zajedno tvore porstor događaja $\{K, D\}$*, a događaji G, P i F tvore drugi prostor događaja* $\{G, P, F\}$*. Oba prostora događaja zajedno tvore prostor ishoda*

$$S = \{KG, KP, KF, DG, DP, DF\}. \tag{2.25}$$

On se može prikazati tablično, gdje redovi predstavljaju dužinu, a stupci vrstu poziva, a sjecište svakog reda i stupca predstavlja vjerojatnost jednog ishoda.

	G	*P*	*F*
D	*0.3*	*0.12*	*0.15*
K	*0.2*	*0.08*	*0.15*

Sada iz tablice uporabom Teorema 2.7 možemo iščitati potrebne podatke, i tako, na primjer, naći vjerojatnost dugog poziva:

$$P[D] = P[DG] + P[DP] + P[DF] = 0.57. \tag{2.26}$$

2.4.1. Uvjetna vjerojatnost

U nekim slučajevima dobro je predvidjeti vjerojatnost događaja A prije nego što je eksperiment napravljen. U tome se slučaju vjerojatnost $P[A]$ naziva vjerojatnost a priori. Za $P[A] \approx 1$ možemo reći da je događaj A vrlo vjerojatan, a $P[A] \approx 0$ govori da A ima jako male šanse pojave u eksperimentu.

Notacija $P[A|B]$ označava "vjerojatnost od A uz uvjet B". Takva vjerojatnost naziva se uvjetnom, te ona opisuje vjerojatnost događaja A kada je poznato da se događaj B ostvario ($P[B] > 0$).

Primjer 2.4. *Testiraju se dva integrirana strujna kruga na istoj silikonskoj pločici te se provjerava hoće li strujni krug biti prihvaćen (p) ili odbijen (o). Prostor ishoda eksperimenta jednak je* $S = \{pp, po, op, oo\}$*.* B *predstavlja događaj u kojemu je prvi strujni krug odbijen,* $B = \{oo, op\}$*, dok* A *predstavlja događaj u kojem je odbijen drugi strujni krug,* $A = \{oo, po\}$*.*

Budući da su strujni krugovi napravljeni kvalitetno, $P[A]$ *ima vrlo malu vjerojatnost događanja. No, pločice kontaminirane prašinom imaju veći broj neispravnih čipova. Ako je vjerojatnost B velika i ako je prvi čip bio odbijen, vjerojatnost događaja A se promijenila, te je vjerojatnost* $P[A|B]$ *sada veća od vjerojatnosti* $P[A]$*.*

Definicija 2.1. *Uvjetna vjerojatnost događaja* A *uz uvjet da se ostvario događaj* B *iznosi*

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}, P[B] > 0. \tag{2.27}$$

Navedena su svojstva uvjetne vjerojatnosti koja se slažu s općim aksiomima vjerojatnosti:

1. $P[A|B] \geq 0$

2. $P[B|B] = 1$

3. Za $A = A_1 \cup A_2 \cup ...$ i $A_i \cap A_j$ za $i \neq j$ vrijedi

$$P[A|B] = P[A_1|B] + P[A_2|B] + ... \tag{2.28}$$

Primjer 2.5. *Iz prethodnog primjera dane su vjerojatnosti a priori za ishode:*

$$P[oo] = 0.01,\ P[op] = 0.01,\ P[po] = 0.01,\ P[pp] = 0.97. \tag{2.29}$$

Potrebno je naći vjerojatnosti događaja A (odbačen drugi čip), B (odbačen prvi čip), te vjerojatnost da je drugi čip odbačen ako znamo da je odbačen i prvi čip.

Događaj A u sebi sadrži ishode oo i po. Vjerojatnost tog događaja iznosi

$$P[A] = P[oo] + P[po] = 0.02. \tag{2.30}$$

Događaj B u sebi sadrži ishode oo i op, te je njegova vjerojatnost:

$$P[B] = P[oo] + P[op] = 0.02 \tag{2.31}$$

Vjerojatnost da je drugi čip odbijen ako znamo da je i prvi čip odbijen:

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{P[oo]}{P[B]} = 0.01/0.02 = 0.5. \tag{2.32}$$

2.4.2. Zakon potpune vjerojatnosti

Pretpostavimo da imamo eksperiment koji se odvija u dvije faze, pri čemu vjerojatnost događaja iz druge faze ekperimenta ovisi o tome koji se događaj relizirao u prvoj fazi. Tada za računanje vjerojatnosti događaja iz druge faze koristimo zakon potpune vjerojatnosti.

Teorem 2.8. *Za neki prostor događaja $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ i $P[B_i] > 0$ za sve i, vrijedi*

$$P[A] = \sum_{i=1}^{n} P[A|B_i]P[B_i]. \tag{2.33}$$

Primjer 2.6. *Neka tvrtka proizvodi otpornike od 1kΩ pomoću tri stroja, B_1, B_2 i B_3. Stroj B_1 proizvede 80% otpornika koji su unutar granice od 50Ω. Stroj B_2 proizvede 90%, dok stroj B_3 proizvede 60% takvih otpornika. Svakih sat vremena B_1 proizvede 3000 otpornika, B_2 proizvede 4000, a B_3 proizvede 3000 otpornika. Svi otpornici se stavljaju u jednu posudu i pakiraju se za dostavu. Koja je vjerojatnost da će tvrtka dostaviti otpornik koji je unutar granice od 50Ω?*

Neka A označava događaj da je otpornik unutar granice od 50Ω. Tada je

$$P[A|B_1] = 0.8,\ P[A|B_2] = 0.9,\ P[A|B_3] = 0.6. \tag{2.34}$$

Ukupno se proizvodi 10 000 otpornika svakih sat vremena, pa su vjerojatnosti događaja B_1, B_2 *i* B_3 *jednake*

$$P[B_1] = \frac{3000}{10000} = 0.3,\ P[B_2] = \frac{4000}{10000} = 0.4,\ P[B_3] = \frac{3000}{10000} = 0.3. \tag{2.35}$$

Zakonom potpune vjerojatnosti dobivamo:

$$P[A] = P[A|B_1]P[B_1] + P[A|B_2]P[B_2] + P[A|B_3]P[B_3] = 0.8 \cdot 0.3 + 0.9 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.3 = 0.78. \tag{2.36}$$

Tvrtka proizvede 78% otpornika unutar granice od 50Ω.

2.4.3. Bayesov teorem

Ako imamo eksperiment koji se odvija u dvije faze, pri čemu se u prvoj fazi ostvaruje jedan od događaja iz prostora događaja $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$, a u drugoj fazi događaj A, tada ostvarivanje događaja A može promijeniti početne vjerojatnosti događaja B_i, $i = 1, \ldots, n$.

Početne vjerojatnosti događaja B_i tada nazivamo apriornim vjerojatnostima, a vjerojatnosti događaja $B_i|A$ aposteriornim vjerojatnostima. Pomoću Bayesovog teorema računamo aposteriorne vjerojatnosti događaja B_i, odnosno $P[B_i|A]$.

Teorem 2.9. *Neka je dan prostor događaja* $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$. *Tada je*

$$P[B_i|A] = \frac{P[A|B_i]P[B_i]}{P[A]}, \tag{2.37}$$

gdje $P[A]$ *dobijemo pomoću zakona potpune vjerojatnosti.*

Primjer 2.7. *Iz primjera 2.6 uzeti su sljedeći podaci: vjerojatnost da je otpornik proizveo stroj* B_2 *je* $P[B_2] = 0.4$, *uvjetna vjerojatnost da je otpornik koji je proizveo stroj* B_2 *ispravan je* $P[A|B_2] = 0.9$, *te vjerojatnost da je otpornik ispravan je* $P[A] = 0.78$. *Kolika je vjerojatnost da je ispravan otpornik proizveo stroj* B_2*?*

Budući da se traži vjerojatnost da je otpornik unutar granice 50Ω *(P[A]) proizveo stroj* B_2, *potrebno je naći* $P[B_2|A]$.

$$P[B_2|A] = \frac{P[A|B_2]P[B_2]}{P[A]} = \frac{0.9 \cdot 0.4}{0.78} = 0.46. \tag{2.38}$$

Sličnim postupkom dobivaju se i $P[B_1|A] = 0.31$ *i* $P[B_3|A] = 0.23$.

2.4.4. Nezavisnost

Događaji A i B su međusobno nezavisni ako realizacija jednog od njih ne utječe na vjerojatnost realizacije onog drugog, odnosno ako vrijedi:

$$P[A|B] = P[A],\ P[B|A] = P[B]. \tag{2.39}$$

Iz ove definicije slijedi sljedeći teorem, koji također možemo koristiti za definiciju vjerojatnosti nezavisnih događaja.

Teorem 2.10. *Dva su događaja nezavisna ako i samo ako vrijedi:*

$$P[A \cap B] = P[A]P[B] \tag{2.40}$$

Za n događaja, ti su događaji nezavisni ako i samo ako vrijedi:

1. *svaki skup događaja je međusobno nezavisan,*
2. $P[A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n] = P[A_1]P[A_2]...P[A_n]$.

Primjer 2.8. *Provodi se eksperiment s ishodima koji su jednako vjerojatni. Prostor ishoda je $S = \{1, 2, 3, 4\}$, pa vrijedi $P[s] = 1/4$ za $s \in S$. Jesu li događaji $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{2, 3, 4\}$ i $A_3 = \emptyset$ nezavisni?*

Sva tri događaja zadovoljavaju drugi dio definicije $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$ i

$$P[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = P[A_1]P[A_2]P[A_3] = 0, \tag{2.41}$$

međutim A_1 i A_2 ne zadovoljavaju prvi dio definicije:

$$P[A_1 \cap A_2] = P[\{2, 3\}] = 1/2 \neq P[A_1]P[A_2] = 3/4 \cdot 3/4 = 9/16. \tag{2.42}$$

Vidi se da su ova tri događaja međusobno zavisna.

3. Slučajne varijable

Prilikom izvođenja eksperimenta u kojem se promatra vjerojatnost nekog događaja, svakom se ishodu u prostoru ishoda može pridodati određeni realni broj. Svaki ishod je slučajan, te se određeni broj dobiven slučajnim opažanjem ishoda naziva slučajna varijabla. Označava se velikim tiskanim slovom, na primjer X. Sve moguće vrijednosti X može poprimiti sadržane su u rasponu S_X. Postoje dva tipa slučajnih varijabli: neprekinute i diskretne. Neprekinute varijable su one kojima je raspon S_X neprebrojiv, dok je diskretnima taj raspon prebrojiv.

Definicija 3.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Preslikavanje $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazivamo slučajna varijabla ako vrijedi da je za $\forall x \in \mathbb{R}$ skup*

$$A_x = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\}, \tag{3.1}$$

događaj unutar skupa $\mathcal{F}$.

Postoje tri tipa slučajnih varijabli koje se mogu promatrati u eksperimentu:

1. Slučajna varijabla je opažanje.

   Primjer 3.1. *U eksperimentu se promatra koliko će vremena trebati loptici da s određene visine padne na tlo. Svako vrijeme pada je slučajna varijabla T kojoj se dodjeljuje određeni pozitivni realni broj.*

2. Slučajna varijabla je funkcija opažanja.

   Primjer 3.2. *Testira se šest integriranih strujnih krugova te se promatra hoće li biti prihvaćeni (p) ili odbačeni (o). Prostor ishoda sastoji se od 64 ishoda od kojih svaki sadrži 6 slova, p ili o. U eksperimentu se promatra koliko će strujnih krugova biti prihvaćeno. Slučajna varijabla N, broj prihvaćenih strujnih krugova ima raspon $S_N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Na primjer, za član* ppoppo *prihvaćena su $N = 4$ strujna kruga.*

3. Slučajna varijabla je funkcija druge slučajne varijable.

   Primjer 3.3. *U prethodnom primjeru prihod P za šest integriranih strujnih krugova iznosi 5€ za svaki prihvaćeni strujni krug i minus 7€ za svaki odbačeni strujni krug. Budući da je za N prihvaćenih strujnih krugova $6 - N$ strujnih krugova odbijeno, P se može zapisati kao funkcija od N kao*

   $$P = f(N) = 5N - 7(6 - N) = 12N - 42. \tag{3.2}$$

   Za $S_N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, raspon S_P je

   $$S_P = \{-42, -30, -18, -6, 6, 18, 30\}. \tag{3.3}$$

3.1. Funkcija razdiobe

Definicija funkcije razdiobe dolazi direktno iz definicije slučajne varijable. Pomoću nje se vrlo jednostavno i u potpunosti može prikazati slučajna varijabla.

Definicija 3.2. *Za slučajnu varijablu X, njezina funkcija razdiobe je funkcija $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ definirana s*

$$F_X(x) = P[X \leq x]. \tag{3.4}$$

Teorem 3.1. *Neka svojstva funkcije razdiobe slučajne varijable X s rasponom $S_X = \{x_1, x_2, ...\}$, pod uvjetom da vrijedi $x_1 \leq x_2 \leq ...$:*

1. *Funkcija razdiobe započinje u 0 i završava u 1:*

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \to +\infty} = 1. \tag{3.5}$$

2. *Funkcija razdiobe je neopadajuća:*

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2). \tag{3.6}$$

3. *Funkcija je neperekinuta s lijeva:*

$$F(x-0) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} F(x-\epsilon) = F(x), \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.7}$$

Dokaz. Dokaz slijedi iz neprekinutosti vjerojatnosti:

$$\begin{aligned} F(x-0) &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} F(x-\epsilon) \\ &= \lim_{n \to \infty} F(x-\epsilon_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} P[A_n] = P[A] = F(x) \end{aligned} \tag{3.8}$$

□

4. *Vjerojatnost $P[\{x_1 \leq X < x_2\}]$ računa se kao*

$$P[\{x_1 \leq X < x_2\}] = F(x_2) - F(x_1) \tag{3.9}$$

Dokaz. Za $x_1 < x_2$ vrijedi

$$\begin{aligned} F(x_2) &= P[\{X < x_2\}] \\ &= P[X < x_1 \cup x_1 \leq X < x_2] \\ &P[\{X < x_1\}] + P[\{x_1 \leq X < x_2\}] \\ &= F(x_1) + P[\{x_1 \leq X < x_2\}]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

□

Osim ovih svojstava, bitno je i napomenuti da se funkcije razdiobe diskretne i neprekinute varijable razlikuju. Kod diskretne varijable funkcija razdiobe je stepenasta funkcija, to jest za bilo koju vrijednost $x_n \in S_X$ dolazi do diskontinuiteta, to jest skoka, čija je visina $P_X(x_n)$, a graf funkcije između skokova je horizontalna linija. Neprekinuta funkcija nema diskontinuitet u određenim točkama, već je funkcija $F_X(x)$ za neprekidnu varijablu kontinuirana.

Primjer 3.4. *U nekom eksperimentu slučajna varijabla zadana je razdiobom*

$$P_X = \begin{cases} 1/4, & x = 1, \\ 3/8, & x = 2, \\ 3/8, & x = 3. \end{cases} \tag{3.11}$$

Potrbeno je nacrtati funkciju razdiobe.

Za $x < 1$ vjerojatnost događaja $(X \leq x)$ je jednaka 0, pa je tada

$$F_X(x) = 0. \tag{3.12}$$

Za $1 \leq x < 2$ vrijedi

$$P(X \leq x) = P(X = 1) = 1/4. \tag{3.13}$$

Za $2 \leq x < 3$ vrijedi

$$P(X \leq x) = P(X = 1) + P(X = 2) = 1/4 + 3/8 = 5/8. \tag{3.14}$$

Nastavljanjem zbrajanja vjerojatnosti dok ne dođemo do kraja dobiva se funkcija razdiobe

$$F_X = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1/4, & 1 \leq x < 2, \\ 5/8, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases} \tag{3.15}$$

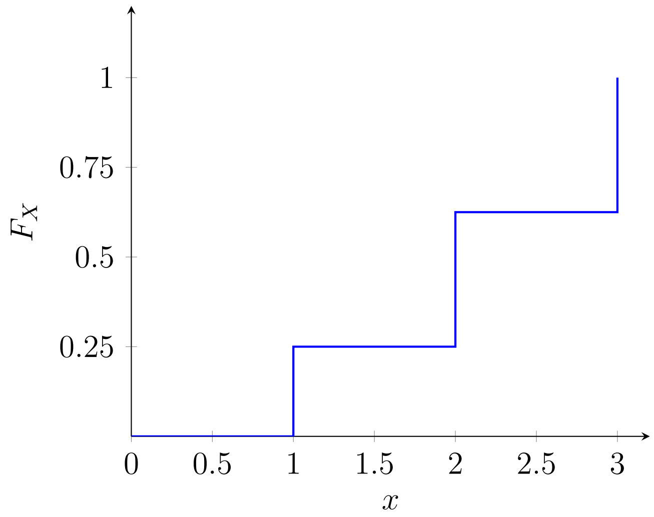
3.2. Neprekinute slučajne varijable

Neprekinute slučajne varijable su one varijable čiji je raspon kontinuirani skup brojeva, to jest neki interval čija donja granica je x_1, a gornja granica x_2.

Postoje četiri vrste intervala:

1. Zatvoreni interval $[x_1, x_2]$ koji uključuje granice x_1 i x_2, još zapisan i kao $[x_1, x_2] = \{x | x_1 \leq x \leq x_2\}$.
2. Otvoreni interval (x_1, x_2) koji ne uključuje granice x_1 i x_2, još zapisan i kao $(x_1, x_2) = \{x | x_1 < x < x_2\}$.

Slika 3.1. Funkcija razdiobe slučajne varijable iz Primjera 3.4



3. Interval $[x_1, x_2)$ koji uključuje granicu x_1, a ne uključuje x_2, još zapisan i kao $[x_1, x_2) = \{x | x_1 \leq x < x_2\}$.

4. Interval $(x_1, x_2]$ koji ne uključuje granicu x_1, a uključuje granicu x_2, još zapisan i kao $(x_1, x_2] = \{x | x_1 < x \leq x_2\}$.

3.2.1. Funkcija gustoće razdiobe vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable

Funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable opisuje slučajnu varijablu na način da je vjerojatnost da slučajna varijabla poprimi vrijednost na nekom intervalu jednaka površini lika ispod funkcije gustoće na tom intervalu.

Za neprekidne slučajne varijable funkciju gustoće dobivamo kao derivaciju funkcije razdiobe:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}. \tag{3.16}$$

Bitno je napomenuti da se kod neprekidnih funkcija količina vjerojatnosti smanjuje sa smanjenjem intervala vjerojatnosti. Na primjer, puno je teže točno predvidjeti točnost dolaska autobusa ako interval dolaska autobusa traje jednu minutu, za razliku od intervala koji traje 5 minuta. Budući da se smanjenjem intervala smanjuje mogućnost točnog određivanja vjerojatnosti, može se zaključiti da je vjerojatnost da se neka stvar dogodi u točno određenoj singularnoj vrijednosti jednaka nuli.

Teorem 3.2. *Navedena su neka svojstva funkcije gustoće neprekidne slučajne varijable.*

1. *Funkcija F_X je neopadajuća, čime je i njezina derivacija veća ili jednaka nuli, pa za sve x vrijedi:*

$$f_X(x) \geq 0. \tag{3.17}$$

2. *Ako je funkcija gustoće derivacija funkcije razdiobe, onda je funkcija razdiobe integral funkcije gustoće.*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)d(u). \tag{3.18}$$

3. *Integral funkcije gustoće na intervalu od $-\infty$ do ∞ je jednak 1.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)d(x) = 1. \tag{3.19}$$

4. *Vjerojatnost da slučajna varijabla poprimi vrijednost u nekom intervalu jednaka je površini lika ispod grafa funkcije gustoće na tom intervalu.*

$$P[x_1 < X \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx. \tag{3.20}$$

Primjer 3.5. *Funkcija razdiobe neke slučajne varijable X prikazana je sljedećom formulom:*

$$F_X = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^3, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1, & x > 4. \end{cases} \tag{3.21}$$

Potrebno je odrediti funkciju gustoće.

Upotrebom formule (3.16) dobivamo

$$f_X(x) = \frac{dFx(x)}{dx} = \begin{cases} 3x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \textit{inače} \end{cases}. \tag{3.22}$$

3.2.2. Matematičko očekivanje, varijanca i standardna devijacija

Matematičko očekivanje je suma umnoška vrijednosti slučajne varijable s njihovim vjerojatnostima i predstavlja centralnu tendenciju slučajne varijable.

Kod neprekinutih varijabli računa se pomoću integrala:

$$E[X] = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx. \tag{3.23}$$

Slično tome, matematičko očekivanje neke slučajne varijable $g(X)$ računa se kao

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx. \tag{3.24}$$

Svojstva matematičkog očekivanja slučajnih varijabli zadana su u sljedećim teoremima:

Teorem 3.3. *Za bilo koju slučajnu varijablu X vrijedi*

$$E[X - \mu_X] = 0. \tag{3.25}$$

Dokaz. Dokaz proizlazi iz upotrebe formule (3.24):

$$\begin{aligned} E[X - \mu_X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X) f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx - \mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx \\ &= \mu_X - \mu_X * 1 = 0. \end{aligned} \tag{3.26}$$

□

Teorem 3.4. *Za bilo koju slučajnu varijablu X vrijedi:*

$$E[aX + b] = aE[X] + b. \tag{3.27}$$

U pitanju je linearna transformacija, koja održava samu strukturu funkcije istom, promjena se događa samo u promjeni mjernih jedinica. Zbog toga je u ovome primjeru primjenjiva formula $E[g(X)] = g(E[X])$.

Varijanca i standardna devijacija su najvažnije mjere disperzije slučajne varijable. Što je mjera disperzije manja, vrijednosti koje slučajna varijabla poprima su bliže srednjim vrijednostima, a što je veća, vrijednosti se nalaze dalje od srednjih vrijednosti.

Varijanca je mjera razlike slučajne varijable X i njezine očekivane vrijednosti.

Za računanje varijance bitna je formula

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx \tag{3.28}$$

te se varijanca se računa prema formuli

$$Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx. \tag{3.29}$$

Iako vrijednost od X može biti veća ili manja od matematičkog očekivanja, čime $X - \mu_X$ može biti pozitivno ili negativno, kvadriranjem tog člana postiže se varijanca uvijek veća ili jednaka nuli. Veća varijanca znači veća disperzija, dok manja varijanca znači i manja disperzija.

Standardna devijacija je korijen varijance:

$$\sigma_X = \sqrt{Var[X]}. \tag{3.30}$$

Prednost korjenovanja varijance je to što standardna devijacija koristi iste mjerne jedinice kao i slučajna varijabla, dok varijanca koristi kvadrirane mjerne jedinice. Iste mjerne jedinice znače i lakšu usporedbu standardne devijacije sa slučajnom varijablom.

Svojstva varijance slučajne varijable prikazana su u sljedećim teoremima:

Teorem 3.5.

$$Var[X] = E[X^2] - \mu_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2. \tag{3.31}$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} Var[X] = \sigma_X^2 &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x)dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 2\mu_X x f_X(x)dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mu_X^2 f_X(x)dx \\ &= E[X^2] - 2\mu_X \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx + \mu_X^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx \\ &= E[X^2] - 2\mu_X^2 + \mu_X^2. \end{aligned} \tag{3.32}$$

□

Teorem 3.6.

$$Var[aX+b] = a^2 Var[X]. \tag{3.33}$$

Dokaz. Zamjenom $Y = aX + b$

$$E[Y^2] = E[a^2X^2 + 2abX + b^2] = a^2E[X^2] + 2ab\mu_X + b^2 \tag{3.34}$$

Budući da je:

$$\mu_Y^2 = a\mu_X^2 + 2ab\mu_X + b^2, \tag{3.35}$$

spajanjem (3.34) i (3.35) dobiva se

$$\begin{aligned} Var[Y] &= E[Y^2] - \mu_Y^2 \\ &= a^2E[x^2] - a^2\mu_X^2 \\ &= a^2(E[X^2] - \mu_X^2) \\ &= a^2 Var[X]. \end{aligned} \tag{3.36}$$

□

Primjer 3.6. *Iz primjera 3.5 izračunali smo da je funkcija gustoće $f_X(x) = 3x^2$ na intervalu $0 \leq x \leq 2$. Potrebno je izračunati matematičko očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju.*

Imamo:

$$E[X] = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^2 x \cdot 3x^2 dx = 12. \tag{3.37}$$

Varijanca se računa pomoću formule

$$Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx = \int_0^2 (x - 12)^2 \cdot 3x^2 dx = 883.2. \tag{3.38}$$

Standardna devijacija je korijen varijance:

$$\sigma_X = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{883.2} = 29.718. \tag{3.39}$$

3.3. Diskretne slučajne varijable

Slučajna varijabla X je diskretna kada je raspon S_X prebrojiv skup (na primjer skup prirodnih brojeva). Obično, ali ne i uvijek, diskretne slučajne varijable poprimaju vrijednosti u skupu cijelih brojeva.

3.3.1. Funkcija gustoće diskretne slučajne varijable

Za diskretnu slučajnu varijablu X funkcija gustoće je definirana s

$$P_X(x) = P[X = x]. \tag{3.40}$$

Teorem 3.7. *Navedena su neka svojstva funkcije gustoće vjerojatnosti diskretne slučajne varijable X s rasponom S_X. Sva svojstva izvedena su iz aksioma vjerojatnosti.*

1. *Za bilo koji x, $P_X(x) \geq 0$.*
2. $\sum_{x \in S_X} P_X(x) = 1$.
3. *Za svaki događaj $B \subset S_X$, vjerojatnost događaja ($X \in B$) iznosi*

$$P[B] = \sum_{x \in B} P_X(x). \tag{3.41}$$

3.3.2. Matematičko očekivanje, mod i medijan

Kao što je prije spomenuto, matematičko očekivanje koristi se za mjerenje srednje vrijednosti slučajne varijable. Kod diskretnih varijabli računa se kao suma umnoška vrijednosti slučajne varijable s odgovarajućim vjerojatnostima:

$$E[X] = \mu = \sum_{x \in S_X} x P_X(x). \tag{3.42}$$

Slično tome, za funkciju slučajne varijable $g(X)$ matematičko očekivanje definira se kao

$$E[g(X)] = \sum_{x \in S_X} g(x) P_X(x). \tag{3.43}$$

Teorem 3.8. *Sva svojstva matematičkog očekivanja kod neprekinutih varijabli mogu se upotrijebiti i kod diskretnih varijabli:*

1. $E[X - \mu_X] = 0$,
2. $E[aX + b] = aE[X] + b$.

Sljedeća mjera centralne tendencije je mod. On prikazuje broj $x_(mod)$ koji se najčešće pojavljuje u nekom skupu:

$$P_X(x_(mod)) \geq P_X(x), x \in S_X. \tag{3.44}$$

Neki skup može imati više modova, te se takav skup naziva polimodalan skup.

Medijan, treća mjera centralne tendencije je broj koji se u skupu (kojemu su elemnti poredani po veličini) nalazi točno na sredini, to jest ima jednak broj brojeva s lijeve i desne strane.

Primjer 3.7. *Zadani su rezultati 12 učenika na ispitu s bodovima od 1 do 20:*

$$10, 15, 17, 19, 20, 8, 9, 15, 18, 10, 11, 13. \tag{3.45}$$

Potrebno je naći aritemtičku sredinu, medijan i mod.

Aritmetička sredina računa se kao zbroj svih bodova podijeljeno s brojem učenika:

$$\overline{x} = 165/12 = 13.75. \tag{3.46}$$

Zadana su dva moda, 15 i 10, jer se pojavljuju više od ostalih, dva puta.

Za medijan potrebno je brojeve poredati od najmanjeg prema najvećemu:

$$8, 9, 10, 10, 11, 13, 15, 15, 17, 18, 19, 20. \tag{3.47}$$

Budući da je zadano 12 brojeva, medijan je aritmetička sredina dva središnja broja, 13 i 15, te iznosi 14.

3.3.3. Varijanca i standardna devijacija

Kao što je prije spomenuto, varijanca je mjera razlike slučajne varijable X i njezine očekivane vrijednosti.

$$Var[X] = E[(X - \mu_X)^2]. \tag{3.48}$$

Standardna devijacija je korijen varijance:

$$\sigma_X = \sqrt{Var[X]}. \tag{3.49}$$

Sva svojstva koja vrijede kod neprekinute varijable vrijede i kod diskretne:

Teorem 3.9. *Sva avojstva koja vrijede kod neprekinute varijable vrijede i kod diskretne:*

1. $Var[X] = E[X^2] - \mu_X^2$,

2. $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$.

4. Primjeri razdiobi neprekinutih slučajnih varijabli

Kao što je prije spomenuto, funkcija razdiobe vrlo je korisna jer se pomoću nje na pojednostavljen i lako shvatljiv način mogu prikazati slučajne varijable. Postoji više vrsta takvih razdiobi, te svaka ima svoje bitne karakteristike te izgled grafova koje joj omogućuju lakšu analizu i donošenje određenih zaključaka. Kod neprekinutih varijabli neke od najčešće korištenih razdioba su normalna razdioba, eksponencijalna razdioba, uniformna razdioba, a za temu ovog rada su važne i beta i trokutasta razdioba. Posljednje dvije spomenute razdiobe detaljnije će biti obrađene u kasnijim poglavljima.

4.1. Normalna razdioba

Normalna razdioba, poznata još i kao Gaussova razdioba, je najčešća razdioba koja se pojavljuje u statistici.

Definicija 4.1. *Neka razdioba je normalna razdioba ako joj je funkcija gustoće zadana s:*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{4.1}$$

gdje je $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$. Još se zapisuje i kao $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Funkcija razdiobe dana je izrazom

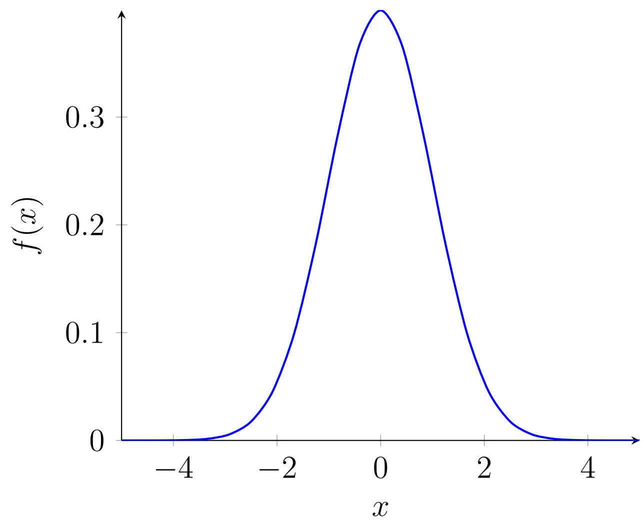
$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx. \tag{4.2}$$

Oblik grafa funkcije gustoće normalne razdiobe ima prepoznatljiv oblik zvona s maksimumom u $x = \mu$ te točkama infleksije u $x = \mu \pm \sigma$, gdje σ označava širinu funkcije (što je σ manja, funkcija je viša i uža). Ova je krivulja također poznata i pod nazivom Guassova krivulja. Razlog učestalosti i širokoj pojavi ove funkcije u primjerima svakodnevice je njezino svojstvo graničnosti u situacijama kada je slučajna varijabla zbroj međusobno nezavisnih i jednoliko distribuiranih slučajnih varijabli.

4.2. Eksponencijalna razdioba

Eksponencijalna se razdioba koristi kod problema vremenske prirode gdje se čeka pojava nekog događaja uz konstantne karakteristike kroz cijelo to vrijeme, primjerice vrijeme čekanja telefonskog poziva, vrijeme ispravnog rada nekog elektronskog uređaja ili vrijeme do pojave neke nesreće.

Slika 4.1. Funkcija gustoće za normalnu razdiobu



Definicija 4.2. *Neka je razdioba eksponencijalna ako joj je funkcija gustoće zadana sljedećim izrazom:*

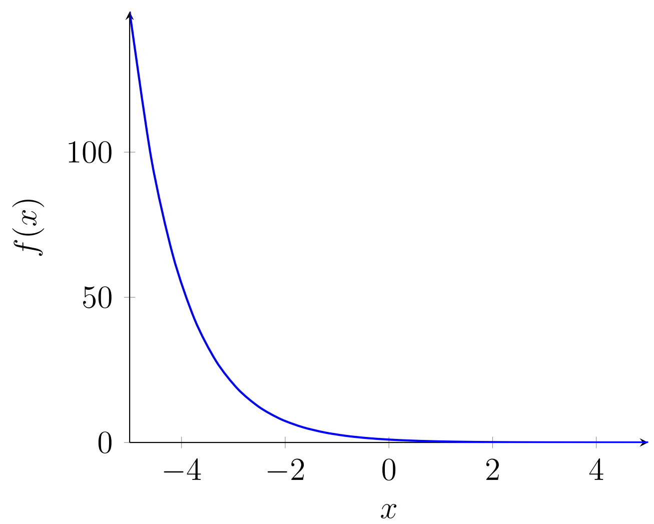
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0, \tag{4.3}$$

gdje je $\lambda > 0$, te označava intenzitet nekog događaja. Označava se kao $\mathcal{E}(\lambda)$.

Funkcija razdiobe dana je kao

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x > 0. \tag{4.4}$$

Slika 4.2. Funkcija gustoće za eksponencijalnu razdiobu



4.3. Uniformna razdioba

Uniformna razdioba je razdioba koja poprima vrijednosti samo na nekom intervalu $[a, b]$, te vjerojatnost da poprimi vrijednost na nekom podintervalu ovisi samo o duljini tog podintervala.

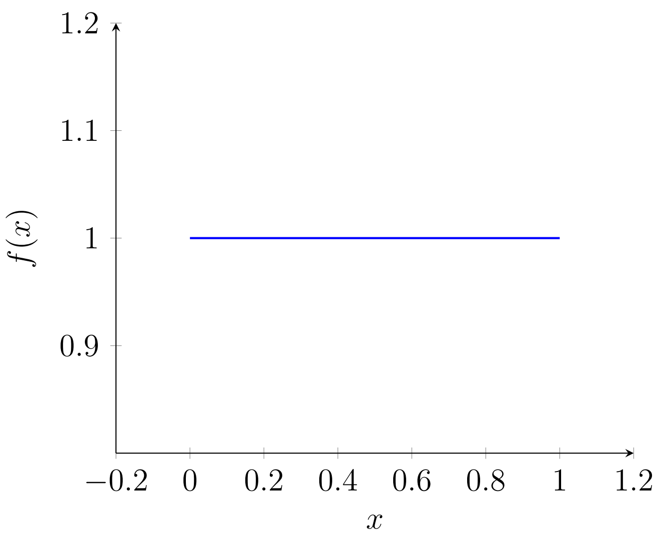
Definicija 4.3. *Uniformna razdioba je ona razdioba čija je funkcija gustoće dana izrazom*

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, x \in [a, b). \tag{4.5}$$

Funkcija razdiobe zadana je kao

$$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}, x \in (a, b]. \tag{4.6}$$

Slika 4.3. Funkcija gustoće za uniformnu razdiobu



5. Beta razdioba

Beta razdioba jedna je od razdioba neprekinutih slučajnih varijabli. Poprima vrijednosti na intervalu od 0 do 1. Proučava slučajeve poput vjerojatnosti uspjeha nekog eksperimenta, vjerojatnosti da vlak dođe u nekom vremenskom intervalu, kolike su šanse da određeni predsjednik pobjedi izbore itd. Ima dva glavna paramtera o kojima ovisi, alfu (α) i betu (β).

Definicija 5.1. *Beta funkcija definirana je kao*

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{5.1}$$

gdje Γ *predstavlja gama funkciju zadanu jednadžbom*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e(-x) dx. \tag{5.2}$$

Beta funkcija može se prikazati na više načina pomoću integrala. Najčešće korišteni načini su:

1. Integral na intervalu od 0 do beskonačnosti:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}(1+t)^{-\alpha-\beta} dt. \tag{5.3}$$

2. Integral na intervalu od 0 do 1:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt. \tag{5.4}$$

Definicija 5.2. *Nepotpuna beta funkcija je generalizacija beta funkcije gdje se gornja granica integrala mijenja iz* $t = 1$ *u* $t = z \leq 1$*:*

$$B(z, \alpha, \beta) = \int_0^z t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt. \tag{5.5}$$

5.1. Funkcija gustoće beta razdiobe

Funkcija gustoće beta razdiobe prikazana je sljedećom formulom:

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1 \tag{5.6}$$

za $\alpha > 0$ i $\beta > 0$.

Parametri beta razdiobe povezani su simetrično, to jest ako imamo neki X s parametrima α i β, onda će $1 - X$ imati parametre β i α:

$$f(x; \alpha, \beta) = f(1 - x; \beta, \alpha) \tag{5.7}$$

.

5.1.1. Utjecaj parametara na izgled funkcije gustoće

Kao što je prije spomenuto, parametri α i β određuju izgled grafa funkcije na sljedeći način:

1. Unimodalne funkcije

   One se dobivaju kada za parametre vrijedi $\alpha > 1$ i $\beta > 1$. U tom slučaju funkcija gustoće razdiobe ima jedan mod zadan kao

   $$mod = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2}. \tag{5.8}$$

2. Funkcije oblika U

   Za takve funkcije vrijedi $0 < \alpha < 1$ i $0 < \beta < 1$. One imaju takozvani anti-mod, to jest najnižu točku funkcije koja je zadana istom formulom kao i mod kod unimodalnih funkcija.

3. Funkcije oblika J

   Kod takvih funkcija jedan od parametara je veći od 1, dok se drugi nalazi na intervalu od 0 do 1. Tako funkcije kod kojih je $\alpha > 1$ i $0 < \beta < 1$ imaju oblik J, dok su funkcije za $0 < \alpha < 1$ i $\beta > 1$ obrnutog J oblika.

4. Posebni slučaj - uniformna razdioba

   Kada za parametre vrijedi $\alpha = \beta = 1$, funkcija poprima oblik horizontalne crte, to jest funkcija gustoće beta razdiobe sada poprima oblik identičan funkciji gustoće uniformne razdiobe.

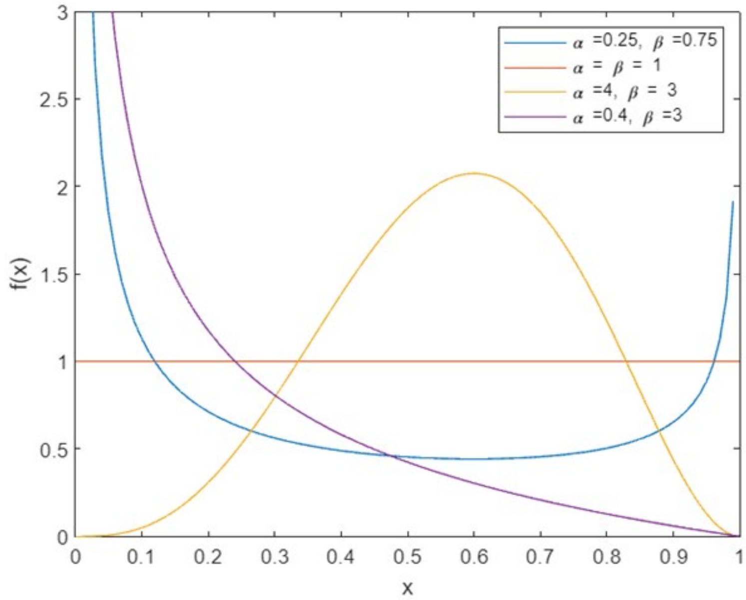
Parametri također utječu i na iskrivljenost ili asimetriju funkcije. Koeficijent iskrivljenosti funkcije dan je sljedećom formulom:

$$\gamma_1 = \frac{2(\beta - \alpha)}{\alpha + \beta + 2} \sqrt{\frac{\alpha + \beta + 1}{\alpha\beta}} \tag{5.9}$$

1. Simetrična funkcija

   Ako $\alpha = \beta$, onda je γ_1 jednaka 0, te je funkcija simetrična.

Slika 5.1. Utjecaj parametara na izgled funkcije gustoće beta razdiobe



2. Iskrivljena funkcija

   Za različite α i β vrijedi $\gamma_1 \neq 0$ te je funkcija iskrivljena.

   Ako je $\beta > \alpha$, γ_1 je veće od 0, te je funkcija iskrivljena u desno. Obrnuto, za $\alpha > \beta$ funkcija je iskrivljena u lijevo.

Kao još jedan način utjecaja parametara navodi se i kurtosis, to jest mjera iskrivljenosti funkcije. Računa se kao

$$\gamma_2 = \frac{3(\alpha+\beta+1)}{\alpha\beta(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}\{2(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta(\alpha+\beta-6)\}. \tag{5.10}$$

Što je γ_2 veća, veća je i iskrivljenost, to jest funkcija dobiva "rep" na mjestu moda.

5.2. Funkcija razdiobe za beta razdiobu

Funkcija razdiobe za beta razdiobu prikazana je sljedećom formulom:

$$F_X(x) = \frac{B(x,\alpha,\beta)}{B(\alpha,\beta)} = I(x,\alpha,\beta), 0 < x < 1 \tag{5.11}$$

gdje $B(x,\alpha,\beta)$ označava nepotpunu beta funkciju, $B(\alpha,\beta)$označava beta funkciju, a $I(x,\alpha,\beta)$ označava omjer nepotpune beta funkcije.

5.3. Matematičko očekivanje i varijanca

Matematičko očekivanje beta razdiobe zadano je kao

$$E[X] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}. \tag{5.12}$$

Varijanca je zadana kao

$$Var[X] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2}. \tag{5.13}$$

5.4. Primjena beta razdiobe

Beta razdioba u stvarnome se životu često primjenjuje u različitim analizama podataka. Često se može koristiti prilikom analize eksperimenata s dva jednako moguća ishoda: uspjeh (s vjerojatnošću x) i neuspjeh (s vjerojatnošću $1 - x$). Takvi eksperimenti poznati su pod nazivom Bernoulijevi eksperimenti.

Recimo da imamo neki X čiji su ishodi a priori (prije obavljanja eksperimenta) jednako mogući. Vjerojatnost X zbog toga se prikazuje uniformnom razdiobom na intervalu od 0 do 1. Sada se počinje obavljati eksperiment. On se obavlja n nezavisnih puta, te se dobivaju rezultati s uspjehom k puta i neuspjehom $n - k$ puta. Sada se na temelju toga računa zavisna ili posteriorna razdioba, rezultat koje je beta razdioba s parametrima $\alpha = k + 1$ i $\beta = n - k + 1$.

Beta razdioba također se primjenjuje u analizi takozvanih valića ili waveleta koji se često primjenuju u obradi signala. Valić je kratka oscilacija čija amplituda započinje u nuli, povećava se, i zatim se ubrzo smanjuje natrag u nulu. Često se koristi jer je, nasuprot Fourierove transformacije koja je lokalizirana samo u frekvenciji, lokaliziran i u vremenu, te se primjenjuje za dinamičke procese. Kontinuirani valići modelirani su prema beta razdiobi s parametrima α i β.

U projektnom menadžmentu beta razdioba koristi se i u PERT, CPM (Critical Path Method) i JCSM (Joint Cost Schedule Modeling) sustavima kao način procjene vremenskog trajanja projekata i njegovih troškova. Koristi se, zajedno s trokutastom razdiobom, u metodi procjene tri točke, u kojoj su najbitnije minimalna, maksimalna i najvjerojatnija vrijednost procjene.

6. Trokutasta razdioba

Trokutasta razdioba jedna je od manje poznatih i korištenih razdioba neprekidnih slučajnih vrijabli. Iako je otkrivena 1755. godine, tek se nedavno počela koristiti kao adekvatna zamjena za beta distribuciju zbog svoje jednostavnosti i mogućnosti analize uz ograničene uzorke podataka. Koristi tri parametra, minimum, maksimum i najvjerojatniju vrijednost procjene ishoda ili mod. Na primjer, neka tvrtka može procjeniti da bi u jednom mjesecu zaradila najmanje 10 000€, najviše 20 000€i najvjerojatnije 18 000€. Pomoću trokustaste razdiobe moguće je napraviti procjenu vjerojatnosti zarade određene količine novaca za tu tvrtku.

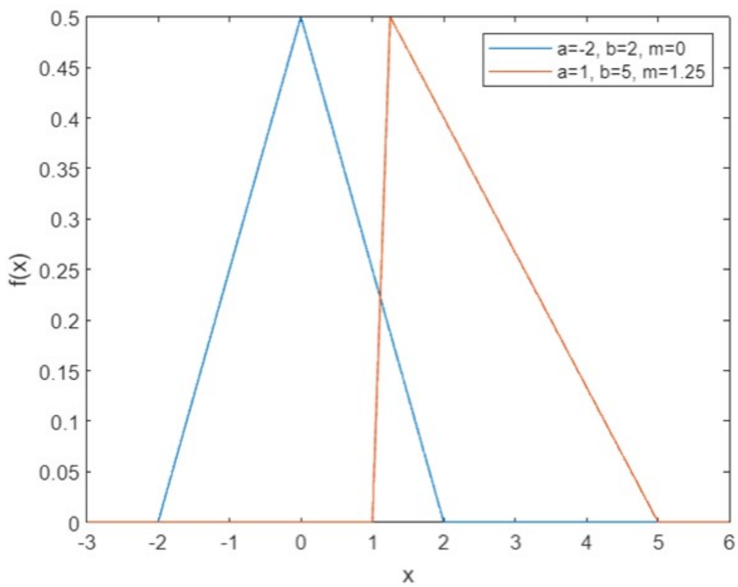
6.1. Funkcija gustoće trokutaste razdiobe

Funkcija gustoće trokutaste razdiobe zadana je sljedećom funkcijom:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{b-a}\frac{x-a}{m-a}, & a \leq x \leq m, \\ \frac{2}{b-a}\frac{b-x}{b-m}, & m \leq x \leq b, \\ 0, & ostalo \end{cases} \tag{6.1}$$

gdje a predstavlja minimum, b je maksimum, a m je mod funkcije.

Slika 6.1. Funkcije gustoće za dvije trokutaste razdiobe



6.2. Funkcija razdiobe

Funkcija razdiobe trokutaste razdiobe dana je sljedećom formulom:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{(x-a)^2}{(b-a)(b-m)}, & a \leq x \leq m, \\ 1 - \frac{(b-x)^2}{(b-a)(b-m)}, & m < x < b \\ 1, & b \leq x. \end{cases} \tag{6.2}$$

Također se može spomenuti i inverz funkcije razdiobe. On se koristi za uzorkovanje slučajnih brojeva iz bilo koje razdiobe pomoću funkcije razdiobe. Inverz funkcije trokutaste razdiobe zadan je kao

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} a + \sqrt{y(m-a)(b-a)}, & 0 \leq y \leq \frac{m-a}{b-a}, \\ b - \sqrt{(1-y)(b-m)(b-a)}, & \frac{m-a}{b-a} \leq y \leq 1. \end{cases} \tag{6.3}$$

6.3. Matematičko očekivanje, varijanca i ostali numerički pokazatelji za trokutastu razdiobu

Matematičko očekivanje zadano je kao

$$E[X] = \frac{a+b+m}{3}. \tag{6.4}$$

Varijanca je zadana kao

$$Var[X] = \frac{a^2+b^2+m^2-ab-am-bm}{18}. \tag{6.5}$$

Mod se računa kao

$$m = \frac{2}{b-a}. \tag{6.6}$$

Koeficijent asimetrije zadan je kao

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{2}(a+b-2m)(2a-b-m)(a-2b+m)}{5(a^2+b^2+m^2-ab-am-bm)^{\frac{3}{2}}}. \tag{6.7}$$

6.4. Primjena trokutaste razdiobe

Kao što je prije spomenuto, trokutasta razdioba često je korištena razdioba zbog svoje jednostavnosti i mogućnosti korištenja uz veliki nedostatak potrebnih podataka. Poznavajući samo minimalnu, maksimalnu i najvjerojatniju vrijednost, moguće je na lak način pretpostaviti vjerojatnosti nekih ishoda. Tako se često može koristiti za opisivanje situacija s nedovoljnim uzorcima podataka, u simulacijama donošenja odluka u poslovanju, te, poput beta distribucije, u projektnom menadžmentu u PERT i CPM sustavima za vremensko trajanje projekata i procjenu troškova projekata.

7. Projektni menadžment

Projekt je, prema definiciji Instituta za projektni menadžment (PMI) "privremeni poduhvat poduzet za stvaranje jedinstvenog proizvoda, usluge ili rezultata". Ima jasno definiran cilj i određeni vremenski interval u kojemu se mora obaviti.

Projektni menadžment je, prema PMI, uporaba znanja, vještina, instrumenata i tehnika pomoću kojih se neki projekt razvija. Ostvrauje se preko 5 grupa procesa: iniciranja, planiranja, izvođenja, praćenja i kontrole te zatvaranja projekta. Sastoji se i od 5 procesa ili planova projektnog menadžmenta: plana upravljanja opsegom projekta, plana upravljanja rasporedom, plana upravljanja troškovima, plana upravljanja dionicama i kontrole upravljanja dionicama. Planiranje projekta provode svi: menadžeri, ali i ljudi koji će obavljati projekt. Problem kod planiranja nastaje ako menadžer obavlja planiranje sam: prilikom početka obavljanja projekta na vidjelo dolaze menadžerove greške oko pretpostavki trajanja ili količine posla, te se sve raspada. Menadžeri zapravo služe samo za nadgledanje projekta, provjeru da sve bude završeno na vrijeme, nabavu potrebnih resursa i zaustavljanje smetnji koje prijete timu.

Kako bi se neki projekt ostvario, prilikom planiranja potrebno je napraviti višestruke analize i procjene raznih dijelova projekta, na primjer procjenu vremena trajanja projekta ili procjenu troškova potrebnih za određeni dio projekta. Jedna od najpoznatijih metoda projektnog menadžmenta je metoda procjene tri točke. Za svoju analizu koristi prije navedene distribucije, beta (kasnije poznata i kao PERT distribucija) i trokutastu distribuciju.

7.1. Metoda procjene tri točke

Tehnika procjene tri točke koristi se u projektnom menadžmentu za procjenu najvjerojatnijih ishoda nekog projekta, to jest trajanja ili cijene projekata. Ima tri parametra procjene: optimističnu procjenu, pesimističnu procjenu, i najvjerojatniju procjenu. Optimistična procjena (O) uzima u obzir da sve ide po planu, sve se odvija u zadanim vremenskim rokovima i nema nikakvih smetnji. Pesimistična procjena (P) procjenjuje da će sve otići u najgoru moguću situaciju te će projekt imati veliku devijaciju od plana i biti će potrebno puno više reusrsa nego je planirano. Najvjerojatnija procjena (N) uzima neku sredinu između optimistične i pesimistične, to jest uzima neku realističnu procjenu odvijanja projekta, s dobrim i lošim ishodima. Postoje dvije metode izračuna ove procjene, metoda pomoću trokutaste razdiobe i metoda pomoću beta razdiobe.

Trokutasta razdioba koristi sljedeću formulu:

$$x = \frac{O + P + N}{3}, \tag{7.1}$$

gdje x predstavlja ukupnu procjenu, a O, P i N prestravljaju prije navedene procjene: optimističnu, pesimističnu i najvjerojatniju.

Beta ili PERT (Program Evaluation and Review Technique) razdioba smatra se kao varijacija metode procjene tri točke po tome što najvažnijoj vrijednosti pridodaje faktor težine koji obično iznosi 4. Koristi se sljedećom formulom:

$$x = \frac{O + 4M + P}{6}. \tag{7.2}$$

Također se spominje i formula standardne devijacije:

$$\sigma^2 = (\frac{P - O}{6})^2. \tag{7.3}$$

Često se misli da je PERT metoda bolja zbog težine zbog koje bi rezultat bio bliži najvjerojatnijoj procjeni, no ne smije se zanemariti ni pesimistična vrijednost. Zbog nesigurnosti izvođenja projekta ona će imati veliko značenje jer je vrlo nevjerojatno da će projekt proći bez problema.

7.2. Razlika između PERT metode i metode procjenje tri točke

Postoji nekoliko stvari po kojima se ove dvije vrlo slične metode razlikuju:

1. Metoda izračuna je prije spomenuta razlika. Dok metoda procjene tri točke ima sve parametre iste težine, PERT metoda postavlja težinu na svoje parametre, tako osiguravajući bolju procjenu.

2. PERT metoda prilikom svoje analize daje samo najbolju moguću procjenu trajanja projekta, to jest ona daje na uvid trajanje cijelokupnog projekta. Metoda procjene tri točke daje različite moguće ishode bazirane na otpimističnim, pesimističnim i najvjerojatnijim ishodima, što daje više detalja o trajanju projekta i dijelova projekta.

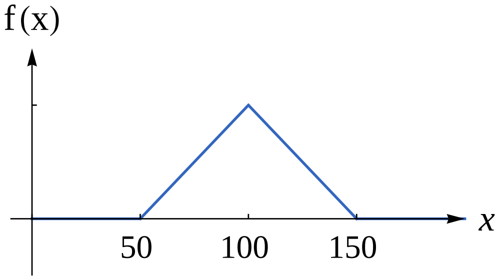
3. PERT metoda za svoj izračun koristi i izračun standardne devijacije, što daje dobru predodžbu nesigurnosti, a s time i dobar izračun rizika. Metoda procjene tri točke za izračun rizika daje vjerojatnost ispunjavanja zadatka unutar određenog vremenskog perioda uz dana izračunata vremena.

4. PERT metoda većinom se koristi kada za plan projekta nemamo dovoljno podataka za točan izračun rezultirajući u velikoj neizvjesnosti, a metoda procjene tri točke može se koristiti u raznim fazama projekta te za njezinu primjenu nije potrebno da projekt ima veliki rizik.

8. Primjer iz prakse

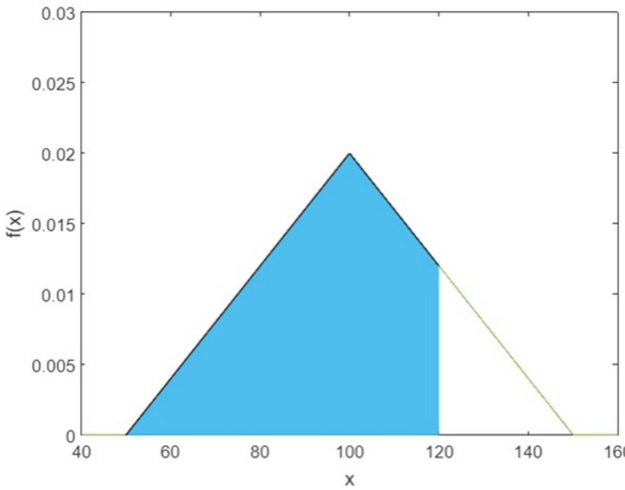
U projektnom se menadžmentu vrijeme potrebno za izvršenje nekog projekta često modelira trokutastom razdiobom. Ako je minimalno vrijeme potrebno za izvršenje promatranog projekta jednako 50 dana, a maksimalno vrijeme 150 dana, tada je pripadna funkcija gustoće jednaka

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 50 \\ \frac{1}{2500}(x-50), & 50 \leq x \leq 100 \\ \frac{1}{2500}(150-x), & 100 < x \leq 150 \\ 0, & x > 150 \end{cases}$$



a) Odredite vjerojatnost da će projekt biti izvršen u manje od 120 dana.

Traži se vjerojatnost $P[X < 120]$, koja se računa kao površina ispod grafa funkcije gustoće na intervalu $[50, 120]$:



$$\begin{aligned} P[X < 120] &= \int_{50}^{100} \frac{1}{2500}(x-50)dx + \int_{100}^{120} \frac{1}{2500}(150-x)dx \\ &= \frac{1}{2500}\int_{50}^{100}(x-50)dx + \frac{1}{2500}\int_{100}^{120}(150-x)dx \\ &= \frac{1}{2500}\left(\left(\frac{x^2}{2} - 50x\right)\Big|_{50}^{100} + \left(150x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{100}^{120}\right) \\ &= \frac{1}{2500}(1250+800) \\ P[X < 120] &= 0.82 = 82\%. \end{aligned} \tag{8.1}$$

b) Odredite prosječno (očekivano) trajanje promatranog projekta.

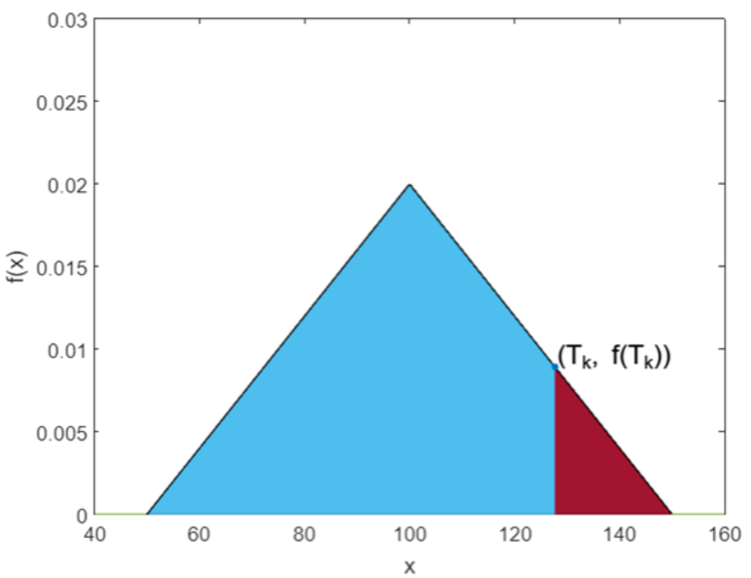
Očekivano trajanje projekta računa se preko formule za matematičko očekivanje:

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_a^b x f(x) dx \\
&= \int_{50}^{100} x \frac{1}{2500}(x-50)dx + \int_{100}^{150} x \frac{1}{2500}(150-x)dx \\
&= \frac{1}{2500}\left(\int_{50}^{100}(x^2-50x)dx + \int_{100}^{150}(150x-x^2)\right) \\
&= \frac{1}{2500}\left(\left(\frac{x^3}{3}-50\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{50}^{100} + \left(150\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{100}^{150}\right) \\
E[X] &= 100.
\end{aligned}
\tag{8.2}
$$

c) Projektni menadžer prilikom ugovaranja projekta treba voditi računa o tome da kraće vrijeme izvršavanja projekta podiže njegovu vrijednost, ali probijanje rokova izaziva plaćanje penala. Stoga je strategija sljedeća: potrebno je predvidjeti najkraće vrijeme T_k za koje se uz predviđenu razdiobu trajanja izvršenja projekta može s vjerojatnošću 90% predvidjeti izvršenje projekta.

Traži se vrijeme T_k za koje vrijedi $P[X \leq T_k] = 0.9$.

$$
P[X \leq T_k] + P[X > T_k] = 1 \Rightarrow 1 - P[X > T_k] = 0.9 \tag{8.3}
$$



Iz grafa funkcije gustoće slijedi da je površina crvenog područja:

$$
P[X > T_k] = \frac{(150-T_k)f(T_k)}{2} = \frac{1}{5000}(150-T_k)^2 \tag{8.4}
$$

Uvrštavanjem (8.4) u jednadžbu (8.3) dobivamo

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{5000}(150 - T_k)^2 &= 0.9 \\
\frac{1}{5000}(150 - T_k)^2 &= 0.1 \\
(150 - T_k)^2 &= 500 \\
150 - T_k &= \pm\sqrt{500} \\
T_k &= 150 \mp \sqrt{500} \\
T_{k1} &= 127.64 \\
T_{k2} &= 172.36
\end{aligned} \tag{8.5}$$

Budući da je T_{k2} izvan intervala $[50, 150]$ na kojem slučajna varijabla poprima vrijednosti, T_{k1} je točno rješenje.

9. Zaključak

U ovome radu opisane su dvije neprekidne slučajne razdiobe, beta razdioba i trokutasta razdioba, te je navedena njihova upotreba u projektnom menadžmentu. Kako bismo uopće definirali te dvije razdiobe, prvo je trebalo definirati osnovne pojmove iz same teorije vjerojatnosti. Budući da je vjerojatnost broj koji opisuje kolike su šanse da se neki događaj ostvari, potrebno je definirati i osnovne pojmove iz teorije skupova, koja se zapravo smatra bazom teorije vjerojatnosti . Naveden je pojam skupa i operacije među skupovima (podskup, unija, presjek, razlika i komplement) te je objašnjena osnovna poveznica između teorije skupova i teorije vjerojatnosti. Također su navedena tri osnovna aksioma vjerojatnosti i teoremi koji proizlaze iz tih aksioma.

Slučajne varijable svakom ishodu slučajnog ekperimenta pridružuju neki broj. Dijele se na diskretne i neprekidne, pri čemu diskretne varijable poprimaju vrijednosti unutar prebrojivog skupa, a neprekidne unutar neprebrojivog skupa, obično nekog intervala u skupu realnih brojeva. Navedeni su osnovni numerički pokazatleji sučajnih varijabli: pokazatelji centralne tendencije (matematičko očekivanje, mod, medijan), mjere disperzije (varijanca i standardna devijacija), te funkcije razdiobe i funkcije gustoće slučajnih varijabli. Kod obje vrste slučajnih varijabli svako od navedenih svojstava definirano je na isti način. Izračuni se razlikuju samo u tome što se kod diskretnih varijabli koriste oznake sumacije, matrice i slično, a kod neprekidnih se koriste diferencijalni i integralni račun. Slučajne varijable imaju široku primjenu u gotovo svim granama znanosti. U inženjerstvu se većinom koriste neprekidne varijable, jer se ishodi eksperimenta obično dobivaju mjerenjem, pa odgovarajuće slučajne varijable poprimju vrijednosti u skupu realnih brojeva.

Neke od uobičajenih neprekidnih distribucija su: normalna ili gaussova, uniformna i eksponencijalna. Dvije distribucije bitne za ovaj rad su beta distribucija i trokutasta distribucija. Beta distribucija je poznatija, te je ona definirana pomoću dva parametra dva parametra, α i β, koji ujedno i određuju oblik grafova njezinih funkcija razdiobe i funkcija gustoće. Trokutasta razdioba je definirana pomoću tri parametra, a, b i m, a dobila je ime po obliku grafa njezine funkcije gustoće. Obje razdiobe često se koriste u analizama podataka kod kojih je broj podataka dosta mali, jer sadrže tri bitne vrijednosti koje se koriste za analizu: minimalnu, maksimalnu i najvjerojatniju vrijednost. Upravo zbog toga često se koriste u projektnom menadžmentu. Naime, kod planiranja projekata potrebno je prije samog početka projekta napraviti plan trajanja, plan troškova, količinu zaliha, i slično. Beta i trokutasta razdioba dobar su alat za izradu tog plana. Minimalnom vrijednošću označava se najgori slučaj, maksimalnom najbolji, a najvjerojatnija vrijednost pokazuje najrealističniji slučaj. Pomoću toga se na vrlo jednostavan i efikasan način mogu izraditi dobri planovi i predikcije projekata, što je i prikazano u ovome radu.

Literatura

[1] Tomašić L.:"Matematika IV", Sveučilište u Rijeci, Rijeka, 1993.

[2] Elezović N.:"Vjerojatnost i statistika - 2. Slučajne varijable", Element, treće izdanje, Zagreb, 2011.

[3] Yates, R.D.; Goodman, D.J.:"Probability and Stochastic Processes: A Friendly Introduction for Elrctrical and Computer Engineers", Wiley, Second Edition, 2005.

[4] Porter, T.M.:"Probability and statistics", s Interneta, https://www.britannica.com/science/probability/Risks-expectations-and-fair-contracts, kolovoz 2023.

[5] "Introduction to Probability, Statistics and Random Processes", s Interneta, https://www.probabilitycourse.com/, kolovoz 2023.

[6] "Random variable ξ", s Interneta, https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/random-variable-xi, kolovoz 2023.

[7] Taboga M.:"Beta distribution",Lectures on probability theory and mathematical statistics., s Interneta https://www.statlect.com/probability-distributions/beta-distribution, kolovoz 2023.

[8] Gupta, A.K.; Nadarajah, S.:"Handbook of Beta Distributions and its Applications", First Edition, Marcel Dekker , INC., 2004.

[9] Kotz, S.; Van Dorp, J. R.:"Beyond Beta: Other Continuous Families of Distributions with Bounded Support and Applications", World Scientific Publishing Company, USA, 2004.

[10] "What is Three-point Estimating in Project Management?", s Interneta, https://www.knowledgehut.com/blog/project-management/three-point-estimating, kolovoz 2023.

[11] Heagney, J.:"Fundamentals of Project Management", Fifth Edition, AMACOM, 2016.

Sažetak i ključne riječi

U ovom završnom radu obrađena primjena vjerojatnosti u projektnom menadžmentu. Navedeni su osnovni pojmovi, aksiomi i teoremi teorije vjerojatnosti. Također su obrađene slučajne varijable, s posebnom naznakom na neprekidne slučajne varijable. Opisane su neke poznatije i više korištene neprekidne razdiobe s posebnom naznakom na beta i trokutastu razdiobu, te njihova uporaba u projektnom menadžmentu. Spomenute su metoda procjene triju točaka te njezina varijacija PERT metoda kao česte metode procjene vremenskog trajanja projekata.

Ključne riječi: Teorija vjerojatnosti

Slučajne varijable

Neprekidne slučajne varijable

Beta razdioba

Trokutasta razdioba

Projektni menadžment

Metoda procjene triju točaka

PERT metoda

Summary and key words

In this final work, the application of probability in project management is discussed. Basic concepts, axioms and theorems of probability theory are listed. Random variables are also covered, with special reference to continuous random variables. Some more well-known and widely used continuous distributions are described with a special reference to beta and triangular distributions, and their use in project management. The three-point estimation method and its variation, the PERT method, are mentioned as frequent methods of estimating the time duration of projects.

Keywords: Probability theory

Random variables

Continuous random variables

Beta distribution

Triangular distribution

Project management

Three-point estimation method

PERT method