

# Primjena Laplaceovih transformacija na rješavanje jednodimenzionalne toplinske jednadžbe

---

Vurušić, Krešo

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:190:927324>

Rights / Prava: [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-03**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Engineering](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

**PRIMJENA LAPLACEOVIH TRANSFORMACIJA NA  
RJEŠAVANJE JEDNODIMENZIONALNE TOPLINSKE  
JEDNADŽBE**

Rijeka, rujan 2024.

Krešo Vurušić  
0069092032

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

**PRIMJENA LAPLACEOVIH TRANSFORMACIJA NA  
RJEŠAVANJE JEDNODIMENZIONALNE TOPLINSKE  
JEDNADŽBE**

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Rijeka, rujan 2024.

Krešo Vurušić  
0069092032

Rijeka, 13.03.2024.

Zavod: Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike  
Predmet: Inženjerska matematika ET

## ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Krešo Vurušić (0069092032)**  
Studij: Sveučilišni prijediplomski studij elektrotehnike (1030)

Zadatak: **Primjena Laplaceovih transformacija na rješavanje jednodimenzionalne toplinske jednadžbe / Application of the Laplace transformation to the one-dimensional heat equation**

### Opis zadatka:

U radu je potrebno izvesti jednodimenzionalnu toplinsku jednadžbu te objasniti njenu klasifikaciju i pripadne rubne uvjete. Potrebno je definirati Laplaceovu transformaciju te navesti i dokazati njena temeljna svojstva koja se koriste kod rješavanja običnih i parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. U završnom dijelu rada Laplaceove transformacije potrebno je primijeniti na konkretan problem rješavanja jednodimenzionalne toplinske jednadžbe s odgovarajućim početnim i rubnim uvjetima.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanja diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Zadatak uručen pristupniku: 20.03.2024.

Mentor:  
izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Predsjednik povjerenstva za  
završni ispit:  
prof. dr. sc. Dubravko Franković

# IZJAVA

Sukladno članku 7. Stavku 1. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku sveučilišnih prijediplomskih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 4. travnja 2023., izjavljujem da sam samostalno izradio završni rad prema zadatku preuzetom dana 20. ožujka 2024.

Rijeka, 2. rujna 2024.

---

Krešo Vurušić

*Ovim putem želim se od srca zahvaliti mentoru izv. prof. dr. sc. Ivanu Dražiću na podršci, vodstvu, strpljenju i pomoći. Zahvalan sam što me poticao i vodio kroz proces istraživanja i pisanja mog prvog rada.*

*Također, želim izraziti veliku zahvalnost svojoj obitelji. Koja mi je bila podrška od prvih dana. Vaše razumijevanje i vjera u mene mi je pružalo motivaciju, te mi omogućilo da se u potpunosti posvetim mojim studijskim obavezama.*

*Zahvaljujem se i prijateljima na njihovoj podršci i svim lijepim trenucima.*

## Sadržaj

<b>1. Uvod</b>	<b>2</b>
<b>2. Jednodimenzionalna toplinska jednadžba</b>	<b>3</b>
2.1. Rubni i početni uvjeti . . . . .	4
2.2. Newtonov zakon hlađenja i Robinov rubni uvjet . . . . .	5
2.3. Klasifikacija toplinske jednadžbe . . . . .	6
<b>3. Laplaceove transformacije</b>	<b>8</b>
3.1. Izračunavanje Laplaceovih transformacija . . . . .	9
3.2. Egzistencija Laplaceove transformacije . . . . .	11
3.3. Temeljna svojstva Laplaceove transformacije . . . . .	12
3.4. Svojstva Laplaceove transformacije povezana s rješavanjem toplinske jednadžbe . .	17
3.4.1. Laplaceova transformacija drugog korijena . . . . .	17
<b>4. Funkcije pogreške</b>	<b>22</b>
4.1. Laplaceove transformacije s funkcijom pogreške . . . . .	24
<b>5. Obične linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima</b>	<b>30</b>
<b>6. Rješavanje toplinske jednadžbe s Dirichletovim rubnim uvjetom</b>	<b>31</b>
<b>7. Rješavanje toplinske jednadžbe s Neumannovim rubnim uvjetom</b>	<b>35</b>
<b>8. Rješavanje toplinske jednadžbe s Robinovim rubnim uvjetom</b>	<b>39</b>
<b>9. Toplinska jednadžba u kontekstu elektrotehnike</b>	<b>43</b>
<b>10. Zaključak</b>	<b>44</b>
<b>Literatura</b>	<b>45</b>
<b>Sažetak i ključne riječi</b>	<b>46</b>
<b>Summary and key words</b>	<b>47</b>

## 1. Uvod

Razvojem tehnologije i automatizacije sve više je zastupljena potreba za električnim uređajima, te time i električnom energijom. Moderna tehnologija sve je više složenija, potrebno je osigurati njezinu učinkovitost, pouzdanost i sigurnost. Jedan od većih problema na koje nailaze inženjeri je problem prekomjerne topline, od trenja do samog toka struje, nastaje toplina. U skladu sa razvojem same tehnologije, potrebno je i razvijati popratnu tehnologiju poput hlađenja.

Zanemarivanjem generiranja topline može doći do gubitaka, te potencijalnih oštećenja uređaja i komponenata. Upravo iz tog razloga traže se brojna rješenja kako bi se generiranje topline smanjilo ili disipiralo u okolinu. Od hladnjaka, ventilatora do posebnih mentalnih okvira, svima je zajednički cilj prenijeti toplinu s uređaja u okolinu.

Kako bi inženjeri adekvatno uklonili toplinu, te smanjili njeno generiranje, potrebno je unaprijed poznavati gibanja i generiranja topline, a kako bi to mogli odrediti, služe se brojnim simulacijama koje modeliraju tok topline. Upravo za to modeliranje potrebne su toplinske jednačbe. Kako bi se izvršila simulacija, potrebno je rješavati toplinske jednačbe koristeći brojne metode, jedna od njih je i putem Laplaceovih transformacija. Vrsta integralne transformacije koja diferencijalne jednačbe pretvara u algebarske, što će biti pokazano kroz rad. Također ćemo proširiti svojstva Laplaceovih transformacija, te ih primjeniti i na funkcije pogreške, važnu funkciju u matematici koja se pojavljuje u različitim područjima znanosti i inženjerstva. Iako njezina prvobitna primjena leži u vjerojatnosti i statistici, dokazati ćemo kako funkcije pogreške opisuju i tok topline kroz materijal.

Prilikom dizajniranja toplinskih sustava, aproksimacije više nisu dovoljne, kako bi inženjeri bili u stanju dizajnirati i analizirati razne toplinske sustave grijanja, hlađenja ili drugih konstrukcija, te kako bi učinkovito smanjili stvaranje topline i povećali njenu disipaciju u okolinu, potrebne su im precizne simulacije. Takve simulacije nije moguće ostvariti samo pomoću toplinskih jednačbi, potrebni su rubni i početni uvjeti, koji pružaju više detalja o termodinamičkim stanjima sustava. Upravo kod takvih jednačbi sa rubnim i početnim uvjetima su Laplaceove transformacije osobito korisne. Kroz rad ćemo ukazati kako njihova primjena olakšava rješavanje diferencijalnih problema, ali i kako može biti problematična prilikom vraćanja u vremensku domenu, odnosno primjenom inverznih Laplaceovih transformacija. Time ćemo dobiti konačnu funkciju u vremenskoj domeni, putem koje ćemo simulirati specifične uvjete, te ih prikazati grafički i time dokazati ispravnost rješenja.



## 2. Jednodimenzionalna toplinska jednađžba

Jednađžbe koje opisuju neku promjenu sadrže u sebi derivacije. Ako se promjena prati kroz više varijabli, primjerice kroz prostor i vrijeme, tada jednađžbe sadrže parcijalne derivacije. Takve se jednađžbe nazivaju parcijalne diferencijalne jednađžbe.

Toplinska jednađžba je jedna od temeljnih parcijalnih diferencijalnih jednađžbi, te opisuje promjenu temperature sustava. Zbog nehomogene raspodjele temperature u prostoru dolazi do tokova topline, pri čemu je tok topline s točke više temperature usmjeren prema točki manje temperature. To znači da će temperatura biti funkcija prostora i vremena u oznaci

$$u(x, t), \quad (2.1)$$

gdje je  $u$  temperatura u točki  $x$  u trenutku  $t$ .

Izvedimo sada jednodimenzionalnu toplinsku jednađžbu, za pomoć ćemo koristiti izvor [1]. Polazišna točka za izvod te jednađžbe je izraz za toplinsku energiju:

$$Q = mc\Delta u, \quad (2.2)$$

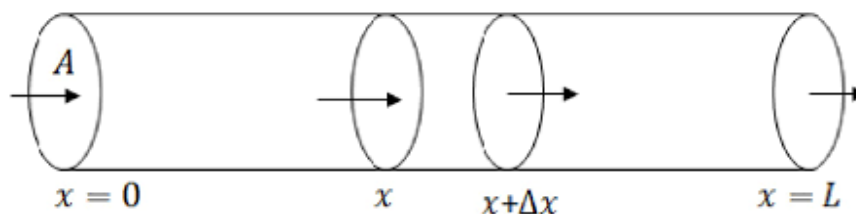
gdje je  $Q$  toplinska energija koja se dovodi tijelu mase  $m$  toplinskog kapaciteta  $c$  što temperaturu tijela povećava za  $\Delta u$ . Također, to je i toplina koja se oslobađa pri hlađenju tog tijela za  $\Delta u$ .

Jedan od osnovnih zakona koji opisuje tok topline je Fourierov zakon. Prema Fourierovom zakonu toplina teče u smjeru temperaturnog gradijenta, te je tok topline proporcionalan površini i temperaturnom gradijentu. U jednoj dimenziji se tok topline modelira vremenskom derivacijom toplinske energije, a temperaturni gradijent prostornom derivacijom temperature. Prema tome, Fourierov zakon za jednodimenzionalan tok topline dan je izrazom

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\lambda A \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.3)$$

pri čemu je  $A$  površina poprečnog presjeka, a  $\lambda$  koeficijent toplinske provodnosti. Negativan predznak upućuje na smjer toplinskog toka.

Jednodimenzionalni tok topline promatrati ćemo na modelu homogene metalne šipke prikazanom na sljedećoj slici.



Slika 2.1. Model homogene metalne šipke. Izvor: [2]

Homogenost šipke ogleđa se u konstantnoj gustoći mase  $\rho$ , konstantnom poprečnom presjeku  $A$  i konstantnom toplinskom kapacitetu  $c$ . Također ćemo pretpostaviti da je pozitivan tok topline s lijeve strane prema desnoj.

Promotrimo označeni segment  $x + \Delta x$ . Kako se radi o cilindričnom obliku volumena  $A\Delta x$ , masa tog dijela dana je izrazom

$$m = \rho A \Delta x. \quad (2.4)$$

Promjena toplinske energije za segment  $x + \Delta x$  u intervalu  $\Delta t$  prema (2.2) i (2.4) poprima oblik

$$\Delta Q = \rho A \Delta x c u(x, t + \Delta t) - \rho A \Delta x c u(x, t). \quad (2.5)$$

Do izraza za  $\Delta Q$  možemo doći i na drugi način. Naime, ukupna promjena toplinske energije će biti razlika topline koja dostrujava s lijeve strane i izlazi sa desne strane poprečnog presjeka  $A$  u intervalu  $\Delta t$ . Tako je prema Fourierovom zakonu (2.3)

$$\Delta Q = A \Delta t \left( -\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \right) - A \Delta t \left( -\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} \right). \quad (2.6)$$

Sada ćemo iskoristiti zakon očuvanja energije, prema kojem je u zatvorenom sustavu zbroj svih energija konačan, te se energija ne može stvoriti niti uništiti. Zbog toga su promjene energije dane izrazima (2.5) i (2.6) jednake, pa njihovim izjednačavanjem slijedi:

$$\rho A \Delta x c u(x, t + \Delta t) - \rho A \Delta x c u(x, t) = A \Delta t \left( -\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \right) - A \Delta t \left( -\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} \right), \quad (2.7)$$

što sređivanjem prelazi u:

$$\frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho c} \cdot \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x}{\Delta x}. \quad (2.8)$$

Ako izrazu (2.8) promatramo jako mali vremenski trenutak i jako mali dio šipke, odnosno ako promatramo limese kada  $\Delta t \rightarrow 0$  i  $\Delta x \rightarrow 0$ , prema definiciji parcijalnih derivacija slijedi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.9)$$

pri čemu je  $\kappa = \frac{\lambda}{\rho c}$  toplinska difuzivnost.

## 2.1. Rubni i početni uvjeti

Parcijalna diferencijalna jednadžba, kao i obična diferencijalna jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja od kojih većina nije fizikalno relevantna. Nametanjem dodatnih uvjeta iz skupa rješenja biramo ona koja su bitna u specifičnim fizičkim, tehničkim ili matematičkim kontekstima. Te dodatne uvjete kod parcijalnih diferencijalnih jednadžbi dijelimo na početne i rubne uvjete.

Početni uvjeti definiraju stanje sustava u početnom trenutku  $t = 0$ . Ovi uvjeti su posebno važni za evolucijske parcijalne diferencijalne jednačbe, odnosno jednačbe koje opisuju kako se sustav mijenja s vremenom. Zbog prisustva vremenske derivacije i toplinska jednačba je evolucijska parcijalna diferencijalna jednačba.

Kod toplinske jednačbe početni uvjet obično se zadaje izrazom

$$u(x, 0) = f(x), \quad (2.10)$$

pri čemu je  $f(x)$  funkcija koja opisuje raspodjelu temperature prije početka promatrane promjene temperature.

Rubni uvjeti definiraju ponašanje rješenja na granicama domene u kojoj je parcijalna diferencijalna jednačba definirana. Oni osiguravaju dodatne informacije potrebne za potpuno određivanje rješenja.

Toplinska jednačba omogućava razmatranje različitih rubnih uvjeta, ali se najčešće promatraju sljedeći slučajevi:

1. Kada se krajevi metalne šipke drže na konstantoj temperaturi:

$$u(0, t) = u(L, t) = konst. \quad (2.11)$$

2. Kada je toplinski tok na rubu konstantan:

$$-\lambda A \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = konst. \quad (2.12)$$

Istaknimo da se drugi slučaj modelira pomoću Fourierova zakona (2.3) te da se on najčešće koristi u obliku

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (2.13)$$

kojim se modeliraju izolirani krajevi šipke.

Rubni uvjet oblika (2.11) naziva se Dirichletov rubni uvjet, a oblika (2.12) Neumannov rubni uvjet.

## 2.2. Newtonov zakon hlađenja i Robinov rubni uvjet

Za opisivanje problema koje ćemo rješavati u ovom radu potreban nam je i Newtonov zakon hlađenja. Njime je opisan prijenos topline između površine objekta i okoline, pri čemu se toplinski tok izražava kao razlika između temperature površine  $u$  i temperature okoline  $u_\infty$ . Matematički, ovaj zakon se može zapisati kao:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = h(u - u_\infty), \quad (2.14)$$

gdje je  $Q$  toplina, a  $h$  koeficijent konvektivnog prijenosa topline.

Uzevši u obzir Fourierov zakon (2.3), Newtonov zakon hlađenja poprima oblik:

$$\pm \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{h}{\lambda A}(u - u_\infty), \quad (2.15)$$

pri čemu će predznak biti pozitivan ako toplina iz objekta prelazi na okolinu.

Ako bismo htjeli opisati da temperatura na rubu prelazi u okolinu prema Newtonovom zakonu hlađenja to bi za rub  $x = 0$  bilo:

$$\pm \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \alpha(u(0, t) - u_\infty), \quad (2.16)$$

gdje je

$$\alpha = \frac{h}{\lambda A}. \quad (2.17)$$

Za ovaj rubni uvjet možemo reći da je kombinacija Diricheltovog i Neumannovog rubnog uvjeta, a takav se rubni uvjet zove Robinov rubni uvjet.

### 2.3. Klasifikacija toplinske jednadžbe

Toplinska jednadžba spada u klasu linearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda koje se dalje mogu podijeliti na hiperboličke, paraboličke i eliptičke jednadžbe prema obliku glavnog dijela operatora  $L$ . Služeći se izvorom [3] opisujemo kojoj klasi je pridružena toplinska jednadžba. Linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda imaju opći oblik:

$$L(u) = Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \quad (2.18)$$

gdje je  $L(u)$  operator, a  $A, B, C, D, E, F, G$  funkcije varijabli  $x, y$  u nekom području  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ .

Ovaj se tip jednadžbi dalje može podijeliti na hiperboličke, paraboličke i eliptičke jednadžbe prema obliku glavnog dijela operatora  $L$ .

Operator  $L_0$  glavni je dio operatora  $L$ , te je definiran kao:

$$L_0 = A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (2.19)$$

Glavnom dijelu operatora  $L$  pridružena je diskriminanta:

$$\Delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y). \quad (2.20)$$

Ako je ova diskriminanta pozitivna jednadžbu ćemo zvati hiperboličkom, ako je negativna eliptičkom, a ako je jednaka nuli paraboličkom. Klasifikacija na spomenute tipove jednadžbi potječe od klasifikacije krivulja drugog reda oblika

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (2.21)$$

koje predstavlja hiperbolu, parabolu ili elipsu u ovisnosti je li diskriminanta  $\Delta = B^2 - AC$  pozitivna, negativna ili jednaka nuli.

Jednadžbu provođenja topline (2.9) možemo zapisati u obliku:

$$u_t - \kappa u_{xx} = 0, \quad (2.22)$$

pa vrijedi da je:

$$A = -\kappa, \quad B = C = 0. \quad (2.23)$$

Time je diskriminanta jednaka:

$$\Delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y) = 0, \quad (2.24)$$

što znači da je jednadžba provođenja topline parabolička jednadžba.

Paraboličke jednadžbe se kao jedna od temeljnih glavnih klasa parcijalnih diferencijalnih jednadžba koriste za modeliranje brojnih fizikalnih pojava, poput toplinske vodljivosti, difuzije ili prijenosa mase. Glavna karakteristika paraboličkih diferencijalnih jednadžbi je modeliranje difuzijskih procesa koji glatko prelaze između stanja sustava, kao što je provođenje topline, gdje s vremenom dolazi do izjednačavanja temperaturnih razlika.

### 3. Laplaceove transformacije

Integralne transformacije su operatori kojima se funkcija iz jedne domene prebacuje u drugu domenu, koja može biti realna ili kompleksna. Cilj takvih transformacija je da se u drugoj domeni promjene neka svojstva funkcija kako bi se olakšalo rješavanje problema zadanog u polaznoj domeni. Primjerice diferencijalna jednačba u polaznoj domeni može postati algebarska jednačba u određenoj domeni. U ovom poglavlju precizno definiramo integralne transformacije s naglaskom na Laplaceovu transformaciju i njena svojstva. Poglavlje je uglavnom prema izvoru [4].

**Definicija 3.1** (Integralna transformacija). *Neka je zadana funkcija  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ . Funkciju*

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s, t) f(t) dt, \quad (3.1)$$

*zovemo integralnom transformacijom funkcije  $f(t)$ , pri čemu funkciju  $K(s, t)$  zovemo jezgrom integralne transformacije.*

Iz definicije integralne transformacije jasno je da integralnu transformaciju određuje njena jezgra. Najčešće korištene integralne transformacije s pripadnim jezgrama navedene su u sljedećoj tablici.

*Tablica 3.1. Primjeri integralnih transformacija i njihovih jezgara.*

Transformacija	Jezgra	$\alpha$	$\beta$
Mellinova	$t^{s-1}$	0	$\infty$
Fourierova	$e^{-2\pi i s t}$	$-\infty$	$\infty$
Laplaceova	$e^{-st}$	0	$\infty$
Hilbertova	$\frac{1}{\pi} \frac{1}{s-t}$	$-\infty$	$\infty$
Abelova	$\frac{2t}{\sqrt{t^2 - s^2}}$	$s$	$\infty$

Jedna od najčešće korištenih integralnih transformacija je Laplaceova transformacija koju precizno definiramo u sljedećoj definiciji.

**Definicija 3.2** (Laplaceova transformacija). *Neka je zadana funkcija  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Funkciju*

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (3.2)$$

*zovemo Laplaceovom transformacijom funkcije  $f(t)$ . Funkciju  $f(t)$  često nazivamo originalom, a funkciju  $F(s)$  slikom.*

### 3.1. Izračunavanje Laplaceovih transformacija

Pokažimo sada na nekoliko primjera kako se izračunavaju Laplaceove transformacije nekih funkcija.

**Primjer 3.1** (Laplaceova transformacija konstante). *Neka je  $f(t) = a$ , pri čemu je  $a \in \mathbb{R}$  neka konstanta. Uvrštavanjem funkcije  $f(t)$  u izraz (3.2) slijedi:*

$$F(s) = \int_0^{\infty} a e^{-st} dt = a \left( -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} \right) = \frac{a}{s}. \quad (3.3)$$

**Primjer 3.2** (Laplaceova transformacija potencije). *Odredimo Laplaceovu transformaciju funkcije  $f(t) = t^2$ . Uvrštavanjem u definiciju Laplaceove transformacije (3.2), te primjenom formule parcijalne integracije<sup>1</sup> slijedi:*

$$u = t^2, \quad du = 2t dt, \quad dv = e^{-st} dt, \quad v = -\frac{e^{-st}}{s}, \quad (3.4)$$

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \int_0^{\infty} t^2 e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} t^2 \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{s} 2t dt. \quad (3.5)$$

*Ponovnom primjenom formule parcijalne integracije i sređivanjem izraza dobivamo:*

$$u = 2t, \quad du = 2dt, \quad dv = e^{-st} dt, \quad v = -\frac{e^{-st}}{s}, \quad (3.6)$$

$$\mathcal{L}\{t^2\} = -\frac{e^{-st}}{s^2} 2t \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{2e^{-st}}{s^2} dt = -\frac{2}{s^3} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{2}{s^3}. \quad (3.7)$$

*Uzimajući da je  $f(t) = t^3$ , te primjenjujući isti postupak, samo s jednom parcijalnom integracijom više, dobivamo:*

$$\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{6}{s^4}. \quad (3.8)$$

---

<sup>1</sup>Formula parcijalne integracije dana je izrazom:

$$\int u dv = vu - \int v du.$$

Nastavimo li ovaj postupaka, lako možemo izvesti općenitiju formulu, tj. formulu za Laplace-ovu transformaciju funkcije  $f(t) = t^n$  koja glasi:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}. \quad (3.9)$$

**Primjer 3.3** (Laplaceova transformacija eksponencijalne funkcije). Neka je zadana funkcija  $f(t) = e^{at}$ . Uvrštavanjem funkcije u definiciju Laplaceove transformacije (3.2), te sređivanjem, dobivamo:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(s-a)} dt = -\frac{e^{-t(s-a)}}{s-a} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}. \quad (3.10)$$

Analognim postupkom možemo izvesti Laplaceove transformacije i drugih elementarnih funkcija, a najčešće korištene transformacije nalaze se u tablici 3.2.

Tablica 3.2. Laplaceove transformacije nekih elementarnih funkcija.

Funkcija $f(t)$	Slika $F(s)$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$e^{-at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$

U ovoj tablici možemo vidjeti da se često promatraju funkcije argumenta  $\omega t$ , pri čemu je  $\omega$  neka proizvoljna konstanta. Za transformaciju takvih funkcija koristimo se sljedećim teoremom.



**Teorem 3.1** (Teorem sličnosti). *Neka je  $f$  funkcija koja zadovoljava uvjete za postojanje Laplaceove transformacije. Tada za realnu konstantu  $\omega > 0$  vrijedi:*

$$\mathcal{L}\{f(\omega t)\} = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{s}{\omega}\right). \quad (3.11)$$

*Dokaz.* Prema definicije Laplaceove transformacije slijedi:

$$\mathcal{L}\{f(\omega t)\} = \int_0^{\infty} f(\omega t) e^{-st} dt. \quad (3.12)$$

Uvođenjem supstitucije:

$$u = \omega t, \quad du = \omega dt, \quad (3.13)$$

dobivamo:

$$\mathcal{L}\{f(\omega t)\} = \frac{1}{\omega} \int_0^{\infty} f(u) e^{-s\frac{u}{\omega}} du = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{s}{\omega}\right), \quad (3.14)$$

čime je teorem dokazan.  $\square$

Za primjenu Laplaceove transformacije od velike je važnosti i svojstvo linearnosti koje je direktna posljedica njene definicije putem integrala, a formalno je iskazano u sljedećoj propoziciji.

**Propozicija 3.1.** *Neka su  $f$  i  $g$  zadane funkcije, a  $F(s)$  i  $G(s)$  njihove Laplaceove transformacije te neka su  $a$  i  $b$  proizvoljne konstante. Tada vrijedi:*

$$\mathcal{L}\{af(\omega t) + bf(\omega t)\} = aF(s) + bG(s). \quad (3.15)$$

### 3.2. Egzistencija Laplaceove transformacije

U prethodnom poglavlju pokazali smo kako se izračunavaju Laplaceove transformacije nekih funkcija direktnim uvrštavanjem u izraz (3.2). Postavlja se pitanje je li moguće taj postupak napraviti za sve funkcije, odnosno koje uvjete funkcija mora zadovoljavati da bi postojala njena Laplaceova transformacija.

Ako se pogleda definicija Laplaceove transformacije jasno se uočavaju dva problema: integrabilnost i konvergencija nepravog integrala. Integrabilnost osiguravamo nametanjem uvjeta da funkcija  $f(t)$  mora biti po dijelovima neprekidna, s konačnim brojem prekida prve vrste. Konvergenciju pripadnog nepravog integrala osiguravamo nametanjem uvjeta eksponencijalnog rasta, odnosno tražimo da postoje konstante  $M > 0$  i  $a > 0$ , tako da vrijedi:

$$|f(t)| < Me^{at}. \quad (3.16)$$

### 3.3. Temeljna svojstva Laplaceove transformacije

U ovom poglavlju služeći se izvorom [4] navesti ćemo svojstva Laplaceove transformacije koja se najčešće koriste. Najprije navodimo i dokazujemo teorem o slici derivacije koji je ključan kod rješavanja diferencijalnih jednadžbi.

**Teorem 3.2** (O slici derivacije). *Ako vrijedi:*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \quad (3.17)$$

tada vrijedi i slijedeća tvrdnja:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0). \quad (3.18)$$

*Dokaz.* Dokaz se provodi metodom matematičke indukcije. Matematička indukcija je metoda dokazivanja koja se koristi za pokazivanje da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve. Sastoji se od dva koraka:

1. **Osnovni korak (baza indukcije):** Pokaže se da tvrdnja važi za početni broj (obično  $n = 1$ ).
2. **Induktivni korak:** Pretpostavi se da tvrdnja važi za neki prirodni broj  $m$  te se zatim pokaže da tvrdnja vrijedi i za broj  $m + 1$ .

Ako su oba koraka zadovoljena, zaključuje se da tvrdnja važi za sve prirodne brojeve. Ovaj postupak je povezan s petim Peanovim aksiomom, koji kaže:

**Propozicija 3.2.** *Ako skup  $S$  sadrži broj 1 i ako za svaki broj  $n$  u skupu  $S$  vrijedi da je i broj  $n + 1$  u skupu  $S$ , tada skup  $S$  sadrži sve prirodne brojeve.*

Pokažimo najprije bazu indukcije, odnosno provjerimo vrijedi li tvrdnja za  $n = 1$ . Neka je funkcija  $f(t)$  derivabilna funkcija, te neka je  $f'(t)$  njena derivacija. Uvrštavanjem u izraz (3.2), dobivamo:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt. \quad (3.19)$$

Uzmemo li da je:

$$u = e^{-st}, \quad du = -se^{-st}, \quad dv = f'(t)dt, \quad v = f(t), \quad (3.20)$$

primjenom formule parcijalne integracije dobivamo:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} se^{-st} f(t) dt - f(0), \quad (3.21)$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0). \quad (3.22)$$

Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj  $n = m$ :

$$\mathcal{L} \{f^{(m)}(t)\} = s^m F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} f^{(k)}(0). \quad (3.23)$$

Sada dokazujemo korak indukcije, tj. dokazujemo da tvrdnja vrijedi za  $(n = m + 1)$ , slijedi:

$$\mathcal{L} \{f^{(m+1)}(t)\} = \mathcal{L} \{f^{(m)'}(t)\} = s\mathcal{L} \{f^{(m)}(t)\} - f^{(m)}(0), \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{f^{(m+1)}(t)\} &= s \left( s^m F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} f^{(k)}(0) \right) - f^{(m)}(0) = \\ &= s^{m+1} F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k} f^{(k)}(0) - f^{(m)}(0), \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\mathcal{L} \{f^{(m+1)}(t)\} = s^{m+1} F(s) - \sum_{k=0}^m s^{m-k} f^{(k)}(0), \quad (3.26)$$

čime je tvrdnja pokazana.  $\square$

U primjenama se osim čistih diferencijalnih jednačbi često koriste i integralno-diferencijalne jednačbe, a za njihovo rješavanje bitan je teorem o slici integrala, koji je u nastavku dokazan.

**Teorem 3.3** (Teorem o slici integrala). *Neka je  $f$  funkcija koja zadovoljava uvjete za postojanje Laplaceove transformacije. Tada vrijedi:*

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{F(s)}{s}. \quad (3.27)$$

*Dokaz.* Iz izraza (3.2) direktnim uvrštavanjem dobivamo:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \int_0^\infty \left( \int_0^t f(\tau) d\tau \right) e^{-st} dt. \quad (3.28)$$

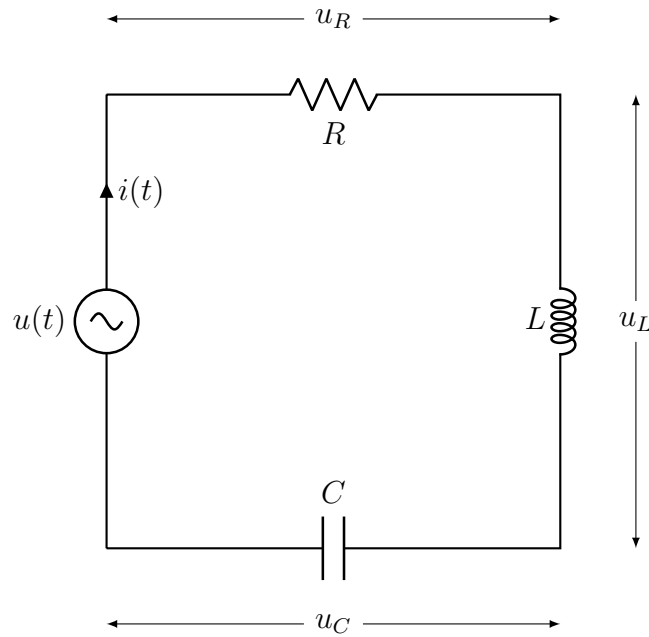
Na ovaj ćemo izraz primijeniti formulu parcijalne integracije, uzevši da je:

$$u = \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad du = f(t)dt, \quad dv = e^{-st} dt, \quad v = -\frac{e^{-st}}{s}. \quad (3.29)$$

Dobivamo slijedeći izraz:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = -\frac{1}{s} e^{-st} \int_0^t f(\tau) d\tau \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \frac{F(s)}{s}, \quad (3.30)$$

čime je tvrdnja dokazana.  $\square$



Slika 3.1. Shema spoja RLC kruga.

**Primjer 3.4.** Pokažimo sada primjenu teorema o slici derivacije i slici integrala na RLC krugu, koji se sastoji od otpornika otpora  $R$ , zavojnice induktiviteta  $L$ , kondenzatora kapaciteta  $C$  i nekog naponskog izvora  $u(t)$ . Također ćemo pretpostaviti da su vrijednosti komponenata kruga normirane zbog čega ne navodimo mjerne jedinice.

Kako se radi o serijskom spoju prikazanom na slici 3.1, prema drugom Kirchhoffovom zakonu<sup>2</sup>, napon  $u(t)$  je jednak zbroju padova napona  $u_R$ ,  $u_L$  i  $u_C$ , tj. vrijedi

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t), \quad (3.31)$$

odnosno

$$u(t) = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt, \quad (3.32)$$

gdje je  $i(t)$  struja ovisna o vremenu. Primjenom teorema 3.2 i 3.3 slijedi:

$$U(s) = RI(s) + sLI(s) - Li(0) + \frac{1}{C} \frac{I(s)}{s}. \quad (3.33)$$

Ako pretpostavimo da su energije nakupljene u kondenzatoru i zavojnici na početku jednake nuli, možemo pretpostaviti da je  $i(0) = 0$ . Uvrštavanjem tog početnog uvjeta i sređivanjem izraza (3.33) dobivamo:

$$I(s) = U(s) \frac{1}{R + sL + \frac{1}{sC}}. \quad (3.34)$$

Odredimo sada struju  $i(t)$  za sljedeće komponente kruga:

$$u(t) = 1, \quad R = 2, \quad L = 1, \quad C = 2, \quad (3.35)$$

<sup>2</sup>Drugi Kirchhoffov zakon glasi: zbroj svih električnih napona unutar zatvorene električne petlje je jednak nuli

Iz primjera 3.1 dobivamo da je  $U(s) = \frac{1}{s}$ . Uvrštavanjem ovih vrijednosti u izraz (3.34) slijedi:

$$I(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{2s} + 1}, \quad (3.36)$$

$$I(s) = \frac{1}{s^2 + s + \frac{1}{2}}. \quad (3.37)$$

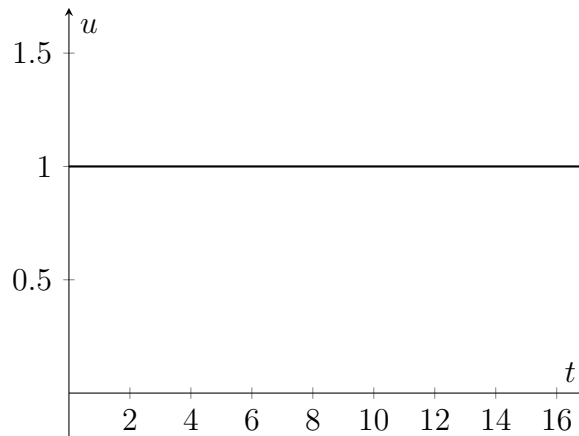
Sređivanjem izraza dobivamo:

$$I(s) = 2 \frac{\frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}, \quad (3.38)$$

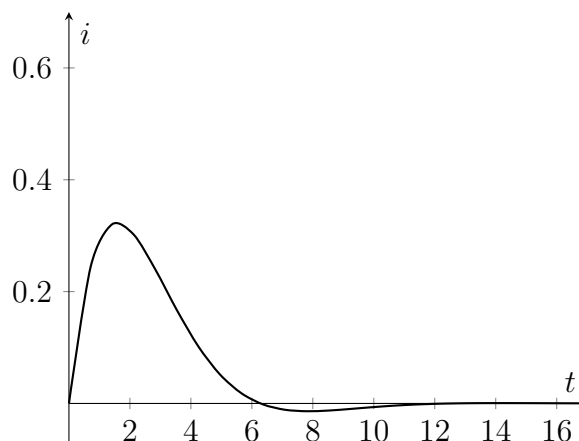
pa korištenjem tablice 3.2 nalazimo original funkcije struje u vremenu:

$$i(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{1}{2}t\right). \quad (3.39)$$

Na sljedećoj slici prikazan je ulazni napon  $u$ :



Slika 3.2. Grafički prikaz funkcije napona  $u$  u ovisnosti o vremenu  $t$



Slika 3.3. Grafički prikaz funkcije struje  $i$  u ovisnosti o vremenu  $t$

Na slici 3.3 prikazan je odziv, odnosno struja  $i(t)$  koja protékne krugom u trenutku uključenja napona izvora  $u$ .

Prilikom rješavanja diferencijalnih jednačina pomoću Laplaceovih transformacija može se pojaviti i Heavisideova funkcija te njezina Laplaceova transformacija.

**Definicija 3.3** (Heavisideova funkcija). *Heavisideova funkcija je funkcija definirana s:*

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (3.40)$$

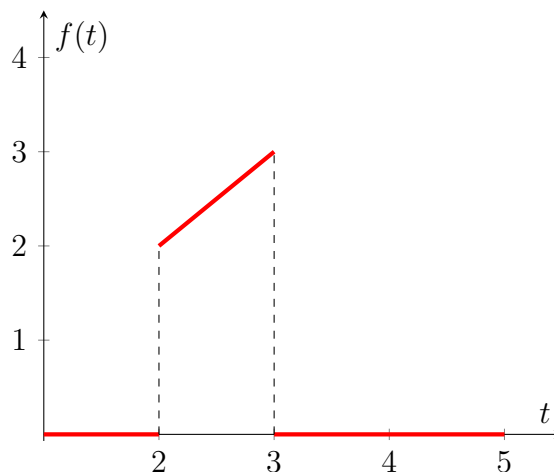
Heavisidova funkcija koristi se u teoriji signala, gdje služi za ograničavanje djelovanja funkcije na neki konkretan vremenski interval, kako je prikazano u sljedećem primjeru.

**Primjer 3.5.** *Neka je zadana funkcija  $f(t) = t$ . Ako djelovanje ove funkcije želimo ograničiti na interval  $[a, b]$ , primjenom Heavisidove funkcije možemo zapisati:*

$$f(t)(u(t - a) - u(t - b)), \quad (3.41)$$

gdje prva Heavisidova funkcija  $u(t - a)$  služi za uključenje funkcije  $f(t)$ , a druga Heavisideova funkcija  $u(t - b)$  služi za isključenje.

Ograničenje funkcije za  $a = 2$  i  $b = 3$  prikazano je grafički na sljedećoj slici.



Slika 3.4. Grafički prikaz funkcije  $f(t) = t$  čije je djelovanje ograničeno na interval  $[2, 3]$

Sljedeći teorem koristimo za izračunavanje Laplaceovih transformacija funkcija koje u sebi sadrže Heavisideovu funkciju.

**Teorem 3.4** (Teorem o pomaku originala). *Neka je  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , a  $u(t)$  Heavisideova funkcija. Tada vrijedi:*

$$\mathcal{L}\{f(t - a)u(t - a)\} = e^{-as}F(s). \quad (3.42)$$

*Dokaz.* Prema definiciji Heavisideove funkcije, koristeći izraz (3.2), slijedi:

$$\mathcal{L}\{f(t - a)u(t - a)\} = \int_0^{\infty} f(t - a)u(t - a)e^{-st} dt = \int_a^{\infty} f(t - a)e^{-st} dt. \quad (3.43)$$

Supstitucijom:

$$u = t - a, \quad du = dt, \quad (3.44)$$

dobivamo:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_0^{\infty} f(u)e^{-s(u+a)} du, \quad (3.45)$$

sređivanjem jednadžbe dobivamo konačan izraz:

$$e^{-as} \int_0^{\infty} f(u)e^{-su} du = e^{-as}F(s), \quad (3.46)$$

čime je tvrdnja dokazana.  $\square$

Pokažimo sada kako se koristi ovaj teorem.

**Primjer 3.6.** *Neka je zadana funkcija  $f(t) = t$  čije djelovanje ograničavamo na interval  $[1, 3]$ . U tom slučaju promatramo sljedeću funkciju:*

$$h(t) = f(t)(u(t-1) - u(t-3)) = t(u(t-1) - u(t-3)) = tu(t-1) - tu(t-3). \quad (3.47)$$

Da bi mogli primijeniti teorem o pomaku originala funkciju  $h(t)$  zapisujemo na sljedeći način:

$$h(t) = (t-1+1)u(t-1) - (t-3+3)u(t-3), \quad (3.48)$$

odnosno

$$h(t) = (t-1)u(t-1) + u(t-1) - (t-3)u(t-3) - 3u(t-3). \quad (3.49)$$

Primjenom teorema o pomaku dobivamo:

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = e^{-s} \frac{1}{s^2} + e^{-s} \frac{1}{s} - e^{-3s} \frac{1}{s^2} - 3e^{-3s} \frac{1}{s}. \quad (3.50)$$

### 3.4. Svojstva Laplaceove transformacije povezana s rješavanjem toplinske jednadžbe

U ovom poglavlju navesti ćemo neka specifična svojstva Laplaceove transformacije koja se primjenjuju u kontekstu rješavanja toplinske jednadžbe.

#### 3.4.1. Laplaceova transformacija drugog korijena

Kod rješavanja toplinske jednadžbe u  $s$  domeni često će se pojavljivati funkcije s drugim korijenom. Za dokaz teorema koji omogućuje rad s funkcijama koje u  $s$ -domeni imaju drugi korijen potrebni su nam sljedeći rezultati.

**Propozicija 3.3.** *Vrijedi jednakost*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (3.51)$$

*Dokaz.* Neka je:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx. \quad (3.52)$$

Kako bi izračunali vrijednost integrala  $I$  promotrimo sljedeći dvostruki integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = I^2. \quad (3.53)$$

Prelaskom na polarne koordinate ovaj integral poprima oblik:

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr. \quad (3.54)$$

Supstitucijom  $u = r^2$ , dobivamo  $du = 2r dr$ , te uvrštavanjem u izraz (3.54) slijedi:

$$I^2 = \pi \int_0^{\infty} e^{-u} du = \pi, \quad (3.55)$$

te je  $I = \sqrt{\pi}$  čime je tvrdnja dokazana. □

**Propozicija 3.4.** *Vrijedi jednakost*

$$\int_0^{\infty} e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (3.56)$$

*Dokaz.* Uvedimo supstituciju:

$$v = \frac{a}{x}, \quad x = \frac{a}{v}, \quad dx = -\frac{a}{v^2} dv. \quad (3.57)$$

Dobivamo:

$$\int_0^{\infty} e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx = - \int_{\infty}^0 e^{-(v-\frac{a}{v})^2} \frac{a}{v^2} dv = \int_0^{\infty} e^{-(v-\frac{a}{v})^2} \frac{a}{v^2} dv = \int_0^{\infty} e^{-(x-\frac{a}{x})^2} \frac{a}{x^2} dx. \quad (3.58)$$

Sada je

$$2 \int_0^{\infty} e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx + \int_0^{\infty} e^{-(x-\frac{a}{x})^2} \frac{a}{x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-(x-\frac{a}{x})^2} \left(1 + \frac{a}{x^2}\right) dx, \quad (3.59)$$

pa vrijedi

$$\int_0^{\infty} e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(x-\frac{a}{x})^2} \left(1 + \frac{a}{x^2}\right) dx. \quad (3.60)$$



Sada možemo uvesti supstituciju

$$y = x - \frac{a}{x}, \quad dy = \left(1 + \frac{a}{x^2}\right) dx. \quad (3.61)$$

Slijedi:

$$\int_0^{\infty} e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy. \quad (3.62)$$

Sada, prema rezultatu prethodne propozicije slijedi

$$\int_0^{\infty} e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (3.63)$$

čime je tvrdnja dokazana.  $\square$

**Teorem 3.5.** *Neka je zadana funkcija  $f(t)$  i neka je  $F(s)$  njena Laplaceova transformacija. Tada vrijedi:*

$$\mathcal{L}^{-1} \{F(\sqrt{s})\} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_0^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{4t}} f(z) dz. \quad (3.64)$$

*Dokaz.* Prema definiciji Laplaceove transformacije vrijedi

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \mathcal{L}^{-1} \{F(s)\} dt, \quad (3.65)$$

odnosno

$$F(\sqrt{s}) = \int_0^{\infty} e^{-st} \mathcal{L}^{-1} \{F(\sqrt{s})\} dt. \quad (3.66)$$

Uvrštavanjem izraza (3.64) u (3.66) dobivamo:

$$F(\sqrt{s}) = \int_0^{\infty} e^{-st} \left[ \frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_0^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{4t}} f(z) dz \right] dt. \quad (3.67)$$

Zamjenom poretka integriranja slijedi:

$$F(\sqrt{s}) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} f(z) \left[ \int_0^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{4t}} \frac{e^{-st}}{\sqrt{4t^3}} dt \right] dz. \quad (3.68)$$

Uvođenjem supstitucije

$$\tau = \frac{z}{\sqrt{4t}}, \quad d\tau = -\frac{1}{2} \frac{z}{\sqrt{4t^3}} dt, \quad (3.69)$$

promatrani integral poprima oblik:

$$F(\sqrt{s}) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} f(z) \left[ \int_{\infty}^0 -2e^{-\frac{z^2 s}{4\tau^2}} e^{-\tau^2} d\tau \right] dz, \quad (3.70)$$

odnosno

$$F(\sqrt{s}) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} f(z) \left[ \int_0^{\infty} 2e^{-\left(\tau^2 + \frac{z^2 s}{4\tau^2}\right)} d\tau \right] dz. \quad (3.71)$$

Uočimo da vrijedi:

$$\tau^2 + \frac{z^2 s}{4\tau^2} = \left( \tau - \frac{z\sqrt{s}}{2\tau} \right)^2 + z\sqrt{s}, \quad (3.72)$$

pa uvrštavanjem (3.72) u (3.73) dobivamo

$$F(\sqrt{s}) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} f(z) e^{-z\sqrt{s}} \left[ \int_0^{\infty} e^{-\left(\tau - \frac{z\sqrt{s}}{2\tau}\right)^2} d\tau \right] dz. \quad (3.73)$$

Korištenjem rezultata prethodne propozicije slijedi:

$$F(\sqrt{s}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} f(z) \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-z\sqrt{s}} \right] dz = \int_0^{\infty} f(z) e^{-z\sqrt{s}} dz, \quad (3.74)$$

čime je tvrdnja dokazana.  $\square$

Pokažimo sada na nekoliko primjera primjenu ovog teorema.

**Primjer 3.7.** *Odredimo original funkcije*

$$H(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}. \quad (3.75)$$

Uočimo da za primjenu teorema 3.5 trebamo koristiti funkciju

$$F(s) = \frac{1}{s}, \quad (3.76)$$

čiji je original prema tablici 3.2 funkcija

$$f(t) = 1. \quad (3.77)$$

Uvrštavanjem ovog para funkcija u (3.64) dobivamo:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_0^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{4t}} dz. \quad (3.78)$$

Za rješavanje integrala s desne strane ove jednakosti uzimamo supstituciju

$$\frac{-z^2}{4t} = u, \quad z dz = -2t du. \quad (3.79)$$

Slijedi:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s}} \right\} = \frac{-2t}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_0^{-\infty} e^u du = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}, \quad (3.80)$$

čime smo pokazali da vrijedi

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{s}}. \quad (3.81)$$

**Primjer 3.8.** *Odredimo original funkcije*

$$H(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-a\sqrt{s}}. \quad (3.82)$$

*Uočimo da za primjenu teorema 3.5 trebamo koristiti funkciju*

$$F(s) = \frac{1}{s} e^{-as}. \quad (3.83)$$

*Original ove funkcije nalazimo primjenom teorema 3.4. Dobivamo*

$$f(t) = u(t - a). \quad (3.84)$$

*Uvrštavanjem ovog para funkcija u (3.64) dobivamo:*

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-a\sqrt{s}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_0^{\infty} z e^{\frac{-z^2}{4t}} u(z - a) dz. \quad (3.85)$$

*Prema definiciji Heavisideove funkcije slijedi:*

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-a\sqrt{s}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_a^{\infty} z e^{\frac{-z^2}{4t}} dz. \quad (3.86)$$

*Uvedimo supstituciju:*

$$\frac{-z^2}{4t} = u, \quad z dz = -2t du. \quad (3.87)$$

*Dobivamo:*

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_a^{\infty} z e^{\frac{-z^2}{4t}} dz = \frac{-1}{\sqrt{\pi t}} \int_{\frac{-a^2}{4t}}^{-\infty} e^u du = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-a^2}{4t}}, \quad (3.88)$$

*pa je*

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-a\sqrt{s}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-a^2}{4t}}. \quad (3.89)$$

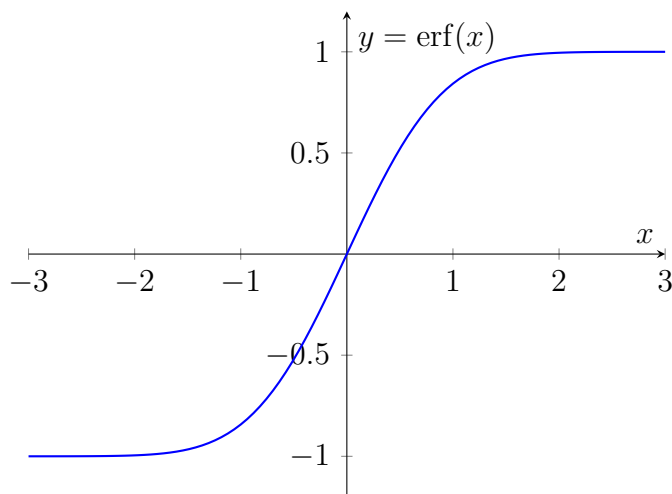
## 4. Funkcije pogreške

Funkcija pogreške (engl. *error function*),  $x \mapsto \operatorname{erf}(x)$  važna je matematička funkcija koja se pojavljuje u različitim područjima znanosti i inženjerstva, kroz ovo poglavlje bit će opisana funkcija pogreške, njena aproksimacija, te njezina svojstva služeći se izvorom [5]. Ova funkcija izračunava vjerojatnost da je vrijednost slučajne varijabla s normalnom distribucijom i srednjom vrijednošću nula<sup>1</sup> manja od  $x$ , a definirana je izrazom:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (4.1)$$

Kako je koncentracija topline najveća oko izvora i postepeno opada s udaljenošću, što odgovara normalnoj distribuciji, prirodno je očekivati da će funkcija pogreške biti povezana s toplinskom jednadžbom.

Funkcija pogreške grafički je prikaza na sljedećoj slici.



Slika 4.1. Grafički prikaz funkcije pogreške  $\operatorname{erf}(x)$

U definicijskom izrazu funkcija pogreške (4.1) nalazi se integral koji se ne može egzaktno riješiti što izračun vrijednosti funkcije pogreške čini izuzetno kompleksnim. Drugim riječima, praktična primjena funkcije pogreške ovisna je o aproksimacijama.

Graf funkcije pogreške prikazan na slici 4.1 kvalitativno je sličan grafu funkcije  $x \rightarrow \tanh(x)$  te se nameće ideja da se tangens hiperbolni iskoristi kao osnova za formiranje aproksimacije funkcije pogreške [5].

---

<sup>1</sup>Slučajna varijable s normalnom distribucijom i srednjom vrijednošću nula je varijabla čije su vrijednosti distribuirane oko nule u obliku zvonaste krivulje, pri čemu su vrednosti bliže nuli najverovatnije.

Jedna od najpoznatijih aproksimacija funkcija pogreške dana je izrazom:

$$\operatorname{erf}(x) \approx z(x) = \tanh\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x + \frac{11}{123}x^3\right)\right), \quad (4.2)$$

s greškom aproksimacije manjom od  $3.58 \times 10^{-4}$ . Kvaliteta te aproksimacije prikazana je u sljedećoj tablici.

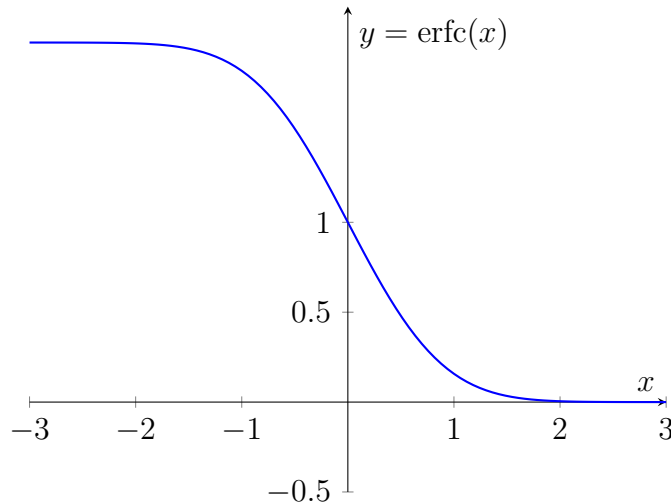
*Tablica 4.1. Vrijednosti funkcije  $\operatorname{erf}(x)$  i aproksimacije  $z(x)$  za odabrane vrijednosti  $x$ .*

$x$	$\operatorname{erf}(x)$	$z(x)$
0	0	0
0.02	0.022564575	0.0225646
0.1	0.112462916	0.112461
0.3	0.328626759	0.328583
1	0.842700793	0.842374
1.5	0.966105146	0.966296
3	0.999977910	0.99999

Ako se funkcija pogreške treba evaluirati u vrijednostima koje se približavaju beskonačnosti kod aproksimacija dolazi do problematike sa stabilnosti uzrokovane prvenstveno preciznošću računalnog izračunavanja. U tim se slučajevima koristi tzv. komplementarna funkcija pogreške  $x \mapsto \operatorname{erfc}(x)$  definirana s:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt. \quad (4.3)$$

Grafički prikaz komplementarne funkcije pogreške prikazan je na sljedećoj slici.



Slika 4.2. Grafički prikaz komplementarne funkcije pogreške  $\text{erfc}(x)$

#### 4.1. Laplaceove transformacije s funkcijom pogreške

U nastavku poglavlja će biti dokazane neke od Laplaceovih transformacija koje uključuju funkciju pogreške, a potrebne su za rješavanje toplinske jednadžbe

**Teorem 4.1.** *Vrijedi jednakost*

$$\mathcal{L} \left\{ \text{erfc} \left( \frac{a}{2\sqrt{t}} \right) \right\} = \frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}}, \quad (4.4)$$

pri čemu je  $a$  realna konstanta.

*Dokaz.* Ovaj rezultat dokazati ćemo primjenom teorema 3.5, pri čemu koristimo funkciju

$$F(s) = \frac{1}{s^2} e^{-as}. \quad (4.5)$$

Original ove funkcije nalazimo primjenom teorema 3.4. Dobivamo

$$f(t) = (t - a)u(t - a). \quad (4.6)$$

Uvrštavanjem ovog para funkcija u (3.64) dobivamo:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_0^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{4t}} (z - a)u(z - a) dz. \quad (4.7)$$

Prema definiciji Heavisideove funkcije slijedi:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_a^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{4t}} (z - a) dz \quad (4.8)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_a^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{4t}} dz - \frac{a}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_a^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{4t}} dz. \quad (4.9)$$

Za rješavanje prvog integrala u ovom izrazu koristimo se formulom parcijalne integracije pri čemu uzimamo

$$u = z, \quad du = dz, \quad dv = ze^{-\frac{z^2}{4t}} dz, \quad v = -2te^{-\frac{z^2}{4t}}. \quad (4.10)$$

Dobivamo:

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_a^\infty z^2 e^{-\frac{z^2}{4t}} dz = \frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \left( -2tze^{-\frac{z^2}{4t}} \Big|_a^\infty + 2t \int_a^\infty e^{-\frac{z^2}{4t}} dz \right) = \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \left( 2tae^{-\frac{a^2}{4t}} + 2t \int_a^\infty e^{-\frac{z^2}{4t}} dz \right). \quad (4.12)$$

Sada uzimamo supstituciju

$$\frac{z}{2\sqrt{t}} = u, \quad \frac{dz}{2\sqrt{t}} = du, \quad dz = 2\sqrt{t}du, \quad (4.13)$$

te dobivamo:

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_a^\infty z^2 e^{-\frac{z^2}{4t}} dz = \frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \left( 2tae^{-\frac{a^2}{4t}} + 4t\sqrt{t} \int_{\frac{a}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-u^2} dz \right). \quad (4.14)$$

Koristeći (4.3) ovaj izraz možemo pisati u obliku:

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_a^\infty z^2 e^{-\frac{z^2}{4t}} dz = \frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \left( 2tae^{-\frac{a^2}{4t}} + 4t\sqrt{t} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{a}{2\sqrt{t}} \right) \right) = \quad (4.15)$$

$$\frac{a}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}} + \operatorname{erfc} \left( \frac{a}{2\sqrt{t}} \right). \quad (4.16)$$

Sada prelazimo na drugi integral u izrazu (4.9). Njega ćemo riješiti supstitucijom:

$$\frac{-z^2}{4t} = u, \quad z dz = -2t du. \quad (4.17)$$

Dobivamo:

$$\frac{a}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_a^\infty ze^{-\frac{z^2}{4t}} dz = \frac{-a}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\frac{a^2}{4t}}^{-\infty} e^u du = \frac{a}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}. \quad (4.18)$$

Konačno, uvrštavanjem (4.16) i (4.18) u (4.9) dobivamo:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}} \right\} = \operatorname{erfc} \left( \frac{a}{2\sqrt{t}} \right), \quad (4.19)$$

čime je tvrdnja teorema dokazana. □

**Teorem 4.2.** *Vrijedi jednakost*

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{2t}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}} - a \operatorname{erfc} \left( \frac{a}{2\sqrt{t}} \right) \right\} = \frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-a\sqrt{s}}, \quad (4.20)$$

pri čemu je  $a$  realna konstanta.

*Dokaz.* Ovaj rezultat dokazati ćemo primjenom teorema 3.5, pri čemu koristimo funkciju

$$F(s) = \frac{1}{s^3} e^{-as}. \quad (4.21)$$

Original ove funkcije nalazimo primjenom teorema 3.4. Dobivamo

$$f(t) = \frac{1}{2}(t-a)^2 u(t-a). \quad (4.22)$$

Uvrštavanjem ovog para funkcija u (3.64) dobivamo:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-a\sqrt{s}} \right\} = \frac{1}{2\sqrt{4\pi t^3}} \int_0^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{4t}} (z-a)^2 u(z-a) dz. \quad (4.23)$$

Prema definiciji Heavisideove funkcije slijedi:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-a\sqrt{s}} \right\} = \frac{1}{2\sqrt{4\pi t^3}} \int_a^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{4t}} (z-a)^2 dz \quad (4.24)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{4\pi t^3}} \int_a^{\infty} z^3 e^{-\frac{z^2}{4t}} dz - \frac{a}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_a^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{4t}} dz + \frac{a^2}{2\sqrt{4\pi t^3}} \int_a^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{4t}} dz. \quad (4.25)$$

Za rješavanje prvog integrala u ovom izrazu koristimo se formulom parcijalne integracije pri čemu uzimamo

$$u = z^2, \quad du = 2z dz, \quad dv = z e^{-\frac{z^2}{4t}} dz, \quad v = -2t e^{-\frac{z^2}{4t}}. \quad (4.26)$$

Dobivamo:

$$\frac{1}{2\sqrt{4\pi t^3}} \int_a^{\infty} z^3 e^{-\frac{z^2}{4t}} dz = \frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \left( -tz^2 e^{-\frac{z^2}{4t}} \Big|_a^{\infty} + 2t \int_a^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{4t}} dz \right) = \quad (4.27)$$

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \left( ta^2 e^{-\frac{a^2}{4t}} + 2t \int_a^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{4t}} dz \right). \quad (4.28)$$

Integral u izrazu (4.28) riješit ćemo supstitucijom:

$$\frac{-z^2}{4t} = u, \quad z dz = -2t du. \quad (4.29)$$

Dobivamo:

$$\frac{2t}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_a^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{4t}} dz = \frac{-2t}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\frac{a^2}{4t}}^{-\infty} e^u du = \frac{2t}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}. \quad (4.30)$$

Uvrštavanjem (4.30) u (4.28) dobivamo:

$$\frac{1}{2\sqrt{4\pi t^3}} \int_a^{\infty} z^3 e^{-\frac{z^2}{4t}} dz = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}} + \frac{2t}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}. \quad (4.31)$$



Drugi integral u izrazu (4.25) identičan je integralu iz (4.11), pa je:

$$\frac{a}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_a^\infty z^2 e^{-\frac{z^2}{4t}} dz = \frac{a^2}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}} + a \operatorname{erfc} \left( \frac{a}{2\sqrt{t}} \right). \quad (4.32)$$

Treći integral u izrazu (4.25) razlikuje se od integrala u (4.18) samo po koeficijentu. Stoga je:

$$\frac{a^2}{2\sqrt{4\pi t^3}} \int_a^\infty z e^{-\frac{z^2}{4t}} dz = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}. \quad (4.33)$$

Konačno, uvrštavanjem (4.31), (4.32) i (4.33) u (4.25) dobivamo:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-a\sqrt{s}} \right\} = \frac{2t}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}} - a \operatorname{erfc} \left( \frac{a}{2\sqrt{t}} \right), \quad (4.34)$$

čime je tvrdnja teorema dokazana. □

**Teorem 4.3.** *Vrijedi jednakost*

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - a e^{a^2 t} \operatorname{erfc} (a\sqrt{t}) \right\} = \frac{1}{\sqrt{s+a}}, \quad (4.35)$$

pri čemu je  $a$  realna konstanta.

*Dokaz.* Uočimo da za primjenu teorema 3.5 trebamo koristiti funkciju

$$F(s) = \frac{1}{s+a}, \quad (4.36)$$

čiji je original prema tablici 3.2 funkcija

$$f(t) = e^{-at}. \quad (4.37)$$

Uvrštavanjem ovog para funkcija u (3.64) dobivamo:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s+a}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_0^\infty z e^{-\frac{z^2}{4t}} e^{-az} dz = \frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_0^\infty z e^{-\left(\frac{z^2}{4t} + az\right)} dz = \quad (4.38)$$

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_0^\infty z e^{-\left(\frac{z}{2\sqrt{t}} + a\sqrt{t}\right)^2 + a^2 t} dz = \frac{e^{a^2 t}}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_0^\infty z e^{-\left(\frac{z}{2\sqrt{t}} + a\sqrt{t}\right)^2} dz. \quad (4.39)$$

Za rješavanje ovog integrala najprije uzimamo supstituciju

$$\frac{z}{2\sqrt{t}} + a\sqrt{t} = u, \quad dz = 2\sqrt{t} du, \quad z = 2\sqrt{t}u - 2at. \quad (4.40)$$

Slijedi:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s+a}} \right\} = \frac{e^{a^2 t}}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_{a\sqrt{t}}^\infty (2\sqrt{t}u - 2at) e^{-u^2} 2\sqrt{t} du = \quad (4.41)$$

$$\frac{e^{a^2t}}{t\sqrt{\pi}} \int_{a\sqrt{t}}^{\infty} (2\sqrt{t}u - 2at)e^{-u^2} du = \frac{2e^{a^2t}}{\sqrt{t\pi}} \int_{a\sqrt{t}}^{\infty} ue^{-u^2} du - \frac{2ae^{a^2t}}{\sqrt{\pi}} \int_{a\sqrt{t}}^{\infty} e^{-u^2} du = \quad (4.42)$$

$$\frac{2e^{a^2t}}{\sqrt{t\pi}} \int_{a\sqrt{t}}^{\infty} ue^{-u^2} du - ae^{a^2t} \operatorname{erfc}(a\sqrt{t}). \quad (4.43)$$

Za rješavanje preostalog integrala u ovom izrazu koristimo supstituciju:

$$-u^2 = v, \quad -2udu = dv. \quad (4.44)$$

Dobivamo:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s+a}} \right\} = -\frac{e^{a^2t}}{\sqrt{t\pi}} \int_{-a^2t}^{-\infty} e^v dv - ae^{a^2t} \operatorname{erfc}(a\sqrt{t}) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - ae^{a^2t} \operatorname{erfc}(a\sqrt{t}), \quad (4.45)$$

čime je tvrdnja teorema dokazana. □

**Teorem 4.4.** *Vrijedi jednakost*

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} - e^{a+t} \operatorname{erfc} \left( \frac{a}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} \right) \right\} = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s+1}}, \quad (4.46)$$

pri čemu je  $a$  realna konstanta.

*Dokaz.* Uočimo da za primjenu teorema 3.5 trebamo koristiti funkciju

$$F(s) = \frac{e^{-as}}{s+1}, \quad (4.47)$$

čiji je original prema tablici 3.2 i teoremu o pomaku originala funkcija

$$f(t) = u(t-a)e^{-(t-a)}. \quad (4.48)$$

Uvrštavanjem ovog para funkcija u (3.64) dobivamo:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s+a}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_0^{\infty} ze^{-\frac{z^2}{4t}} u(z-a)e^{-(z-a)} dz = \frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_a^{\infty} ze^{-\left(\frac{z^2}{4t}+z-a\right)} dz = \quad (4.49)$$

$$\frac{e^a}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_a^{\infty} ze^{-\left(\frac{z}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right)^2+t} dz = \frac{e^{a+t}}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_a^{\infty} ze^{-\left(\frac{z}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right)^2} dz. \quad (4.50)$$

Za rješavanje ovog integrala najprije uzimamo supstituciju

$$\frac{z}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} = u, \quad dz = 2\sqrt{t} du, \quad z = 2\sqrt{t}u - 2t. \quad (4.51)$$

Slijedi:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s+a}} \right\} = \frac{e^{a+t}}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_{\frac{a}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}}^{\infty} (2\sqrt{t}u - 2t)e^{-u^2} 2\sqrt{t} du = \quad (4.52)$$

$$\frac{e^{a+t}}{t\sqrt{\pi}} \int_{\frac{a}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}}^{\infty} (2\sqrt{t}u - 2t)e^{-u^2} du = \frac{2e^{a+t}}{\sqrt{t\pi}} \int_{\frac{a}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}}^{\infty} ue^{-u^2} du - \frac{2e^{a+t}}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{a}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}}^{\infty} e^{-u^2} du = \quad (4.53)$$

$$\frac{2e^{a+t}}{\sqrt{t\pi}} \int_{\frac{a}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}}^{\infty} ue^{-u^2} du - e^{a+t} \operatorname{erfc} \left( \frac{a}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} \right). \quad (4.54)$$

Za rješavanje preostalog integrala u ovom izrazu koristimo supstituciju:

$$-u^2 = v, \quad -2udu = dv. \quad (4.55)$$

Dobivamo:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s+a}} \right\} = -\frac{e^{a+t}}{\sqrt{t\pi}} \int_{-\left(\frac{a^2}{4t}+a+t\right)}^{-\infty} e^v dv - e^{a+t} \operatorname{erfc} \left( a\sqrt{t} \right) = \quad (4.56)$$

$$\frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} - e^{a+t} \operatorname{erfc} \left( \frac{a}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} \right) \quad (4.57)$$

čime je tvrdnja teorema dokazana. □

## 5. Obične linearne diferencijalne jednačbe drugog reda s konstantnim koeficijentima

U sljedećem poglavlju ćemo vidjeti kako se parcijalne diferencijalne jednačbe metodom Laplaceovih transformacija svode na obične diferencijalne jednačbe. Toplinska jednačba, koju u ovom radu rješavamo, svodi se na običnu linearnu diferencijalnu jednačbu s konstantnim koeficijentima oblika

$$y'' - a^2y = b, \quad (5.1)$$

gdje su  $a$  i  $b$  dane konstante.

Postoji više načina rješavanja te jednačbe, a ovdje je rješavamo putem Laplaceovih transformacija. Za početak primijenimo teorem o slici derivacije 3.2, slijedi:

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) - a^2Y = \frac{b}{s}. \quad (5.2)$$

Sređivanjem jednačbe dobivamo:

$$Y(s^2 - a^2) = \frac{b}{s} + sy(0) + y'(0), \quad (5.3)$$

$$Y(s) = \frac{b}{s(s-a)(s+a)} + \frac{sy(0)}{(s-a)(s+a)} + \frac{y'(0)}{(s-a)(s+a)}. \quad (5.4)$$

Uočimo da vrijede slijedeći izrazi:

$$\frac{1}{s(s-a)(s+a)} = -\frac{1}{a^2s} + \frac{1}{2a^2(s-a)} + \frac{1}{2a^2(s+a)}, \quad (5.5)$$

$$\frac{s}{(s-a)(s+a)} = \frac{1}{2(s-a)} + \frac{1}{2(s+a)}, \quad (5.6)$$

$$\frac{1}{(s-a)(s+a)} = \frac{1}{2a} \frac{1}{s-a} - \frac{1}{2a} \frac{1}{s+a}, \quad (5.7)$$

uz pomoć kojih sada možemo zapisati:

$$Y(s) = -\frac{b}{a^2s} + \left( \frac{b}{2a^2} + \frac{y(0)}{2} + \frac{y'(0)}{2a} \right) \frac{1}{s-a} + \left( \frac{b}{2a^2} + \frac{y(0)}{2} - \frac{y'(0)}{2a} \right) \frac{1}{s+a}. \quad (5.8)$$

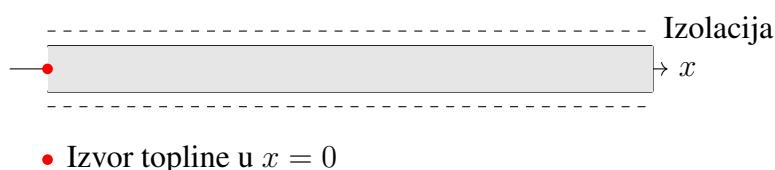
Na ovaj izraz primjenjujemo inverznu Laplaceovu transformaciju, te dobivamo konačno rješenje u vremenskoj domeni:

$$y(t) = -\frac{b}{a^2} + \left( \frac{b}{2a^2} + \frac{y(0)}{2} + \frac{y'(0)}{2a} \right) e^{at} + \left( \frac{b}{2a^2} + \frac{y(0)}{2} - \frac{y'(0)}{2a} \right) e^{-at}. \quad (5.9)$$

## 6. Rješavanje toplinske jednačbe s Dirichletovim rubnim uvjetom

Promatrat ćemo beskonačno dug cilindrični štap čija je bočna površina savršeno izolirana tako da toplina kroz nju ne može niti ući niti izaći. Radi jednostavnosti, pretpostavit ćemo da je štap napravljen od materijala toplinske difuzivnosti  $\kappa = 1$ .

Kako bi mogli modelirati ovaj problem, moramo ga najprije smjestiti u koordinatni sustav. Stoga ćemo pretpostaviti da je štap postavljen duž pozitivnog dijela  $x$ -osi s jednim krajem u  $x = 0$ , a drugim u  $x = \infty$ .



Slika 6.1. Grafički prikaz beskonačno dugog cilindričnog štapa i opisanih uvjeta

Prema tome, distribucija topline bit će opisana toplinskom jednačbom (2.9):

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (6.1)$$

na domeni

$$0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty. \quad (6.2)$$

Kako bi problem imao jedinstveno rješenje moramo postaviti početne i rubne uvjete. Radi jednostavnosti pretpostavit ćemo da je u trenutku  $t = 0$  temperatura štapa jednaka  $u_0$  kroz čitavu duljinu. Drugim riječima, vrijediti će početni uvjet

$$u(x, 0) = u_0, \quad 0 < x < \infty. \quad (6.3)$$

U trenutku  $t = 0$  temperatura lijevog kraja štapa povećala se na vrijednost  $C$  i i više se ne mijenja. To znači da će vrijediti Dirichletov rubni uvjet

$$u(0, t) = C, \quad 0 < t < \infty. \quad (6.4)$$

Štap je toliko dug da se mogu zanemariti svi učinci zbog njegovog desnog kraja, odnosno rubni uvjet za  $x = \infty$  nije potrebno nametati.

Primijenimo sada Laplaceovu transformaciju na izraz (6.1), pri čemu  $t$ -domenu pretvaramo u  $s$ -domenu. Temeljem teorema o slici derivacije dobivamo:

$$sU(x, s) - u(x, 0) = \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right\}. \quad (6.5)$$

Kako je integriranje s obzirom na varijablu  $t$  neovisno o deriviranju po varijabli  $x$ , slijedi:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L} \{ u(x, t) \} = U''(x, s). \quad (6.6)$$

Uvrštavanjem (6.6) i (6.3) u (6.5) dobivamo običnu diferencijalnu jednadžbu oblika

$$U''(x, s) - sU(x, s) = -u_0. \quad (6.7)$$

Laplaceova transformacija rubnog uvjeta (6.4) daje

$$U(0, s) = \frac{C}{s}. \quad (6.8)$$

Diferencijalna jednadžba (6.7) obična je linearna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima oblika (5.1) koju smo riješili u prethodnom poglavlju.

Uspoređujući (6.7) s (5.1) možemo odrediti koeficijente  $a$  i  $b$  iz prethodne jednadžbe (5.1):

$$a = \sqrt{s}, \quad b = -u_0. \quad (6.9)$$

Uvrštavanjem ovih koeficijenata u izraz (5.9) slijedi:

$$\begin{aligned} U(x, s) = & \frac{u_0}{s} + \left( -\frac{u_0}{2s} + \frac{U(0, s)}{2} + \frac{U'(0, s)}{2\sqrt{s}} \right) e^{x\sqrt{s}} \\ & + \left( -\frac{u_0}{2s} + \frac{U(0, s)}{2} - \frac{U'(0, s)}{2\sqrt{s}} \right) e^{-x\sqrt{s}}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

što možemo zapisati kao:

$$U(x, s) = C_1 e^{\sqrt{s}x} + C_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{u_0}{s}, \quad (6.11)$$

gdje su  $C_1$  i  $C_2$  definirani s:

$$C_1 = -\frac{u_0}{2s} + \frac{U(0, s)}{2} + \frac{U'(0, s)}{2\sqrt{s}}, \quad (6.12)$$

$$C_2 = -\frac{u_0}{2s} + \frac{U(0, s)}{2} - \frac{U'(0, s)}{2\sqrt{s}}. \quad (6.13)$$

Kako rješenje  $u(x, t)$  mora ostati ograničeno kad  $x \rightarrow \infty$ , takvo mora biti i rješenje  $U(x, s)$ . Zbog toga  $C_1$  mora biti postavljen na nula. Sada (6.11) poprima oblik:

$$U(x, s) = C_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{u_0}{s}. \quad (6.14)$$

Odredimo sada  $C_2$ . Znajući da je  $C_1$  jednak nuli, koristeći izraz (6.12) možemo zapisati:

$$-\frac{u_0}{2s} + \frac{U(0, s)}{2} + \frac{U'(0, s)}{2\sqrt{s}} = 0, \quad (6.15)$$

pa vrijedi:

$$\frac{U'(0, s)}{2\sqrt{s}} = \frac{u_0}{2s} - \frac{U(0, s)}{2}. \quad (6.16)$$

Uvrštavajući izraz (6.16) u izraz (6.13) dobivamo:

$$C_2 = -\frac{u_0}{2s} + \frac{U(0, s)}{2} - \frac{u_0}{2s} + \frac{U(0, s)}{2}, \quad (6.17)$$

pa iz (6.8) slijedi:

$$C_2 = \frac{C}{s} - \frac{u_0}{s}. \quad (6.18)$$

Konačno, uvrštavanjem (6.18) u (6.14) slijedi:

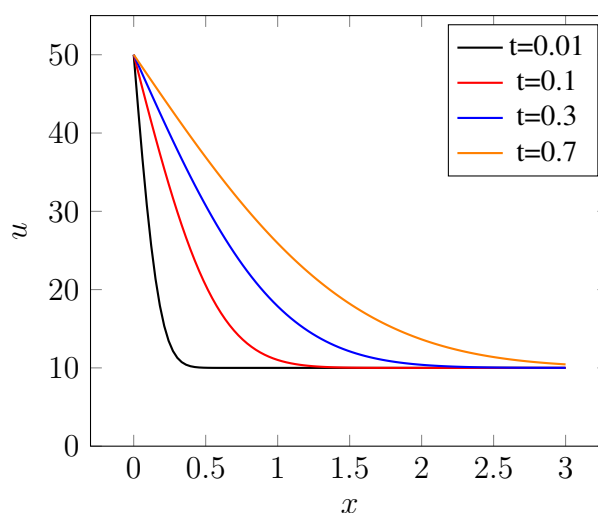
$$U(x, s) = \left( \frac{C}{s} - \frac{u_0}{s} \right) e^{-x\sqrt{s}} + \frac{u_0}{s}. \quad (6.19)$$

Sada se možemo vratiti u  $t$ -domenu, pri čemu koristimo svojstvo (4.19) i tablicu Laplaceovih transformacija 3.2. Dobivamo:

$$u(x, t) = (C - u_0) \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) + u_0, \quad (6.20)$$

što je rješenje opisanog problema.

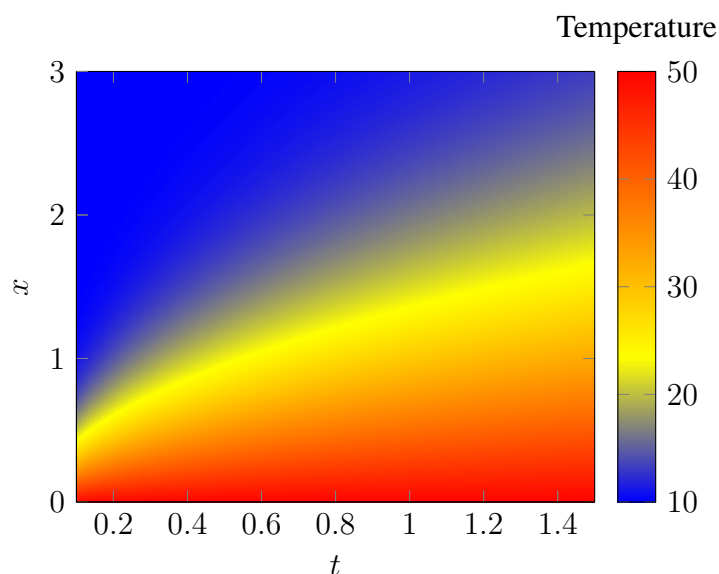
Na sljedećoj slici prikazano je rješenje za  $u_0 = 10^\circ\text{C}$  i  $C = 50^\circ\text{C}$ , u nekoliko vremenskih trenutaka.



Slika 6.2. Grafički prikaz promjene temperature štapa kroz vrijeme

Iz grafičkog prikaza možemo uočiti da se kroz vrijeme  $t$ , početak štapa drži na konstantnoj temperaturi od  $50^\circ\text{C}$ , te da je u ostatku štapa temperatura  $10^\circ\text{C}$  kako je opisano rubnim i početnim uvjetima. Protokom vremena  $t$  uočavamo da se temperatura niz duljinu štapa povišuje, što je fizikalno i očekivano.

Prikažimo rješenje ovog problema i na drugi način.



*Slika 6.3. 2D prikaz promjene temperature  $u$ , u prostoru  $x$ , kroz vrijeme  $t$*

Istaknimo da je u ovom primjeru korišten jednostavni Dirichletov rubni uvjet, a to uvelike olakšava postupak rješavanja problema. Promjenom rubnih uvjeta, Laplaceove transformacije toplinske jednadžbe (6.5) ostaju iste, također ostaje isto i traženje rješenja diferencijalne jednadžbe (6.7). Međutim do promjene dolazi kod traženja inverzne Laplaceove transformacije, gdje bi pri drugačijim rubnim uvjetima rješenje u  $s$ -domeni moglo biti znatno kompleksnije, a time bi i povratak u  $t$ -domenu bio složeniji.



## 7. Rješavanje toplinske jednadžbe s Neumannovim rubnim uvjetom

Ponovno promatrajmo beskonačno dug cilindrični štap kao u šestom poglavlju, no ovaj puta sa drugačijim rubnim uvjetom. Bočna površina štapa i dalje je savršeno izolirana tako da toplina kroz nju ne može niti ući niti izaći, a također ćemo pretpostaviti da je štap napravljen od materijala toplinske difuzivnosti  $\kappa = 1$ .

U prethodnom primjeru pretpostavili smo da je temperatura lijevog kraja štapa konstantna. U ovom slučaju situacija na lijevom kraju biti će malo drugačija, odnosno pretpostavit ćemo da se toplina dodaje konstantnom brzinom  $C$ .

Geometrijski, problem je modeliran kao i u prethodnom primjeru, odnosno pretpostavljamo da je štap postavljen duž pozitivnog dijela  $x$ -osi s jednim krajem u  $x = 0$ , a drugim u  $x = \infty$ .

Distribucija topline ponovno će biti opisana toplinskom jednadžbom (2.9):

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (7.1)$$

na domeni

$$0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty. \quad (7.2)$$

Kao i u prethodnom slučaju, radi jednostavnosti pretpostavit ćemo da je u trenutku  $t = 0$  temperatura štapa jednaka  $u_0$  kroz čitavu duljinu. Drugim riječima, vrijediti će početni uvjet

$$u(x, 0) = u_0, \quad 0 < x < \infty. \quad (7.3)$$

Ako se toplina dodaje konstantnom brzinom  $C$  (u vatima po kvadratnom metru) na kraju  $x = 0$ , to znači da je brzina promjene toplinske energije po jedinici vremena na tom kraju konstantna, tj. da vrijedi

$$\frac{\partial Q(0, t)}{\partial t} = C, \quad (7.4)$$

što prema Fourierovu zakonu (2.3) možemo zapisati kao

$$-\lambda A \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = C, \quad (7.5)$$

gdje je  $A$  površina poprečnog presjeka štapa, a  $\lambda$  koeficijent toplinske provodnosti. Zbog jednostavnosti, u nastavku ćemo pretpostaviti da vrijedi

$$\lambda A = 1, \quad (7.6)$$

te da je

$$C < 0. \quad (7.7)$$

S tim pretpostavkama rubni uvjet (7.5) poprima oblik

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = C, \quad (7.8)$$

što je Neumannov tip rubnog uvjeta.

Kako je toplinska jednadžba jednaka onoj iz prethodnog poglavlja (6.1), vrijede i isti uvjeti za njenu Laplaceovu transformaciju, odnosno u  $s$ -domeni dobivamo običnu diferencijalnu jednadžbu oblika:

$$sU(x, s) - u(x, 0) = U''(x, s), \quad (7.9)$$

što uvrštavanjem početnog uvjeta postaje

$$U''(x, s) - sU(x, s) = -u_0. \quad (7.10)$$

Također ćemo primijeniti Laplaceovu transformaciju na rubni uvjet, pri čemu dobivamo:

$$U'(0, s) = \frac{C}{s}. \quad (7.11)$$

Diferencijalna jednadžba (7.10) oblika je (5.1), pa prema (6.10) i (6.11) slijedi:

$$U(x, s) = C_1 e^{\sqrt{s}x} + C_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{u_0}{s}, \quad (7.12)$$

gdje su konstante  $C_1$  i  $C_2$  definirane izrazima (6.12) i (6.13).

Kako rješenje  $u(x, t)$  mora ostati ograničeno kad  $x \rightarrow \infty$ , takvo mora biti i rješenje  $U(x, s)$ . Zbog toga  $C_1$  mora biti postavljen u nula. Sada (7.12) poprima oblik:

$$U(x, s) = C_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{u_0}{s}. \quad (7.13)$$

Konstantu  $C_2$  ćemo odrediti tako da prvo izrazimo  $U(0, s)$  iz izraza (6.12). Kako  $C_1$  mora biti postavljen u nula, možemo zapisati:

$$-\frac{u_0}{2s} + \frac{U(0, s)}{2} + \frac{U'(0, s)}{2\sqrt{s}} = 0, \quad (7.14)$$

odnosno

$$\frac{U(0, s)}{2} = \frac{u_0}{2s} - \frac{U'(0, s)}{2\sqrt{s}}. \quad (7.15)$$

Sada je prema (6.13) konstanta  $C_2$  jednaka:

$$C_2 = -\frac{u_0}{2s} + \frac{u_0}{2s} - \frac{U'(0, s)}{2\sqrt{s}} - \frac{U'(0, s)}{2\sqrt{s}}, \quad (7.16)$$

pa uvrštavanjem izraza (7.11) u (7.16) dobivamo konačan izraz za  $C_2$ :

$$C_2 = -\frac{U'(0, s)}{\sqrt{s}} = -\frac{C}{s\sqrt{s}}. \quad (7.17)$$

Izraz (7.13) sada poprima konačan oblik:

$$U(x, s) = -\frac{C}{s\sqrt{s}}e^{-\sqrt{s}x} + \frac{u_0}{s}. \quad (7.18)$$

Koristeći teorem 4.2 možemo zapisati konačnu inverznu Laplaceovu transformaciju izraza (7.18):

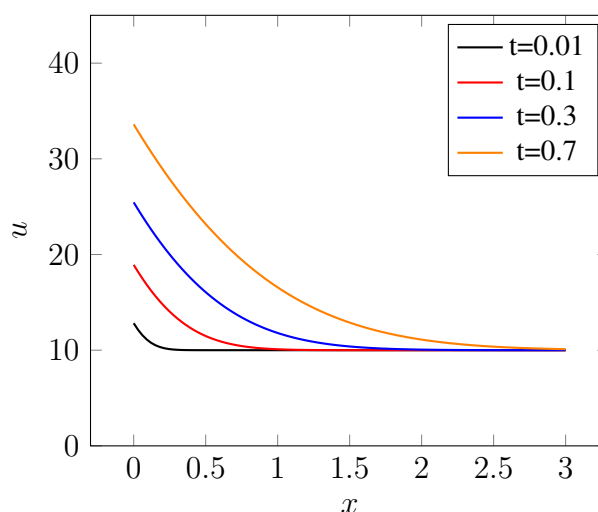
$$u(x, t) = u_0 - C \left( \frac{2t}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} - x \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \right), \quad (7.19)$$

što je rješenje razmatranog inicijalno-rubnog problema.

Radi konkretizacije i grafičkog prikaza pretpostavimo da je:

$$C = -25 \text{ W/m}^2, \quad u_0 = 10 \text{ }^\circ\text{C}. \quad (7.20)$$

Promotrimo sada promjenu temperature kroz vrijeme na sljedećem grafu.

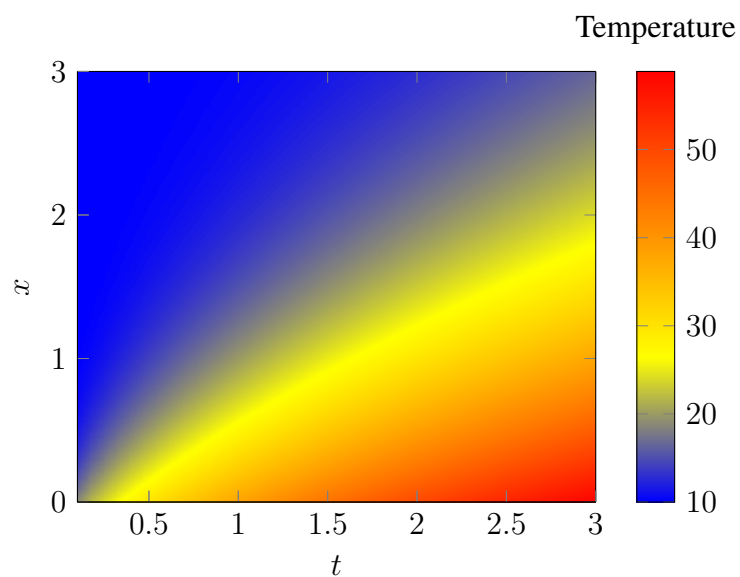


Slika 7.1. Grafički prikaz promjene temperature štapa kroz vrijeme

Iz grafičkog prikaza možemo uočiti da se kroz vrijeme  $t$ , temperatura početaka štapa stalno podiže što se moglo očekivati ako je na tom kraju štapa izvor topline koji toplinu dodaje stalnom brzinom. Protokom vremena  $t$  uočavamo da se temperatura niz duljinu štapa povisuje, što je također fizikalno očekivano.

Naglasimo da je zbog jednostavnih početnih i rubnih uvjeta rješavanje ovog problema bilo relativno jednostavno. Nametanje bilo kakvih uvjeta koji nisu konstantni problem bi znatno otežao kako u vidu transformacije u  $s$ -domenu, ali i vraćanja u  $t$ -domenu. Također možemo vidjeti i da je primjena Neumannovog rubnog uvjeta dala složenije rješenje u usporedbi s rješenjem problema kod kojeg su bili nametnuti Dirichletovi rubni uvjeti.

Na idućoj slici rješenje je prikazano putem temperaturne mape što daje bolji uvid u samo rješenje postavljenog problema.



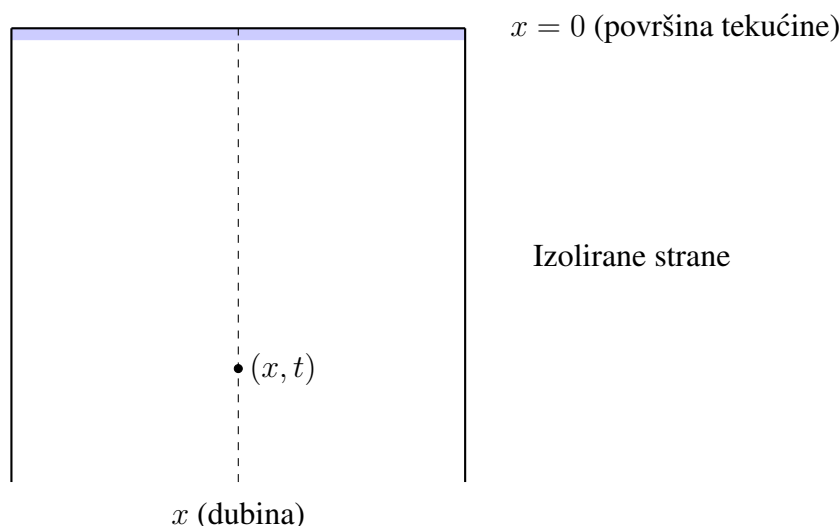
*Slika 7.2. 2D prikaz promjene temperature  $u$ , u prostoru  $x$ , kroz vrijeme  $t$*

Možemo uočiti da prolaskom vremena kao i u grafu 7., temperatura  $u$  raste na početku štapa, te daljnim prolaskom vremena, raste temperatura kroz duljinu štapa. Takvo gibanje topline je pretpostavljeno, te fizikalno ispravno.

## 8. Rješavanje toplinske jednačbe s Robinovim rubnim uvjetom

Promatrajmo beskonačno dubok spremnik koji sadrži tekućinu. Bočne strane spremnika su savršeno izolirane tako da toplina kroz njih ne može ući niti izaći, a kao i u prethodnom poglavlju, radi jednostavnosti, pretpostavit ćemo da tekućina u spremniku ima toplinsku difuzivnost  $\kappa = 1$ . Ovaj primjer je rađen uz pripomoć izvora [6]

Smjestimo sada problem u koordinatni sustav. Pretpostavit ćemo da  $x$  os predstavlja dubinu spremnika, tako da je dno spremnika u  $x = \infty$ , a površina tekućine u  $x = 0$  kako je prikazano na idućoj slici.



Slika 8.1. Grafički prikaz beskonačno dubokog spremnika i opisanih uvjeta

Prema tome, distribucija topline bit će opisana toplinskom jednačbom (2.9):

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (8.1)$$

na domeni

$$0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty. \quad (8.2)$$

Kako bi problem imao jedinstveno rješenje moramo postaviti početne i rubne uvjete. Radi jednostavnosti pretpostavit ćemo da je u trenutku  $t = 0$  temperatura tekućine jednaka  $u_0 > 0$  kroz čitav spremnik. Drugim riječima, vrijediti će početni uvjet

$$u(x, 0) = u_0, \quad 0 < x < \infty. \quad (8.3)$$

Kako vrh spremnika nije izoliran, pretpostavit ćemo da na njemu vrijedi Newtonov zakon hlađenja, odnosno Robinov rubni uvjet (2.16). Referentna temperatura zraka na površini je nula,

odnosno  $u_\infty$ . Kako je  $u_0 > u_\infty$  predznak u (2.16) bit će pozitivan, a radi jednostavnosti pretpostavit ćemo da je  $\alpha = 1$ . Prema tome, rubni uvjet na rubu  $x = 0$  poprima oblik:

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} - u(0, t) = 0, \quad 0 < t < \infty. \quad (8.4)$$

Kako je spremnik toliko dubok da se mogu zanemariti svi učinci njegovog dna, rubni uvjet za  $x = \infty$  nije potrebno nametati.

Kako je toplinska jednadžba jednaka onoj iz pethodnog poglavlja (7.1), vrijede i isti uvjeti za Laplaceovu transformaciju. Primjenom Laplaceove transformacije na toplinsku jednadžbu koristeći teorem o slici derivacije, dobivamo običnu diferencijalnu jednadžbu oblika:

$$sU(x, s) - u(x, 0) = U''(x, s), \quad (8.5)$$

što uvrštavanjem početnog uvjeta postaje

$$U''(x, s) - sU(x, s) = -u_0. \quad (8.6)$$

Transformacija Robinova rubnog uvjeta daje:

$$U'(0, s) = U(0, s). \quad (8.7)$$

Diferencijalna jednadžba (8.6) obična je linearna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima oblika (5.1), kao i u prethodna dva slučaja. Prema (6.10) i (6.11) slijedi:

$$U(x, s) = C_1 e^{\sqrt{s}x} + C_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{u_0}{s}. \quad (8.8)$$

Kako rješenje  $u(x, t)$  mora ostati ograničeno kad  $x \rightarrow \infty$ , takvo mora biti i rješenje  $U(x, s)$ . Zbog toga  $C_1$  mora biti postavljen u nula. Sada (8.8) poprima oblik:

$$U(x, s) = C_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{u_0}{s}. \quad (8.9)$$

Vrijednost  $C_2$  ćemo dobiti tako da izrazimo  $U(0, s)$  iz izraza (6.12), uvažavajući da  $C_1$  mora biti jednak nula. Slijedi:

$$-\frac{u_0}{2s} + \frac{U(0, s)}{2} + \frac{U'(0, s)}{2\sqrt{s}} = 0, \quad (8.10)$$

$$\frac{U(0, s)}{2} = \frac{u_0}{2s} - \frac{U'(0, s)}{2\sqrt{s}}. \quad (8.11)$$

Uvrštavanjem (8.7) i sređivanjem dobivamo:

$$U(0, s) = \frac{u_0}{s} \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s} + 1}. \quad (8.12)$$

Uvrštavanjem izraza (8.12) u izraz (6.13), uvažavajući da vrijedi rubni uvjet (8.7), slijedi:

$$C_2 = -\frac{u_0}{2s} + U(0, s) \left( \frac{\sqrt{s} - 1}{2\sqrt{s}} \right), \quad (8.13)$$

odnosno

$$C_2 = -\frac{u_0}{2s} + \frac{u_0}{s} \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}+1} \frac{\sqrt{s}-1}{2\sqrt{s}}. \quad (8.14)$$

Daljnijm sređivanjem dolazimo do konačnog izraza za  $C_2$ :

$$C_2 = -\frac{u_0}{s} \frac{1}{\sqrt{s}+1}. \quad (8.15)$$

Sada je

$$U(x, s) = -\frac{u_0}{s} \frac{e^{-\sqrt{s}x}}{\sqrt{s}+1} + \frac{u_0}{s}. \quad (8.16)$$

Uočimo da vrijedi

$$\frac{1}{s(\sqrt{s}+1)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\sqrt{s}+1} - \frac{1}{\sqrt{s}}. \quad (8.17)$$

Uvrštavanjem ovog izraza u  $U(x, s)$  dobiva se

$$U(x, s) = u_0 \frac{e^{-\sqrt{s}x}}{\sqrt{s}} - u_0 \frac{e^{-\sqrt{s}x}}{\sqrt{s}+1} + u_0 \frac{1 - e^{-\sqrt{s}x}}{s}. \quad (8.18)$$

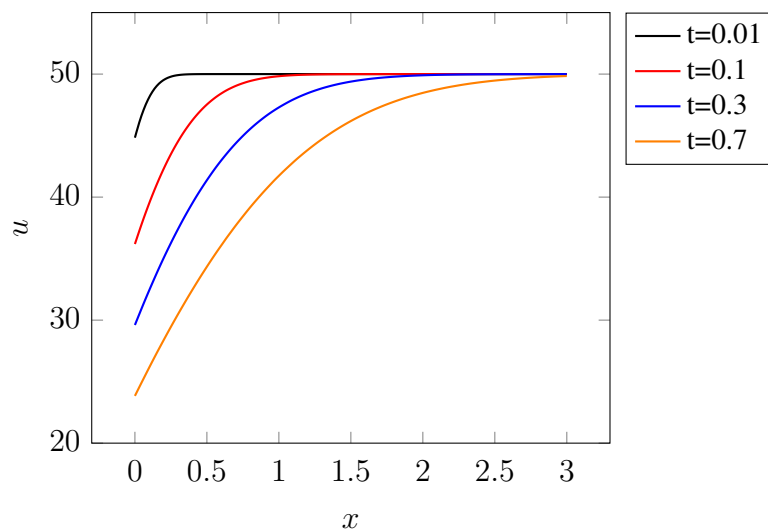
Koristeći ranije dokazan izraz (3.89), te teoreme 4.34 i 4.57 možemo funkciju  $U(x, s)$  vratiti u vremensku domenu, slijedi:

$$u(x, t) = u_0 \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} - \left( \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} - e^{(x+t)} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} \right) \right) + 1 - \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \right], \quad (8.19)$$

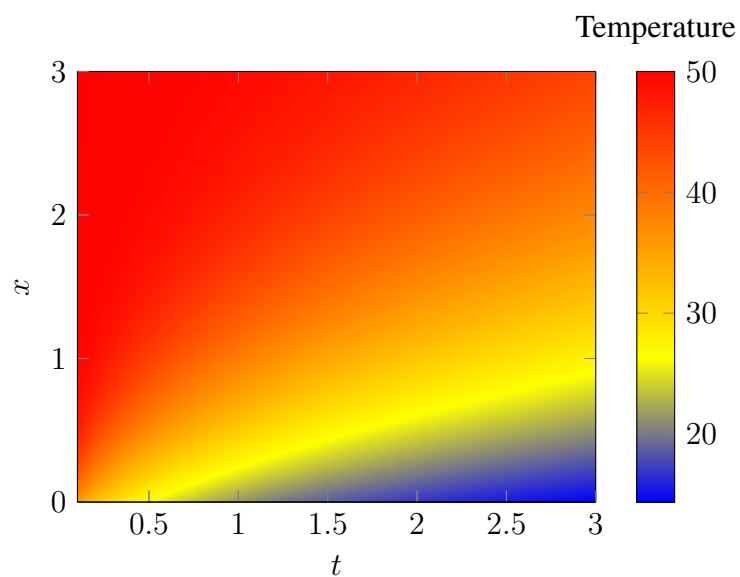
sređivanjem izraza dobivamo konačnu jednadžbu:

$$u(x, t) = u_0 - u_0 \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) - e^{(x+t)} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} \right) \right]. \quad (8.20)$$

Postavljanjem početnog uvjeta  $u_0 = 50^\circ\text{C}$ , te promatranjem grafa temperature  $u$  u različitim trenucima u vremenu  $t$ , dobivamo:



Slika 8.2. Grafički prikaz promjene temperature  $u$  u prostoru  $x$  kroz vrijeme  $t$  (8.20)



*Slika 8.3. 2D prikaz promjene temperature  $u$ , u prostoru  $x$ , kroz vrijeme  $t$*

Promatrajući sliku 8. možemo uočiti da je temperatura medija  $50^{\circ}\text{C}$ , što je sukladno sa početnim uvjetom  $u_0$ , prolaskom vremena  $t$  uočavamo da temperatura  $u$  pri vrhu spremnika opada, te daljnim prolaskom vremena temperatura niz medij opada, ovakva promjena temperature je očekivana i pretpostavljena.



## 9. Toplinska jednadžba u kontekstu elektrotehnike

Toplinska jednadžba, poznata i kao *jednadžba difuzije topline*, igra važnu ulogu u elektrotehnici, posebno u analizama koje uključuju širenje topline u elektroničkim uređajima, kablovima i komponentama.

U elektrotehnici, učinkovito upravljanje toplinom ključno je za održavanje pouzdanosti, performansi i dugovječnosti elektroničkih uređaja. Razni elektronički uređaji poput mikroprocesora, tranzistora, dioda i integriranih krugova, generiraju toplinu tijekom rada. Prekomjerna toplina može dovesti do većih gubitaka ili oštećenja samih komponenta. Također mogući problem stvara i negativni temperaturni koeficijent poluvodiča, odnosno prilikom prekomjernog zagrijavanja, otpor poluvodiča opada, što može dovesti do oštećenja komponenta.

Da bi se spriječilo prekomjerno podizanje temperature, koriste se različiti načini hlađenja, od ventilatora do posebnih metalnih okvira (hladnjaka) za širenje topline, pri tome toplinske jednadžbe služe za modeliranje kretanja topline kroz materijal, hladnjake i prema okolini.

Kako bi toplinska jednadžba poslužila za opisivanje specifičnih situacija kretanja topline, za modeliranje su potrebni različiti rubni uvjeti, gdje npr. Dirichletov rubni uvjet može poslužiti za modeliranje održavanja konstantne temperature na površini komponente, konkretno za hladnjak postavljen na procesor. S druge strane, prijenos topline s površine čipa na okolni zrak može biti modeliran Robinovim rubnim uvjetom.

Stvaranje nepotrebne topline predstavlja problem u distribuciji električne energije, gdje nastaju gubici, a moguća su i oštećenja vodova, komponenta ili izolacije. Da bi se gubici i rizici mogućih oštećenja smanjili, potrebno je unaprijed poznavati potencijalne rizike nastanka prekomjerne topline, a za takve analize potrebna je upravo toplinska jednadžba.

U elektrotehnici, rješavanje toplinske jednadžbe obično se provodi korištenjem numeričkih metoda, poput metode konačnih razlika, konačnih elemenata ili konačnih volumena. Ove metode omogućuju inženjerima simuliranje složene geometrije i različitih materijala kako bi optimizirali dizajniranje sustava za učinkovitiji prijenos topline, te smanjili gubitke i moguća oštećenja. Međutim, za testiranje numeričkih metoda nužno je imati i empirijska mjerenja i analitička rješenja koja ovim radom dobivamo.

Uspješna primjena toplinske jednadžbe u elektrotehnici ima značajne praktične koristi. Prije svega dolazi do povećanja pouzdanosti te određivanja dozvoljenih i sigurnih temperaturnih granica. Time se produžuje vijek trajanja komponenti, a sa energetskeg stajališta, znatno im je povećana učinkovitost.

## 10. Zaključak

Kroz ovaj rad ukazano je na bitnost postojanja, a i rješavanja toplinske jednadžbe. Njena korisnost i jednostavnost u modeliranju generiranja i toka topline, čini je bitnom stavkom u inženjeringu. Smanjenje gubitaka i osiguravanje dugotrajne ispravnosti električnih uređaja i komponenta, čini toplinsku jednadžbu veoma bitnom i u elektrotehnici. U tom kontekstu njenim ispravnim implementiranjem možemo smanjiti gubitke koji nastaju usred generiranja topline, poput trenja ili samog toka struje. Time također čuvamo električne komponente i vodove od pregrijavanja, te potencijalnih oštećenja i rizika.

U radu su objašnjene Laplaceove transformacije, s naglaskom na širinu njihove primjene izvan analize električnih krugova. Ipak možemo zaključiti da, iako Laplaceove transformacije mogu drastično olakšati diferencijalne jednadžbe, mogu ga i bitno otežati, a to se najčešće događa pri traženju inverzne Laplaceove transformacije.

Tijekom rješavanja određenih inicijalno-rubnih problema povezanih s toplinskom jednadžbom, u rješenjima se pojavila i funkcija pogreške. Ona je bila i očekivane, jer kako je koncentracija topline najveća oko izvora, te postepeno opada s udaljenošću, takva distribucija topline odgovara normalnoj distribuciji. Time smo ukazali i na rasprostranjenost funkcije pogreške, te njihovu primjenu izvan područja vjerojatnosti i statistike. Uočili smo da promjenom rubnih uvjeta, iako sama transformacija jednodimenzionalne toplinske jednadžbe ostaje ista, njezina inverzna Laplaceova transformacija se bitno zakomplicirala.

Kod rješavanja problema povezanih s toplinskom jednadžbom danas se sve više koriste numeričke metode, pri čemu treba naglasiti da je analitički pristup prikazan u ovom radu izuzetno bitan za dobivanje egzaktnih rješenja na kojima se numeričke metode testiraju.

Možemo zaključiti da su Laplaceove transformacije vrlo koristan alat u rješavanju diferencijalnih problema, te posjedovanjem opširnih tablica transformacija, možemo olakšati postupak traženja inverzne Laplaceove transformacije. Unatoč svoj problematici traženja inverzne Laplaceove transformacije, one i dalje ostaju jedne od bitnijih te češće korištenih integralnih transformacija, kao bitna stavka inženjerstva, a pogotovo elektrotehnike. Najveća korist Laplaceovih transformacija odražava se u mogućnosti dobivanja egzaktnih rješenja različitih diferencijalno-integralnih problema, pa tako i inicijalno-rubnih problema povezanih s toplinskom jednadžbom.

## Literatura

- [1] Matthew J. Hancock - "Linear Partial Differential Equations", s Interneta, <https://ocw.mit.edu/courses/18-303-linear-partial-differential-equations-fall-2006/resources/heateqni/>, 25. ožujka 2024.
- [2] Joseph M. Mahaffy - "Math 531 - Partial Differential Equations", s Interneta, <https://jmahaffy.sdsu.edu/courses/s17/math531/beamer/heat.pdf>, 5. travnja 2024.
- [3] Lawrence, C. Evans - "Partial Differential Equations", s Interneta, <https://math24.wordpress.com/wp-content/uploads/2013/02/partial-differential-equations-by-evans.pdf>, 15. svibnja 2024.
- [4] Dražić, I. - Laplaceova transformacija, interna skripta za kolegij Inženjerska matematika ET, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, 2023.
- [5] John D. Vedder - "Simple approximations for the error function and its inverse", s Interneta, <https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article-abstract/55/8/762/1042231/Simple-approximations-for-the-error-function-and?redirectedFrom=PDF>, 19. lipnja 2024.
- [6] Stanley J. Farlow, Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Wiley, New York, 1982.

## Sažetak i ključne riječi

Jednodimenzionalna toplinska jednažba jedna je od temeljnih parcijalnih diferencijalnih jednažbi, služi za modeliranje toka topline, te iz tog razloga ima brojne primjene u inženjerstvu. Kako bi se olakšalo rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednažbi koriste se brojne metode, jedna od njih je i primjena Laplaceovih transformacija, odnosno posebne integralne transformacije, koja diferencijalne probleme u vremenskoj domeni, pretvara u algebarske probleme u kompleksnoj domeni. Iako Laplaceove transformacije imaju široku primjenu, pogotovo u elektrotehnici, te drastično olakšavaju rješavanje diferencijalnih problema, traženje njihove inverzne transformacije je često problematično. Unatoč tom Laplaceove transformacije nalaze svoju primjenu, te se u ovom radu prikazala njihova primjena na rješavanje jednodimenzionalne toplinske jednažbe s različitim rubnim uvjetima, uz pripadne simulacije.

**Ključne riječi:** Toplina, toplinski tok, toplinska jednažba, funkcije pogreške, Laplaceove transformacije.

## Summary and key words

The one-dimensional heat equation is one of the basic partial differential equations, it is used for modeling the heat flow, and for this reason it has numerous applications in engineering. In order to facilitate the solving of partial differential equations, numerous methods are used, one of them is the application of Laplace transformations, i.e. a special integral transformation, which turns differential problems in the time domain into algebraic problems in the complex domain. Although Laplace transformations are widely used, especially in electrical engineering, and drastically facilitate the solution of differential problems, searching for their inverse transformation is often problematic. Nevertheless, Laplace transformations find their application, and in this paper, their application to solving one-dimensional heat equations with different boundary conditions is presented, including corresponding simulations.

**Keywords:** Heat, heat flow, heat equations, error functions, Laplace transforms.