Linearni optimizacijski problem s ograničenjima

Žunabović, Josip

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

LINEARNI OPTIMIZACIJSKI PROBLEM S OGRANIČENJIMA

Rijeka, rujan 2024.

Josip Žunabović
0069092555

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

LINEARNI OPTIMIZACIJSKI PROBLEM S OGRANIČENJIMA

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Rijeka, rujan 2024.

Josip Žunabović
0069092555

SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET
POVJERENSTVO ZA ZAVRŠNE ISPITE

Rijeka, 14.03.2024.

Zavod: Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike

Predmet: Inženjerska matematika ET

ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Josip Žunabović (0069092555)**

Studij: Sveučilišni prijediplomski studij elektrotehnike (1030)

Zadatak: **Linearni optimizacijski problem s ograničenjima / Linear optimization problem with constraints**

Opis zadatka:

U radu je potrebno definirati apstraktni linearni optimizacijski problem s linearnim ograničenjima i objasniti njegov značaj u realnim problemima s naglaskom na primjene u inženjerstvu. Potrebno je detaljno objasniti grafičku metodu rješavanja opisanih problema, kao i metodu prevođenja primarnog problema u dualni, dok je ostale metode rješavanja potrebno samo spomenuti i ukratko opisati. U završnom dijelu rada potrebno je objasniti rješavanje opisanog problema pomoću adekvatne softverske podrške te uz pomoć softvera riješiti nekoliko složenijih konkretnih problema.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanja diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Zadatak uručen pristupniku: 20.03.2024.

Mentor:
izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Predsjednik povjerenstva za završni ispit:
prof. dr. sc. Dubravko Franković

IZJAVA

Sukladno članku 7. Stavku 1. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku sveučilišnih prijediplomskih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 4. travnja 2023., izjavljujem da sam samostalno izradio završni rad prema zadatku preuzetom dana 20. ožujka 2024.

Rijeka, 3. rujna 2024.

Josip Žunabović

Josip Žunabović

Od srca se zahvaljujem svima koji su pridonijeli uspješnom završetku ovog važnog poglavlja u mom životu. Veliko hvala mojoj obitelji na bezuvjetnoj ljubavi i podršci tijekom cijelog studiranja. Hvala vam što ste uvijek vjerovali u mene. Duboku zahvalnost dugujem svom mentoru, izv.prof. dr. sc. Ivanu Dražiću, na iznimnom trudu, strpljenju i podršci tijekom izrade ovog rada. Njegova posvećenost bila je od neprocjenjive važnosti za moj uspjeh. Zahvaljujem se i svojim kolegama i prijateljima koji su svojim druženjem, podrškom i razumijevanjem doprinijeli da ovo putovanje bude lakše i ljepše. Također, hvala dragom Bogu na snazi i vodstvu. Bez vaše podrške, ovaj uspjeh ne bi bio moguć. Hvala vam!

Sadržaj

1. Uvod

U svijetu konstantne promjene i ograničenih resursa, optimizacija predstavlja ključ uspjeha u mnogim područjima. Upravo tu se ističe linearno programiranje kao moćan matematički alat za pronalazak optimalnih rješenja u različitim sferama ljudskog djelovanja. Od alokacije resursa u ekonomiji i industriji, preko optimizacije procesa u inženjerstvu, pa sve do primjene u računalnoj znanosti i istraživanju podataka, linearno programiranje igra ključnu ulogu u donošenju boljih odluka.

Ovaj rad se bavi linearnim optimizacijskim problemima s ograničenjima, pružajući sveobuhvatan pregled ove važne discipline. Započinjemo s povijesnim razvojem linearnog programiranja, ističući ključne prekretnice i doprinose velikana poput Fourier-a, Kantorovića i Dantziga. Razumijevanje povijesnog konteksta omogućuje nam da u potpunosti cijenimo snagu ovog matematičkog alata.

Središnji dio rada posvećen je matematičkoj formulaciji problema linearnog programiranja. Detaljno ćemo objasniti koncept funkcije cilja koja predstavlja veličinu koju želimo optimizirati, bilo da se radi o maksimizaciji ili minimizaciji. Zatim ćemo se posvetiti ograničenjima koja definiraju prostor mogućih rješenja, odražavajući realne restrikcije s kojima se susrećemo u praksi. Kroz definiciju linearnog programa povezujemo funkciju cilja i ograničenja u jedinstvenu cjelinu. Praktični primjeri iz stvarnog svijeta ilustrirat će širok spektar primjene linearnih programa, od optimizacije proizvodnje i transporta do problema u financijama i marketingu.

Rad se nastavlja s detaljnijim upoznavanjem teorijskog aspekta linearnog programiranja. Istražit ćemo koncept konveksnih skupova i teorem o ekstremnim točkama, koji predstavljaju temelj za razumijevanje geometrijske interpretacije problema. Zatim ćemo predstaviti grafičku metodu rješavanja linearnih programa s manjim brojem varijabli, pružajući intuitivan uvid u problem. Nadalje, upoznat ćemo se s dualnim problemom linearnog programiranja, koji nam pruža dodatne informacije o originalnom problemu i omogućuje nam uvide u ekonomsku interpretaciju rješenja.

Kako se u praksi često susrećemo s problemima koji uključuju veliki broj varijabli, rad će predstaviti i metode za njihovo rješavanje. Spomenuti ćemo simpleks metodu, najpoznatiji i najčešće korišten algoritam za rješavanje linearnih programa.

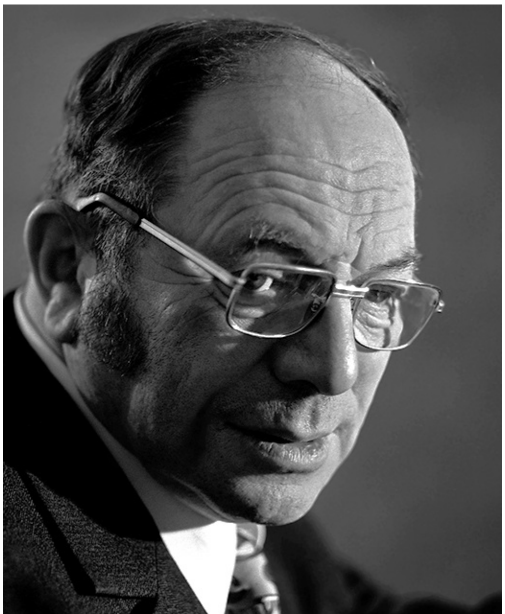
Na kraju, pružit ćemo pregled softverskih alata koji nam olakšavaju rješavanje problema linearnog programiranja. Uz primjere poput Excel Solvera, demonstrirat ćemo kako nam ovi alati omogućuju brzo i efikasno rješavanje kompleksnih problema, oslobađajući nas zamornih ručnih izračuna.

2. Povijesni razvoj linearnog programiranja

Linearno programiranje je matematički pristup optimizaciji unutar postavljenih ograničenja koje ima za cilj postizanje najboljeg ishoda u matematičkom modelu koji koristi linearno izražene uvjete. Ova disciplina matematike primjenjuje se u različitim sektorima kao što su ekonomija, nutricionizam i organizacija rada radi rješavanja praktičnih problema. Ključni koraci u rješavanju problema linearnog programiranja uključuju definiranje varijabli odlučivanja, funkcije cilja i ograničenja.

Linearno programiranje kao matematička disciplina počelo se razvijati tridesetih godina prošlog stoljeća u radovima sovjetskog matematičara i ekonomista Leonida Vitaljevića Kantorovića. Posebno se ističu Kantorovićeva istraživanja problema povezanih s planiranjem opskrbe u vojsci iz 1939. godine. Koristeći linearno programiranje, nastojao je optimizirati troškove vojske i strategiju protivnika te riješiti probleme logistike. Nešto kasnije, izračunao je optimalnu udaljenost između vozila na zaleđenom jezeru uzimajući u obzir debljinu leda i temperaturu zraka. Svakako treba istaknuti da je Kantorovič sam prelazio između vozila koja su se kretala po ledu kako bi osigurao njihovu sigurnost i spriječio potonuće, a za to je odlikovan Ordenom Domovinskog rata i medaljom za obranu Lenjingrada.

Važnost Kantorovićeva rada u problemima optimizacije na globalnoj razini počela se uočavati pedesetih godina prošlog stolja, a 1975. za svoja znanstvena dostignuća nagrađen je Nobelovom nagradom. [1]



Slika 2.1. Leonid Vitaljevič Kantorovič (1912-1986). Izvor: [2]

Iako je Kantorovič zaslužan za matematičku formalizaciju problema linearnog programiranja te niz teorijskih rezultata nužnih za dokazivanje teorema iz tog područja, nije se previše bavio konkretnim algoritmima za rješavanje ovih problema. U tom području najvažniji je rad američkog matematičara Georgea Dantziga koji je 1947. godine razvio simpleks metodu za rješavanje linearnih problema optimizacije. Simpleks metoda je iterativni algoritam koji kreće od početnog dopustivog rješenja i postupno traži bolja rješenja kretanjem po vrhovima poliedra koji predstavlja dopušteni skup rješenja.

Simpleks metoda postala je ključna u rješavanju složenih optimizacijskih problema uz pomoć računala. Ipak, kako su se pokušavali rješavati sve složeniji problemi koji uključuju više varijabli, broj potrebnih operacija eksponencijalno se povećavao i premašio računalne kapacitete čak i najmoćnijih računala pedesetih godina prošlog stoljeća. [3]

Važno je istaknuti da se simpleks metoda u svojem izvornom obliku koristi još i danas, a razvoj tehnologije u vidu sve moćnijih računala te određene prilagodbe algoritma uklonila su sva ograničenja za njenu široku primjenu još osamdesetih godina prošlog stoljeća.

U isto vrijeme kada je Dantzig radio na simpleks algoritmu, John von Neumann[1] je razvio teoriju dualnosti.

Slika 2.2. John von Neumann (1903-1957). Izvor: [4]

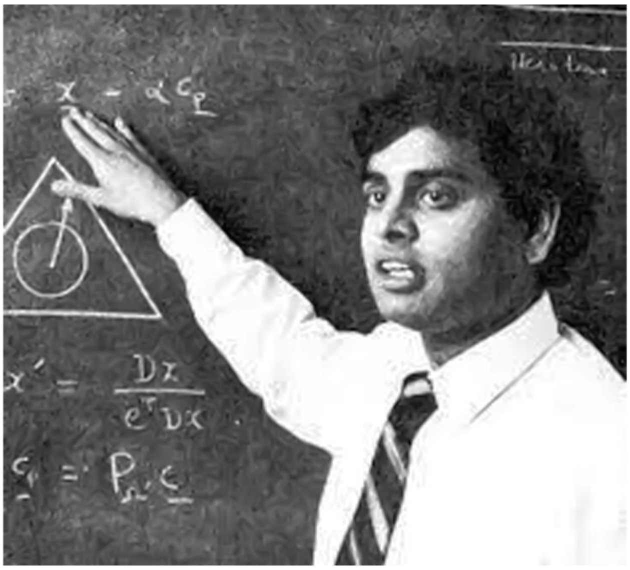
Teorija dualnosti u kontekstu linearnog programiranja kaže da za svaki problem linearnog programiranja (primalni problem) postoji odgovarajući dualni problem, pri čemu rješenje jednog daje uvid u rješenje drugog. Optimalna rješenja primalnog i dualnog problema povezana su tako da ako

[1]John von Neumann (1903-1957) američki je matematičar i polihistor mađarskog porijekla. Postigao je značajne doprinose širokom spektru disciplina, kao što su kvantna mehanika, teorija skupova, ekonomika, računarstvo, numerička analiza, hidrodinamika (eksplozija), statistika te mnoga druga polja matematike. Smatra se jednim od najistaknutijih matematičara u povijesti.

jedno ima optimalno rješenje, i drugo će imati optimalno rješenje s jednakom vrijednošću funkcije cilja. Teorija dualnosti u linearnom programiranju omogućava provjeru optimalnosti rješenja, pruža ekonomske interpretacije, olakšava analizu osjetljivosti te poboljšava efikasnost algoritama, čime je ključna za rješavanje i razumijevanje problema optimizacije.

Istraživanja iz područja linearnog programiranja krajem prošlog stoljeća uglavnom su bila usmjerena na ubrzavanje i pojednostavljivanje simpleks algoritma. Tako je 1979. godine rusko-američki matematičar Leonid Khachiyan (1952.-2005.) razvio alternativni algoritam polinomijalne složenosti u kojem broj računalnih operacija raste kao potencija broja varijabli umjesto eksponencijalno kao što slučaj kod simpleks algoritma. Međutim, Khachiyanov algoritam (poznat kao metoda elipsoida) u praksi je ipak bio sporiji od simpleks algoritma.

1984. godine indijski matematičar Narendra Karmarkar (rođen 1957.) razvio je još jedan algoritam polinomijalne vremenske složenosti, tzv. metodu unutarnje točke. Za razliku od Khachiyanova algoritma, Karmarkarov algoritam u praksi se pokazao konkurentan simpleks algoritmu. Za svoj je rad Karmarkar dobio nagradu Kanellakis[2] 2000. godine za svoj utjecaj na teoriju linearnog programiranja. [5]



Slika 2.3. Narendra Karmarkar. Izvor: [6]

Nakon Karmarkarovog otkrića, daljnja istraživanja u teoriji linearnog programiranja fokusirala su se na usavršavanje postojećih metoda, proširenje njihove primjene na složenije probleme i povezivanje s drugim matematičkim područjima. Iako nisu bila toliko revolucionarna kao rani doprinosi, ova istraživanja su značajno unaprijedila razumijevanje i primjenu linearnog programiranja u različitim disciplinama.

[2]Paris Kanellakis Theory and Practice Award je godišnja nagrada koju dodjeljuje Association for Computing Machinery (ACM) u čast Paris Kanellakisa, računalnog znanstvenika koji je dao značajan doprinos teoriji računarstva i njenoj primjeni u praksi. Nagrada je osnovana 1996. godine, nakon njegove tragične smrti u avionskoj nesreći 1995. godine. Dobitnici su prepoznati za svoje inovativne i dugotrajne doprinose koji su imali značajan utjecaj na teoriju računarstva i njenu primjenu u industriji.

3. Matematička formulacija problema linearnog programiranja

Linearni optimizacijski matematički model temelji se na funkciji cilja i ograničenjima koja linearno ovise o varijablama. Bitan preduvjet je uvjet ne-negativnosti, koji zahtijeva da varijable imaju vrijednosti koje su 0 ili veće od 0. Svi odnosi unutar funkcije cilja i ograničenja su linearni, što znači da se mogu izraziti kao linearne kombinacije varijabli.

U ovom poglavlju cilj nam je linearni optimizacijski matematički model, odnosno linearni program zapisati strogo matematički. Ovo poglavlje djelomično je obrađeno prema izvoru [7].

3.1. Funkcija cilja

U linearnom programiranju, funkcija cilja je linearna funkcija koja se optimizira, tj. maksimizira ili minimizira, pod određenim ograničenjima. Formalno, funkcija cilja može se definirati na sljedeći način:

Definicija 3.1. *Funkcija cilja je linearna funkcija oblika*

$$Z(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n, \tag{3.1}$$

gdje je Z je vrijednost koju želimo optimizirati (maksimizirati ili minimizirati). $x_1, x_2, \ldots, x_n$ su varijable odlučivanja, a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ su koeficijenti (konstante) koji predstavljaju doprinos svake varijable odlučivanja u funkciji cilja.

Objasnimo sada funkciju cilja na dva primjera.

Primjer 3.1. *Pretpostavimo da imamo dva proizvoda, majice kratkih rukava i majice dugih rukava, te da želimo maksimizirati profit. Ako je profit po jednoj majici kratkih rukava* 10 *eura, a profit po jednoj majici dugih rukava* 15 *eura, tada je funkcija cilja*

$$Z = 10x_1 + 15x_2, \tag{3.2}$$

gdje su:

- x_1 *broj proizvedenih majica kratkih rukava,*
- x_2 *broj proizvedenih majica dugih rukava.*

Jasno je da u ovom slučaju funkciju cilja želimo maksimizirati.

Primjer 3.2. *Zamislimo da proizvodimo tri različita artikla: olovke, bilježnice i gumice, i da nam je cilj smanjiti ukupne troškove proizvodnje. Ako je trošak proizvodnje jedne olovke* 0.30 *€, jedne bilježnice* 2.00 *€, a jedne gumice* 0.50 *€, funkcija cilja može se zapisati kao*

$$Z = 0.30x_1 + 3.00x_2 + 0.50x_3, \tag{3.3}$$

gdje su:

- x_1 *broj proizvedenih olovki,*
- x_2 *broj proizvedenih bilježnica,*
- x_3 *broj proizvedenih gumica.*

Očigledno je da u ovom slučaju želimo minimizirati funkciju cilja.

3.2. Ograničenja

Ograničenja u linearnom programiranju su uvjeti koji definiraju dopušteni skup rješenja za problem. Ova ograničenja su linearne nejednadžbe ili jednadžbe koje varijable odlučivanja moraju zadovoljavati. Formalno, ograničenja se mogu definirati na sljedeći način:

Definicija 3.2. *Neka je zadan linearni optimizacijski problem u kojem su* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *varijable odlučivanja. Ograničenja u tom problemu su izrazi*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1, \tag{3.4}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2, \tag{3.5}$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m. \tag{3.6}$$

gdje su a_{ij} *koeficijenti ograničenja,* b_i *su konstante koje predstavljaju desnu stranu svake nejednadžbe, a* m *je broj ograničenja. U svakom od navedenih izraza se znak nejednakosti* $\leq$ *može zamijeniti sa znakom nejednakosti* $\geq$ *ili znakom jednakosti* $=$.

U svakom problemu linearnog programiranja automatski se pretpostavlja uvjet nenegativnosti, odnosno ograničenja oblika:

$$x_i \geq 0 \quad \text{za sve} \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.7}$$

Pokažimo sada pojam ograničenja na nekoliko primjera.

Primjer 3.3. *Pretpostavimo da nam je dana situacija iz primjera 3.1, pri čemu za proizvodnju majica kratkih i majica dugih rukava imamo ograničen broj komada pamuka. Za proizvodnju majica s kratkim rukavima trebamo 4 komada pamuka po majici, dok za proizvodnju majica s dugim rukavima 5 komada, dok na raspolaganju imamo ukupno 30 komada pamuka. Ograničenje bi u tom slučaju izgledalo ovako:*

$$4x_1 + 5x_2 \leq 30. \tag{3.8}$$

Primjer 3.4. *Uzmemo li ovaj put situaciju iz primjera 3.2, gdje za proizvodnju olovki, bilježnica i gumica imamo uvjet da moramo zaraditi najmanje 100 € u određenom vremenu. Cijena jedne olovke iznosi* 0.60 *€, jedne bilježnice* 3.00 *€, a jedne gumice* 0.90 *€. Ograničenje bi u tom slučaju izgledalo ovako:*

$$0.60x_1 + 3.00x_2 + 0.90x_3 \geq 100. \tag{3.9}$$

Primjer 3.5. *Tvornica proizvodi dva proizvoda, stolove i stolice. Tvornica mora proizvesti ukupno 200 komada proizvoda dnevno kako bi zadovoljila ugovorene kvote.*

Označimo s x broj proizvedenih stolova, a s y broj stolica. Veličine x i y moraju biti pozitivne, odnosno mora vrijediti:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0. \tag{3.10}$$

Ograničenje je vezano uz ukupan broj proizvedenih stolova i stolica:

$$x + y = 200. \tag{3.11}$$

3.3. Linearni program

Prema svemu navedenom optimizacijski problem linearnog programiranja (linearni program) zadan je funkcijom cilja, ograničenjima i uvjetima nenegativnosti te se u svojoj najopćenitijoj formi zapisuje na sljedeći način:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \min / \max, \tag{3.12}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq / \geq / = b_1, \tag{3.13}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq / \geq / = b_2, \tag{3.14}$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq / \geq / = b_m, \tag{3.15}$$

$$x_i \geq 0 \quad \text{za sve} \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.16}$$

Kod teorijskih razmatranja ova forma se može sažetije zapisati pomoću matričnog zapisa:

$$Z = C \cdot X^T \to \min / \max, \tag{3.17}$$

$$A \cdot X^T \leq / \geq / = B, \tag{3.18}$$

$$X \geq 0, \tag{3.19}$$

gdje je

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}, \tag{3.20}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}, \tag{3.21}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{3.22}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{3.23}$$

3.4. Praktični primjeri linearnih programa

Formuliranje matematičkog modela predstavlja prvi i najzahtjevniji korak u procesu rješavanja problema optimizacije. Taj korak prije svega uključuje ekstrakciju varijabli odlučivanja, a zatim postavljanje funkcije cilja i ograničenja. U ovom dijelu ćemo na nekoliko primjera objasniti taj proces.

Primjer 3.6. *Stolarska radionica je dobila zadatak da napravi dvije vrste stolica u periodu od 42 sata radi nadolazeće dječje priredbe. Na raspolaganje su dobili 20 komada daski. Za stolicu broj 1 su potrebne 4 daske i 8 sati izrade, a za stolicu broj 2 su potrebne 3 daske i 7 sati izrade. Zarada od prodaje stolice broj 1 je 30 eura, a stolice broj 2 je 20 eura. Koliko komada svake stolice radionica mora napraviti da bi profit bio maksimalan?*

Označimo s x broj stolica prve vrste, a s y broj stolica druge vrste. Kako su x i y veličine koje označavaju količine, nužno je da budu pozitivne, odnosno mora vrijediti:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0. \tag{3.24}$$

Uz uvjet nenegativnosti, ovdje imamo i cjelobrojno programiranje koje nas traži da naše veličine x i y budu cijeli brojevi. Pošto je riječ o stolicama, vrijedi:

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \tag{3.25}$$

Radionica na raspolaganju ima 20 komada daski te su za stolicu broj 1 potrebne četiri daske dok za stolicu broj 2 tri daske. To nas dovodi do prvog ograničenja:

$$4x + 3y \leq 20. \tag{3.26}$$

Nadalje, radionica je ograničena na 42 sata rada. Za prvu stolicu je potrebno 8 sati, a za drugu stolicu 7 sati. Dakle, drugo ograničenje glasi:

$$8x + 7y \leq 42. \tag{3.27}$$

Cijena prve stolice je 30 eura, a druge 20 eura. U cilju nam je da profit bude maksimalan te će linearni program izgledati ovako:

$$Z = 30x + 20y \to \max, \tag{3.28}$$

$$4x + 3y \leq 20, \tag{3.29}$$

$$8x + 7y \leq 42, \tag{3.30}$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \tag{3.31}$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \tag{3.32}$$

Autor rada samostalno je osmislio ovaj primjer temeljem izmišljenih podataka.

Primjer 3.7. *Student elektrotehnike želi organizirati svoje učenje nedjeljom koje bi trebalo trajati 12 sati. Vrijeme mora rasporediti kako bi učio 2 predmeta, Inženjersku matematiku i Programiranje. Inženjerska matematika mu je 3 puta interesantnija nego Programiranje, ali mora barem 2 puta više učiti Programiranje kako bi stigao obuhvatiti svo gradivo. Koliko vremena treba provesti učeći Inženjersku matematiku, a koliko Programiranje ako mu je u cilju da bude zainteresiran najviše što može?*

Sa x ćemo označiti broj sati učenja Inženjerske matematike, a s y broj sati učenja Programiranja. Kako je riječ o satima, jasno je da x i y ne mogu biti negativni brojevi.

$$x \geq 0, \quad y \geq 0. \tag{3.33}$$

Student je odredio da će učenje trajati maksimalno 12 sati te mu treba duplo puta više vremena za Programiranje nego li za učenje Inženjerske matematike, dakle:

$$x + y \leq 12, \tag{3.34}$$

$$y \geq 2x. \tag{3.35}$$

S ciljem da student bude zainteresiran za to što uči čim duže moguće, a znamo da je trostruko više zainteresiran za učenje matematike nego Programiranje, pripadni linearni program poprima oblik:

$$Z = 3x + y \to \max, \tag{3.36}$$

$$x + y \leq 12, \tag{3.37}$$

$$y \geq 2x, \tag{3.38}$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0. \tag{3.39}$$

Autor rada samostalno je osmislio ovaj primjer temeljem izmišljenih podataka.

Ovo su bila dva primjera gdje smo tražili maksimume funkcija, a sada ćemo pokazati i jedan primjer s minimumom.

Primjer 3.8. *Tvornica proizvodi dvije vrste čokolade, tamnu i bijelu. Isporučuje ih u velikim pakiranjima od nekoliko stotina komada. Izrada paketa tamne čokolade traje 2 sata rada na stroju i 4 sata rada u pakirnici. Izrada paketa bijele čokolade traje 3 sata rada na stroju i 2.5 sata rada u pakirnici. Vrijeme rada stroja je 15 sati dnevno, a pakirnice 20 sati dnevno. Tvornica na proizvodnju tamne čokolade troši 56 eura po pakiranju, a na proizvodnju bijele čokolade 70 eura po pakiranju. Koliko bi dnevno trebalo proizvesti pakiranja svake vrste čokolade da bi uz zadane uvjete rada trošak proizvodnje bio najmanji?*

Označimo s x broj pakiranja tamne čokolade, a s y broj pakiranja bijele čokolade.

Budući da su x i y količine koje označavaju broj pakiranja, moraju biti nenegativne:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0. \tag{3.40}$$

Ponovno ovdje imamo cjelobrojno programiranje jer je riječ o cijelim komadima čokolade, pa naše veličine x i y moraju biti cijeli brojevi. Opet vrijedi:

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \tag{3.41}$$

Vrijeme dnevnog rada stroja je 15 sati. Kako izrada paketa na stroju tamne čokolade traje 2 sata, a bijele čokolade 3 sata ograničenje glasi:

$$2x + 3y \leq 15. \tag{3.42}$$

Vrijeme dnevnog rada pakirnice je 20 sati. Izrada paketa u pakirnici za tamnu čokoladu traje 4 sata, dok za bijelu čokoladu 2.5 sata. To nas dovodi do novog ograničenja koje glasi:

$$4x + 2.5y \leq 20. \tag{3.43}$$

Trošak proizvodnje jednog pakiranja tamne čokolade iznosi 56 eura, a bijele čokolade 70 eura. Pripadni linearni program glasi:

$$Z = 56x + 70y \to \min, \tag{3.44}$$

$$2x + 3y \leq 15, \tag{3.45}$$

$$4x + 2.5y \leq 20, \tag{3.46}$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \tag{3.47}$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \tag{3.48}$$

Autor rada samostalno je osmislio ovaj primjer temeljem izmišljenih podataka.

4. Teorijski aspekt linearnog programiranja

Cilj ovog poglavlja je dati matematičku pozadinu problemu linearnog programiranja. Matematički aparat na kojem počivaju problemi optimizacije je konveksnost te ćemo najprije definirati taj pojam, točnije pojam konveksnog skupa i konveksne funkcije. Ovo poglavlje je obrađeno pomoću izvora [8].

Krenimo s definicijom spojnice.

Definicija 4.1. *Neka su zadane dvije točke* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. *Skup*

$$\left\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 | \mathbf{z} = k\mathbf{x} + (1-k)\mathbf{y},\ k \in [0,1]\right\} \tag{4.1}$$

zovemo spojnicom točaka x *i* y.

Naime, parametarska jednadžba pravca kroz točke $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ zadana je s

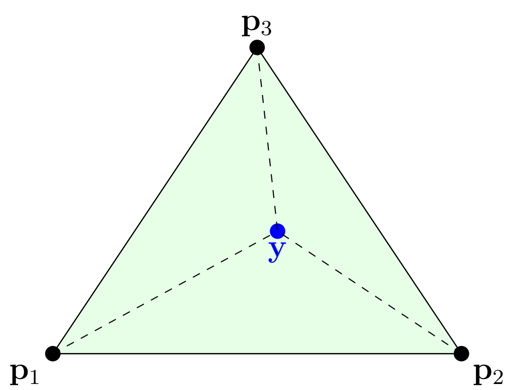
$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + k(\mathbf{x} - \mathbf{y}),\ k \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Uočimo da točke pravca koje se nalaze između točaka $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ dobivamo ako je $k \in [0,1]$, što objašnjava definiciju spojnice.

Sada možemo definirati konveksan skup.

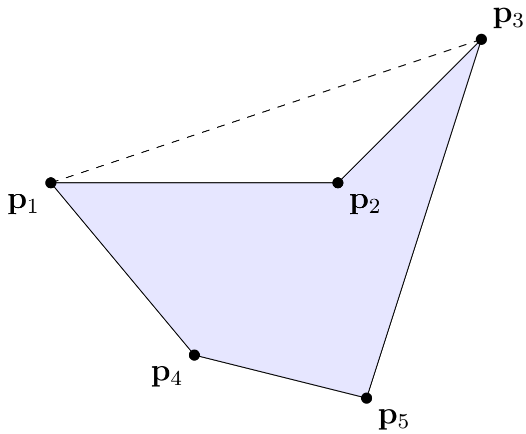
Definicija 4.2. *Skup* $S \subseteq \mathbb{R}^2$ *zovemo* ***konveksnim*** *ako za svake dvije točke* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ *i svaki* $k \in [0,1]$, *točka* $k\mathbf{x} + (1-k)\mathbf{y}$ *također pripada skupu* S. *Drugim riječima skup je konveksan ako je svaka spojnica svakih dviju točaka skupa sadržana u tom skupu.*

Prikažimo sada grafički konveksan i nekonveksan skup.



Slika 4.1. Prikaz konveksnog skupa. Izvor: Izrada autora

Iz grafičkog prikaza konveksnog skupa je jasno da će spojnica bilo koje dvije točke tog skupa biti unutar tog skupa, što nije slučaj kod skupa koji nije konveksan, a prikazan je na sljedećoj slici, gdje spojnica točaka $\mathbf{p_1}$ i $\mathbf{p_2}$ nije sadržana u danom skupu.



Slika 4.2. Prikaz skupa koji nije konveksan. Izvor: Izrada autora

Na slici 4.1 posebno su označene tzv. vršne točke ili vrhovi konveksnog skupa. To su točke koje će uvijek biti krajevi spojnica, odnosno nikada se neće naći u unutrašnjosti neke spojnice točaka.

Pojam spojnice može se generalizirati, pa tako uvodimo pojam konveksne kombinacije.

Definicija 4.3. *Točka $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ je konveksna kombinacija točaka $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ ako postoji skup skalara $k_1, k_2, \ldots, k_n \geq 0$ takav da je*

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{x}_i \tag{4.3}$$

pri čemu vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = 1. \tag{4.4}$$

Na slici 4.1 su prikazane tri vršne točke $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, i $\mathbf{p}_3$, koje definiraju trokut. Točka $\mathbf{y}$ unutar trokuta prikazuje konveksnu kombinaciju vršnih točaka:

$$\mathbf{y} = k_1\mathbf{p}_1 + k_2\mathbf{p}_2 + k_3\mathbf{p}_3 \tag{4.5}$$

gdje su $k_1, k_2, k_3 \geq 0$ i $k_1 + k_2 + k_3 = 1$.

Ovaj rezultat ne vrijedi samo za trokut, nego i za bilo koji konveksan skup što vidimo iz idućeg teorema, koji zbog složenosti u ovom radu ne dokazujemo.

Teorem 4.1. *Neka je zadan konveksan skup $S \subseteq \mathbb{R}^2$. Svaku točku $\mathbf{y} \in S$ možemo izraziti kao konveksnu kombinaciju vršnih točaka skupa S.*

Za problematiku linearnog programiranja od presudne važnosti je sljedeći teorem.

Teorem 4.2. *Neka je A matrica s m redova i n stupaca, $\mathbf{b}$ vektor s m komponenti te X vektor s n promjenjivih komponenti. Skup svih rješenja linearnog sustava nejednadžbi $AX \leq \mathbf{b}$ čini konveksan skup.*

Dokaz. Kako bismo utvrdili konveksnost skupa rješenja sustava $AX \leq \mathbf{b}$ moramo dokazati da za dva proizvoljna rješenja X_1 i X_2 i bilo koji parametar $k \in [0, 1]$, konveksna kombinacija $X_k = kX_1 + (1-k)X_2$ zadovoljava i uvjet $AX_k \leq \mathbf{b}$.

Ako su X_1 i X_2 rješenja danog sustava nejednadžbi, vrijedi:

$$AX_1 \leq \mathbf{b} \quad \text{i} \quad AX_2 \leq \mathbf{b}. \tag{4.6}$$

Nadalje je

$$AX_k = A(kX_1 + (1-k)X_2) = kAX_1 + (1-k)AX_2 \leq k\mathbf{b} + (1-k)\mathbf{b} \leq \mathbf{b}, \tag{4.7}$$

pa zaključujemo kako je konveksna kombinacija $X_k = kX_1 + (1-k)X_2$ također rješenje danog sustava nejednadžbi, čime je tvrdnja dokazana. □

Ovaj teorem nam kaže da će ograničenjima linearnog programa biti zadan konveksan skup mogućih rješenja zadanog programa.

Sada možemo uvesti pojam konveksne funkcije.

Definicija 4.4. *Funkcija $f : S \to \mathbb{R}$, gdje je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ konveksan skup, naziva se* ***konveksna*** *ako za svake dvije točke $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ i svaki $k \in [0, 1]$ vrijedi:*

$$f(k\mathbf{x} + (1-k)\mathbf{y}) \leq kf(\mathbf{x}) + (1-k)f(\mathbf{y}). \tag{4.8}$$

U ovom se radu posebno bavimo linearnim funkcijama pa pokažimo da je linearna funkcija konveksna.

Teorem 4.3. *Neka je zadana linearna funkcija $f : S \to \mathbb{R}$ s*

$$f(x, y) = Ax + By + C, \tag{4.9}$$

gdje su A, B i C realne konstante. Funkcija f konveksna je funkcija.

Dokaz. Neka je $\mathbf{x} = (x_1, y_1)$ i $\mathbf{y} = (x_2, y_2)$. Tada je

$$f(\mathbf{x}) = Ax_1 + By_1 + C, \tag{4.10}$$

te

$$f(\mathbf{y}) = Ax_2 + By_2 + C. \tag{4.11}$$

Nadalje je

$$k\mathbf{x} + (1-k)\mathbf{y} = k(x_1, y_1) + (1-k)(x_2, y_2) = (kx_1 + (1-k)x_2, ky_1 + (1-k)y_2), \quad (4.12)$$

pa vrijedi

$$f(k\mathbf{x} + (1-k)\mathbf{y}) = A(kx_1 + (1-k)x_2) + B(ky_1 + (1-k)y_2) + C \quad (4.13)$$

$$= k(Ax_1 + By_1 + C) + (1-k)(Ax_2 + By_2 + C) = kf(\mathbf{x}) + (1-k)f(\mathbf{y}). \quad (4.14)$$

Prema tome vrijedi

$$f(k\mathbf{x} + (1-k)\mathbf{y}) = kf(\mathbf{x}) + (1-k)f(\mathbf{y}), \quad (4.15)$$

što znači da je zadana funkcija konveksna. □

Za konveksne funkcije vrijedi sljedeći teorem na kojem je bazirana grafička metoda.

Teorem 4.4. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ konveksan skup u ravnini, i neka je $f : S \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Tada f postiže svoje ekstremne vrijednosti u nekoj od vršnih točaka danog skupa S.*

Dokaz. Neka je S konveksan skup u $\mathbb{R}^2$ s vršnim točkama $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n$. Svaka točka $\mathbf{y} \in S$ može se izraziti kao konveksna kombinacija vršnih točaka, pa je

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{t}_i, \quad (4.16)$$

gdje su koeficijenti $k_i \geq 0$ i $\sum_{i=1}^{n} k_i = 1$.

Jednostavnosti radi promotrimo samo spojnicu točaka $\mathbf{t}_1$ i $\mathbf{t}_2$, tj. točka $\mathbf{y}$ biti će proizvoljna unutarnja točka te spojnice.

Budući je f konveksna funkcija, vrijedi:

$$f(\mathbf{y}) = f\left(k\mathbf{t}_1 + (1-k)\mathbf{t}_2\right) \leq kf(\mathbf{t}_1) + (1-k)f(\mathbf{t}_2). \quad (4.17)$$

Ako bi maksimum funkcije f na promatranoj spojnici bio u točki y tada bi vrijedilo

$$f(\mathbf{y}) > f(\mathbf{t}_1) \quad (4.18)$$

i

$$f(\mathbf{y}) > f(\mathbf{t}_2). \quad (4.19)$$

Uvrštavanjem (4.18) i (4.19) u (4.17) slijedi

$$f(\mathbf{y}) < kf(\mathbf{y}) + (1-k)f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}), \quad (4.20)$$

što dovodi do kontradikcije. Drugim riječima, maksimalna ili minimalna vrijednost funkcije f ne može biti veća (ili manja) od vrijednosti funkcije f u vršnim točkama, čime je teorem dokazan. □

Ovaj teorem nam govori da je za naći rješenje linearnog programa dovoljno odrediti vrhove konveksnog skupa u kojem se nalazi rješenje, te direktnim uvrštavanjem odrediti vrh u kojem se postiže tražena ekstremna vrijednost.

5. Grafička metoda rješavanja linearnog programa

U linearnom programiranju, grafička metoda predstavlja učinkovitu tehniku za rješavanje problema unutar ovog matematičkog koncepta. Ova metoda pruža vizualni prikaz problema, što olakšava identifikaciju optimalnog rješenja na temelju geometrijskih svojstava problema. Upotreba dvodimenzionalnog koordinatnog sustava, s osima koje predstavljaju varijable, pomaže u prikazivanju ograničenja problema kao pravaca u tom dvodimenzionalnom prostoru, definirajući time područje rješenja i skupove rješenja koji zadovoljavaju ili ne zadovoljavaju uvjete. Na vrhovima tog područja nalaze se osnovna moguća rješenja, pri čemu jedno od njih predstavlja optimalno rješenje. Ovo poglavlje je obrađeno pomoću izvora [9].

Pokažimo sada na primjeru kako funkcionira grafička metoda.

Primjer 5.1. *Riješimo linearni program*

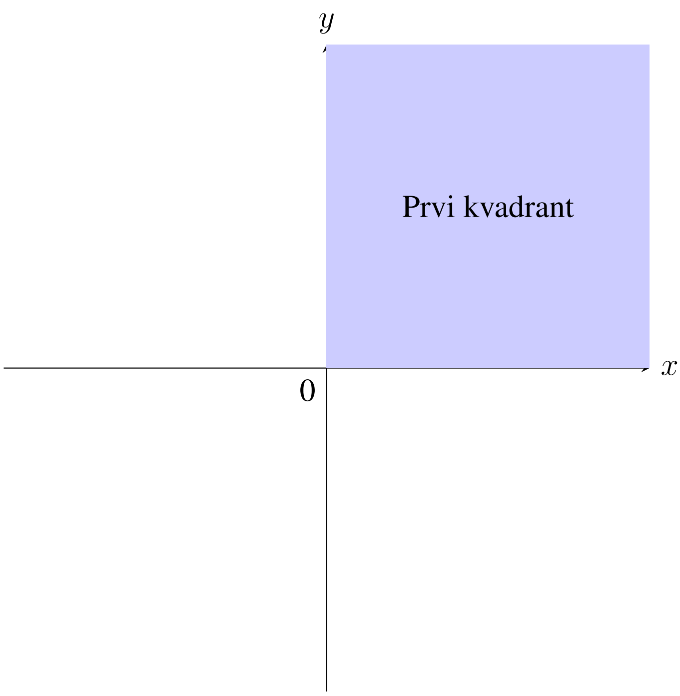
$$Z = 7x + 5y \to \max, \tag{5.1}$$

$$4x + 3y \leq 24, \tag{5.2}$$

$$2x + y \leq 10, \tag{5.3}$$

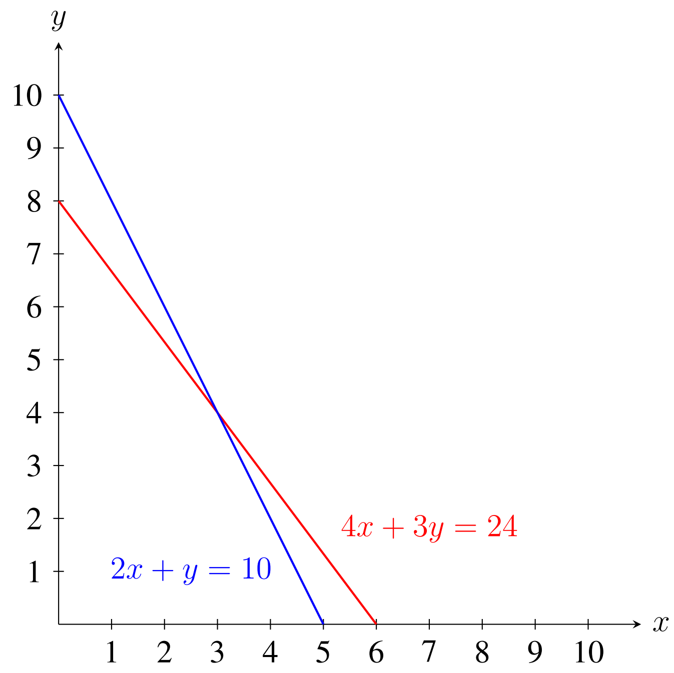
$$x \geq 0, \quad y \geq 0. \tag{5.4}$$

Zbog gore navedenog uvjeta nenegativnosti, nama će biti potreban samo I. kvadrant kako prikazuje slika 5.1



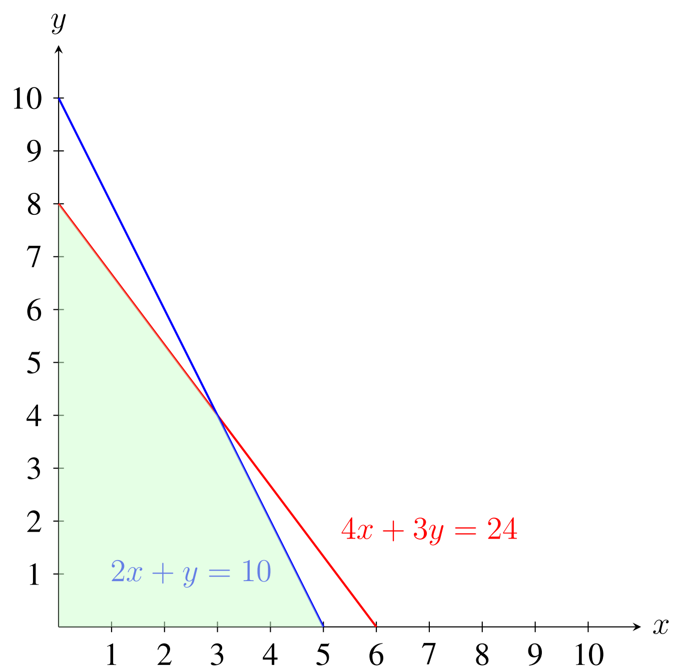
Slika 5.1. Prikaz I. kvadranta u koordinatnom sustavu. Izvor: Izrada autora

Prvi korak pri rješavanju ovog zadatka je ucrtati sva ograničenja koja imamo u koordinatni sustav u obliku pravaca. Kako u ovom primjeru imamo 2 ograničenja, nejednadžbe ćemo pretvoriti u jednadžbe ($\leq$ ili $\geq$ postaju $=$) i predočiti ih u koordinatnom sustavu, kako prikazuje slika 5.2.



Slika 5.2. Ograničenja prikazana kao pravci. Izvor: Izrada autora

Nadalje, kako je u obje nejednakosti riječ o znaku $\leq$ znači da je nama potrebno područje u koordinatnom sustavu koje je ispod oba nacrtana pravca. To nas dovodi do omeđenog područja prikazanog na slici 5.3.



Slika 5.3. Omeđeno područje rješenja. Izvor: Izrada autora

Rješenje našeg zadatka se nalazi u jednom od vrhova omeđenog područja. Kao što možemo vidjeti, u ovom slučaju kao potencijalna rješenja nam se nameću 4 točke. Kako bi odredili koja je naše rješenje morati ćemo svaku uvrstiti u funkciju cilja i vidjeti u kojoj je točki vrijednost funkcije cilja najveća.

Sa slike možemo vidjeti da su naša potencijalna rješenja točke: $T_1(0,0), T_2(5,0), T_3(0,8), T_4(3,4)$.

Krenimo sa uvrštavanjem prve točke u funkciju cilja:

$$Z = 7 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \tag{5.5}$$

što nas očito dovodi do rješenja da je $Z = 0$.

Zatim uvrštavamo drugu točku i to će izgledati ovako:

$$Z = 7 \cdot 5 + 5 \cdot 0 \tag{5.6}$$

gdje je rješenje $Z = 35$.

Slijedeća je treća točka i nakon uvrštavanja dobivamo sljedeću vrijednost funkcije cilja:

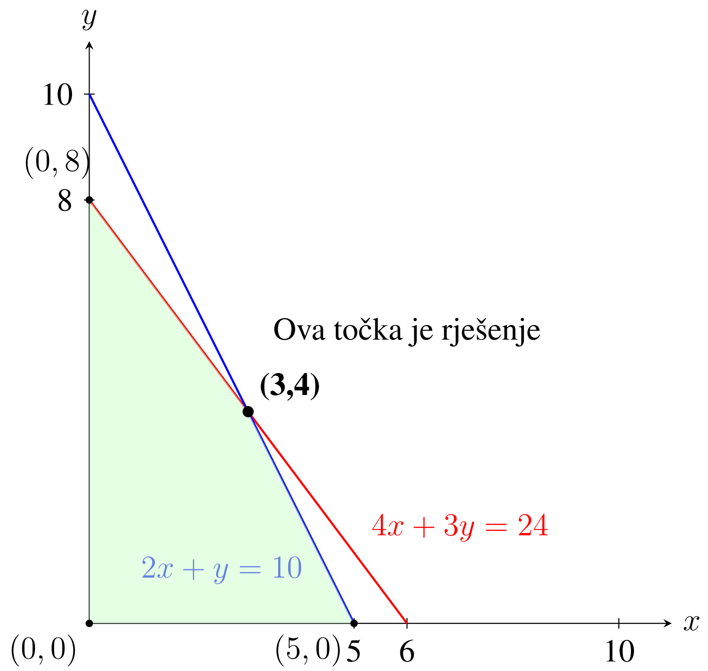
$$Z = 7 \cdot 0 + 5 \cdot 8 \tag{5.7}$$

dakle, $Z = 40$.

Za kraj nam ostaje četvrta točka i vrijednost funkcija cilja je:

$$Z = 7 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \tag{5.8}$$

gdje je $Z = 41$.



Slika 5.4. Prikaz točke maksimuma funkcije cilja. Izvor: Izrada autora

Usporedimo li dobivene vrijednosti, vidimo da je vrijednost funkcije cilja najveća u posljednjoj točki, što nam govori da je rješenje našeg problema točka (3,4) i da će tada funkcija cilja iznositi 41. Ovo je rješenje prikazano na slici 5.4.

Sada ćemo riješiti isti primjer ali preko druge metode u kojoj koristimo vektor normale kako bi došli do željenog rješenja.

Kod druge metode koristimo pravce koji predstavljaju funkciju cilja s jednadžbom $Z = 7x+5y$ za različite vrijednosti broja Z. Gradijent funkcije cilja je zapravo smjer njenog najbržeg rasta, a za linearnu funkciju gradijent je jednak vektoru normale za pravac $0 = 7x + 5y$.

Odgovarajući pravac ćemo u koordinatnom sustavu označavati isprekidanom narančastom linijom kao na slikama 5.5 i 5.6 u nastavku. Pravac translatiramo u smjeru vektora normale pravca koji je jednak radij-vektoru točke (7,5), jer u tom smjeru raste funkcija cilja. Stoga će se maksimalna vrijednost postići u najudaljenijoj točki skupa mogućih rješenja.

Primjer 5.2. *Riješimo linearni program:*

$$Z = 7x + 5y \to \max, \tag{5.9}$$

$$4x + 3y \leq 24, \tag{5.10}$$

$$2x + y \leq 10, \tag{5.11}$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0. \tag{5.12}$$

Prvi korak nam je isti kao kod prve metode rješavanja, gdje ćemo ucrtati sva ograničenja koja imamo u koordinatni sustav u obliku pravaca i tako dobiti 4 točke u vrhovima omeđenog područja u kojem se nalazi naše rješenje. Ponovimo, naša potencijalna rješenja su točke: $T_1(0,0)$, $T_2(5,0)$, $T_3(0,8)$, $T_4(3,4)$.

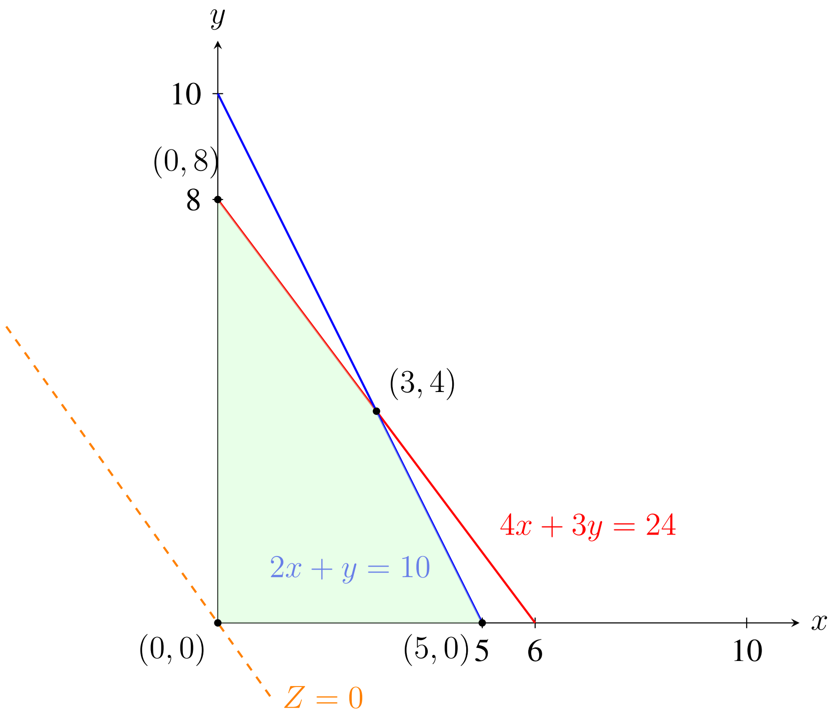
Kada smo to napravili, kako bi odredili naše rješenje nećemo uvrštavati svaku točku u funkciju cilja i gledati koje je rješenje najveće kao što smo u prošlom primjeru, nego ćemo koristiti već spomenutu metodu vektora normale.

U jednadžbi funkcije cilja, umjesto Z pišemo nulu. To nam daje novu jednadžbu pravca koja izgleda ovako:

$$0 = 7x + 5y. \tag{5.13}$$

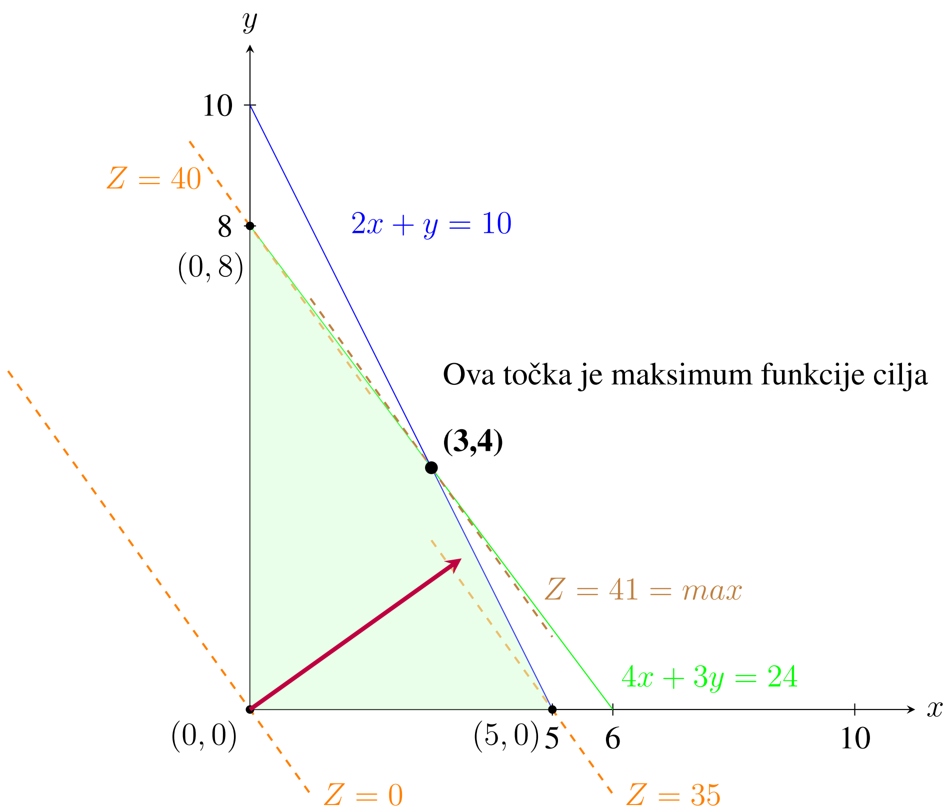
Taj pravac ucrtavamo u koordinatni sustav. Kako smo u jednadžbu uvrstili nulu, to nam govori da će pravac prolaziti kroz ishodište, kako prikazuje slika 5.5.

Kako bi odredili u kojoj je točki rješenje trebamo translatirati pravac u smjeru normale sve dok ne naiđemo na posljednju od 4 moguće točke ($Z = max$). Prije nego krenemo s translatiranjem možemo vidjeti da se već odmah pravac siječe s točkom $T_1(0,0)$, *što znači da ona nije naše rješenje.*



Slika 5.5. Omeđeno područje rješenja i pravac za $Z = 0$. Izvor: Izrada autora

Sada možemo započeti s translacijom i prva točka na koju nailazimo nakon ishodišta je točka $T_2(5, 0)$, koju pravac siječe za $Z = 35$. Ovaj je proces prikazan na slici 5.6.



Slika 5.6. Prikaz svih translacijskih pravaca i konačnog rješenja. Izvor: Izrada autora

Nastavimo li dalje nailazi nam točka $T_3(0,8)$, koju pravac siječe ako Z ima vrijednost 40.

Ostaje nam još jedna točka i na nju nailazimo posljednju, što znači da je ona rješenje našeg problema i to je točka $T_4(3,4)$. Pravac prolazi kroz nju ako za Z uzmemo vrijednost 41 kao što možemo vidjeti na slici 5.6, a to je i rješenje koje smo dobili i metodom opisanom u prethodnom primjeru.

Sada ćemo analizirati primjer područja koje nije zatvoreno i gdje se traži minimum, a ne maksimum funkcije cilja.

Primjer 5.3. *Riješimo linearni program:*

$$Z = 5x + 7y \rightarrow \min, \tag{5.14}$$

$$x + 2y \geq 6, \tag{5.15}$$

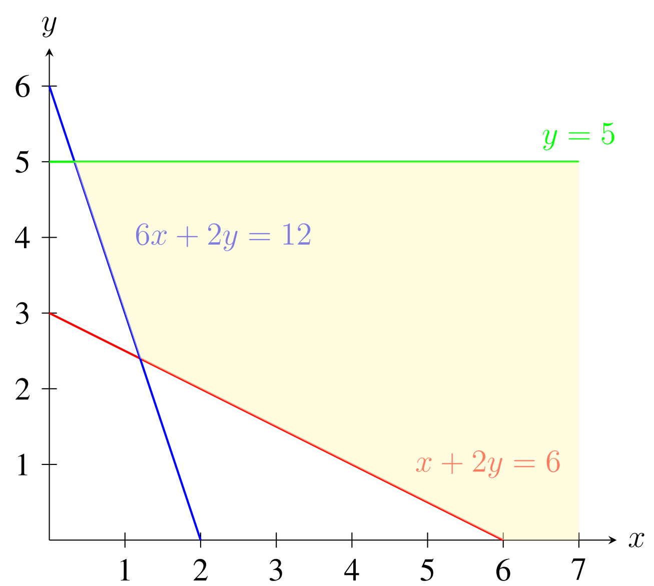
$$6x + 2y \geq 12, \tag{5.16}$$

$$y \leq 5, \tag{5.17}$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0. \tag{5.18}$$

Kao prvi korak opet ucrtavamo sva ograničenja u koordinatni sustav. Nejednadžbe pretvaramo u jednadžbe i crtamo pripadne pravce.

Nakon toga gledamo vrste nejednadžbi gdje u prve dvije imamo znak $\geq$ što nam govori da gledamo područje iznad tih pravaca, dok u trećoj nejednadžbu imamo znak $\leq$ znači da gledamo područje ispod pravca. Time dobivamo konačno područje u kojem se nalazi naše rješenje kako prikazuje slika 5.7.

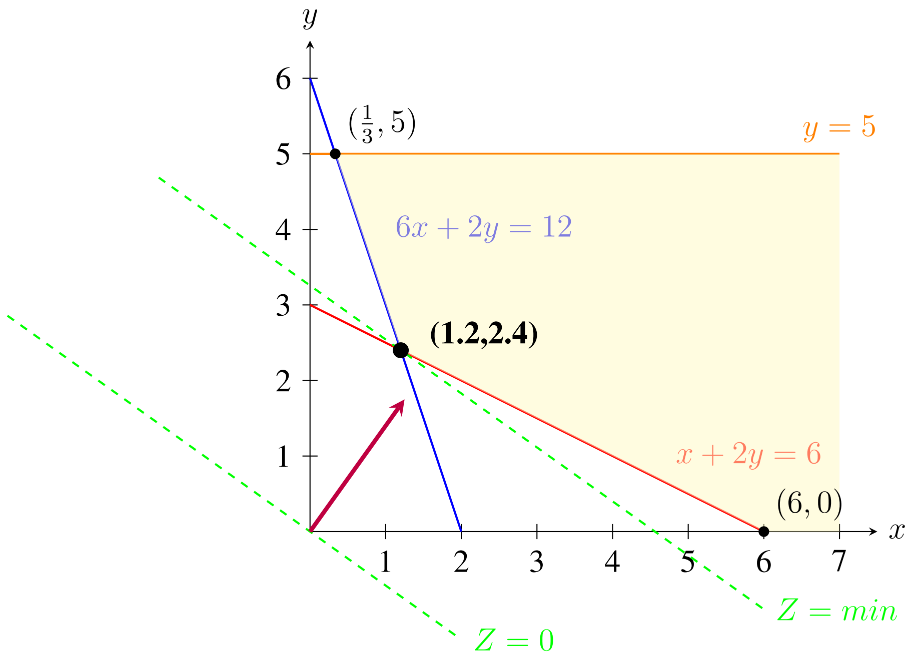


Slika 5.7. Prikaz ograničenja i područje rješenja. Izvor: Izrada autora

Naše rješenje se nalazi u jednom od vrhova obojanog područja. U obzir nam dolaze 3 točke koje su vrhovi tog područja. Riječ je o točkama: $(\frac{1}{3}, 5)$, $(1.2, 2.4)$ *i* $(6, 0)$.

Za rješavanje ovog zadatka, koristiti ćemo metodu vektora normale. Zapisujemo jednadžbu funkcije cilja kao $Z = 5x + 7y$ *gdje umjesto Z ubacujemo nulu. Dobivamo novu jednadžbu* $(Z = 0)$ *i pripadni pravac crtamo u koordinatni sustav. Taj novi pravac funkcije cilja će prolaziti kroz ishodište, ispod sva tri moguća rješenja zadatka.*

Naše optimalno rješenje (minimum) dobit ćemo translatiranjem pravca od ishodišta prema gore dok pravac ne presiječe neku od 3 točke koje su potencijalna rješenja i ta točka će imati traženu minimalnu vrijednost funkcije cilja $(Z = min)$*. Primijetimo da za razliku od problema maksimuma gdje smo tražiti točku koja je od ishodišta najudaljenija, ovdje tražimo točku koja je ishodištu najbliža.*



Slika 5.8. Prikaz točke minimuma funkcije cilja. Izvor: Izrada autora

Kao što možemo vidjeti na slici 5.8, kod translacije pravac je najprije presjekao točku (1.2,2.4). To nam govori kako je ona zapravo naše optimalno rješenje, tj. da ona minimizira vrijednost funkcije cilja. Uvrstimo li tu točku vrijednost naše funkcije cilja će iznositi:

$$Z = 5 \cdot 1.2 + 7 \cdot 2.4 \tag{5.19}$$

odnosno, optimalni Z *će iznositi* 22.8.

Linearni program ne mora uvijek imati samo jedno rješenje. To nam pokazuje idući primjer gdje ćemo imati slučaj s dva rješenja.

Primjer 5.4. *Riješimo linearni program:*

$$Z = 4x + 6y \to \max, \tag{5.20}$$

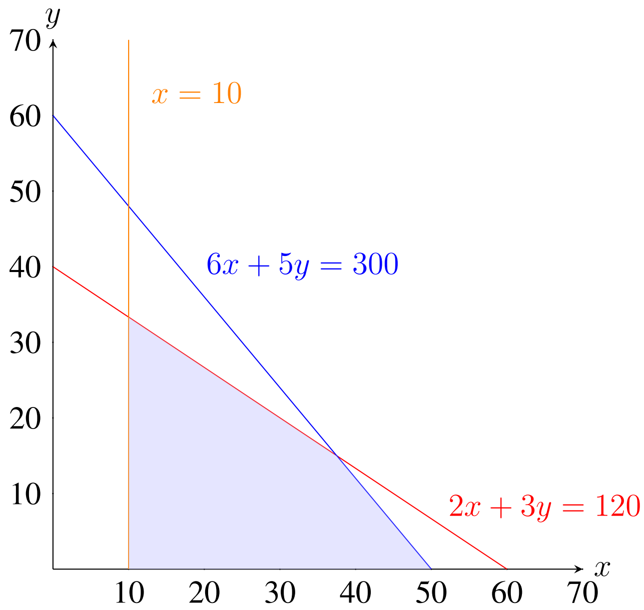
$$2x + 3y \leq 120, \tag{5.21}$$

$$6x + 5y \leq 300, \tag{5.22}$$

$$x \geq 10, \tag{5.23}$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0. \tag{5.24}$$

Počinjemo tako što sva ograničenja definirana nejednadžbama ucrtavamo u koordinatni sustav. Najprije nejednadžbe pretvorimo u jednadžbe i nacrtamo pripadajuće pravce. Zatim, analiziramo znak nejednakosti. Prve dvije nejednadžbe sadrže znak "manje ili jednako" ($\leq$), što znači da tražimo područje ispod tih pravaca. Treća nejednadžba sadrži znak "veće ili jednako" ($\geq$) pa tražimo područje desno od tog pravca. Preklapanjem svih područja dobivamo područje u kojem se nalazi rješenje kao što prikazuje slika 5.9.



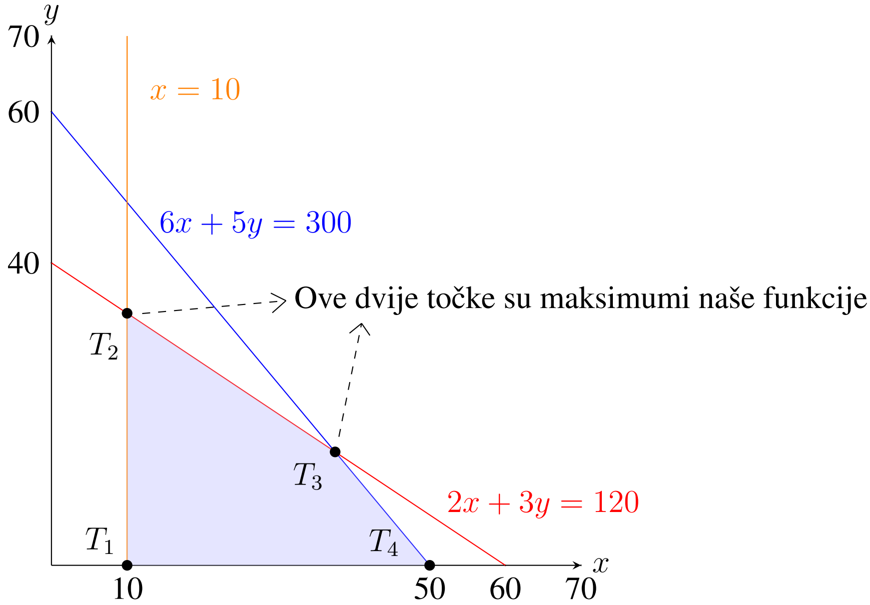
Slika 5.9. Prikaz svih ograničenja i područje u kojem se nalazi rješenje. Izvor: Izrada autora

U dobivenom omeđenom području, možemo vidjeti 4 vrha tj. 4 točke koje predstavljaju naša potencijalna rješenja. Riječ je o točkama $T_1(10, 0)$, $T_2(10, \frac{100}{3})$, $T_3(\frac{75}{2}, 15)$, $T_4(50, 0)$.

Koristit ćemo prvu metodu rješavanja problema, odnosno svaku pojedinu točku ćemo uvrstiti u funkciju cilja. Dobivamo:

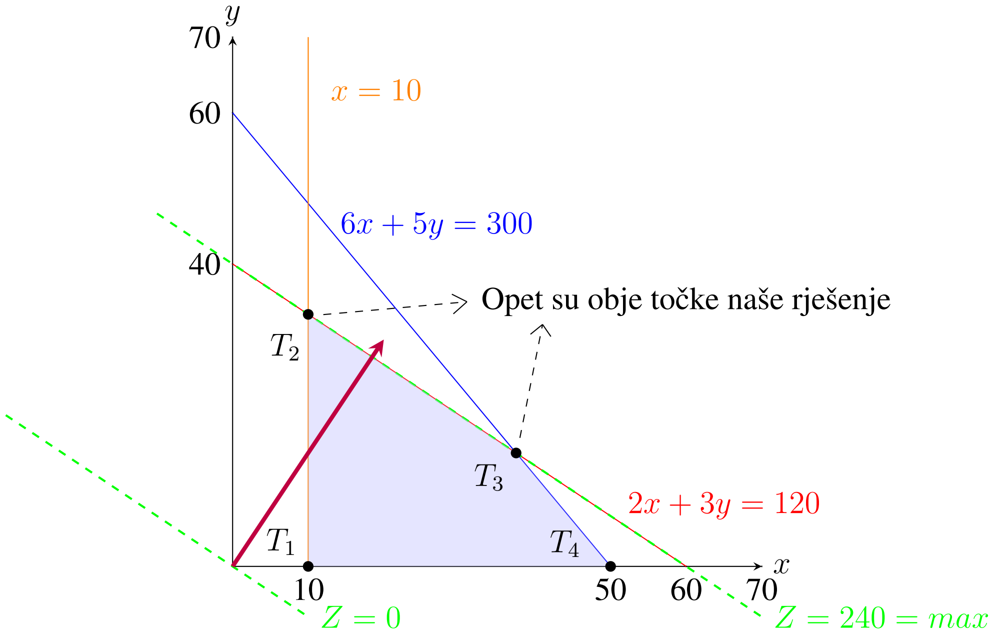
- *Prva točka:* $Z = 4 \cdot 10 + 6 \cdot 0 = 40$,
- *Druga točka:* $Z = 4 \cdot 10 + 6 \cdot \frac{100}{3} = 240$,
- *Treća točka:* $Z = 4 \cdot \frac{75}{2} + 6 \cdot 15 = 240$,
- *Četvrta točka:* $Z = 4 \cdot 50 + 6 \cdot 0 = 200$.

Možemo vidjeti kako smo dobili dvije maksimalne vrijednosti koje su jednake i iznose 240. Riječ je o točkama $T_2(10, \frac{100}{3})$ *i* $T_3(\frac{75}{2}, 15)$ *te su one rješenja problema označena na slici 5.10.*



Slika 5.10. Prikaz linearnog programa s dva rješenja. Izvor: Izrada autora

Ovaj zadatak smo riješili pomoću prve metode, ali smo mogli koristiti i drugu metodu tj. metodu translacije po vektoru normale. Tada bi u funkciju cilja umjesto Z ubacili vrijednost 0 *i taj dobiveni pravac translatirali prema gore dok ne naiđemo do zadnje točke potencijalnog rješenja. Taj je postupak ilustriran na slici 5.11.*



Slika 5.11. Prikaz rješenja preko metode vektora normale. Izvor: Izrada autora

Možemo uočiti da će pravac prvo proći kroz točku T_1*, zatim kroz točku* T_4 *i onda u isto vrijeme* *i za istu vrijednost ($Z = 240$) će prolaziti kroz točke $T_2(10, \frac{100}{3})$ i $T_3(\frac{75}{2}, 15)$ koje su maksimumi i rješenje problema, kao i kod prve metode.*

Pokažimo sada slučaj kada linearni program nema rješenja.

Primjer 5.5. *Riješimo linearni program:*

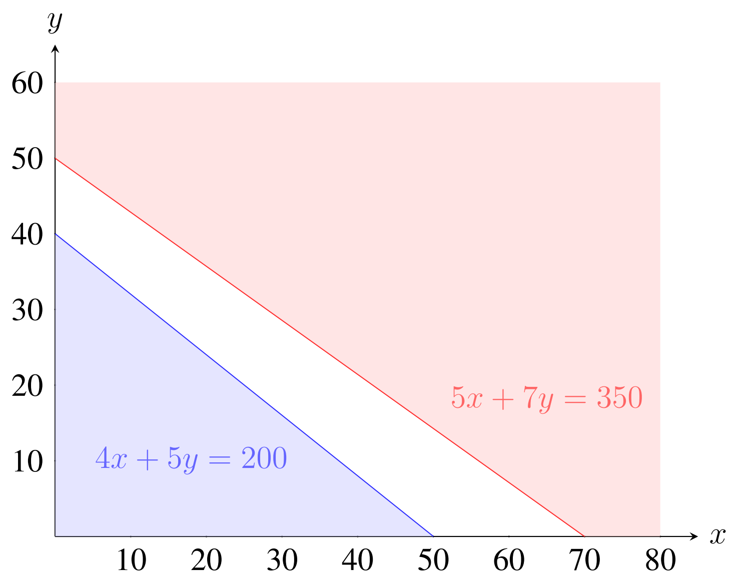
$$Z = 10x + 7y \to \min, \tag{5.25}$$

$$5x + 7y \geq 350, \tag{5.26}$$

$$4x + 5y \leq 200, \tag{5.27}$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0. \tag{5.28}$$

Za početak ponovno nejednadžbe tj. ograničenja pretvaramo u jednadžbe i ucrtavamo ih u obliku pravaca u koordinatni sustav. Kako u prvom ograničenju imamo oznaku $\geq$ gledati ćemo područje iznad pravca, a u drugom ograničenju $\leq$ pa gledamo područje ispod tog pravca. Dobijemo područje prikazano na slici 5.12.



Slika 5.12. Prikaz ograničenja i dva područja koja se ne sijeku. Izvor: Izrada autora

Možemo vidjeti kako ova dva područja nemaju zajedničkih točaka, što nam govori da ovaj program zapravo nema rješenje jer nema točke koja zadovoljava sva ograničenja.

Svi dosadašnji primjeri su imali svoja ograničenja koja bi ograničili simbolima $\leq$ ili $\geq$, sada ćemo pokazati kako bi riješili program ako je naše ograničenje određeno znakom "$=$" te će ujedno ovo biti i posljednji apstraktni primjer u ovome poglavlju.

Primjer 5.6. *Riješimo linearni program:*

$$Z = 10x + 7y \to \max, \tag{5.29}$$

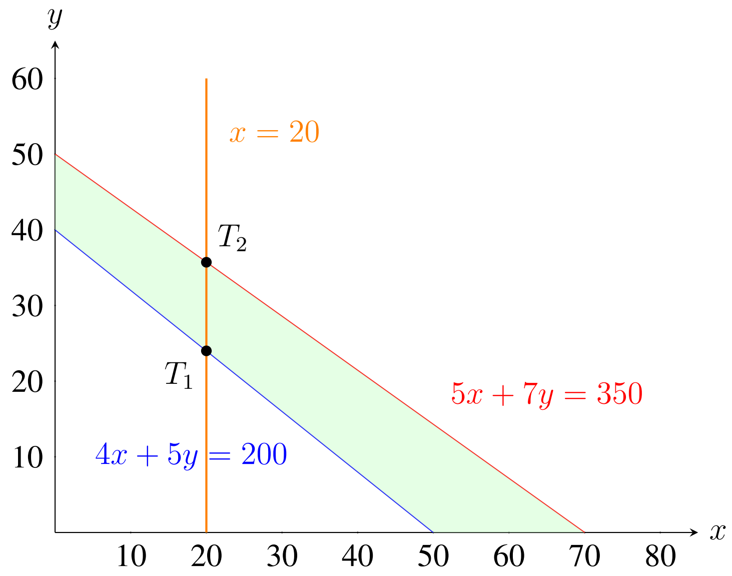
$$5x + 7y \leq 350, \tag{5.30}$$

$$4x + 5y \geq 200, \tag{5.31}$$

$$x = 20, \tag{5.32}$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0. \tag{5.33}$$

Ponavljamo postupak kod crtanja ograničenja, gdje ih ucrtavamo u obliku pravaca u koordinatni sustav. U prvom ograničenju imamo oznaku $\leq$ i gledati ćemo područje ispod pravca, a u drugom ograničenju $\geq$ te gledamo područje iznad pravca. Treće ograničenje ima oznaku jednakosti što nam govori da će naše traženo rješenje morati biti na tom pravcu. Prikažemo li ta ograničenja grafički, dobijemo područje kao na slici 5.13.



Slika 5.13. Prikaz ograničenja i područja u kojem se nalazi rješenje. Izvor: Izrada autora

Do sada smo u ovakvim primjerima dobili po četiri točke koje su bile potencijalna rješenja, ali kako je sada u jednom ograničenju riječ o jednakosti i rješenje mora biti na tom pravcu, to nam govori kako ovdje imamo samo 2 moguća rješenja. Točnije, naše rješenje mora biti u zelenom području i biti dio narančastog pravca. Kako tražimo maksimum, naše rješenje je jedno od dvije rubne točke koje su u tom području. Te točke smo označili s T_1 i T_2.

Riješit ćemo ovaj zadatak pomoću metode provjere budući je u ovom slučaju brža i jednostavnija.

Naša potencijalna rješenja su točke $T_1(20, 24)$ i $T_2(20, 35.7)$. Kako bi odredili koja je naš maksimum, uvrstit ćemo ih u funkciju cilja i vidjeti kada ima veću vrijednost.

Funkcija cilja glasi $Z = 10x + 7y$. Uvrstimo li obje točke dobivamo slijedeće:

- $T_1 : 10 \cdot 20 + 7 \cdot 24 = 368,$

- $T_2 : 10 \cdot 20 + 7 \cdot 35.7 = 450.$

Zaključujemo kako je vrijednost veća u točki T_2, te je ona rješenje zadanog linearnog programa.

U sljedećem primjeru prikazat ćemo rješavanje jednog realnog problema. Tekst primjera je preuzet iz izvora [10], dok su brojevi izmišljeni ali su odabrani u skladu sa statističkim podacima dostupnima na webu.

Primjer 5.7. *Poljoprivrednica ima farmu od 270 jutara*[1] *na kojoj sadi dvije kulture: kukuruz i soju. Za svako zasađeno jutro kukuruza, troškovi su joj 500 eura, a za svako zasađeno jutro soje, troškovi su 900 eura. Svako jutro kukuruza zahtijeva 110 bušela*[2] *skladišnog prostora i donosi profit od 60 eura. Svako jutro soje zahtijeva 50 bušela skladišnog prostora i donosi profit od 90 eura. Ako je ukupna količina dostupnog skladišnog prostora 20 000 bušela, a poljoprivrednica ima 175 000 eura na raspolaganju, koliko jutara svake kulture bi trebala posaditi kako bi maksimizirala svoj profit? Koliki će biti njezin profit ako slijedi ovu strategiju?*

U ovom ćemo primjeru s x označavati broj jutara zasađenih kukuruzom, a sa y broj jutara zasađenih sojom.

Kako broj zasađenih jutara kukuruza i soje ne može biti negativan dobivamo naše prvo ograničenje:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0. \tag{5.34}$$

Sljedeće je ograničenje budžeta, gdje poljoprivrednica na raspolaganju ima 175 000 eura. Trošak zasađivanja jednog jutra kukuruza ju dođe 500 eura, a jednog jutra soje 900 eura. Tu dobivamo novo ograničenje koje glasi:

$$500x + 900y \leq 175000. \tag{5.35}$$

Kako poljoprivrednica ima novčani limit, tako ima i maksimalnu dopuštenu količinu skladišnog prostora koja iznosi 20 000 bušela. Svako jutro kukuruza zahtijeva 110 bušela skladišnog prostora, a svako jutro soje 50 bušela. To nas dovodi do ograničenja oblika:

$$110x + 50y \leq 20000. \tag{5.36}$$

Kao zadnje ograničenje nam ostaje ukupna površina farme od 270 jutara. Kako poljoprivrednica sadi samo dvije kulture, kukuruz i soju, zadnje ograničenje nam izgleda ovako:

$$x + y \leq 270. \tag{5.37}$$

[1] Jutro je povijesna mjerna jedinica za površinu zemljišta, najčešće korištena u poljoprivredi. Definira se kao površina zemljišta koja se može obraditi u jednom danu uz pomoć jednog para volova. Veličina jednog jutra varira ovisno o regiji, a u Hrvatskoj jedno jutro iznosi oko 5750 kvadratnih metara.

[2] Bušel je povijesna mjerna jedinica za volumen žitarica, a temelji se na masi suhog proizvoda. Jedan bušel pšenice teži približno 60 funti (27.22 kg) i zauzima volumen od 35.24 litre.

Pitanje je koliko jutara svake kulture treba posaditi da bi nam profit bio maksimalan ako znamo da jedno jutro kukuruza donosi profit od 60 eura, a jedno jutro soje 90 eura. Tada jednostavno možemo zapisati našu funkciju cilja skupa sa svim njenim ograničenjima kao:

$$Z = 60x + 90y \rightarrow \max, \tag{5.38}$$

$$500x + 900y \leq 175000, \tag{5.39}$$

$$110x + 50y \leq 20000, \tag{5.40}$$

$$x + y \leq 270, \tag{5.41}$$

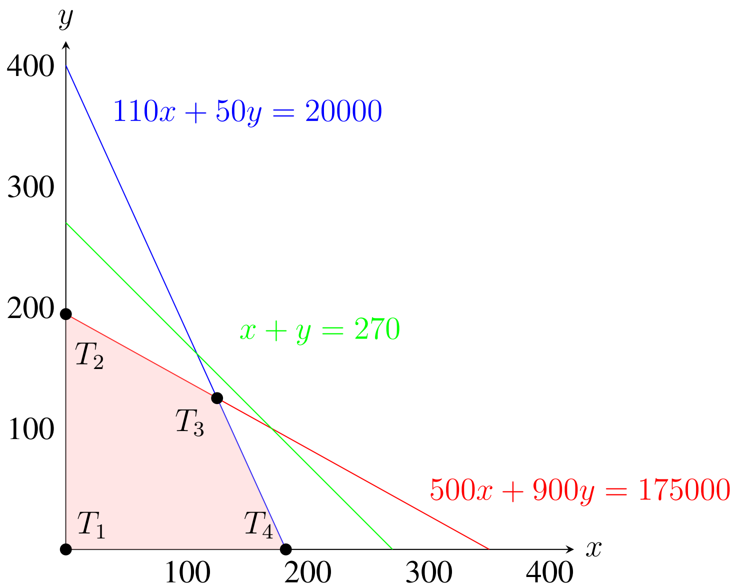
$$x \geq 0, \quad y \geq 0. \tag{5.42}$$

Sada krećemo na rješavanje ovog linearnog programa.

Uvjet nenegativnosti nam govori da nam je potreban samo prvi kvadrant koordinatnog sustava, jer su u njemu obje osi pozitivne.

Dalje, imamo tri ograničenja koja su zapisana kao nejednadžbe i koje treba pretvoriti u jednadžbe. To ćemo napraviti tako da simbole $\leq$ zamjenimo sa znakom jednakosti (=). Ta zamjena nam je potrebna kako bi ta ograničenja mogli nacrtati kao pravce unutar koordinatnog sustava.

Kako je u sva 3 ograničenja riječ o simbolu $\leq$, naše područje rješenja će se nalaziti ispod tih pravaca. Konačno područje rješenja je ono koje obuhvaća presjek područja sva 3 pravca kako prikazuje slika 5.14.



Slika 5.14. Prikaz svih ograničenja i područje u kojem se nalazi rješenje. Izvor: Izrada autora

Sa slike možemo vidjeti kako smo kao područje rješenja dobili nepravilni četverokut. Naše rješenje se nalazi u jednom od njegovih vrhova. Četiri točke koje su potencijalna rješenja su točke:

- $T_1(0,0)$ - *ta točka nam je ishodište,*
- $T_2(0,194.4)$ - *točka u kojoj pravac* $500x + 900y = 175000$ *siječe y os,*
- $T_3(125,125)$ - *točka gdje se sijeku pravci* $500x + 900y = 175000$ *i* $110x + 50y = 20000$,
- $T_4(181.8,0)$ - *točka u kojoj pravac* $110x + 50y = 20000$ *siječe x os.*

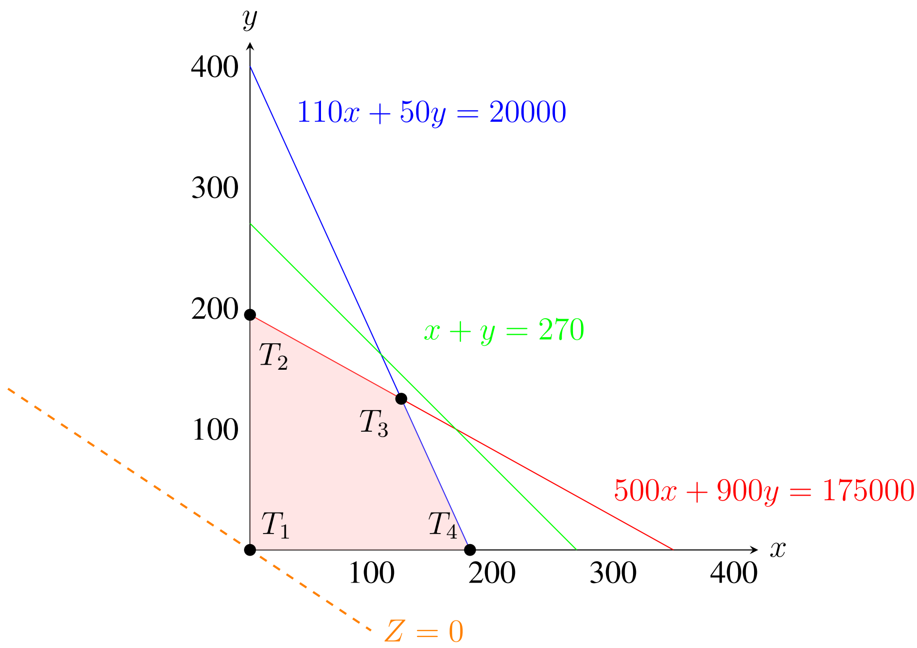
Zadatak ćemo riješiti s obje metode kako bi usporedili rješenja i time provjerili njihovu točnost. Krenuti ćemo sa prvom metodom uvrštavanja točki tj. vrhova područja u funkciju cilja.

- *Prva točka:* $Z = 60 \cdot 0 + 90 \cdot 0 = 0$,
- *Druga točka:* $Z = 60 \cdot 0 + 90 \cdot 194.4 = 17496$,
- *Treća točka:* $Z = 60 \cdot 125 + 90 \cdot 125 = 18750$, $\rightarrow \max$
- *Četvrta točka:* $Z = 60 \cdot 181.8 + 90 \cdot 0 = 10908$.

Uvrštavanjem točaka u funkciju cilja možemo zaključiti da je najveća vrijednost u točki T_3 *i da je ona maksimum koji tražimo. Dakle, da bi profit bio maksimalan poljoprivrednica mora posaditi 125 jutara kukuruza i 125 jutara soje kako bi imala profit od 18 750 eura.*

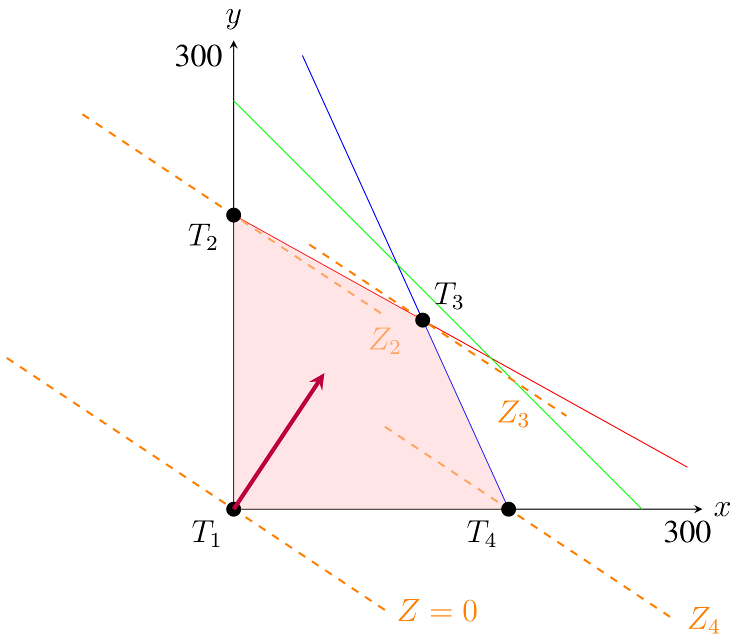
Riješimo sada problem i drugom metodom i tako provjerimo hoće li isto točka T_3 *biti maksimum.*

Prvi korak je isti, gdje crtamo ograničenja kao pravce i dobivamo područje u kojem se nalazi potencijalno rješenje. Kao i u prijašnjim primjerima, u funkciju cilja umjesto Z *upisujemo nulu te dobiveni pravac crtamo u koordinatni sustav kao što prikazuje slika 5.15.*



Slika 5.15. Prikaz područja u kojem se nalazi rješenje i pravac za $Z = 0$. *Izvor: Izrada autora*

Kako bi dobili rješenje, moramo translatirati taj pravac prema gore sve dok ne prođe kroz sva 4 naša rješenja. Ono rješenje kroz koje prođe posljednje će biti ujedno i rješenje koje tražimo.



Slika 5.16. Uvećani prikaz kada funkcija cilja prolazi kroz svaku od točki. Izvor: Izrada autora

Kao što vidimo na slici 5.16, funkcija cilja najprije prolazi kroz točku T_1, zatim kroz T_4 pa T_2 i konačno kroz točku T_3. To nam govori da je točka $T_3(125, 125)$ rješenje i traženi maksimum, isto kao i kada smo zadatak rješavali prvom metodom.

6. Dualni problem linearnog programiranja

Dualno programiranje je korisna tehnika u optimizaciji koja se koristi za rješavanje problema linearne optimizacije. Za svaki problem linearne optimizacije, nazvan primarni problem, postoji odgovarajući dualni problem. Ova dva problema su usko povezana. Rješenje dualnog problema daje nam informacije o rješenju primarnog problema. Konkretno, optimalno rješenje dualnog problema daje nam donju ili gornju granicu optimalnog rješenja primarnog problema (u zavisnosti od toga da li je primarni problem minimuma ili maksimuma). Ovo poglavlje je obrađeno pomoću izvora [11].

U nekim slučajevima, rješavanje dualnog problema može biti lakše od rješavanja primarnog problema. Ovo je posebno korisno kod problema sa velikim brojem varijabli ili ograničenja. Ukratko, dualno programiranje je kao da gledamo problem iz dva različita ugla. Analizirajući oba ugla (primarni i dualni problem), možemo dobiti bolje razumijevanje originalnog problema i pronaći efikasnije načine za njegovo rješavanje.

Razmotrimo standardni oblik problema linearne optimizacije (primarni problem):

$$c^T x \to \min, \tag{6.1}$$

$$Ax \leq b, \tag{6.2}$$

$$x \geq 0, \tag{6.3}$$

gde je c vektor koeficijenata funkcije cilja, A matrica ograničenja, b vektor desne strane ograničenja, dok je x vektor varijabli odlučivanja.

Dualni problem za ovaj primarni problem glasi:

$$b^T y \to \max, \tag{6.4}$$

$$A^T y \geq c, \tag{6.5}$$

$$y \geq 0. \tag{6.6}$$

gde je y vektor dualnih varijabli.

Primijetimo da maksimizacija u primarnom problemu znači minimizaciju u dualnom, a na isti način se mijenja i tip ograničenja.

Postoje dva bitna teorema u dualnom programiranju, koja zbog svoje složenosti ovdje navodimo bez dokaza:

1. **Teorem o slaboj dualnosti**: Ako su x i y dopustiva rješenja za primarni i dualni problem, tada vrijedi: $c^T x \geq b^T y$.

2. **Teorem o jakoj dualnosti**: Ako primarni problem ima optimalno rješenje, onda i dualni problem ima optimalno rešenje, a vrijednosti funkcija cilja u optimalnim rješenjima su jednake.

3. **Teorem o komplementarnosti uvjeta**: Ako je u rješenju dualnog problema $y_i > 0$ tada je odgovarajuće ograničenju primarnog problema aktivno, tj. rješenje se nalazi na njegovu rubu.

Dualne varijable često imaju praktično značenje u kontekstu problema, pružajući uvid u "cijenu" resursa ili "vrijednost" relaksacije ograničenja.

Sad ćemo pokazati primjenu dualnog programiranja na dva primjera koja imaju izmišljene podatke, a vezana su za elektrotehniku. Riječ je o proizvodnji žica i nabavi raznih vrsta kondenzatora.

Primjer 6.1. *Tvornica proizvodi aluminijsku, bakrenu i čeličnu žicu pomoću dva stroja. Jedan stroj radi s prosječnom snagom od 100 kW te proizvodi aluminijsku i čeličnu žicu, dok drugi od 40kW i proizvodi samo bakrenu. Za svaki kilogram aluminijske žice potrebno je 9 kWh električne energije i 0.09 sati tj. 5 minuta rada. Za svaki kilogram bakrene žice potrebno je 12 kWh električne energije i 18 minuta rada. Za svaki kilogram čelične žice potrebno je 10 kWh električne energije i 6 minuta rada. Dostupnost električne energije ograničeno je na 800 kWh dnevno, dok postrojenje radi 8 sati tj. 480 minuta dnevno. Neka je tržišna cijena aluminijske žice 3 eura po kilogramu, bakrene 6 eura po kilogramu i čelične 2 eura po kilogramu. Odredimo koliko koje žice treba biti proizvedeno da bi profit bio maksimalan.*

Varijable odlučivanja u ovom slučaju su:

- x_1 *- broj kilograma aluminijske žice proizvedene dnevno,*
- x_2 *- broj kilograma bakrene žice proizvedene dnevno,*
- x_3 *- broj kilograma čelične žice proizvedene dnevno.*

Najprije zapisujemo uvjet nenegativnosti jer je riječ o kilogramima koji ne mogu biti negativni, pa vrijedi:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \tag{6.7}$$

Kako je za svaki kilogram aluminijske žice potrebno 9 kWh el. energije, za bakrenu žicu 12 kWh el. energije te za čeličnu žicu 10 kWh, uz dnevno ograničenje koje iznosi 800 kWh dolazimo do drugog ograničenja:

$$9x_1 + 12x_2 + 10x_3 \leq 800. \tag{6.8}$$

Dalje, za proizvodnju kilograma aluminijske žice potrebno je 5 minuta rada, za proizvodnju kilograma bakrene žice 18 minuta rada te za proizvodnju kilograma čelične žice 6 minuta rada.

Kako nam je ukupan broj radnih minuta dnevno 480, naše zadnje ograničenje glasi:

$$5x_1 + 18x_2 + 6x_3 \leq 480. \tag{6.9}$$

Na kraju, kako je tržišna cijena aluminijske žice 3 eura po kilogramu, bakrene 6 eura po kilogramu te čelične 2 eura po kilogramu, to nam govori da će funkcija cilja (maksimiziranje profita) uz zadana ograničenja izgledati ovako:

$$Z = 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \to \max\,. \tag{6.10}$$

Konačno, čitav linearni program poprima oblik:

$$Z = 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \to \max, \tag{6.11}$$

$$9x_1 + 12x_2 + 10x_3 \leq 800, \tag{6.12}$$

$$5x_1 + 18x_2 + 6x_3 \leq 480, \tag{6.13}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \tag{6.14}$$

Sada krećemo s uvođenjem dualnih varijabli:

- y_1 *- cijena električne energije izražena u količini kWh,*
- y_2 *- cijena rada izražena u broju radnih minuta.*

Nova ograničenja će zamijeniti vrijednosti stupaca s redovima koji stoje uz x_1 *i* x_2*, dok će se koeficijenti u funkciji cilja* Z *zamijeniti s vrijednostima koje se nalaze sa desne strane njenih ograničenja i tako tvoriti novu funkciju cilja W s njenim ograničenjima koja će imati varijable* y_1 *i* y_2*.*

Naš dualni problem će umjesto tri nepoznanice imati samo dvije, te će glasiti:

$$W = 800y_1 + 480y_2 \to \min, \tag{6.15}$$

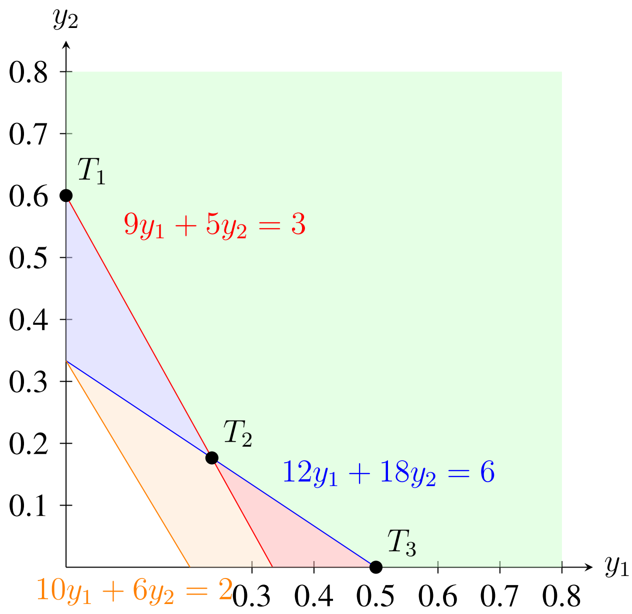
$$9y_1 + 5y_2 \geq 3, \tag{6.16}$$

$$12y_1 + 18y_2 \geq 6, \tag{6.17}$$

$$10y_1 + 6y_2 \geq 2, \tag{6.18}$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0. \tag{6.19}$$

Rješavanje ovog dualnog problema može se izvršiti grafičkom metodom. Rješenje dualnog problema dat će nam optimalne vrijednosti dualnih varijabli, koje predstavljaju "cijene" resursa. Ove cijene nam mogu pomoći da razumijemo koliko je koji resurs važan za ostvarivanje maksimalnog profita.



Slika 6.1. Prikaz svih ograničenja i područje u kojem se nalazi rješenje. Izvor: Izrada autora

Kako su sva tri ograničenja postala $\geq$*, tražimo područje iznad njih. Narančasti pravac je najmanji i nema presjeka sa ostala dva pravca te ga možemo i zanemariti. Kao što vidimo na slici 6.1, naše minimalno rješenje je negdje na rubovima područja obojanog zelenom bojom. Nameću nam se tri točke kao rješenja i to su točke* $T_1(0, 0.6)$, $T_2(0.2353, 0.1765)$ *te* $T_3(0.5, 0)$.

Koristimo prvu metodu za rješavanje, korištenu u mnogim primjerima prije tako da je ovdje detaljno ne objašnjavamo. Funkcija cilja glasi $W = 800y_1 + 480y_2$*. Uvrstimo li sve tri točke, dobivamo slijedeće:*

- $T_1 - 800 \cdot 0 + 480 \cdot 0.6 = 288$,
- $T_2 - 800 \cdot 0.2353 + 480 \cdot 0.1765 = 272.94$,
- $T_3 - 800 \cdot 0.5 + 480 \cdot 0 = 400$.

Uvrštavanje svih točaka u funkciju cilja tražimo naš minimum, te dobivamo kako je naše rješenje točka $T_2(0.24, 0.18)$.

Rješenje $y_1 = 0.2353''$ *nam govori da bi povećanje dostupne električne energije za 1 kWh dnevno povećalo ukupnu zaradu tvornice za 0.24 eura, pod uvjetom da se ostali parametri ne mijenjaju.*

Nadalje, rješenje $y_2 = 0.1765$ *nam govori da bi povećanje radnog vremena postrojenja za 1 minutu dnevno povećalo ukupnu zaradu tvornice za 0.18 eura, ponovno pod uvjetom da se ostali parametri ne mijenjaju.*

Istaknimo da se ovakva analiza rješenja dualnog problema zove analiza osjetljivosti.

Odredimo sada prema teoremima dualnosti i rješenje primarnog problema. Teorem o jakoj dualnosti kaže da su vrijednosti funkcije cilja u oba problema iste, pa vrijedi:

$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 272.94. \tag{6.20}$$

Nadalje, prema teoremu o komplementarnosti uvjeta su oba uvjeta aktivna, tako da vrijedi:

$$9x_1 + 12x_2 + 10x_3 = 800, \tag{6.21}$$

$$5x_1 + 18x_2 + 6x_3 = 480. \tag{6.22}$$

Ovime smo dobili sustav tri jednadžbe s tri nepoznanice čija su rješenja $x_1 = 84.705$, $x_2 = 3.137$ *i* $x_3 = 0.000833$. *Prema ovome, tvornica bi se trebala orijentirati na proizvodnju aluminijske žice, u vrlo maloj mjeri na proizvodnju bakrene žice, a čeličnu žicu ne proizvoditi. U ovom smo primjeru pokazali kako se primarni problem koji zbog prevelikog broja varijabli nije bilo moguće riješiti grafičkom metodom, sveo na dualni problem čije je rješenje moguće. Rješavanjem dualnog problema, također dobivamo i informacije koje nam pomažu da donosimo bolje poslovne odluke o alokaciji resursa i maksimizaciji profita.*

Primjer 6.2. *Tvrtka koja proizvodi elektroničke uređaje treba nabaviti kondenzatore tri tipa (elektrolitski, keramički i tantal) za sljedeću proizvodnu seriju.*

- *Elektrolitski kondenzator: Košta* 0.10 *eura po komadu, osigurava kapacitet od 2.5* μF *i zauzima 3* mm^2.
- *Keramički kondenzator: Košta* 0.02 *eura po komadu, osigurava kapacitet od 0.1* μF *i zauzima 2* mm^2.
- *Tantal kondenzator: Košta* 0.50 *eura po komadu, osigurava kapacitet od 10* μF *i zauzima 4* mm^2.

Za proizvodnju je potrebno osigurati minimalno 70 μF *ukupnog kapaciteta, a dostupna površina na tiskanim pločicama za montažu kondenzatora je 100* mm^2. *Cilj je minimizirati ukupne troškove nabave kondenzatora.*

Razmatramo sljedeće varijable:

- x_1 *= broj elektrolitskih kondenzatora,*
- x_2 *= broj keramičkih kondenzatora,*
- x_3 *= broj tantala.*

Ponovno započinjemo s uvjetom nenegativnosti jer je riječ o broju kondenzatora pa vrijedi:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \tag{6.23}$$

Jedan elektrolitski kondenzator sadrži kapacitet od 2.5 μF, keramički od 0.1 μF te tantal od 10 μF. Kako je potrebno osigurati barem 70 μF drugo ograničenje je:

$$2.5x_1 + 0.1x_2 + 10x_3 \geq 70. \tag{6.24}$$

Pogledamo li koliko prostora svaki zauzima na tiskanoj pločici, vidimo kako elektrolitski kondenzator zauzima 3 mm^2, keramički 2 mm^2, a tantal 4 mm^2. Kako je dostupna površina na tiskanim pločicama za montažu kondenzatora 100 mm^2, to nam daje novo ograničenje:

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 100. \tag{6.25}$$

Za kraj, cijena jednog elektrolitskog kondenzatora iznosi 0.10 *eura po komadu, keramičkog* 0.02 *eura, a tantala* 0.50 *eura. Shodno tome, naša funkcija cilja (minimiziranje troškova) i njena sva ograničenja glase:*

$$Z = 0.10x_1 + 0.02x_2 + 0.5x_3 \rightarrow \min, \tag{6.26}$$

$$2.5x_1 + 0.1x_2 + 10x_3 \geq 70, \tag{6.27}$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 100, \tag{6.28}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \tag{6.29}$$

Ponovno uvodimo dualne varijable te ih zapisujemo kao:

- y_1 *nam predstavlja iznos dodatnog μF kapaciteta.*
- y_2 *nam predstavlja iznos dodatne mm^2 površine.*

Dualni problem, kao u prethodnom primjeru zapisujemo u obliku:

$$W = 70y_1 + 100y_2 \rightarrow \max. \tag{6.30}$$

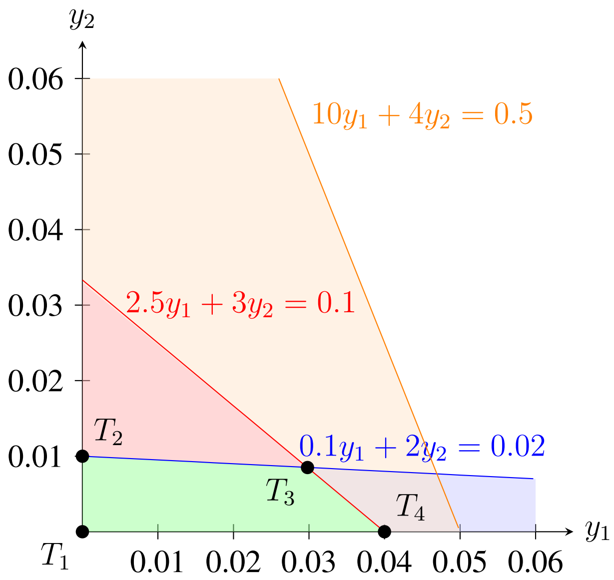
Uz ograničenja:

$$2.5y_1 + 3y_2 \leq 0.10, \tag{6.31}$$

$$0.1y_1 + 2y_2 \leq 0.02, \tag{6.32}$$

$$10y_1 + 4y_2 \leq 0.5, \tag{6.33}$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0. \tag{6.34}$$



Slika 6.2. Prikaz svih ograničenja i područje u kojem se nalazi rješenje. Izvor: Izrada autora

Kako su u ovom primjeru sva tri ograničenja postala $\leq$*, tražimo područje ispod njih. Kao što vidimo na slici 6.2, naše maksimalno rješenje je negdje na rubovima područja obojanog zelenom bojom. Nameću nam se četiri točke kao rješenja i to su točke* $T_1(0,0)$*,* $T_2(0,0.01)$*,* $T_3(0.0298, 0.0085)$ *te* $T_4(0.04, 0)$*.*

Ponovno koristimo prvu metodu za rješavanje. Funkcija cilja glasi $W = 70y_1 + 100y_2$*. Uvrstimo li sve četiri točke, dobivamo slijedeće:*

- $T_1 - 70 \cdot 0 + 100 \cdot 0 = 0$,
- $T_2 - 70 \cdot 0 + 100 \cdot 0.01 = 1$,
- $T_3 - 70 \cdot 0.0298 + 100 \cdot 0.0085 = 2.936, \to \max$
- $T_4 - 70 \cdot 0.04 + 100 \cdot 0 = 2.8$.

Uvrštavanjem svih točki u funkciju cilja tražimo maksimum, te dobivamo kako je rješenje točka $T_3(0.0298, 0.0085)$*.*

Rješenje $y_1 = 0.0298$ *nam govori koliko bi trošak nabave porastao ako bi se zahtjev za minimalnim kapacitetom povećao za 1* μF*, dok* $y_2 = 0.0085$ *nam govori koliko bi trošak nabave porastao ako bi se dostupna površina smanjila za 1* mm^2*.*

Ove informacije su korisne za donošenje odluka o eventualnim izmjenama u dizajnu uređaja (npr. smanjenje zahtjeva za kapacitetom ili korištenje manjih komponenti) kako bi se optimizirali troškovi.

Odredimo opet, koristeći teoreme dualnosti, rješenje primarnog problema. Teorem o jakoj dualnosti kaže da su vrijednosti funkcije cilja u oba problema iste, pa vrijedi:

$$0.10x_1 + 0.02x_2 + 0.5x_3 = 2.936. \tag{6.35}$$

Dalje, prema teoremu o komplementarnosti uvjeta su oba uvjeta aktivna, tako da opet vrijedi:

$$2.5x_1 + 0.1x_2 + 10x_3 = 70, \tag{6.36}$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 100. \tag{6.37}$$

Ponovno dobivamo sustav tri jednadžbe s tri nepoznanice, čija su rješenja $x_1 = 27.6638$*,* $x_2 = 8.50633$ *i* $x_3 = 0.0010$*. Možemo zaključiti da je tvrtki najisplativije proizvoditi elektrolitske kondenzatore, u manjim količinama keramičke kondenzatore te prestati s proizvodnjom tantal kondenzatora.*

7. Metode rješavanja linearnog programa s većim brojem varijabli

Grafička metoda za rješavanje problema može biti vrlo moćan alat, posebno kada se radi o problemima s dvije varijable. Međutim, kada se broj varijabli poveća, ova metoda postaje sve manje praktična i korisna. U nastavku ću navesti neke od glavnih razloga zašto grafička metoda nije dobra za više varijabli. Ovo poglavlje je obrađeno pomoću izvora [7].

Što se tiče dimenzionalnih ograničenja, grafička metoda se temelji na vizualnom prikazu podataka. Dok je relativno jednostavno nacrtati graf s dvije varijable (dvije osi na ravnini), dodavanje treće varijable zahtijeva trodimenzionalni prikaz, što je već složenije. Kada broj varijabli prelazi tri, vizualni prikaz postaje gotovo nemoguć jer ljudsko oko nije prilagođeno za percepciju više od tri dimenzije odjednom. Čak i ako uspijemo prikazati podatke s tri varijable u trodimenzionalnom prostoru, interpretacija takvih grafova postaje vrlo složena. Teško je jasno vidjeti odnose između varijabli, prepoznati obrasce ili izvući smislene zaključke iz takvih prikaza. Na primjer, u trodimenzionalnom grafu, različite točke mogu se preklapati ili biti skrivene jedna iza druge, što otežava analizu i razumijevanje podataka. Osim toga, ljudski mozak nije prirodno sposoban za interpretaciju složenih trodimenzionalnih struktura, što dodatno smanjuje korisnost takvih grafova.

Kada pokušavamo prikazati više varijabli grafički, često smo prisiljeni reducirati dimenzionalnost podataka. To može dovesti do gubitka važnih informacija i pojednostavljivanja koje može iskriviti stvarnu sliku i dovesti do pogrešnih zaključaka. Korištenjem dvodimenzionalnih projekcija za prikaz višedimenzionalnih podataka može sakriti kritične odnose i interakcije između varijabli. Ovaj gubitak informacija može biti posebno problematičan u kompleksnim analizama gdje su preciznost i detalji jedni od ključnih faktora. Softverski alati koji omogućavaju grafički prikaz podataka također imaju svoja ograničenja. Iako postoje napredni alati za vizualizaciju podataka, oni često zahtijevaju specijalizirano znanje i vještine za pravilno korištenje. Generiranje složenih grafova može biti računalno zahtjevno, što može ograničiti dostupnost i upotrebljivost takvih metoda. Također, mnogi standardni alati za vizualizaciju jednostavno nisu dizajnirani za rukovanje velikim brojem varijabli, što može dovesti do tehničkih poteškoća i ograničenja u analizi. Za analizu kompleksnih podataka s više varijabli, bolje je koristiti naprednije statističke i matematičke metode koje mogu pružiti dublji uvid i preciznije zaključke. Jedna od najpoznatijih takvih metoda je simpleks metoda.

7.1. Simpleks metoda

Simpleks metoda predstavlja jedan od najkorištenijih algoritama za rješavanje problema linearnog programiranja. Razvijena od strane Georgea Dantziga sredinom 20. stoljeća, ova metoda omogućava pronalaženje optimalnog rješenja za linearnu funkciju cilja, uzimajući u obzir definirana linearna ograničenja.

U srži simpleks metode leže koncepti poliedarskog prostora rješenja i baziĉnih rješenja. Poliedarski prostor rješenja predstavlja skup svih mogućih rješenja problema, definiran sustavom linearnih nejednadžbi. Baziĉna rješenja, s druge strane, predstavljaju toĉke u kutovima ovog poliedra, igrajući kljuĉnu ulogu u samom algoritmu.

Simpleks metoda funkcionira iterativno, prelazeći iz jednog baziĉnog rješenja u drugo, sve dok se ne pronađe optimalno rješenje. Proces zapoĉinje inicijalizacijom, gdje se pronalazi poĉetno baziĉno rješenje. Nakon toga, u svakoj iteraciji se provjerava optimalnost trenutnog rješenja. Ukoliko rješenje nije optimalno, biraju se ulazna i izlazna varijabla, te se provodi pivotiranje - zamjena varijabli u sustavu jednadžbi. Ovaj proces se ponavlja sve dok se ne dođe do optimalnog rješenja.

U praksi, ova metoda se pokazala izuzetno brzom, unatoĉ ĉinjenici da u najgorem sluĉaju njena složenost može biti eksponencijalna. Također, za razliku od heuristiĉkih metoda koje se temelje na aproksimacijama i nagađanjima, simpleks metoda uvijek pronalazi toĉno rješenje. Dodatna prednost ove metode je njena fleksibilnost i mogućnost primjene na širok spektar problema.

Ipak, i simpleks metoda ima svoja ograniĉenja. Jedno od njih je osjetljivost na degeneraciju, što znaĉi da u nekim sluĉajevima algoritam može zapeti u beskonaĉnoj petlji, ponavljajući ista rješenja. Iako se u praksi rijetko događa da simpleks metoda zahtijeva eksponencijalno vrijeme za rješavanje problema, postoji teoretska mogućnost takvog scenarija, što predstavlja još jedno ograniĉenje ove metode.

Unatoĉ navedenim ograniĉenjima, simpleks metoda ostaje nezamjenjiv alat u mnogim industrijama. Njena praktiĉna uĉinkovitost, toĉnost i fleksibilnost ĉine je jednom od najpopularnijih metoda za rješavanje problema linearnog programiranja.

8. Softversko rješavanje linearnog programa

Softversko rješavanje linearnog programa uključuje korištenje specijaliziranih alata za optimizaciju funkcije cilja uz zadana ograničenja. Najčešće metode su već spomenuta simpleks metoda, metoda unutarnje točke i dvofazna simpleks metoda. Prednosti softverskog rješavanja uključuju brzinu, točnost, fleksibilnost i mogućnost integracije s drugim sustavima. Ovo poglavlje je obrađeno pomoću izvora [12].

Neki od popularnih softverskih alata za linearno programiranje uključuju MATLAB, Python biblioteke (SciPy, PuLP, CVXPY), Gurobi, CPLEX, Microsoft Excel i mnogi drugi. Mi ćemo obratiti pažnju na Microsoft Excel i njegov programski dodatak Excel solver u kojem se odvija rješavanje linearnog programa.

8.1. Excel solver

Solver je već spomenuti dodatak za Microsoft Excel koji omogućuje optimizaciju vrijednosti jedne ćelije mijenjanjem vrijednosti drugih ćelija. Na primjer, možemo prilagoditi količinu resursa dodijeljenih različitim projektima kako bismo maksimizirali ukupnu efikasnost.

Prvo, potrebno je dodati Solver u Excel. To ćemo učiniti tako da u Microsoft Excelu odemo na *File*, *Options* i tamo pod *Add-ins* odaberemo naš Solver. Slijedi primjer s kojim ću pokazati kako pomoću Solvera možemo doći do optimalnog rješenja. Primjer ima izmišljene podatke.

Primjer 8.1. *Slikarica i njen tim žele postaviti u prodaju 3 formata art printeva. Jedan velikog formata, drugi srednjeg i treći malenoga. Za izradu najmanjeg art printa, slikarici treba 2 sata slikanja, stolaru treba 1 sat da složi okvir te mladom pomagaču 1 sat da učvrsti i nategne platno. Za srednji art print potrebna su 4 sata slikanja, 2 sata slaganja okvira te 2 sata za pripremu platna. Za najveći art print na slikanje se potroši 6 sati, na slaganje okvira 3 sata te na pripremu platna 2 sata. Najmanji print će se prodavati po cijeni od 40 eura, srednji po cijeni od 80 te najveći po cijeni od 100 eura. Slikarica ima na raspolaganju 70 sati za slikanje, stolar radi 80 sati dok mladi pomoćnik svega 60 sati. U cilju im je ostvariti što veću zaradu ako moraju napraviti barem jedan veliki print te maksimalno 10 srednjih.*

U ovom zadatku ćemo broj malih printeva označiti sa x, broj srednjih sa y i broj velikih printeva sa z. Kako se radi o količini printeva, logično je da su vrijednosti pozitivni brojevi i uvjeti nenegativnosti izgledaju ovako:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0. \tag{8.1}$$

Svaka osoba može raditi određeno vrijeme te svaki print oduzme različitu količinu vremena da se završi.

Slikarica ima na raspolaganju od 70 sati. Za najmanji print joj treba 2 sata, za srednji 4 dok za veliki mora izdvojiti 6 sati rada. To nas dovodi do novog ograničenja:

$$2x + 4y + 6z \leq 70. \tag{8.2}$$

Jednako kao slikarica i stolar i pomagač imaju ograničeno vrijeme rada te moraju uložiti različite količine vremena za pojedine printeve. Iz toga nam proizlaze nova dva ograničenja:

- *za stolara koji je ograničen s 80 sati rada, te mu za mali print treba 1 sat, za srednji 2 te za veliki 3 sata:*
$$x + 2y + 3z \leq 80. \tag{8.3}$$
- *za pomagača koji radi 60 sati i potrebno mu je za mali print 1 sat, dok za srednji 2 sata isto kao i za veliki:*
$$x + 2y + 2z \leq 60. \tag{8.4}$$

Slikarica i njen tim su imali u planu napraviti minimalno jedan veliki print te ne više od 10 srednjih, dakle:

$$y \leq 10, \tag{8.5}$$

$$z \geq 1. \tag{8.6}$$

Cijena malog printa iznosi 40 eura, srednjeg 80 eura i velikog 100 eura. Kako bismo ostvarili maksimalnu dobit uz navedene uvjete, postavljamo linearni program:

$$F = 40x + 80y + 100z \rightarrow \max \tag{8.7}$$

$$2x + 4y + 6z \leq 70, \tag{8.8}$$

$$x + 2y + 3z \leq 80, \tag{8.9}$$

$$x + 2y + 2z \leq 60, \tag{8.10}$$

$$y \leq 10, \tag{8.11}$$

$$z \geq 1, \tag{8.12}$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0. \tag{8.13}$$

Kako ćemo zadatak riješiti u Excelu, potrebno je prikazati sučelje aplikacije. Na slici 8.1 vidimo početnu tablicu u koju je potrebno ubaciti naša ograničenja i nakon nekoliko koraka koje ćemo u nastavku objasniti, dobivamo rješenje problema.

Prvi korak je upisivanje svih ograničenja u tablicu. U našem primjeru imamo 8 ograničenja koja pišemo redom, kao što smo ih prethodno naveli, u pažljivo odabrane ćelije kako bi program dao ispravno rješenje. Što se tiče uvjeta nenegativnosti, oni nisu potrebni u Excelu ali smo ih svejedno zapisali radi konzistentnosti.

Primjer 8.1.							
	Mali	Srednji	Veliki	Veličina printa (x, y, z)			
Cijena	a	b	c	Koeficijenti uz x, y, z			
Ograničenja		LHS			RHS	Rješenja:	Opis ograničenja:
1.				<=>			
2.				<=>			
3.				<=>			
4.				<=>			
5.				<=>			
6.				<=>			
7.				<=>			
8.				<=>			
		x	y	z	F		
Konačno rješenje:						Maksimalna zarada	

Slika 8.1. Početna tablica u Solveru u koju ćemo upisivati naša ograničenja. Izvor: Izrada autora

Nakon toga nam preostaje u ćelije u kojima su koeficijenti "a", "b" i "c", zapisati vrijednosti cijena svakog printa od najmanjeg do najvećeg. Dakle, na mjesto slova "a" će ići broj 40, slova "b" 80 i slova "c" 100.

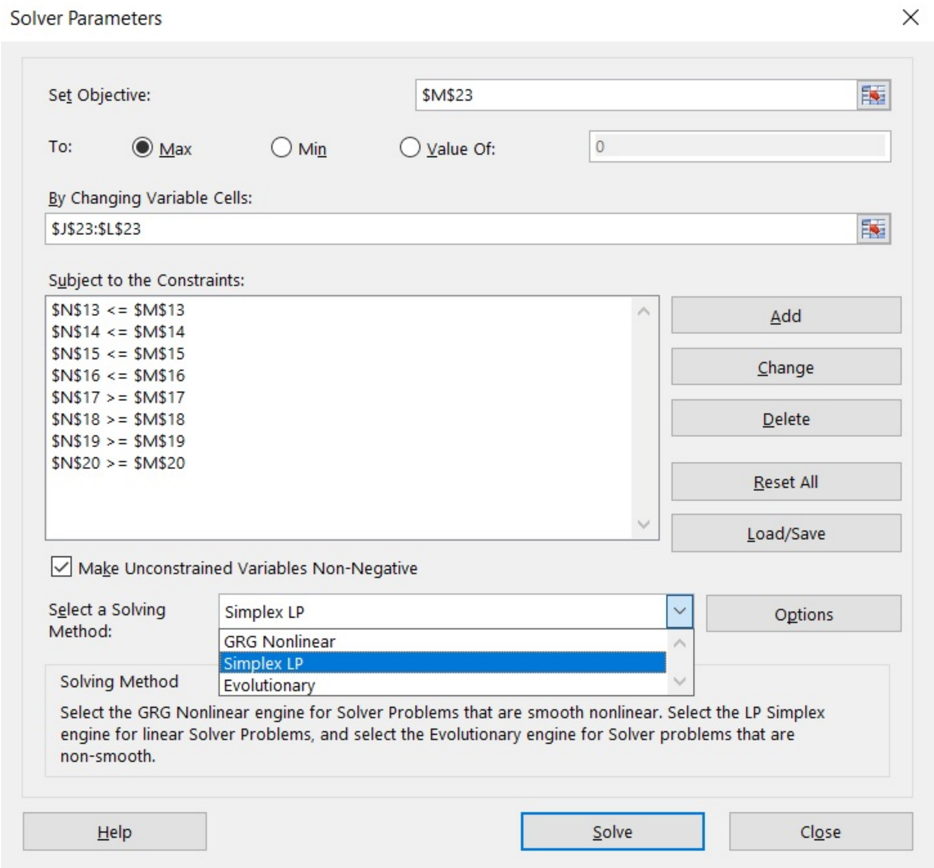
U plavi stupac "Rješenja" moramo upisati koje ćelije se množe i zbrajaju kako bi program znao što mi želimo. Nakon upisivanja svih vrijednosti, na slici 8.2 možemo vidjeti kako bi to izgledalo i kako moramo ispuniti svaku ćeliju u stupcu "Rješenja".

Primjer 8.1.							
	Mali	Srednji	Veliki	Veličina printa (x, y, z)			
Cijena	40	80	100	Koeficijenti uz x, y, z			
Ograničenja		LHS			RHS	Rješenja:	Opis ograničenja:
1.	2	4	6	<=	70	=J23*I13+K23*J13+L23*K13	
2.	1	2	3	<=	80	0	Vrijeme slaganja okvira
3.	1	2	2	<=	60	0	Vrijeme pripreme platna
4.		1		<=	10	0	Max 10 srednjih printova
5.			1	>=	1	0	Min 1 veliki print
6.	1			>=	0	0	Uvjet nenegativnosti
7.		1		>=	0	0	Uvjet nenegativnosti
8.			1	>=	0	0	Uvjet nenegativnosti
		x	y	z	F		
Konačno rješenje:					0	Maksimalna zarada	

Slika 8.2. Tablica nakon upisivanja ograničenja i način kako popunjavati ćelije rješenja. Izvor: Izrada autora

Ovdje vidimo primjer na prvom ograničenju gdje smo morali množiti vrijednosti iz donje plave tablice x, y i z sa koeficijentima iz prvog ograničenja koji glase 2, 4 i 6. Taj postupak ponavljamo za svako ograničenje.

Dalje, na alatnoj traci odabiremo Data i sa desne strane vidimo Solver koji smo prije odabrali. U njemu je potrebno popuniti sve tražene kriterije kao na slici 8.3.



Slika 8.3. Popunjavanje parametara Solvera. Izvor: Izrada autora

Prvi parametar naš traži za popuniti ćeliju koja je naša funkcija cilja F i u kojoj će se prikazati naše maksimalno rješenje. U polje "Changing Variable Cells" je potrebno označiti ćelije koje su naši x, y i z tj. gdje će program upisati koliko je potrebno kojeg printa da bi ostvarili maksimum.

Idući korak su ograničenja i tu označavamo vrijednosti svakog ograničenja iz plavog stupca "Rješenja" sa ćelijom lijevo koja nam govori granicu koju rješenje ne smije preći.

Primjer 8.1.							
	Mali	Srednji	Veliki	Veličina printa (x, y, z)			
Cijena	40	80	100	Koeficijenti uz x, y, z			
Ograničenja		LHS			RHS	Rješenja:	Opis ograničenja:
1.	2	4	6	<=	70	70	Vrijeme slikanja
2.	1	2	3	<=	80	35	Vrijeme slaganja okvira
3.	1	2	2	<=	60	34	Vrijeme pripreme platna
4.		1		<=	10	10	Max 10 srednjih printova
5.			1	>=	1	1	Min 1 veliki print
6.	1			>=	0	12	Uvjet nenegativnosti
7.		1		>=	0	10	Uvjet nenegativnosti
8.			1	>=	0	1	Uvjet nenegativnosti
		x	y	z	F		
Konačno rješenje:		12	10	1	1380	Maksimalna zarada	

Slika 8.4. Tablica koja nam prikazuje maksimalno rješenje i broj potrebnih printova. Izvor: Izrada autora

Konačno, odabiremo način rješavanja preko Simpleks metode (na slici Simplex LP) i stišćemo na opciju Solve koja tada izračunava najoptimalnije rješenje za uvjete i ograničenja koja smo postavili.

Uz pomoć Excel Solvera smo na slici 8.4 dobili optimalno rješenje u donjoj plavoj tablici i koja nam govori da trebaju napraviti 12 malih, 10 srednjih te 1 veliki print kako bi profit bio maksimalan te on iznosi 1380 eura.

9. Zaključak

Ovaj rad pružio je sveobuhvatan pregled linearnih optimizacijskih problema s ograničenjima. Kroz istraživanje povijesnog razvoja, detaljno smo razmotrili doprinose ključnih matematičara koji su oblikovali ovu disciplinu. Definirali smo matematičku strukturu problema, uključujući funkciju cilja, ograničenja i sam linearni program, te demonstrirali njihovu primjenu kroz praktične primjere iz stvarnog svijeta.

Analizom teorijskih aspekata, poput konveksnih skupova i teorema o ekstremnim točkama, stekli smo dublje razumijevanje geometrijske interpretacije i rješavanja problema. Predstavili smo grafičku metodu kao intuitivan pristup za probleme s manjim brojem varijabli, dok smo za kompleksnije probleme naveli simpleks metodu kao moćan alat za pronalaženje optimalnih rješenja.

Istražili smo i koncept dualnog problema linearnog programiranja, koji nam pruža dodatne informacije o originalnom problemu i omogućuje nam ekonomsku interpretaciju rješenja. Konačno, upoznali smo se s dostupnim softverskim alatima poput Excel Solvera, koji nam uvelike olakšavaju rješavanje kompleksnih problema linearne optimizacije.

Linearno programiranje se pokazalo kao nezamjenjiv alat za optimizaciju u različitim područjima. Sposobnost modeliranja i rješavanja problema s ograničenjima čini ga ključnim za donošenje boljih odluka u ekonomiji, industriji, inženjerstvu i mnogim drugim disciplinama. Kako se suočavamo s rastućom kompleksnošću svijeta oko nas, važnost i primjenjivost linearne optimizacije će i dalje rasti.

Literatura

[1] Gregersen, E.:"Linear programming", s Interneta, https://www.britannica.com/science/linear-programming-mathematics, 21. travnja 2024.

[2] s Interneta, https://en.wikipedia.org/wiki/Leonid_Kantorovich, 21. travnja 2024.

[3] Wright, S.J.:"Simplex method", s Interneta, https://www.britannica.com/science/linear-programming-mathematics, 23. travnja 2024.

[4] s Interneta, https://en.wikiquote.org/wiki/John_von_Neumann, 23. travnja 2024.

[5] "Interior Point", s Interneta, https://awards.acm.org/award_winners/karmarkar_0424282, 24. travnja 2024.

[6] Haneef, H.R.:"Historic Mathematicians of India", s Interneta, https://blog.stuidapp.com/historic-mathematicians-of-india/, 24. travnja 2024.

[7] Kelava, L.:"Modeli linearnog programiranja te njihova primjena u ekonomiji", s Interneta, https://repozitorij.unios.hr/islandora/object/efos%3A4708/datastream/PDF/view, 20. srpnja 2024.

[8] Vandenberghe, L.:"Convex Optimization", s Interneta, https://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf, 22. kolovoza 2024.

[9] Petkovicek, D.:"Linearno programiranje", s Interneta, https://matematika.fkit.hr/staro/izborna/referati/Daniela%20Petkovicek%20-%20Linearno%20programiranje.pdf, 03. kolovoza 2024.

[10] "Accelerated Algebra 2", s Interneta, https://jmaurerdhs.weebly.com/uploads/1/3/6/4/13640512/more_lp_practice_solutions.pdf, 10. kolovoza 2024.

[11] Čordaš, R.:"Linearno programiranje i primjene", s Interneta, https://www.mathos.unios.hr/ mdjumic/uploads/diplomski/%C4%8COR03.pdf, 27. kolovoza 2024.

[12] Brlić, K.:"Osnove teorije linearnog programiranja", s Interneta, https://zir.nsk.hr/ islandora/object/efos:4762/datastream/PDF/view, 30. kolovoza 2024.

Sažetak i ključne riječi

Ovaj rad se bavi linearnim optimizacijskim problemima s ograničenjima. U radu se istražuje povijesni razvoj linearnog programiranja, od ranih doprinosa do moderne primjene. Detaljno se objašnjava matematička formulacija problema, uključujući funkciju cilja, ograničenja i definiciju linearnog programa. Praktični primjeri iz stvarnog svijeta ilustriraju široku primjenu ove metode.

Rad se također bavi teorijskim aspektima linearne optimizacije, uključujući koncept konveksnih skupova i teorem o ekstremnim točkama. Predstavljaju se metode rješavanja problema, poput grafičke metode za jednostavnije probleme i simpleks metode za kompleksnije probleme s većim brojem varijabli. Također se istražuje koncept dualnog problema i njegova važnost za interpretaciju rješenja. Konačno, rad pruža pregled softverskih alata poput Excel Solvera koji se koriste za rješavanje problema linearne optimizacije u praksi.

Ključne riječi: Linearno programiranje, optimizacija, ograničenja, funkcija cilja, grafička metoda, simpleks metoda, dualni problem, Excel Solver

Summary and key words

This paper explores linear optimization problems with constraints. It delves into the historical development of linear programming, from early contributions to its modern applications. The mathematical formulation of the problem is explained in detail, encompassing the objective function, constraints, and the definition of a linear program. Practical, real-world examples illustrate the wide range of applications for this method.

Furthermore, the paper addresses the theoretical aspects of linear optimization, including the concept of convex sets and the extreme point theorem. It presents problem-solving methods such as graphical methods for simpler problems and the simplex method for more complex problems with a larger number of variables. The concept of the dual problem and its significance in solution interpretation are also explored. Finally, the paper provides an overview of software tools like Excel Solver, which are used to solve linear optimization problems in practice.

Keywords: Linear programming, optimization, constraints, objective function, graphical method, simplex method, dual problem, Excel Solver