Maxwellove jednadžbe

Boltižar, Marin

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:190:265574

Rights / Prava: Attribution 4.0 International/Imenovanje 4.0 međunarodna

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-09**

Repository / Repozitorij:

Repository of the University of Rijeka, Faculty of Engineering

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

MAXWELLOVE JEDNADŽBE

Rijeka, rujan 2024. Marin Boltižar, 0036516954

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnikee

Završni rad

MAXWELLOVE JEDNADŽBE

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Rijeka, rujan 2024. Marin Boltižar, 0036516954

SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET
POVJERENSTVO ZA ZAVRŠNE ISPITE

Rijeka, 14.03.2024.

Zavod: Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike

Predmet: Inženjerska matematika ET

ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Marin Boltižar (0036516954)**

Studij: Sveučilišni prijediplomski studij elektrotehnike (1030)

Zadatak: **Maxwellove jednadžbe / Maxwell's equations**

Opis zadatka:

U radu je potrebno dati pregled pojmova vektorske analize potrebnih za zapisivanje diferencijalnog i integralnog oblika Maxwellovih jednadžbi. Potrebno je navesti i objasniti integralne teoreme koji omogućavaju prelazak s integralnog oblika u diferencijalni. Zatim je potrebno objasniti fizikalne zakone koji leže u pozadini Maxwellovih jednadžbi te ih zapisati u integralnom obliku, dok je u završnom dijelu rada potrebno je precizno izvesti sve četiri Maxwellove jednadžbe. Također je potrebno Maxwellove jednadžbe staviti u kontekst inženjerske primjene u elektrotehnici.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanja diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Zadatak uručen pristupniku: 20.03.2024.

Mentor:
izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Predsjednik povjerenstva za
završni ispit:
prof. dr. sc. Dubravko Franković

IZJAVA

Sukladno članku 7. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku prijediplomskih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci izjavljujem da sam samostalno izradio završni rad prema zadatku preuzetom 20. ožujka 2024. godine.

Rijeka, 06. rujna 2024.

Marin Boltižar

Ovim putem želim se zahvaliti obitelji i prijateljima na podršci tijekom studiranja. Također zahvaljujem se svim kolegama na pomoći i motivaciji tokom cijelog studija.

Posebno zahvaljujem svom mentoru izv. prof.dr. sc. Ivanu Dražiću na strpljenju i pomoći tijekom izrade završnog rada.

Sadržaj

1. Uvod **3**

2. Vektorska analiza **4**

2.1. Vektor 4

2.2. Vektorska funkcija 4

2.3. Derivacija i integral vektorske funkcije 5

2.4. Skalarna i vektorska polja 7

2.4.1. Skalarno polje 7

2.4.2. Vektorsko polje 8

2.4.3. Divergencija vektorskog polja 8

2.4.4. Rotacija vektorskog polja 9

2.5. Integrali skalarnih i vektorskih polja 9

2.5.1. Krivuljni integral prve vrste 10

2.5.2. Krivuljni integral druge vrste 10

2.5.3. Plošni integral prve vrste 12

2.5.4. Plošni integral druge vrste 13

2.6. Integralni teoremi 14

2.6.1. Stokesov teorem 14

2.6.2. Greenov teorem 16

2.6.3. Teorem o divergenciji 18

3. Fizikalni zakoni u pozadini Maxellovih jednadžbi **20**

3.1. Gaussov zakon za električno polje 20

3.2. Gaussov zakon za magnetsko polje 23

3.3. Faradayev zakon elektromagnetske indukcije 24

3.4. Amperov zakon 26

4. Maxwellove jednadžbe **29**

4.1. James Clerk Maxwell 29

4.2. Prva Maxwellova jednadžba 30

4.3. Druga Maxwellova jednadžba 30

4.4. Treća Maxwellova jednadžba 31

4.5. Četvrta Maxellova jednadžba 32

5. Zaključak **36**

Bibliografija **37**

Sažetak i ključne riječi **39**

Summary and key words **40**

1. Uvod

Tema ovog završnog rada su Maxwellove jednadžbe i njihove primjene u elektrotehnici. Otkriće elektromagnetizma jedno je od najvažnijih znanstvenih postignuća u povijesti čovječanstva. Razumijevanje elektromagnetizma omogućilo nam je razvoj tehnologije za proizvodnju, distribuciju i iskorištavanje električne energije što je postalo temelj moderne civilizacije. Upotreba električne energije za pokretanje industrijskih strojeva temelj je druge industrijske revolucije.

Najvažnije jednadžbe koje opisuju elektromagnetsku pojavu su Maxwellove jednadžbe. Maxwellove jednadžbe su četiri parcijalne diferencijalne jednadžbe koje u potpunosti opisuju ponašanje električnih i magnetskih polja u prostoru i vremenu. One objedinjuju zakone koje su postavili Michael Faraday, Andre-Marie Ampere i Carl Friedrich Gauss i daju cjelovit opis elektromagnetskog polja. Najveći doprinos Jamesa Clerka Maxwella leži u uvođenju koncepta pomačne struje, što je omogućilo povezivanje električnih i magnetskih polja te predviđanje elektromagnetskih valova. Ova predviđanja su eksperimentalno potvrđena kasnijim radovima Heinricha Hertza, čime je postavljen temelj za razvoj moderne komunikacijske tehnologije.

Maxwellove jednadžbe nazvane su po škotskom fizičaru i matematičaru Jamesu Clerku Maxwellu. James Clerk Maxwell jedan od najutjecajnijih znanstvenika 19. stoljeća. Objavio je svoja ključna otkrića 1860-ih godina, a njegovo najvažnije djelo, "A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field", sadržavalo je Maxwellove jednadžbe, koje su unaprijedile razumijevanje elektromagnetskih pojava. Pored toga, Maxwell je značajno pridonio razumijevanju termodinamike.

Važnost Maxwellovih jednadžbi leži u njihovoj širokoj primjenjivosti u inženjerskim disciplinama, posebice u elektrotehnici i elektronici. Teorija koja stoji iza ovih jednadžbi koristi se u dizajnu i analizi električnih krugova, elektromotora, transformatora te u brojnim sustavima koji koriste elektromagnetske valove, poput antena i radara.

U ovom radu su navedeni i objašnjeni osnovni pojmovi i teoremi vektorske analize potrebni za razumijevanje Maxwellovih jednadžbi. Zatim su navedeni i objašnjeni fizikalni zakoni na kojima se temelje Maxwellove jednadžbe poput Coulombovog zakona, Faradayevog zakona i Biot-Savartovog zakona. U završnome dijelu rada izvedene su Maxwellove jednadžbe u diferencijalnom obliku, te je prikazana njihova primjena u elektrotehnici na primjerima zadataka.

2. Vektorska analiza

U matematici i fizici postoje dvije vrste veličina, skalari i vektori. Skalarne veličine određene su samo iznosom, dok vektorske veličine imaju iznos i smjer. U ovom poglavlju definirani su osnovni pojmovi vektorske analize potrebni za razumijevanje i zapisivanje Maxwellovih jednadžbi u diferencijalnom i integralnom obliku. Definirana je vektorska funkcija i integralni teoremi potrebni za prelazak iz integralnog oblika u diferencijalni.

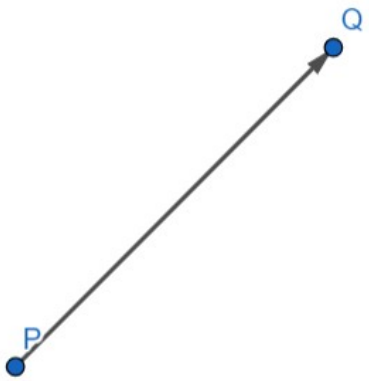
2.1. Vektor

Da bismo definirali vektor potrebno je prvo definirati usmjerenu dužinu.

Definicija 2.1. *Za dužinu $\overline{PQ}$ kažemo da je usmjerena ili orijentirana dužina ako znamo koja joj je početna, a koja završna točka.*

Dvije usmjerene dužine su ekvivalentne ako su jednake duljine, leže na paralelnim pravcima i imaju istu orijentaciju, odnosno paralelnim pomakom možemo iz jedne dobiti drugu. Korištenjem definicije usmjerene dužine sada mozemo definirati vektor.

Definicija 2.2. *Vektor je skup svih međusobno ekvivalentnih usmjerenih dužina.*

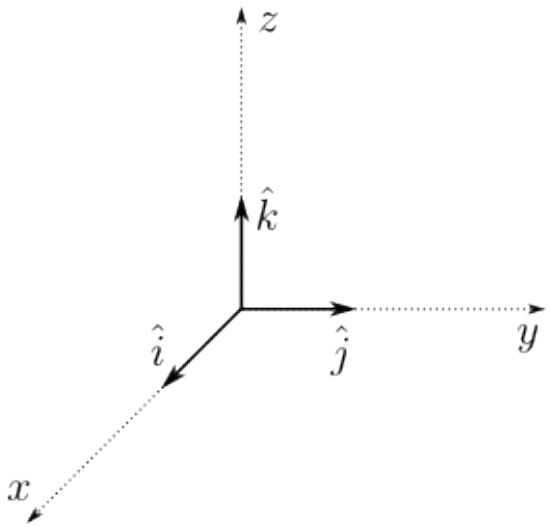


Slika 2.1. Vektor $\overrightarrow{PQ}$. Izvor: Autor rada

2.2. Vektorska funkcija

Definicija 2.3. *Funkcija oblika $\vec{r} : I = [a, b] \to \mathbb{R}^3$ je vektorska funkcija skalarnog argumenta u prostoru $\mathbb{R}^3$.*

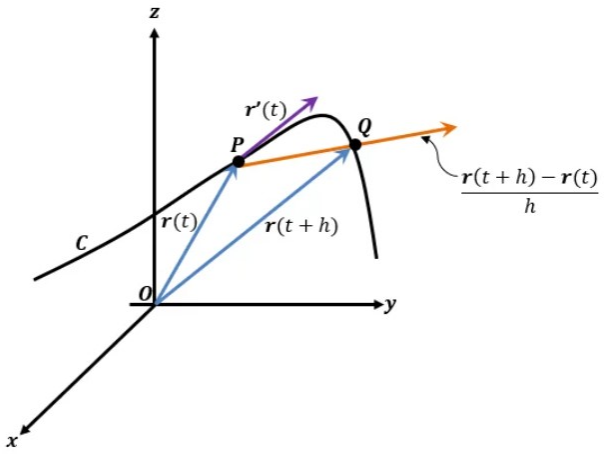
Vektorsku funkciju $\vec{r}(t)$ možemo definirati pomoću tri realne funkcije s parametrom t $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = (x(t), y(t), z(t))$. Vektori $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$ su jedinični vektori u smjeru osi x, y i z u Kartezijevom koordinatnom sustavu.



Slika 2.2. Jedinicni vektori. Izvor: [5]

2.3. Derivacija i integral vektorske funkcije

U različitim podrucjima fizike potrebno je praćenje promjene vektorske veličine u vremenu. Na primjer ako položaj čestice u prostoru prikažemo vektorskom funkcijom $\vec{r}$(t) tada derivacijom funkcije $\vec{r}$(t) dobivamo vektorsku funkciju brzine čestice $\vec{v}$(t). Derivacijom funkcije brzine $\vec{v}$(t) dobivamo funkciju akceleracije $\vec{a}$(t).



Slika 2.3. Derivacija vektorske funkcije. Izvor: [6]

Vektorska funkcija $r(t)$ je diferencijabilna u točki t ako postoji sljedeći limes

$$r'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta r(t+h) - r(t)}{h} = \frac{dr(t)}{dt}. \tag{2.1}$$

Ako je vektorska funkcija $\vec{r}(t)$ zadana sa komponentama $x(t), y(t) iz(t)$ deriviramo ju tako da deriviramo zasebno njezine komponente.

Definicija 2.4. *Derivacija vektorske funkcije* $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = (x(t), y(t), z(t))$. *jednaka je*

$$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} = (x'(t), y'(t), z'(t)). \tag{2.2}$$

Primjer 2.1. *Zadana je vektorska funkcija* $\vec{r}(t) = (t^2, cos(t), tsin(t))$. *Odredi* $\vec{r}'(t)$ *i* $\vec{r}''(t)$. *Deriviramo svaku komponentu zasebno*

$$x'(t) = \frac{d}{dt}(t^2) = 2t, \tag{2.3}$$

$$y'(t) = \frac{d}{dt}(cos(t)) = -sin(t), \tag{2.4}$$

$$z'(t) = \frac{d}{dt}(tsin(t)) = sin(t) + tcos(t), \tag{2.5}$$

$$\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (2t, -sin(t), sin(t) + tcos(t)). \tag{2.6}$$

Druga derivacija komponenti iznosi

$$x''(t) = \frac{d}{dt}(2t) = 2, \tag{2.7}$$

$$y''(t) = \frac{d}{dt}(-sin(t)) = -cos(t), \tag{2.8}$$

$$z''(t) = \frac{d}{dt}(sin(t) + tcos(t)) = 2cos(t) - tsin(t), \tag{2.9}$$

$$\vec{r}''(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (2, -cos(t), 2cos(t) - tsin(t)). \tag{2.10}$$

Derivacija vektorske funkcije također predstavlja i vektor tangente na funkciju u točki t.

Definicija 2.5. *Vektor tangente na funkciju* $\vec{r}(t)$ *jednak je*

$$T(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}, \|\vec{r}'(t)\| \neq 0. \tag{2.11}$$

$\|\vec{r}'(t)\|$ je duljina vektora $\vec{r}'(t)$ i računamo ju pomoću formule

$$\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}. \tag{2.12}$$

Primjer 2.2. *Zadana je vektorska funkcija* $\vec{r}(t) = (t, t^3, t^2)$. *Odredi* $T(2)$
Odredimo prvo $\vec{r}'(t)$

$$\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = \left(1, 3t^2, 2t\right). \tag{2.13}$$

Duljina vektora $\vec{r}'(t)$ *iznosi*

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{1^2 + (3t^2)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}. \tag{2.14}$$

Vektor tangente u točki $t = 2$ *sada iznosi*

$$T(2) = \frac{(1, 3t^2, 2t)}{\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}} = \frac{(1, 3 \cdot 2^2, 2 \cdot 2)}{\sqrt{9 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{161}}(1, 12, 4). \tag{2.15}$$

Uz derivaciju potreban nam je i integral vektorske funkcije. Kao što smo kod derivacije vektorske funkcije derivirali svaku komponentu zasebno analogno tome kod integriranja vektorske funkcije integriramo svaku kumponentu zasebno.

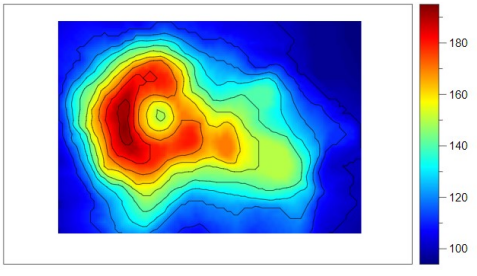
Definicija 2.6. *Integral vektorske funkcije* $\vec{r}(t)$ *na intervalu [a, b] jednak je*

$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = (\int_a^b x(t)dt)\vec{i} + (\int_a^b y(t)dt)\vec{j} + (\int_a^b z(t)dt)\vec{k}. \tag{2.16}$$

2.4. Skalarna i vektorska polja

2.4.1. Skalarno polje

Skalarnim poljem nazivamo funkciju koja svakoj točki u prostoru pridružuje skalarnu vrijednost. Skalarnim poljem prikazujemo raspodijelu neke skalarne veličine u prostoru poput temperature, tlaka, gustoće i električnog potencijala. Na slici 2.4 prikazano je dvodimenzionalno skalarno polje u kojem svaka točka predstavlja nadmorsku visinu.



Slika 2.4. Skalarno polje. Izvor: [7]

Definicija 2.7. *Funkciju f za koju vrijedi* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *nazivamo skalarno polje.*

Prilikom analize skalarnih polja često nas zanima u kojem smjeru skalarno polje najbrže raste ili pada. Vektor najbržeg rasta skalarnog polja nazivamo gradijent skalarnog polja. Gradijent funkcije f označavamo sa grad f ili ∇f. Simbol ∇ zovemo "nabla".

Definicija 2.8. *Gradijent funkcije* $f(x, y, z)$ *je vektorsko polje definirano izrazom*

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \tfrac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \tfrac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \tfrac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y}, \tfrac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Ako ne tražimo vektor najbrže promjene nego nas zanima brzina promjene u određenom smjeru tada nam je potrebna usmjerena derivacija skalarnog polja.

Definicija 2.9. *Usmjerena derivacija skalarnog polja u smjeru vektora p jednaka je*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \nabla f \cdot \vec{p}_0, \tag{2.17}$$

gdje je $\vec{p}_0$ *jedinični vektor u smjeru vektora* $\vec{p}$*.*

2.4.2. Vektorsko polje

U vektorskoj analizi uz skalarna polja koristimo još i vektorska polja. Vektorska polja svakoj točki u prostoru pridružuju vektor. Na slici 2.5 prikazano je trodimenzionalno vektorsko polje čije silnice predstavljaju gibanje fluida u prostoru.

Definicija 2.10. *Funkciju f za koju vrijedi* $\vec{a} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *nazivamo vektorsko polje.*

2.4.3. Divergencija vektorskog polja

Vektorska polja u fizici najčešće koristimo za opisivanje i modeliranje električnih i magnetskoh polja te za prikaz gibanje fluida. Zbog toga nas često zanima tok polja u nekoj točki u prostoru. Skalarna veličina koja nam pokazuje koliko vektorsko polje ponire ili izvire iz neke točke u prostoru nazivamo divergencija vektorskog polja. Na primjeru gibanja fluida, ako vektorskim poljem prikazujemo brzinu gibanja fluida u prostoru onda pozitivna divergencija u nekoj točki znači da fluid izvire iz te točke, a negativna divergencija znači da fluid ponire u tu točku.

Definicija 2.11. *Divergencija vektorskog polja* $\vec{F}$*(x,y,z) je skalarno definirano sa*

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{2.18}$$

Propozicija 2..1. *Svojstva divergencije vektorskog polja*
Neka su f i g derivabilna vektorska polja, te λ derivabilno skalarno polje. Tada vrijede sljedeća svojstva:

- $div\vec{f} = 0$ *za svako konstantno vektorsko polje* f.
- $div(\vec{f} + \vec{g}) = div\vec{f} + div\vec{g}$
- $div(f \vec{\times} \vec{g}) = rot\vec{f} \times \vec{g} - g \times \vec{rot}\vec{f}$
- $rot(\lambda\vec{f}) = grad\lambda \times \vec{f} + \lambda rot\vec{f}$

2.4.4. Rotacija vektorskog polja

Uz tok vektorskog polja u nekoj točki, važno svojstvo je i intenzitet rotacije odnosno vrtloženja vektorskog polja. Rotacija vektorskog polja mjeri smjer i intenzitet lokalnog vrtloženja polja oko neke točke.

Definicija 2.12. *Rotacija vektorskog polja je vektorsko polje definirano sa*

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k}.$$

Propozicija 2..2. *Svojstva rotacije vektorskog polja*
Neka su f i g derivabilna vektorska polja, te λ derivabilno skalarno polje. Tada vrijede sljedeća svojstva:

- $rot\vec{f} = 0$ *za svako konstantno vektorsko polje* f.
- $rot(\vec{f} + \vec{g}) = rot\vec{f} + rot\vec{g}$
- $rot(grad\vec{f}) = 0$
- $rot(\lambda\vec{f}) = grad\lambda \times \vec{f} + \lambda rot\vec{f}$

2.5. Integrali skalarnih i vektorskih polja

Krivuljne i plošne integrale koristimo za sumiranje vrijednosti funkcije duž krivulje i preko površina. Krivuljni i plošni integrali potrebni su nam za izračunavanje fizičkih veličina poput mase tijela, rada sile i toka fluida. Ako prilikom integriranja koristimo skalarno polje tada se radi o integralu prve vrste, a ako koristimo vektorsko polje tada je to integral druge vrste.

2.5.1. Krivuljni integral prve vrste

Krivuljni integral skalarnog polja možemo upotrijebiti za izračun mase žice. Žicu definiramo kao krivulju K u prostoru, a gustoća žice definirana je funkcijom f(x,y,z). Ako je žica podijeljena na beskonačno mnogo malih dijelova Δl_i tada je ukupna masa žice jednaka sumi masa svih malih dijelova što računamo pomoću sljedećeg limesa

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i. \tag{2.19}$$

Budući da $n \to \infty$ tada je ovaj limes jednak integralu

$$\int_C f(x, y, z)\, dl. \tag{2.20}$$

Definicija 2.13. *Ako je skalarno polje zadano funkcijom f(x,y,z) u području u kojem se nalazi krivulja C, tada krivuljni integral prve vrste funkcije f(x,y,z) po krivulji C jednak*

$$\int_C f(x, y, z)\, dl = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i. \tag{2.21}$$

Primjer 2.3. *Izračunaj krivuljni integral* $\int_C f(x, y, z)\, dl$ *ako je zadano skalarno polje* $f(x, y, z) = (4xy^2z)$ *i krivulja* C *zadana parametarski sa* $r(t) = (\frac{t^2}{2}, \frac{\sqrt{3}t^2}{2}, 2)$, $0 \le t \le 2$.

Odredimo prvo dl

$$dl = |\dot{\vec{r}}(t)|dt = |(\frac{t^2}{2}, \frac{\sqrt{3}t^2}{2}, 2)|dt = |(t, \{\sqrt{3}t, 0)|dt = \sqrt{t^2 + 3t^2}dt = 2tdt. \tag{2.22}$$

Uvrštavanjem parametara krivulje $r(t)$ *u* $f(x, y, z)$ *skalarno polje postaje*

$$f(x, y, z) = 2t^2 \cdot \frac{3t^4}{4} \cdot 2 = 3t^6. \tag{2.23}$$

Krivuljni integral sada postaje

$$\int_C 4xy^2z\, dl = \int_0^2 3t^6 \cdot 2tdt = \int_0^2 6t^7 dt = \frac{3t^8}{4}\Big|_0^2 = 192. \tag{2.24}$$

2.5.2. Krivuljni integral druge vrste

Krivuljni integral vektorskog polja koristimo kada želimo izračunati rad koji je izvršen kada se čestica giba po nekoj krivulji C unutar polja sile $\vec{F}(x, y, z)$. Rad je definiran kao umnožak sile

i puta. Krivulju C po kojoj se giba čestica podijelimo na dijelove C_0, C_1, C_2...,C_n. Na svakom od tih dijelova odaberemo jednu točku T_i. Rad koji čestica izvrši gibanjem po pojedinom dijelu krivulje jednak je

$$W_i = \vec{F}(T_i)\Delta\vec{l_i}, \Delta\vec{l_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i) = \overrightarrow{C_{i-1}C_i}. \tag{2.25}$$

Ukupan rad jednak je sumi rada po dijelovima krivulje

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(T_i)\Delta\vec{l_i}. \tag{2.26}$$

Ako $n \to \infty$ i $\Delta\vec{l_i} \to \infty$ tada sumu rada po dijelovima krivulje možemo računati kao krivuljni integral

$$W = \int_C \vec{F}d\vec{l}. \tag{2.27}$$

Definicija 2.14. *Ako se krivulja C nalazi u prostoru u kojem je definirano vektorsko polje $\vec{F} = (A(x,y,z), B(x,y,z), C(x,y,z))$ tada je krivuljni integral vektorskog polja $\vec{F}$ definiran sa*

$$\int_C \vec{F}d\vec{l} = \int_C Adx + Bdy + Cdz. \tag{2.28}$$

Ako krivulju C parametriziramo sa $\vec{l}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t_1 \leq t \leq t_2$ i $d\vec{l} = \vec{l}'(t)dt = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))dt$ tada je integral jednak

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{l}(t)) \cdot \dot{\vec{l}}(t)dt. \tag{2.29}$$

Primjer 2.4. *Izračunaj krivuljni integral $\int_C \vec{F}d\vec{l}$ vektorskog polja $\vec{F}(x,y,z) = (e^x\vec{i} + (y+2)\vec{j}) + z^2\vec{k})$ po krivulji C zadanoj sa $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + t\vec{j} + e^t\vec{k}$, $0 \leq t \leq 3$*

Odredimo prvo $\vec{F}(\vec{r}(t))$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = e^{t^2}\vec{i} + (t+2)\vec{j} + e^{2t}\vec{k}, \tag{2.30}$$

sada nam je potrebno $\vec{r'}(t)$

$$\vec{r'}(t) = 2t\vec{i} + \vec{j} + e^t\vec{k}. \tag{2.31}$$

Integral sada glasi

$$\int_C \vec{F}d\vec{l} = \int_0^3 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)dt = 2te^{t^2} + t + 2 + e^{3t}dt = (e^{t^2} + \frac{t^2}{2} + 2t + \frac{e^{3t}}{3}\Big|_0^3 = e^6 + \frac{9}{2} + 6 + \frac{e^9}{3}.$$

(2.32)

2.5.3. Plošni integral prve vrste

Kao što smo pomoću krivuljnog integrala prve vrste određivali masu žice, plošni integral prve vrste možemo upotrijebiti za određivanje mase plohe. Neka je P glatka ploha koja se nalazi u prostoru u kojem je gustoća zadana funkcijom f(x,y,z). Plohu P možemo podijeliti na n manjih dijelova P_0, P_1, P_2...,P_n. Na svakom od tih dijelova odaberemo točku T_i. Površina dijela plohe P_i jednaka je $A(P_i)$. Masa m_i dijela plohe P_i tada je jednaka

$$m_i = f(T_i)A(P_i). \tag{2.33}$$

Ukupnu masu plohe dobijemo zbrajanjem masa svih dijelova plohe

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} f(T_i)A(P_i), \tag{2.34}$$

odnosno kada $n \to \infty$

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(T_i)A(P_i) = \iint_P f(x,y,z)dP. \tag{2.35}$$

Definicija 2.15. *Ako je P ploha zadana u prostoru skalarnog polja f(x,y,z), te ako je ploha podijeljena na n manjih dijelova P_i čija je površina $A(P_i)$ i na svakom od njih odabrana točka T_i tada je plošni integral skalarnog polja jednak limesu*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(T_i)A(P_i) = \iint_P f(x,y,z)dP. \tag{2.36}$$

Primjer 2.5. *Odredi integral $\iint_P \frac{dP}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ako je površina P zadana parametarski sa $r(u,v) = (2cosu, 2sinu, v), 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 3$.*
Odredimo prvo parcijalne derivacije $r(u,v)$

$$r_u = (-2sinu, cosu, 0), \tag{2.37}$$

$$r_v = (0, 0, 1). \tag{2.38}$$

Odredimo sada njihov vektorski produkt

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2\sin u & 2\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cos u \cdot \vec{i} + 2\sin u \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}. \tag{2.39}$$

Sada dP računamo prema formuli

$$dP = |r_u \times r_v|\, dudv = \left|\sqrt{(2\cos u)^2 + (2\sin u)^2}\right| dudv = 2dudv. \tag{2.40}$$

Sada integral iznosi

$$\iint\limits_P \frac{dp}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \iint\limits_P \frac{2dudv}{\sqrt{(2\cos u)^2 + (2\sin u)^2 + v^2}} = \tag{2.41}$$

$$\iint\limits_P \frac{2dudv}{\sqrt{2^2+v^2}} = \int\limits_0^{2\pi} 2du \int\limits_0^3 \frac{dv}{\sqrt{2^2+v^2}} = 4\pi \int\limits_0^3 \frac{dv}{\sqrt{2^2+v^2}} = \tag{2.42}$$

$$4\pi \left[\ln\left(v + \sqrt{2^2+v^2}\right)\right]_0^3 = 4\pi \left[\ln\left(3 + \sqrt{2^2+3^2}\right) - \ln 2\right] \approx 15.0138. \tag{2.43}$$

2.5.4. Plošni integral druge vrste

Plošni integral vektorskog polja koristimo za računanje fluksa odnosno protoka vektorskog polja kroz plohu. Definirajmo gibanje fluida u prostoru vektorskim poljem brzine fluida $\vec{F}$, te definirajmo glatku plohu P podijeljenu na manje dijelove P_i, i=0,1,2...n. Glatka ploha u svakoj točki ima plošnu normalu kojoj možemo definirati orijentaciju. Na svakom dijelu plohe sa $\vec{n}_0(A_i)$ označimo jedinični vektor normale, a sa $A(P_i)$ površinu dijela P_i. Volumen fluida koji protječe kroz dio plohe P_i je jednak

$$V_i = \vec{F}(A_i) \cdot \vec{n}_0(A_i) A(P_i). \tag{2.44}$$

Ukupni protok fluida kroz površinu plohe P jednak je

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(A_i) \cdot \vec{n}_0(A_i) A(P_i) = \iint\limits_P \vec{F} \cdot \vec{n}\, dP. \tag{2.45}$$

Definicija 2.16. *Ako je definirana glatka ploha P sa vektorom normale $\vec{n}$ i nalazi se u vektorskom polju $\vec{F}$, tada je plošni integral vektorskog polja $\vec{F}$ po plohi P jednak*

$$\iint\limits_P \vec{F}\, d\vec{P} = \iint\limits_P \vec{F} \cdot \vec{n}\, dP. \tag{2.46}$$

Primjer 2.6. *Izračunaj tok vektorskog polja* $\vec{F}(x,y,z) = (x,2,z)$ *kroz plohu* $z = 2xcosy, 0 \leq x \leq 2, \frac{\pi}{3} \leq y \leq \pi$ *orijentiranu prema dolje.*

Tok vektorskog polja računamo po formuli

$$\iint\limits_P \vec{F}\, d\vec{P} = \iint\limits_P (\vec{F}\cdot\vec{n})\, dP = \iint\limits_{P_{xy}} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dxdy. \tag{2.47}$$

Vektor normale $\vec{n}$ *jednak je*

$$\vec{n} = (\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1) = (2cosy, -2xsiny, -1). \tag{2.48}$$

Uvrštavanjem u formulu dobivamo

$$\iint\limits_{P_{xy}} \vec{F}\cdot\vec{n}dxdy = \iint\limits_{P_{xy}} (2cosy, -2x, -1)\cdot(x,2,2xcosy)dxdy \tag{2.49}$$

$$= \iint\limits_{P_{xy}} (-4x)(siny)dxdy = \int\limits_0^2 (-4x)dx \cdot \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} sinydy \tag{2.50}$$

$$= (-2x^2)\Big|_0^2 \cdot (-cosy)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = (-8)\cdot(-\frac{1}{2}) = 4. \tag{2.51}$$

2.6. Integralni teoremi

Za izvod i razumijevanje Maxwellovih jednadžbi i fizikalnih zakon koji leže u pozadini Maxwellovih jednadžbi potrebno je razumijeti integralne teoreme koji nam omogućavaju pojednostavljivanje integralnog računa. U ovo poglavlju upoznat ćemo se sa teoremom o divergenciji, Greenovim teoremom i Stokesovim teoremom.

2.6.1. Stokesov teorem

Stokesov teorem dobio je ime po Georgeu Gabrielu Stokesu(1819.-1903.). Stokes je bio irski fizičar i matematičar. Proučavao je mehaniku fluida i formulirao zakon koji opisuje otpor fluida na kuglu koja se kreće kroz njega. Baio se i optikom, te je dokazao da svjetlost koja se emitira tijekom fluorescencije ima nižu energiju od upadne svjetlosti. Njegov ključni doprinos matematici je Stokesov teorem.

Slika 2.5. George Gabriel Stokes. Izvor: [16]

Stokesov teorem povezuje krivuljni integral vektorskog polja po zatvorenoj krivulji C i plošnog integrala po nekoj plohi P kojoj je ta krivulja rub.

Teorem 2.1. *Neka je zadana glatka orijentirana ploha P u $\mathbb{R}^3$ sa jediničnim vektorom normale $\vec{n}$ i kojoj je rub zatvorena pozitivno orijentirana krivulja C, te neka je definirano vektorsko polje $\vec{f}$ koje ima neprekidne prve parcijalne derivacije u prostoru koji sadrži plohu P. Tada vrijedi*

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_P (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{P}. \tag{2.52}$$

Primjer 2.7. *Odredi krivuljni integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ako je zadano vektorsko polje $\vec{F}$=$(x + y^2, y + z^3, z^3)$, a krivulja C je presjek hemisfere $z = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$ i ravnine $z = 1$, te je orijentirana u pozitivnom smjeru*

Krivulja C je presjek gornje hemisfere $z = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$ i ravnine $z = 1$. To je kružnica radijusa $\sqrt{5}$ u ravnini $z = 1$.
Najjednostavnija površina kojoj je ova krivulja rub je krug radijusa $\sqrt{5}$ u ravnini $z = 1$ i vektora normale $\vec{n} = (0, 0, 1)$.

Odredimo sada rot$\vec{F}$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k} =$$

$$\nabla \times \vec{F} = (-3z^2, 0, -2y). \tag{2.53}$$

Parametrizacija površine P je

$$r(x, y) = (x, y, 1). \tag{2.54}$$

Prema Stokesovom teoremu

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_P (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{P} = \iint_D (-3z^2, 0, -2y) \cdot (0, 0, 1)\, dx\, dy = \iint_D -2y\, dx\, dy. \tag{2.55}$$

Prelaskom u polarne koordinate ovaj integral postaje

$$\iint_D -2y\, dx\, dy = \int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{2\pi} -2r sin(\theta)\, r dr\, d\theta = (\int_0^{\sqrt{5}} -2r^2\, dr)(\int_0^{2\pi} sin(\theta)\, d\theta) = \tag{2.56}$$

$$= (\int_0^{\sqrt{5}} -2r^2\, dr)(-cos(\theta))\Big|_0^{2\pi} = 0. \tag{2.57}$$

2.6.2. Greenov teorem

Greenov teorem nazvan je po engleskom matematičaru Georgeu Greenu (1793.-1841.) koji je dao temeljne doprinose matematičkoj fizici. Njegov najznačajniji doprinos znanosti je rad iz 1828. godine, "An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism", gdje je prvi put predstavio Greenov teorem i Greenove funkcije. Greenove funkcije omogućavaju rješavanje diferencijalnih jednadžbi, što je kasnije imalo značajnu primjenu u kvantnoj mehanici.

Slika 2.6. George Green. Izvor: [17]

Greenov teorem povezuje krivuljni integral vektorskog polja po zatvrenoj krivulji C i plošni integral po plohi P kojoj je ta krivulja rub, ali u slučaju kada ploha P leži u XY- ravnini.

Teorem 2.2. *Neka je C zatvorena, glatka i pozitivno orijentirana krivulja u XY ravnini i neka je P povrsina zatvorena tom krivuljom. Neka su A(x,y) i B(x,y) funkcije koje imaju parcijalne derivacije u domeni koja sadrži P. Tada vrijedi*

$$\oint_C A(x,y)dx + B(x,y)dy = \iint_P \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dxdy. \tag{2.58}$$

Primjer 2.8. *Odredi krivuljni integral $\oint_C 2ydx - 3xdy$ ako je C kružnica $x^2 + y^2 = 4$.*

$$A = 2y \; i \; B = -3x$$

iz toga slijedi

$$\tfrac{\partial A}{\partial x} = 2 \; i \; \tfrac{\partial B}{\partial x} = -3.$$

Uvržtavanjem u formulu dobivamo

$$\oint_C 2ydx - 3xdy = \iint_P -3 - 2dxdy = \iint_P -5dxdy.$$

Prelaskom u polarne koordinate

$$\iint_P -5dxdy = -5\int_0^{2\pi}\int_0^2 rdrd\theta = -5(2\pi)\int_0^2 rdr = -10\pi(\tfrac{1}{2}r^2)\Big|_0^2 = -10\pi(2) = -20\pi.$$

2.6.3. Teorem o divergenciji

Teorem o divergenciji povezuje integral po zatvorenoj plohi P i trostruki integral po volumenu V koji ta ploha zatvara.

Definicija 2.17. *Neka je P glatka zatvorena ploha u prostoru $\mathbb{R}^3$ sa vektorom normale $\vec{n}$ koja ne presijeca samu sebe i zatvara područje V. Neka je $\vec{F}$ vektorsko polje koje ima prve parcijalne derivacije u području V. Tada vrijedi*

$$\iint_P \vec{F}\vec{n}dP = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F})\,dV.$$

(2.59)

Primjer 2.9. *Odredi plošni integral $\iint_P \vec{F}d\vec{P}$ ako je $\vec{F} = (x^3, y^3, 2z^3)$, a P površina valjka omeđena cilindrom $x^2 + y^2 = 4$ i ravninama $z = 0$ i $z = 2$.*

Odredimo prvo parcijalne derivacije funkcije $\vec{F}$

$$\tfrac{\partial F_x}{\partial x} = 3x^2,\ \tfrac{\partial F_y}{\partial y} = 3y^2 \text{ i } \tfrac{\partial F_z}{\partial z} = 6z^2.$$

Sada $\operatorname{div}\vec{F}$ *iznosi*

$$\operatorname{div}\vec{F} = \tfrac{\partial F_x}{\partial x} + \tfrac{\partial F_y}{\partial y} + \tfrac{\partial F_z}{\partial z} = 3x^2 + 3y^2 + 6z^2.$$

Prema teoremu o divergenciji

$$\iint_P \vec{F}\vec{n}dP = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,dV = \iiint_P 3x^2 + 3y^2 + 6z^2 dV.$$

Prelaskom u cilindrične koordinate $x = rcos\theta, y = rsin\theta, z = z$

$$\iiint_P 3x^2 + 3y^2 + 6z^2 dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^2 (3r^2 + 6z^2) rdzdrd\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (3r^3 z + 2rz^3)\Big|_0^2 drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (6r^3 + 16r)drd\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\tfrac{6r^4}{4} + \tfrac{16r^2}{2}) \Big|_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} (\tfrac{6 \cdot 16}{4} + \tfrac{16 \cdot 4}{2}) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (56) d\theta = 56\theta \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 112\pi.$$

3. Fizikalni zakoni u pozadini Maxellovih jednadžbi

3.1. Gaussov zakon za električno polje

Carl Friedrich Gauss bio je njemački matematičar, fizičar i astronom. Njegovi doprinosi znanosti pokrivaju širok spektar područja, od teorije brojeva i statistike do geometrije i astronomije. Poseban doprinos dao je teoriji brojeva u svome radu "Disquisitiones Arithmeticae" . Također prvi je dokazao da svaka polinomska jednadžba ima onoliko rješenja koliki je njezin najveći stupanj. U fizici njegov najpoznatiji zakon, Gaussov zakon zakon za električna polja povezuje povezuje elektrivčna polja s raspodjelom elektrivčnog naboja.

Slika 3.1. Carl Friedrich Gauss. Izvor: [18]

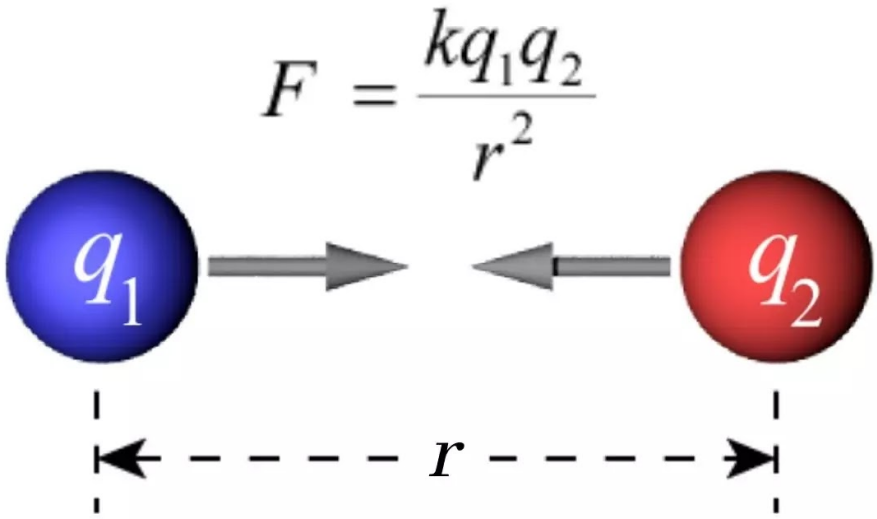
Gausov zakon za električno polje kaže da je električni tok kroz zatvorenu površinu proporcionalan naboju zatvorenom unutar te površine. Za izvod Gaussovog zakona za električno polje potrebno je prvo objasniti djelovanje sile između dva naboja u vakuumu. Sila između dva naboja u vakuumu definirana je Coulombovim zakonom koji glasi

$$\vec{F} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}. \tag{3.1}$$

Gdje je

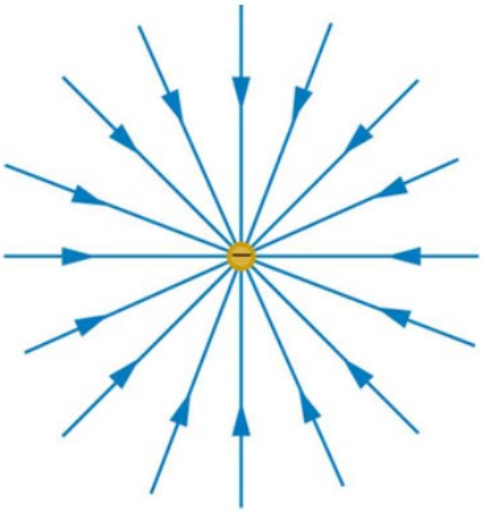
- F sila izmedu naboja.
- $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ Coulombova konstanta.

- r udaljenost između naboja
- $\hat{r}$ jedinični vektor u smjeru pravca izmedu dva naboja.



Slika 3.2. Sila između dva naboja. Izvor: [9]

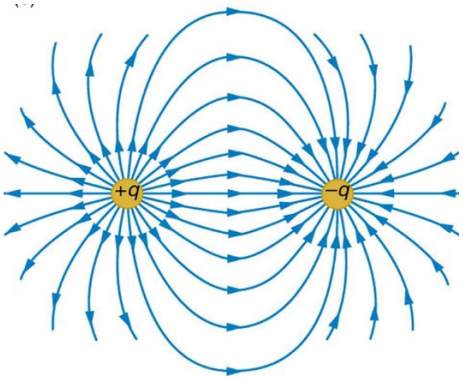
Coulombova sila djeluje privlačno ako su naboji različitog predznaka i odbojno ako su naboji istog predznaka. Na slici 3.2 vidimo dva naboja suprotnog predznaka između kojih djeluje privlačna sila.



Slika 3.3. Električno polje naboja. Izvor: [10]

Na slici 3.3 vidimo silnice električnog polja koje stvara negativan točkasti naboj. Negativan naboj predstavlja ponor silnica električnog polja, dok pozitivan naboj predstavlja izvor. Silnice

električnog polja ne moraju biti zatvorene krivulje.



Slika 3.4. Električno polje između dva naboja. Izvor: [10]

Na slici 3.4 vidimo dva točkasta naboja različitog predznaka. U tom slučaju silnice se ne šire jednoliko u svim smjerovima nego izviru iz pozitivnog naboja i poniru u negativni.

Pomoću definicije Coulombove sile mozemo doći do izraza za jakost električnog polja. Jakost električnog polja E u nekoj točki definirana je kao sila F koja djeluje na testni naboj q_0 u toj točki podijeljena sa vrijednošću tog naboja q_0

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}. \tag{3.2}$$

Uvrštavanjem izraza za silu u gornju formulu dobivamo

$$\vec{E} = \frac{k_e \frac{q_1 q_0}{r^2} \hat{r}}{q_0}. \tag{3.3}$$

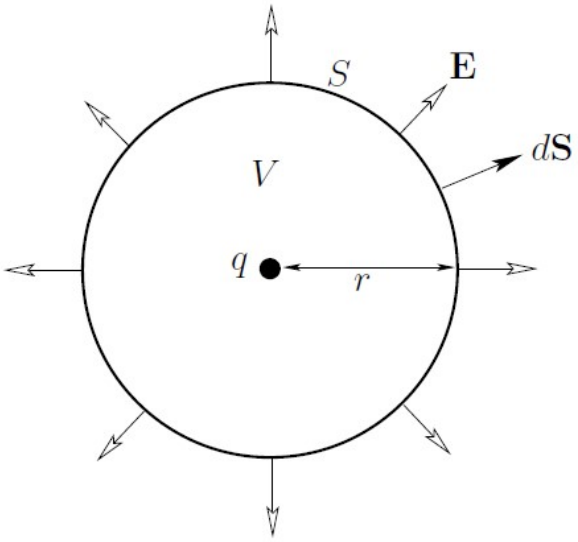
Sređivanjem ovog izraza dolazimo do formule za jakost električnog polja

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}. \tag{3.4}$$

Gdje je

- q vrijednost naboj.
- r udaljenost točkastog naboja u prostoru od točke u kojoj računamo jakost polja.
- $\hat{r}$ jedinični vektor u smjeru pravca između dva naboja
- ϵ_0 dielektrična permitivnost vakuuma.

Gaussov zakon za električno polje sada možemo izvesti pomoću primjera točkastog naboja koji se nalazi su središtu sfere polumjera r.



Slika 3.5. Protok električnog polja kroz sferu. Izvor: [11]

Primjer 3.1. *Izračunaj protok električnog polja kroz površinu sfere S polumjera r ako se u njezinom središtu nalazi naboj q kao što je prikazano na slici 3.5*

Budući da se električno polje širi radijalno prema van, silnice električnog polja $\vec{E}$ uvijek su okomite na površinu sfere, odnosno silnice polja $\vec{E}$ su paralelne sa vektorom normale $\vec{n}$ u svakom dijelu sfere dS.

$$\phi_E = \iint\limits_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS \iint\limits_S E_r \, dS_r = E_r(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{3.5}$$

Definicija 3.1. *Gaussov zakon za električno polje u integralnom obliku glasi*

$$\iint\limits_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{3.6}$$

gdje je $\vec{E}$ jakost električnog polja, S zatvorena ploha unutar koje se nalazi naboj Q, a ϵ_0 dielektrična permitivnost vakuuma.

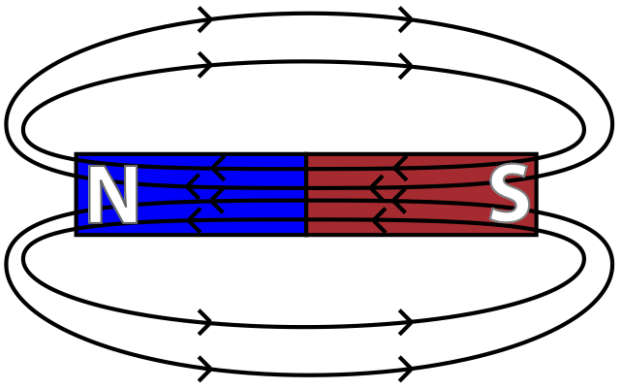
3.2. Gaussov zakon za magnetsko polje

Gaussov zakon za magnetsko polje kaže da je ukupni tok magnetskog polja kroz zatvorenu plohu jednak nuli.

Definicija 3.2. *Gaussov zakon za magnetsko polje u integralnom obiku glasi*

$$\iint\limits_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \tag{3.7}$$

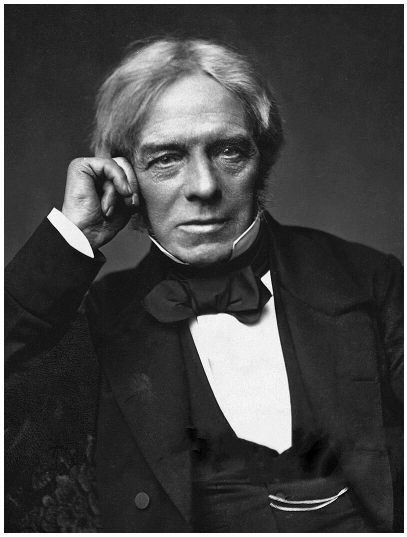
To proizlazi iz činjenice da magnetski monopoli ne postoje u prirodi. Magnetske silnice su uvijek zatvorene krivulje što znači da svaka magnetska silnica koja ulazi u neki prostor mora iz njega i izaći.



Slika 3.6. Silnice magnetskog polja. Izvor: [12]

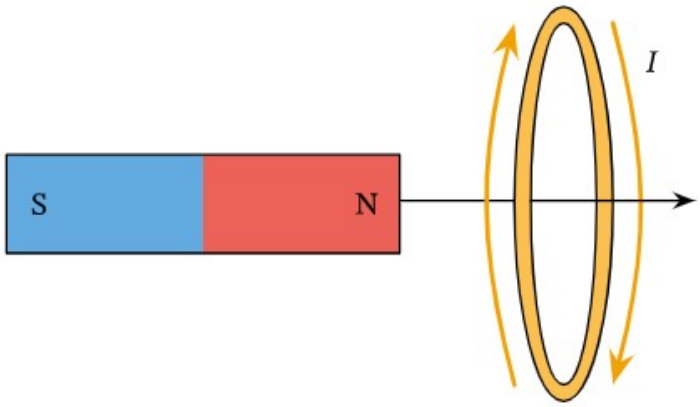
3.3. Faradayev zakon elektromagnetske indukcije

Michael Faraday(1791.-1867.) bio je engleski kemičar i fizičar. Istraživao je elektromgnetizam i elektokemiju. Njegov talent prepoznat je kada je postao asistent britanskog kemičara Humphryja Davyja. Njegova najvažnija otkrića su elektromagnetska indukcija i dijamagnetizam. Faraday je kroz eksperimentalni rad dokazao vezu između magnetizma i elektriciteta, što je dovelo do daljnjeg razvoja zakona elektromagnetske indukcije.



Slika 3.7. Michael Faraday. Izvor: [20]

Michael Faraday eksperimentalno je dokazao da se električna struja može inducirati promjenom magnetskog toka kroz zavojnicu. Faradayev zakon elektromagnetske indukcije kaže da je elektromotorna sila u električnom krugu proporcionalna brzini promjene magnetskog toka. Na slici 3.8 vidimo prikaz Faradayevog pokusa u kojem promjena magnetskog toka kroz zavojnicu inducira struju u zavojnici.



Slika 3.8. Faradayev pokus. Izvor: [13]

Elektromotorna sila predstavlja rad koji obavi električno polje kada pomiče jedinični naboj po putu

$$ems = \frac{W}{q} = \frac{\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l}}{q} = \int_C \frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{l} = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l}. \tag{3.8}$$

Budući da je elektromotorna sila proporcionalna negativnoj promjeni magnetskog toka u zavojnici možemo pisati

$$ems = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \tag{3.9}$$

Sada možemo izjednačiti gornje jednadžbe i dobijemo

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \tag{3.10}$$

Definicija 3.3. *Faradayev zakon elektromagnetske indukcije u integralnom obliku glasi*

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \tag{3.11}$$

Na desnoj strani ove jednadžbe imamo izraz

$$-\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \tag{3.12}$$

Gaussov zakon za magnetsko polje kaže da je

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \tag{3.13}$$

međutim u Gaussovom zakonu ploha S po kojoj integriramo je zatvorena ploha unutar koje se nalazi jednak broj sjevernih i južnih magnetskih polova sto znači da je ukupni magnetski tok kroz plohu S jednak nuli. U Faradayevom zakonu za magnetsku indukciju ploha S je bilo koja ploha što znači da magnetski tok kroz tu plohu može biti različit od nule.

3.4. Amperov zakon

Andre-Marie Ampere(1775.-1836.) bio je francuski fizičar i matematičar. Njegov doprinos elektromagnetizmu temelji se na ranijem otkriću danskog fizičara Hansa Christiana Orsteda koji je otkrio da magnetska igla na kompasu mijenja smjer kada se nalazi u blizini vodiča kojim teće struja. Ampere je matematički opisao povezanost struje u vodiću i magnetskog polja koje ona stvara.

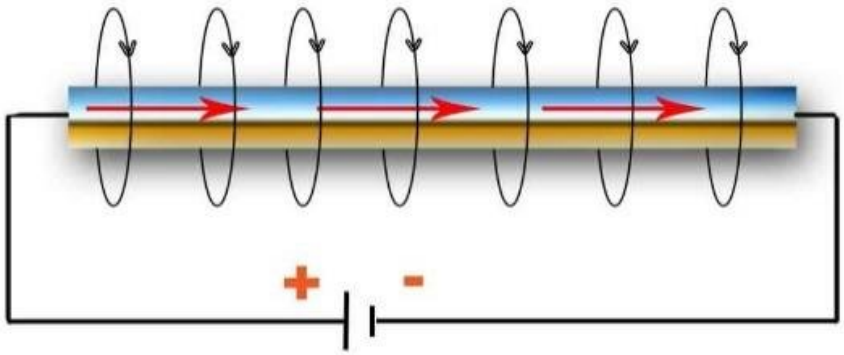
Slika 3.9. Andre Marie Ampere. Izvor: [21]

Za izvod Amperovog zakona potrebno je prvo objasniti Biot-Savartov zakon. Jean-Baptiste Biot i Felix Savart eksperimantalno su dokazali da je jakost induciranog magnetskog polja oko vodiča proporcionalna jakosti struje kroz vodič i obrnuto proporcionalna udaljenosti od vodiča.

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r} \tag{3.14}$$

Gdje je

- I jakost struje kriz vodič.
- r udaljenost od vodiča.
- μ_0 permeabilnost vakuuma.



Slika 3.10. Magnetsko polje oko vodiča Izvor:[14]

Smjer silnica oko vodiča kojim teće struja prikazan je na slici 3.10. Zamislimo sada jednu zatvorenu magnetsku silnicu na udaljenosti r od vodiča kojim teće struja I.

Tu silnicu možemo podijeliti na manje dijalove $d\vec{l}$ i izračunati cirkulaciju magnetskog polja B po cijeloj silnici

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \int_C d\vec{l}. \tag{3.15}$$

Budući da je promatrana silnica uvijek na istoj udaljenosti r od vodiča iznos B je konstantan.

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r} \tag{3.16}$$

Krivuljni integral dl po kružnici C je opseg kružnice odnosno

$$\int_C d\vec{l} = 2r\pi. \tag{3.17}$$

Uvrštavanjem (3.16) i (3.17) u (3.15) dobivamo Amperov zakon u integralnom obliku

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I. \tag{3.18}$$

Definicija 3.4. *Amperov zakon u integralnom obliku glasi*

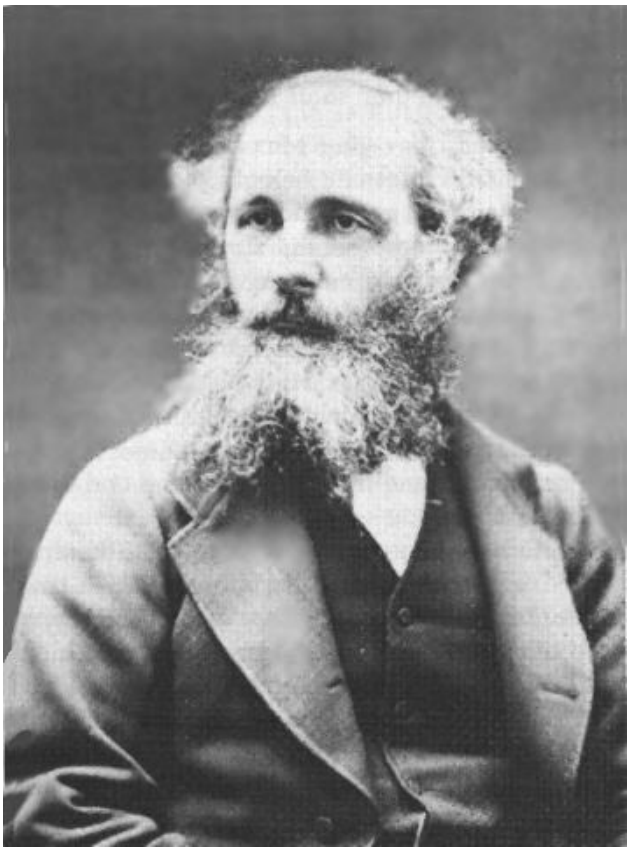
$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I, \tag{3.19}$$

gdje je $\vec{B}$ magnetsko polje, μ_0 permeabilnost vakuuma, a I jakost struje kroz vodič.

Amperov zakon u ovome obliku vrijedi za stacionarno stanje, odnosno za konstantnu vrijednost struje kroz vodič. Za promjenjivu vrijednost struje koristimo Ampere-Maxwellov zakon (Četvrta Maxwellova jednadžba) koji je objašnjen u sljedećem poglavlju.

4. Maxwellove jednadžbe

4.1. James Clerk Maxwell



Slika 4.1. James Clerk Maxwell. Izvor:[15]

James Clerk Maxwell bio je škotski matematičar i fizičar čiji su radovi iz temelja promijenili naše razumijevanje elektromagnetizma. Rođen je Edinburghu 1831. godine. Studirao je na sveučilištima u Edinburghu i Cambridgeu, gdje je stekao duboko znanje iz matematike i fizike.

Maxwellov najveći doprinos znanosti bio je ujedinjenje elektriciteta i magnetizma u jednu teoriju, te teoretsko predviđanje da je svjetlost elektromagnetski val. Njegove četiri poznate jednadžbe predstavljaju temelj klasične elektrodinamike i omogućile su razvoj moderne tehnologije poput radio valova i telekomunikacija.

Maxwell je također značajno doprinio drugim područjima fizike, uključujuci termodinamiku i kinetičku teoriju plinova. Njegovi radovi iz ovih područja pomogli su u razvoju moderne fizike i kemije.

4.2. Prva Maxwellova jednadžba

Prva Maxwellova jednadžba u integralnom obliku jednaka je Gaussovom zakonu za električno polje koji glasi

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \tag{4.1}$$

Ukupni naboj Q koji se nalazi unutar zatvorene plohe mozemo izračunati integriranjem gustoce naboja ρ po volumenu unutar plohe. Tada Gaussov zakon možemo zapisati u sljedećem obliku

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho \, dV. \tag{4.2}$$

primjenom teorema o divergenciji na Gaussov zakon u integralnom obliku

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV. \tag{4.3}$$

Izjednačavanjem gornjih jednadžbi dobivamo prvu Maxwellovu jednadžbu u diferencijalnom obliku

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV. \tag{4.4}$$

iz čega mozemo zaključiti da vrijedi

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{4.5}$$

Definicija 4.1. *Prva Maxwellova jednadzba u diferencijalnom obliku glasi*

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{4.6}$$

gdje je ρ gustoća elektricnog naboja, ϵ_o dielektrična permitivnost vakuuma i $\vec{E}$ jakost električnog polja.

4.3. Druga Maxwellova jednadžba

Druga Maxwellova jednadžba u integralnom obliku jednaka je Gaussovom zakonu za magnetsko polje koji glasi

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \tag{4.7}$$

Primjenom teorema o divergenciji

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{B}\, dV = 0, \tag{4.8}$$

iz čega zaključujemo da vrijedi

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \tag{4.9}$$

Definicija 4.2. *Druga Maxwellova jednadžba u diferencijalnom obliku glasi*

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \tag{4.10}$$

gdje je $\vec{B}$ magnetska indukcija.

Primjer 4.1. *Zadano je vektorsko polje $\vec{F} = (3cos(2x), 6ysin(2x), 3xy)$. Da li navedeno vektorsko polje može opisivati magnetsko polje ?*
Prema drugoj Maxwellovoj jednadžbi

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \tag{4.11}$$

Divergencija vektorskog polja $\vec{F}$ iznosi

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{\partial 3cos(2x)}{\partial x} + \frac{\partial 6ysin(2x)}{\partial y} + \frac{\partial 3xy}{\partial z} = \tag{4.12}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = -6sin(2x) + 6sin(2x) + 0 = 0 \tag{4.13}$$

Budući da je $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ *. $\vec{F}$ može biti magnetsko polje.*

4.4. Treća Maxwellova jednadžba

Treća Maxwellova jednadžba u integralnom obliku jednaka je Faradayevom zakonu elektromagnetske indukcije koji glasi

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \tag{4.14}$$

Primjenom Stokesovog teorema na lijevu stranu jednadžbe dobijemo

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \tag{4.15}$$

iz toga zaključujemo da vrijedi

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{d\vec{B}}{dt}. \tag{4.16}$$

Definicija 4.3. *Treća Maxwellova jednadžba u diferencijalnom obliku glasi*

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{d\vec{B}}{dt}, \tag{4.17}$$

gdje je $\vec{E}$ jakost električnog polja.

Primjer 4.2. *Zadano je magnetsko polje $\vec{B}(y,t) = B_0\frac{t^2}{t_0}y\vec{z}$. Izračunaj elektromotornu silu inducirani u kvadratnom prstenu koji leži u xy-ravnini i ima stranicu duljine a. Prsten se nalazi u prvom kvadrantu i dvije stranice mu leže na osima x i y.*
Inducirana elektromotorna sila iznosi

$$ems = -\frac{d}{dt}\iint\limits_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\iint\limits_S \vec{B}\cdot\vec{n}dS. \tag{4.18}$$

Budući da je prsten u xy-ravnini $\vec{n} = \vec{z}$ i $dS = dxdy$, tada integral glasi

$$ems = -\frac{d}{dt}\int\limits_0^a\int\limits_0^a B_0\frac{t^2}{t_0}ydxdy, \tag{4.19}$$

$$ems = -\frac{d}{dt}a\int\limits_0^a B_0\frac{t^2}{t_0}ydy = -\frac{d}{dt}a(B_0\frac{t^2}{t_0}\frac{y^2}{2}\Big|_0^a, \tag{4.20}$$

$$ems = -\frac{d}{dt}(B_0\frac{t^2}{t_0}\frac{a^3}{2}). \tag{4.21}$$

Deriviranjem po varijabli t dobivamo

$$ems = -B_0\frac{a^3t}{t_0}. \tag{4.22}$$

4.5. Četvrta Maxellova jednadžba

Temelj četvrte Maxwellove jednadžbe je Amperov zakon koji glasi

$$\int\limits_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I. \tag{4.23}$$

Ovaj zakon vrijedi samo kada struja I ima konstantan iznos. James Clerk Maxwell proširio je ovaj zakon tako da vrijedi i u dinamičkim uvjetima. Struja I u ovoj formuli je ukupna struja koja prolazi kroz površinu S kojoj je krivulja C rub. U slučaju kada imamo strujni krug sa kondenzatorom možemo odabrati površinu S koja prolazi izmedu ploča kondenzatora i ne siječe vodič. Tada je struja koja prolazi kroz površinu jednaka nuli jer struja ne teće između ploča kondenzatora i prema originalnom Amperovom zakonu dobili bismo

$$\int\limits_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0. \tag{4.24}$$

Ako odaberemo površinu koja ne prolazi između ploča kondenzatora nego siječe vodić, a obrubljena je istom krivuljom C tada integral daje

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I. \tag{4.25}$$

Integral magnetskog polja po istoj krivulji mora dati isti rezultat bez obzira koju površinu odaberemo. Maxwell je otkrio da ako kroz kondenzator ne teće struja nešto drugo mora stvarati magnetsko polje. Budući da se na pločama kondenzatora nakuplja naboj, dolazi do promjene jakosti električnog polja u kondenzatoru. Jakost električnog polja između ploča kondenzatora zadana je sa

$$\vec{E} = (\sigma/\epsilon_0)\vec{n}, \tag{4.26}$$

gdje je σ gustoća naboja na pločama kondenzatora odnosno

$$\sigma = \frac{Q}{A}, \tag{4.27}$$

gdje je Q ukupni naboj na pločama kondenzatora, a A površina ploče.
Sada možemo izračunati električni tok kroz površinu koja se nalazi izmedu ploča kondenzatora i paralelna je sa pločama kondenzatora, odnosno okomita na silnice električnog polja $\vec{E}$ primjenom Gaussovog zakona za električno polje.

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = \iint_S \frac{\sigma}{\epsilon_0}\, dA = \frac{Q}{A\epsilon_0} \iint_S dA = \frac{Q}{\epsilon_0}. \tag{4.28}$$

Promjena električnog toka u vremenu iznosi

$$\frac{d}{dt}\left(\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dA\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{\epsilon_0}\right) = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{dQ}{dt}. \tag{4.29}$$

Množenjem izraza sa ϵ_0 dobivamo izraz za pomačnu struju

$$I_p = \epsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dA\right). \tag{4.30}$$

Dodavanjem pomačne struje I_p u Amperov zakon dobivamo Ampere-Maxwellov zakon odnosno četvrtu Maxwellovu jednadžbu u integralnom obliku

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dA\right)\right). \tag{4.31}$$

Definicija 4.4. *Četvrta Maxwellova jednadžba u integralnom obliku glasi*

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dA \right) \right). \tag{4.32}$$

Ako struju I zapišemo kao integral gustoće struje tada četvrta Maxwellova jednadžba glasi

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(\iint_S \vec{J} \cdot \vec{n}\, dS + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dA \right) \right). \tag{4.33}$$

Sada primjenom Stokesovog teorema na lijevu stranu jednakosti dobivamo

$$\iint_S rotB \cdot d\vec{S} = \mu_0 \left(\iint_S \vec{J} \cdot \vec{n}\, dS + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dA \right) \right), \tag{4.34}$$

iz čega dobivamo četvrtu Maxwellovu jednadžbu u diferencijalnom obliku

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt}. \tag{4.35}$$

Definicija 4.5. *Četvrta Maxwellova jednadžba u diferencijalnom obliku glasi*

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt}. \tag{4.36}$$

Primjer 4.3. *Odredi iznos magnetskog polja unutar i izvan koaksijalnog kabela polumjera R ako kroz unutarnji vodiča teće konstantna struja I*
Koaksijanlni kabel sastoji se od središnjeg vodiča, vanjskog vodiča, dielektričnog izolatora između unutarnjeg i vanjskog vodiča i od vanjske izolacije.
Odredimo iznos magnetskog polja $\vec{B}$ na kružnici na udaljenosti r od središta kabela. Budući da kroz unutarnji vodič teće konstantna struja, za računanje magnetskog polja možemo koristiti Amperov zakon u integralnom obliku.

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \tag{4.37}$$

U slučaju kada je $r < R$ kružnica polumjera r obuhvaća samo unutrasnji vodič. Tada je ukupna struja koju obuhvaća kružnica samo struja u središnjem vodiču. Silnice magnetskog polja paralelne su sa vektorom $d\vec{l}$ po cijeloj kružnici. Tada integral glasi

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_C B \cdot dl = B \int_C dl = B(2\pi r) = \mu_0 I, \tag{4.38}$$

iz čega dobivamo

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \tag{4.39}$$

U slučaju kada je $r > R$ kružnica polumjera r obuhvaća i unutrašnji i vanjski vodič. Budući da je struja koja teće vanjskim vodičem jednakog iznosa i suprotnog predznaka od struje kroz središni vodič, ukupna struja I koju kružnica obuhvaća jednaka je nuli. Integral tada iznosi

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \cdot 0 = 0. \tag{4.40}$$

5. Zaključak

U ovom radu obradene su Maxwellove jednadžbe. To su četiri parcijalne diferencijalne jednadžbe koje predstavljaju temelj elektrodinamike. Nazvane su po škotskom fizičaru Jamesu Clerku Maxwellu koji je na temelju poznatih fizikalnih zakona objedinio teoriju električnih i magnetskih polja. Za razumijevanje Maxwellovih jednadžbi i fizikalnih zakona na kojima se one temelje potrebno je poznavati osnovne pojmove vektorske analize. Zbog toga je uvodni dio rada posvećen teoriji vektorske analize. Definirani su vektor, vektorska funkcija, te skalarna i vektorska polja. Zatim su objašnjeni i na primjerima demonstrirani operatori gradijenta, divergencije i rotacije koje koristimo prilikom računanja sa skalarnim i vektorskim poljima. Nakon toga definirani su krivuljni i plošni integrali koje koristimo za integriranje skalarnih i vektorskih polja. Na kraju poglavlja o vektorskoj analizi definirani su i na primjerima objašnjeni teoremi koji povezuju krivuljne i plošne integrale.

Nakon vektorske analize obrađeni su fizikalni zakoni na kojima se temelje Maxwellove jednadžbe i zapisani u integralnom obliku. To su Gaussov zakon za električna polja, Gaussov zakon za magnetska polja, Faradayev zakon elektromagnetske indukcije, te Amperov zakon.

U završnom dijelu rada izvedene su sve četiri Maxwellove jednadžbe i zapisane u diferencijalnom obliku. Također navedeni su i primjeri zadataka koje riješavamo primjenom Maxwellovih jednadžbi. Maxwellove jednadžbe, kao temelj klasične elektrodinamike, predstavljaju jedno od najvećih ujedinjenja u povijesti fizike. Otkriće da se elektromagnetski valovi šire brzinom svjetlosti, izvedeno iz Maxwellovih jednadžbi, predstavlja jedno od najvećih teorijskih dostignuća u fizici i ujedinjuje optiku s elektromagnetizmom.

Bibliografija

[1] Kreyszig, E.; Kreyszig, H.; Norminton, E.: "Advanced engineering mathematics: John Wiley and sons 2011.

[2] Fitzpatrick, R.: "Maxwell's equations and principles of elektromagnetism", Infinity Science Press, Hingham, Massachusetts, 2008.

[3] Griffiths, D.: "Introduction to electrodynamics", Cambridge University Press, Cambridge, 2017.

[4] Fleisch, D.: "A Student's Guide to Maxwell's Equations", Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[5] "Unit Vectors in Cartesian Coord", s Interneta, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Unit-vectors-in-Cartesian-Coord.png, 04.09.2024.

[6] "Derivatives of Vectors", s Interneta, https://www.storyofmathematics.com/derivatives-of-vectors/, 04.09.2024.

[7] "Creating scalar fields in datagraph", s Interneta, https://community.visualdatatools.com/datagraph/2021/02/ 18/webinar-creating-scalar-fields-in-datagraph/, 04.09.2024.

[8] "Example 81 fig2", s Interneta, https://www.researchgate.net/figure/ector-field-and-trajectory-for-a-particle-in-a-fluid-Example-81-fig2-355795057, 04.09.2024.

[9] "What is Coulomb's law", s Interneta, https://www.atlearner.com/2022/04/what-is-coulombs-law.html, 04.09.2024.

[10] "Electric field lines", s Interneta, https://courses.lumenlearning.com/suny-physics/chapter/18-5-electric-field-lines-multiple-charges/, 04.09.2024.

[11] Griffiths, D.: "Introduction to electrodynamics", Cambridge University Press, Cambridge, 2017.

[12] "magfields", s Interneta, https://www.aplusphysics.com/courses/honors/magnets/magfields.html, 04.09.2024

[13] "383179178013", s Interneta, https://www.nagwa.com/en/explainers/383179178013/, 04.09.2024

[14] "What is a simple electromagnet", s Interneta, https://www.brighthubengineering.com/commercial-electrical-applications/72108-what-is-a-simple-electromagnet/, 04.09.2024

[15] "Maxwell", s Interneta, https://faculty.wcas.northwestern.edu/infocom/Ideas/maxwell.html, 04.09.2024

[16] "Sir George Stokes", s Interneta, https://en.wikipedia.org/wiki/Sir-George-Stokes,-1st-Baronet/media/File:Ggstokes.jpg, 04.09.2024.

[17] "George Green", s Interneta, https://cosmosmagazine.com/wp-content/uploads/2020/02/180712-george-green-1-996x1440.jpg, 04.09.2024.

[18] "Carl Friedrich Gauss", s Interneta, https://en.wikipedia.org/wiki/Carl-Friedrich-Gauss/media/File:Carl-Friedrich-Gauss-1840-by-Jensen.jpg

[19] "Michael Faraday", s Interneta, https://en.wikipedia.org/wiki/Michael-Faraday/media/File:Michael-Faraday-sitting-crop.jpg

[20] "Andre Marie Ampere", s Interneta, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/c0/Ampere- Andre-1825.jpg/300px-Ampere-Andre-1825.jpg

Sažetak i ključne riječi

U ovome završnom radu analizirali smo Maxwellove jednadžbe. Navedeni su osnovni pojmovi iz područja vektorske analize. Navedeni su i na primjerima objašnjeni teoremi koji povezuju krivuljne i plošne integrale. Zatim su objašnjeni fizikalni zakoni na kojima se temelje Maxwellove jednadžbe i zapisani u integralnom obliku. U završnom dijelu rada izvedeni su diferencijalni oblici Maxwellovih jednadžbi.

Ključne riječi: vektorska analiza, Maxwellove jednadžbe, Gaussov zakon, Faradayev zakon, Amperov zakon

Summary and key words

In this final thesis, we analyzed Maxwell's equations. The basic concepts from the field of vector analysis are presented and explained through examples. Theorems that connect line and surface integrals are also presented and explained through examples. Then, the basic physical laws on which Maxwell's equations are based are explained and written in integral form. In the final part of the paper, the differential forms of Maxwell's equations are derived."

Keywords: vector analysis, Maxwell's equations, Gauss law, Faraday's law, Ampere's law