

# Hilbertova transformacija

---

**Radošević, Karlo**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:190:113351>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-09**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Engineering](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI

**TEHNIČKI FAKULTET**

Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

**HILBERTOVA TRANSFORMACIJA**

Rijeka, srpanj 2022.

Karlo Radošević  
0069086610

SVEUČILIŠTE U RIJECI

**TEHNIČKI FAKULTET**

Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

**HILBERTOVA TRANSFORMACIJA**

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Dražić

Rijeka, srpanj 2022.

Karlo Radošević  
0069086610

Rijeka, 18. ožujka 2022.

Zavod: **Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike**  
Predmet: **Inženjerska matematika ET**  
Grana: **1.01.07 primijenjena matematika i matematičko modeliranje**

## ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Karlo Radošević (0069086610)**  
Studij: **Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike**

Zadatak: **Hilbertova transformacija // Hilbert transformation**

### Opis zadatka:

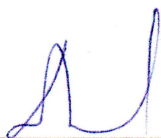
U radu je potrebno precizno definirati Hilbertovu transformaciju kao specijalan slučaj integralne transformacije. Zatim je potrebno iskazati i dokazati najvažnija svojstva Hilbertove transformacije. Hilbertovu transformaciju potrebno je staviti u povijesni kontekst te u kontekst primjene u inženjerstvu s naglaskom na primjene u elektrotehnici.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.



Zadatak uručen pristupniku: 21. ožujka 2022.

Mentor:



---

Doc. dr. sc. Ivan Dražić

Predsjednik povjerenstva za  
završni ispit:



---

Prof. dr. sc. Viktor Sučić

## IZJAVA

Sukladno članku 8. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku preddiplomskih sveučilišnih studija/stručnih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 1. veljače 2020., izjavljujem da sam samostalno izradio završni rad prema zadatku preuzetom dana 21.03.2022.

Rijeka, 01.07.2022.



Karlo Radošević

*Ovim putem volio bih se zahvaliti svim osobama koje su mi kroz ove tri godine uvijek bile potpora te su uvijek vjerovala u mene u lakim, ali i u teškim trenucima. Prije svega želim se zahvaliti svom mentoru doc. dr. sc. Ivanu Dražiću koji mi je znatno olakšao pisanje rada, svojom konstantnom pomoći i potporom, bilo da je vikend ili radni dan uvijek je odmah odgovarao na moje upite te niti u jednom trenutku nije bilo nikakvog pritiska ni negativne energije, već je uvijek vladala pozitivna radna atmosfera i upravo zbog toga je rezultat takav kakav jest. Hvala Vam i nadam se da ću u budućnosti opet imati prilike surađivati s Vama! Veliko hvala mojoj obitelji koja me trpi ne samo ove tri godine, već čitavo moje školovanje (znati će oni zašto!) i što su me uvijek usmjeravali i pružali mi podršku kakav god da je rezultat bio. Uvijek sam znao da su ponosni na mene, upravo me to često puta poticalo da svaki put dam sve od sebe, jer ako su oni uložili toliko energije, truda i svega na mene mogu im tako na neki način zahvaliti i vratiti. Za kraj (šećer na kraju) volio bih se zahvaliti svojoj djevojci, koja koliko god često puta ostajao doma učiti nikada nije bila negativna i uvijek je imala riječi podrške te vjerovala u mene. Da nije bilo nje da mi uljepšava i ispunjava sve dane teško da bi rezultati bili ovakvi, hvala ti!*

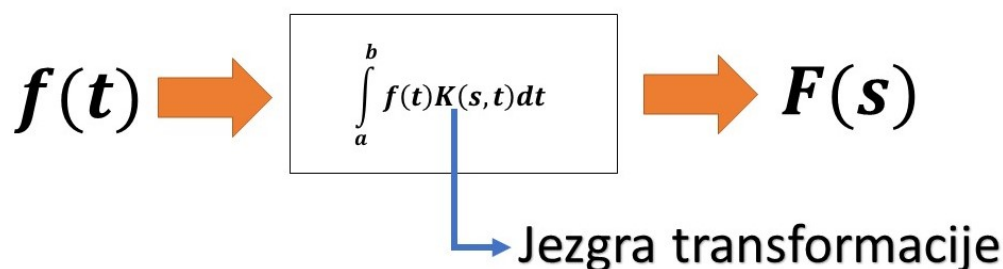
## Sadržaj

<b>1. Uvod</b>	<b>2</b>
<b>2. David Hilbert</b>	<b>4</b>
<b>3. Definicija Hilbertove transformacije</b>	<b>8</b>
<b>4. Hilbertova transformacija trigonometrijskih funkcija</b>	<b>11</b>
4.1. Hilbertova transformacija funkcije kosinus . . . . .	11
4.2. Hilbertova transformacija funkcije sinus . . . . .	13
<b>5. Hilbertova transformacija delta funkcije i pravokutne funkcije</b>	<b>16</b>
5.1. Hilbertova transformacija delta funkcije . . . . .	16
5.2. Hilbertova transformacija pravokutne funkcije . . . . .	17
<b>6. Hilbertova transformacija periodične funkcije</b>	<b>21</b>
<b>7. Osnovna svojstva Hilbertove transformacije</b>	<b>24</b>
<b>8. Primjena Hilbertove transformacije u detekciji kvara pri radu induksijskih strojeva</b>	<b>28</b>
<b>9. Primjena Hilbertove transformacije u medicini</b>	<b>31</b>
9.1. Hilbertova transformacija QRS kompleksa . . . . .	32
9.2. Analiza EKG signala . . . . .	35
9.3. Ograničenja metode . . . . .	37
<b>10. Zaključak</b>	<b>40</b>
<b>Literatura</b>	<b>41</b>
<b>Sažetak i ključne riječi</b>	<b>42</b>
<b>Summary and key words</b>	<b>43</b>

## 1. Uvod

Integralne transformacije matematički su alat kojima problem iz jedne, najčešće vremenske domene, transformiramo u neku apstraktnu domenu u kojoj problem postaje jednostavniji. Tako primjerice Laplaceovom transformacijom diferencijalne jednadžbe pretvaramo u algebarske.

Integralna transformacija je transformacija funkcija i njihovih svojstava, a u svojoj osnovi ima integral kako je ilustrirano na sljedećoj slici.



Slika 1.1. Transformacija funkcije iz  $t$  u  $s$ -domenu, Izvor: [1]

Proces transformacije može biti na principu *crne kutije*, što bi značilo da nije važno kako se desila transformacija, već samo radimo u transformiranoj domeni. S druge strane, proces se može temeljiti na principu *bijele kutije* kada se zna kako se odvila transformacija. Iako oba pristupa imaju svoje primjene, princip *bijele kutije* matematički je korektniji upravo zbog toga što se zna koji se parametri mijenjaju, pa se tako često upotrebljava i u području inženjerstva. Princip *bijele kutije* zahtijeva točno poznavanje svih slobodnih parametara transformacije, što bi prema prethodnoj slici bile granice integracije i jezgra transformacije.

Ovaj rad posvećen je integralnoj transformaciji koja se zove Hilbertova transformacija. Hilbertovu transformaciju uveo je njemački matematičar David Hilbert, a osim nje postoje još neke vrste integralnih transformacija, poput Fourierove i Laplaceove transformacije, no kroz ovaj rad naglasak će biti na Hilbertovoj transformaciji i njezinoj primjeni na konkretnim problemima u struci.

Prvi dio rada posveti ćemo upravo Davidu Hilbertu kao veoma utjecajnoj figuri u matematici 19. stoljeća, koji je svojim radom uvelike odredio razvoj suvremene matematike. Nakon toga, formalno ćemo definirati Hilbertovu transformaciju na temelju opće definicije integralnih transformacija.

U nastavku rada, primijenit ćemo definiciju Hilbertove transformacije na često korištene i veoma važne funkcije u matematici i inženjerstvu, kao što su trigonometrijske funkcije sinus i kosinus, Diracova delta funkcija, pravokutna funkcija te periodične funkcije koje se često koriste u teoriji signala. Nadalje, navesti ćemo i dokazati niz svojstava Hilbertove transformacije, a za neka od njih ćemo pokazati i praktičnu primjenu.



U završnom dijelu rada upoznati ćemo se s nekima od brojnih primjena Hilbertove transformacije koje će joj dati smisao i pokazati njezinu važnost, ne samo u matematici, već i u drugim znanstvenim područjima. Tako analiziramo upotrebu Hilbertove transformacije pri detekciji kvara u rotoru indukcijskog stroja, koja se temelji na vezi Fourierove i Hilbertove transformacije. Osim toga, objasnit ćemo njezinu primjenu u području analize signala u medicini, točnije pri analizi EKG signala.

## 2. David Hilbert

David Hilbert (23.2.1862. - 14.2.1943.), njemački je matematičar, kojeg možemo smatrati jednom od najutjecajnijih osoba u području matematike tijekom 19. i početkom 20. stoljeća. Rođen je u povijesnom pruskom gradu po imenu Königsberg<sup>1</sup>, poznatom po problemu sedam mostova Königsberga, što je povijesno značajan problem u matematici.



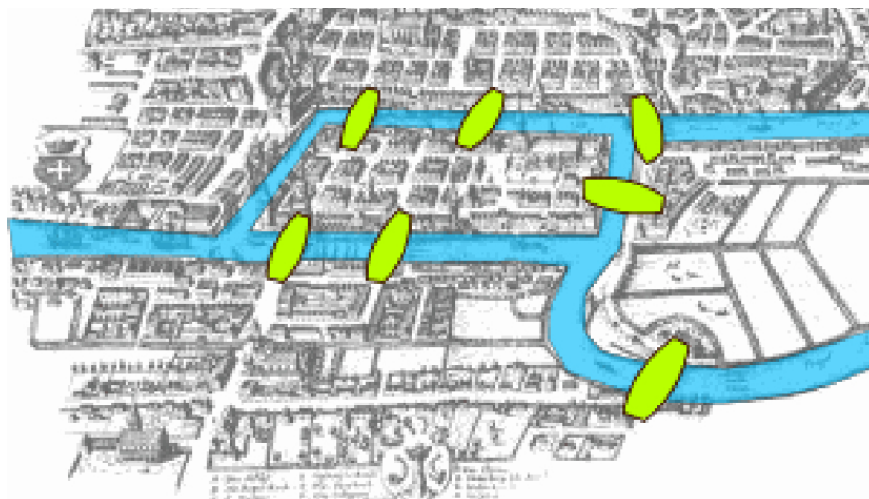
*Slika 2.1. David Hilbert, Izvor: [2]*

Naime, Königsberg je bio smješten s obje strane rijeke Pregel te je sadržavao dva otoka, Kneiphof i Lomse, koji su međusobno te s kopnenim dijelovima grada bili povezani pomoću sedam mostova. Problem se sastojao u osmišljavanju šetnje gradom koja nijedan most neće preći više od jednog puta. Do rješenja je došao švicarski matematičar Leonhard Euler<sup>2</sup>, koji je umjesto polaska u šetnju gradom nacrtao graf prikazavši kopnene dijelove točkama, a mostove linijama pomoću čega je zaključio da se takva šetnja ne može izvesti. Upravo na temelju rješavanja tog problema postavila se osnova teorije grafova i topologije, danas iznimno važnih matematičkih disciplina koje imaju primjenu u mnogim znanstvenim područjima.

---

<sup>1</sup>današnji Kalinjingrad u Rusiji

<sup>2</sup>Leonhard Euler (1707. - 1783.), švicarski matematičar, pridonio razvoju mnogih područja matematike i fizike



Slika 2.2. Sedam mostova Königsberga, Izvor: [3]

Zanimljivo je da Hilbert u školu kreće tek s osam godina te u prvoj školi koju je pohađao po imenu Friedrichskolleg nije baš zablistao. Matematika je u toj školi bila u drugom planu, a naglasak je bio na učenju velikih količina informacija u čemu Hilbert i nije bio najbolji, što dokazuje i činjenica da je on sam sebe nazvao "tup i glup" [4]. Teško je zamisliti da osobi koja je ostavila tako velik trag u području matematike nije išlo u školi. Međutim, prebacivši se u školu po imenu Wilhelm Gymnasium, gdje je više bio fokus na matematici, poticanju razmišljanja i primjenjivanja znanja, dokazao je da u njemu leži veliki potencijal. Nakon završetka gimnazije upisuje fakultet u Königsbergu, gdje je i doktorirao s disertacijom "*O nepromjenjivim svojstvima posebnih binarnih formi, sa naglaskom na sferne harmonijske funkcije*" pod mentorstvom značajnog matematičara Ferdinanda von Lindemanna<sup>3</sup> [2]. Hilbertovu važnost za fakultet u Königsbergu dokazuje činjenica da je napravljen spomenik u njegovu čast.



Slika 2.3. Spomenik u čast Davidu Hilbertu kod sveučilišta u Königsbergu, Izvor: [2]

<sup>3</sup>Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852. - 1939.), njemački matematičar, poznat po dokazu transcendentnosti broja  $\pi$  (pi)

Na Sveučilištu u Königsbergu ostaje kao profesor od 1886. do 1895. godine. Uz nagovor Felixa Kleina<sup>4</sup> 1895. godine došao je na poziciju predstojnika katedre za matematiku na fakultetu u Göttingenu, tada najprestižnijem centru za znanstvena istraživanja u području matematike na svijetu, gdje ostaje do kraja života [2]. Živeći u vrijeme Drugog svjetskog rata, do njegove smrti 1943. godine, većina znanstvenika je bila otjerana od strane nacista, stoga je na Hilbertovom sprovodu bila prisutna samo nekolicina akademika. Pokopan je u Göttingenu, a zanimljivo je da mu na spomeniku piše: *"Mi moramo znati. Mi ćemo znati."* [2]



Slika 2.4. Nadgrobni spomenik Davida Hilberta, Izvor: [2]

Hilbert je otkrio velik broj fundamentalnih ideja u teoriji invarijantnosti, aksiomatizaciji geometrije, a Hilbertov prostor temelj je funkcionalne analize. Prilagodio je i branio Cantorovu<sup>5</sup> teoriju skupova i teoriju beskonačnih brojeva. Iako je bio matematičar proučavao je i određena područja u fizici, kao što su teorija kinetike plinova te osnova radijacije i molekularne teorije tvari. Pomoću svojih studenata doprinio je osnovama kvantne mehanike i teorije relativnosti.

Hilbertov prvi rad na invarijantnim funkcijama je rezultirao poznatim teoremom konačnosti. Naime, prvo je Paul Gordan<sup>6</sup> predstavio teorem o konačnosti generatora binarnih oblika, no računi su bili jako složeni, stoga se metoda nije mogla primjenjivati na kompliciranije funkcije.

<sup>4</sup>Felix Klein (1849. - 1925.), njemački matematičar i pedagog matematike, poznat po svom radu s teorijom grupa i kompleksnom analizom

<sup>5</sup>Georg Cantor (1845. - 1918.), njemački matematičar, bavio se teorijom skupova

<sup>6</sup>Paul Gordan (1837. - 1912.), njemački matematičar, bavio se invarijantnom teorijom

Hilbert je uočio nedostatak u prijašnjem pristupu, te predstavio tako zvani *Hilbertov osnovni teorem* koji pokazuje postojanje konačnog skupa generatora neovisno o broju varijabli. Teorem nam govori da ako je  $k$  polje, onda je svaki ideal unutar prstena konačno generiran. Važno je naglasiti da se rad smatra jednim od značajnijih djela u području algebre.

David Hilbert najpoznatiji je po svoja 23 problema, koja je predstavio 1900. godine na konferenciji u Parizu [5]. Hilbertovi problemi osmišljeni su da služe kao primjeri, čija bi rješenja dovela do unapređenja matematičkih disciplina. Podijelio ih je u četiri temeljne grupe. Prvu grupu čini šest osnovnih problema, dok se u drugoj nalazi šest problema vezanih uz Hilbertovo istraživanje teorije brojeva. Idućih šest je kombinacija algebarskih i geometrijskih problema, a posljednjih pet predstavlja njegove interese i zanimanja. Neki od problema su riješeni, dok neki ni dan danas nisu, međutim što je najvažnije potakli su inovacije te uvelike odredili smjer istraživanja u matematici tijekom 20. stoljeća.

### 3. Definicija Hilbertove transformacije

Jedan od važnih Hilbertovih rezultata je integralna transformacija, danas poznata kao Hilbertova transformacija.

Integralne transformacije danas se uvelike primjenjuju u rješavanju raznih problema iz područja primijenjene matematike, matematičke fizike i inženjerske znanosti. Iako je Hilbertova transformacija dobila ime po Davidu Hilbertu njezina osnovna svojstva razvili su G. H. Hardy<sup>1</sup> i E. C. Titchmarsh<sup>2</sup> [6].

Hilbertova transformacija spada u skupinu integralnih transformacija, koje se mogu opisati kao jedinstvene matematičke operacije kojima realnu ili kompleksnu funkciju transformiramo u neku drugu, najčešće apstraktnu funkciju. Integralne transformacije najčešće se koriste na način da se složen matematički problem transformira u relativno jednostavniji. Na primjer, Laplaceova transformacija diferencijalne jednadžbe prebacuje u algebarske jednadžbe s kojima nam je znatno lakše dalje raditi i računati.

Formalna definicija integralne transformacije dana je sljedećom definicijom.

**Definicija 3.1.** *Neka je  $f(t)$  kompleksna funkcija realne varijable. Njena integralna transformacija  $\mathcal{T}$  definirana je s*

$$\mathcal{T}\{f(t)\} = f_{\mathcal{T}}(x) = \int_{\alpha}^{\beta} K(x, t)f(t)dt, \quad (3.1)$$

*uz pretpostavku da dani integral postoji. Kompleksnu funkciju  $K$  zovemo jezgrom transformacije, funkciju  $f$  originalom, a funkciju  $F$  slikom. Domena originala naziva se  $t$ -domena, a domena slike  $x$ -domena. Brojevi  $\alpha$  i  $\beta$  su iz intervala  $[-\infty, \infty]$ .*

Iz definicije možemo uočiti da je svaka integralna transformacija, pa tako i Hilbertova, definirana jezgrom te brojevima  $\alpha$  i  $\beta$ .

**Definicija 3.2.** *Za jezgru Hilbertove transformacije vrijedi  $K(x, t) = \frac{1}{\pi(t-x)}$ , te su granice inetgrala od  $\alpha = -\infty$  do  $\beta = \infty$ . Stoga, ako je  $f(t)$  definirana u realnom vremenu ( $-\infty < t < \infty$ ), njezina Hilbertova transformacija definirana je s*

$$\mathcal{H}\{f(t)\} = f_{\mathcal{H}}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt. \quad (3.2)$$

<sup>1</sup>Godfrey Harold Hardy (1877. - 1947.), engleski matematičar, istaknuo se svojim dostignućima u teoriji brojeva

<sup>2</sup>Edward Charles Titchmarsh (1899. - 1963.), engleski matematičar, poznat po radu u analitičkoj teoriji brojeva, Fourierovoj analizi i drugim dijelovima matematičke analize

Pomoću Cauchyevog principa glavne vrijednosti ovaj integral možemo zapisati i na sljedeći način

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \right] \frac{f(t)}{t-x} dt. \quad (3.3)$$

Uz Hilbertovu transformaciju možemo navesti jezgre još nekih često korištenih integralnih transformacija, kao što su Laplaceova i Fourierova transformacija. Za Laplaceovu transformaciju vrijedi  $K(s, t) = e^{-st}$ , dok je kod Fourierove transformacije  $K(s, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ist}$ .

Najčešće korištene integralne transformacije dane su u Tablici 3.1.

Tablica 3.1. Tablica integralnih transformacija

Naziv transformacije	$K(x, t)$	$\alpha$	$\beta$
Laplaceova	$e^{-xt}$	0	$\infty$
Hilbertova	$\frac{1}{\pi(t-x)}$	$-\infty$	$\infty$
Fourierova	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ist}$	$-\infty$	$\infty$
Mellinova	$t^{s-1}$	0	$\infty$
Abelova	$\frac{2t}{\sqrt{t^2-x^2}}$	$x$	$\infty$
Hartleyeva	$\frac{\cos(xt) + \sin(xt)}{\sqrt{2\pi}}$	$-\infty$	$\infty$
Weierstrassova	$\frac{e^{-\frac{(x-t)^2}{4}}}{\sqrt{4\pi}}$	$-\infty$	$\infty$

Najčešće korištene transformacije su Laplaceova transformacija, koja se često koristi u elektrotehnici kada se javljaju funkcije koje se ne mogu derivirati pa se njezinom primjenom diferencijalna jednačba transformira u algebarsku, i Fourierova transformacija koja je važan alat u teoriji signala. Primjenu Hilbertove transformacije također često srećemo u praksi, ali o tome će biti rečeno nešto više u nadolazećim poglavljima.

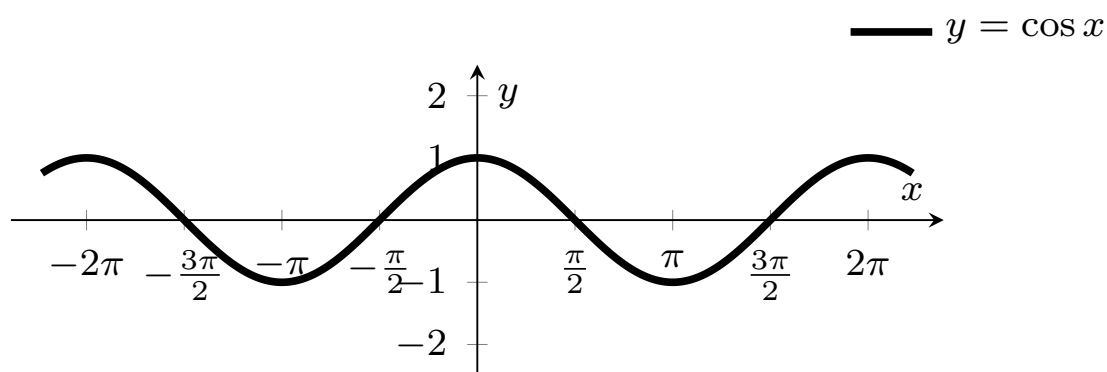


## 4. Hilbertova transformacija trigonometrijskih funkcija

U ovom poglavlju ćemo obraditi Hilbertovu transformaciju elementarnih trigonometrijskih funkcija, odnosno funkcije kosinus i sinus. Funkcije sinus i kosinus vrlo se često koriste u inženjerskoj struci, posebice u teoriji signala. Naime, praktički svaka valna veličina može se reprezentirati linearnom kombinacijom funkcija sinus i kosinus, zbog čega je značajno poznavati njihovu Hilbertovu transformaciju.

### 4.1. Hilbertova transformacija funkcije kosinus

U ovom poglavlju bavimo se Hilbertovom transformacijom funkcije kosinus koja je prikazana na sljedećoj slici.



Slika 4.1. Grafički prikaz funkcije  $f(x) = \cos(x)$

Za izvod Hilbertove transformacije funkcije kosinus potrebni su nam sljedeći rezultati.

**Lema 4.1.** *Neka je  $f(x)$  neparna funkcija. Tada vrijedi:*

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0, \quad (4.1)$$

*pri čemu je  $a$  proizvoljna realna konstanta koja može biti jednaka i beskonačno.*

**Lema 4.2.** *Neka je  $f(x)$  parna funkcija. Tada vrijedi:*

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \quad (4.2)$$

*pri čemu je  $a$  proizvoljna realna konstanta koja može biti jednaka i beskonačno.*

**Lema 4.3.** Za  $\omega \in \mathbb{R}$  vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega x}{x} dx = \pi. \quad (4.3)$$

*Dokaz.* Zbog parnosti podintegralne funkcije vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega x}{x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega x}{x} dx. \quad (4.4)$$

Uočimo da se izraz (4.4) može zapisati kao

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega x}{x} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-0x} \frac{\sin \omega x}{x} dx, \quad (4.5)$$

što dalje možemo zapisati kao

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega x}{x} dx = 2\mathcal{L} \left\{ \frac{\sin \omega x}{x} \right\}, \quad (4.6)$$

za  $s = 0$  pri čemu  $\mathcal{L}$  označava Laplaceovu transformaciju. Iz teorije Laplaceovih transformacija poznati su nam sljedeći rezultati:

$$\mathcal{L}\{\sin \omega x\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad (4.7)$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{f(x)}{x} \right\} = \int_s^{\infty} \mathcal{L}\{f(x)\} du, \quad (4.8)$$

što vrijedi pod uvjetom da  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  postoji.

Kako je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega x}{x} = \omega, \quad (4.9)$$

možemo pisati:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\sin \omega x}{x} \right\} = \int_0^{\infty} \frac{\omega du}{u^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{\omega} \arctan \frac{u}{\omega} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}. \quad (4.10)$$

Tako dolazimo do konačnog rješenja

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega x}{x} dx = 2\mathcal{L} \left\{ \frac{\sin \omega x}{x} \right\} = \pi, \quad (4.11)$$

čime je dokaz završen. □

**Propozicija 4.1.** Vrijedi

$$\mathcal{H}\{\cos \omega t\} = -\sin \omega x. \quad (4.12)$$

*Dokaz.* Uvrštavanjem u definiciju Hilbertove transformacije funkcije kosinus slijedi

$$\mathcal{H}\{\cos \omega t\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega t}{(t-x)} dt. \quad (4.13)$$

Iskoristimo li jednakost  $\omega(t-x) + \omega x = \omega t$ , dobivamo

$$\mathcal{H}\{\cos \omega t\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[\omega(t-x) + \omega x]}{(t-x)} dt. \quad (4.14)$$

Primjenom adicijske formule

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (4.15)$$

izraz (4.14) poprima oblik

$$\mathcal{H}\{\cos \omega t\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega(t-x) \cos \omega x - \sin \omega(t-x) \sin \omega x}{t-x} dt, \quad (4.16)$$

odnosno

$$\mathcal{H}\{\cos \omega t\} = \frac{\cos \omega x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega(t-x)}{(t-x)} dt - \frac{\sin \omega x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega(t-x)}{(t-x)} dt. \quad (4.17)$$

Uvođenjem supstitucije  $T = t - x$  slijedi

$$\mathcal{H}\{\cos \omega t\} = \frac{\cos \omega x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega T}{T} dT - \frac{\sin \omega x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega T}{T} dT. \quad (4.18)$$

Pogledamo li posljednji izraz, možemo primjetiti da je integrand prvog integrala neparna funkcija od  $T$ , stoga taj integral nestaje.

Nadalje, primjenom Leme 4.3 izraz se dodatno pojednostavljuje, odnosno poprima oblik

$$\mathcal{H}\{\cos \omega t\} = -\frac{\sin \omega x}{\pi} \pi, \quad (4.19)$$

te dobivamo

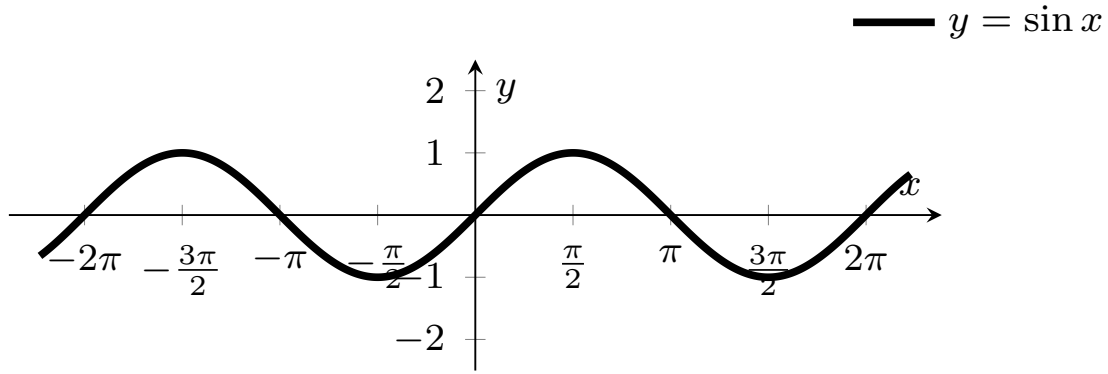
$$\mathcal{H}\{\cos \omega t\} = -\sin \omega x, \quad (4.20)$$

čime je dokaz završen. □

## 4.2. Hilbertova transformacija funkcije sinus

U ovom poglavlju bavimo se Hilbertovom transformacijom funkcije kosinus koja je prikazana na sljedećoj slici.

Postupak je gotovo identičan postupku za funkciju kosinus. Jedina razlika će biti primjena adicijske formule za funkciju sinus, a ne za funkciju kosinus.



Slika 4.2. Grafički prikaz funkcije  $f(x) = \sin(x)$

**Propozicija 4.2.** Vrijedi

$$\mathcal{H}\{\sin \omega t\} = \cos \omega x. \quad (4.21)$$

*Dokaz.* Primjenom Hilbertove transformacije na funkciju sinus slijedi

$$\mathcal{H}\{\sin \omega t\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{(t-x)} dt. \quad (4.22)$$

Uvrštavanjem jednakosti  $\omega(t-x) + \omega x = \omega t$ , dobivamo

$$\mathcal{H}\{\sin \omega t\} = f_H(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[\omega(t-x) + \omega x]}{(t-x)} dt. \quad (4.23)$$

Iskoristimo li adicijsku formulu za funkciju sinus

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (4.24)$$

izraz (4.23) poprima oblik

$$\mathcal{H}\{\sin \omega t\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega(t-x) \cos \omega x + \cos \omega(t-x) \sin \omega x}{t-x} dt, \quad (4.25)$$

odnosno

$$\mathcal{H}\{\sin \omega t\} = \frac{\cos \omega x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega(t-x)}{(t-x)} dt + \frac{\sin \omega x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega(t-x)}{(t-x)} dt. \quad (4.26)$$

Uvrštavanjem supstitucije  $T = t - x$  slijedi

$$\mathcal{H}\{\sin \omega t\} = \frac{\cos \omega x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega T}{T} dT + \frac{\sin \omega x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega T}{T} dT. \quad (4.27)$$

Identično kao kod dokaza za funkciju kosinus, integrand drugog integrala je neparna funkcija od  $T$  te on nestaje. Prvi integral pojednostavljujemo primjenom Leme 4.3 pa imamo

$$\mathcal{H}\{\sin \omega t\} = \frac{\cos \omega x}{\pi} \pi, \quad (4.28)$$

te konačno dobivamo

$$\mathcal{H}\{\sin \omega t\} = \cos \omega x, \quad (4.29)$$

čime je tvrdnja dokazana.

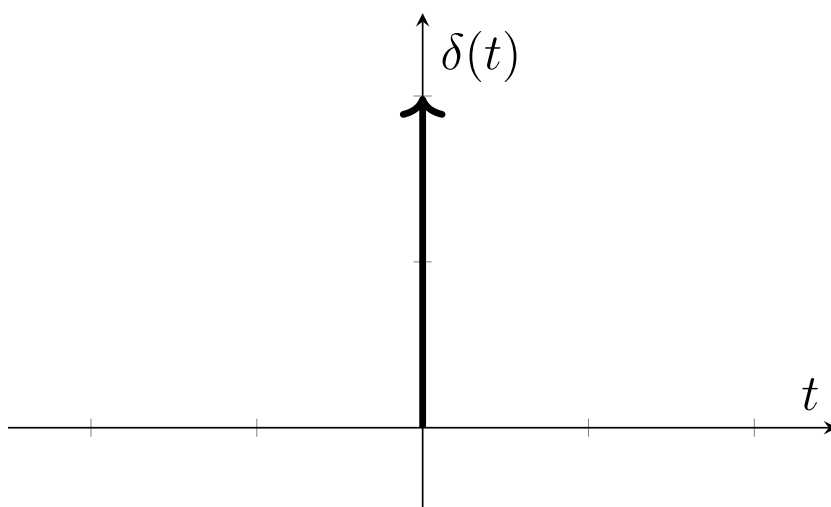
□

## 5. Hilbertova transformacija delta funkcije i pravokutne funkcije

Kroz ovo poglavlje obraditi ćemo Hilbertovu transformaciju delta i pravokutne funkcije.

### 5.1. Hilbertova transformacija delta funkcije

Prvo ćemo pogledati Hilbertovu transformaciju važne matematičke funkcije, poznate kao delta funkcija. Primjenjuje se za radnje koje se javljaju kroz vrlo kratke vremenske intervale kao što je udar groma, stoga se još naziva i jedinični impuls.



Slika 5.1. Grafički prikaz Diracove  $\delta(t)$  funkcije

**Definicija 5.1.** Delta funkciju označavamo s  $\delta(t)$ , te za nju vrijedi

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (5.1)$$

Svakako treba napomenuti da zbog navedenih svojstava Diracova delta funkcija nije funkcija u klasičnom matematičkom smislu.

Da bi izveli Hilbertovu transformaciju Delta funkcije, potreban nam je sljedeći rezultat.

**Lema 5.1.** Neka je  $f$  integrabilna funkcija. Za  $\delta$  funkciju vrijedi:

$$(f * \delta)(t) = f(t). \quad (5.2)$$

*Dokaz.* Polazimo od definicije konvolucije

$$(f * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau, \quad (5.3)$$

odnosno

$$(f * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(-(\tau - t)) d\tau. \quad (5.4)$$

Zbog parnosti  $\delta$  funkcije dobivamo

$$(f * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(\tau - t) d\tau. \quad (5.5)$$

Primjenom svojstva

$$f(t) \delta(t - t_0) = f(t_0) \delta(t - t_0), \quad (5.6)$$

dolazimo do konačnog rješenja

$$(f * \delta)(t) = f(t), \quad (5.7)$$

čime smo dokazali početnu tvrdnju.  $\square$

**Propozicija 5.1.** *Vrijedi*

$$\mathcal{H}\{\delta(t)\} = \frac{1}{\pi t}. \quad (5.8)$$

*Dokaz.* Primjenom definicije Hilbertove transformacije slijedi

$$\mathcal{H}\{\delta(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(t)}{(t - x)} dt. \quad (5.9)$$

Iskoristimo li definiciju konvolucijskog integrala

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau, \quad (5.10)$$

dobivamo

$$\mathcal{H}\{\delta(t)\} = \frac{1}{\pi t} * \delta(t). \quad (5.11)$$

Primjenom Leme 5.1 izraz poprima oblik

$$\mathcal{H}\{\delta(t)\} = \frac{1}{\pi t}, \quad (5.12)$$

čime je dokaz priveden kraju.  $\square$

## 5.2. Hilbertova transformacija pravokutne funkcije

Najprije ćemo definirati pravokutnu funkciju.

**Definicija 5.2.** Pravokutna funkcija širine  $2a$  na intervalu  $(-a, a)$  definirana je s

$$r(t) = \begin{cases} 1, & |t| < a \\ 0, & |t| > a \end{cases}, \quad (5.13)$$

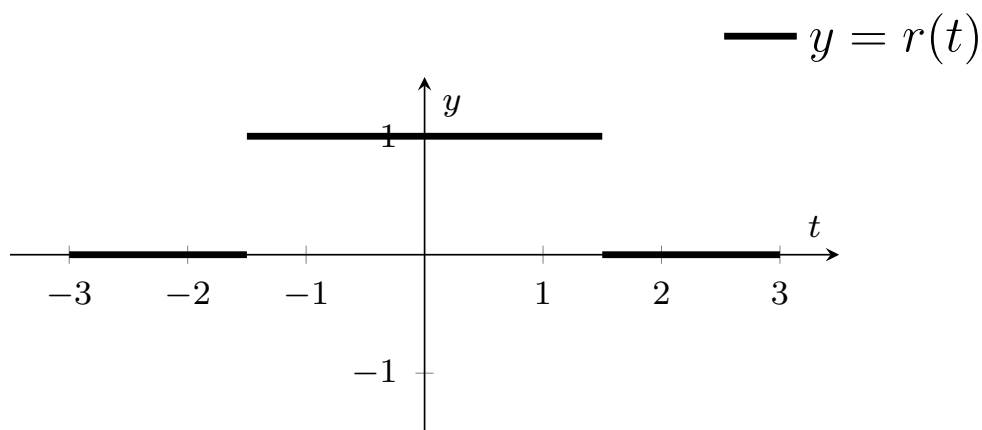
a možemo je zapisati i pomoću Heavisideove funkcije na sljedeći način

$$r(t) = u(t + a) - u(t - a), \quad (5.14)$$

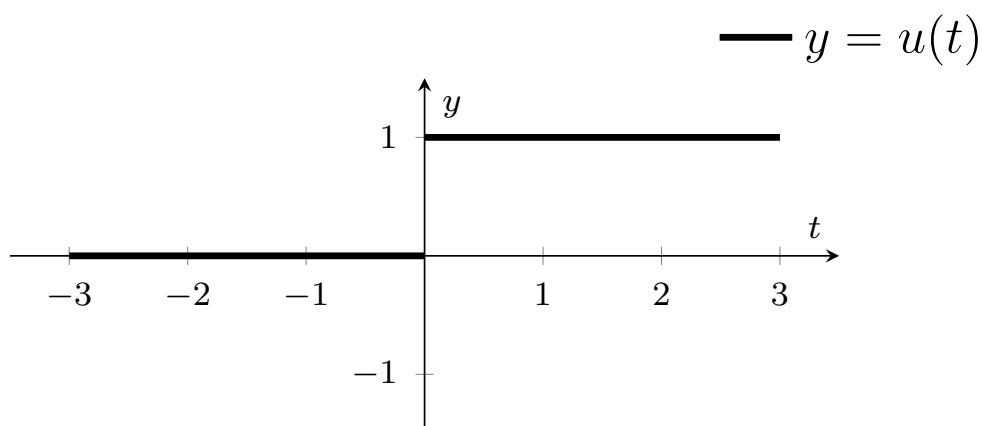
pri čemu je

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}. \quad (5.15)$$

Na iduće dvije slike prikazane su pravokutna i Heavisideova funkcija.



Slika 5.2. Grafički prikaz pravokutne funkcije  $r(t)$  za  $a = 1.5$



Slika 5.3. Grafički prikaz Heavisideove funkcije

Kako bi izveli Hilbertovu transformaciju pravokutne funkcije koristiti ćemo vezu Heavisideove funkcije i Diracove delta funkcije koja je iskazana sljedećom lemom.



**Lema 5.2.** *Vrijedi*

$$u'(t) = \delta(t). \quad (5.16)$$

*Dokaz.* Upotrijebiti ćemo Laplaceovu transformaciju i teorem o slici derivacije, pa slijedi

$$\mathcal{L}\{u'(t)\} = -u(0) + s\mathcal{L}\{u(t)\}. \quad (5.17)$$

Znamo da  $\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$  te onda izraz poprima oblik

$$\mathcal{L}\{u'(t)\} = \frac{s}{s}, \quad (5.18)$$

odnosno

$$\mathcal{L}\{u'(t)\} = 1. \quad (5.19)$$

Primjenom izraza  $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$  dobivamo

$$\mathcal{L}\{u'(t)\} = \mathcal{L}\{\delta(t)\}, \quad (5.20)$$

iz čega slijedi

$$u'(t) = \delta(t), \quad (5.21)$$

čime smo dobili početnu tvrdnju.  $\square$

Sada možemo izvesti Hilbertovu transformaciju pravokutne funkcije.

**Propozicija 5.2.** *Vrijedi*

$$\mathcal{H}\{r(t)\} = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right|. \quad (5.22)$$

*Dokaz.* Polazimo od zapisa pravokutne funkcije pomoću Heavisideove funkcije

$$r(t) = u(t+a) - u(t-a). \quad (5.23)$$

Deriviramo li prethodni izraz, na temelju Leme 5.2 slijedi

$$r'(t) = \delta(t+a) - \delta(t-a). \quad (5.24)$$

Primjenimo li Hilbertovu transformaciju, a znamo da je  $\mathcal{H}\{\delta(t)\} = \frac{1}{\pi x}$  imamo

$$\mathcal{H}\{r'(t)\} = \frac{1}{\pi(x+a)} - \frac{1}{\pi(x-a)}, \quad (5.25)$$

odnosno iz svojstva  $\mathcal{H}\{f'(t)\} = \frac{d}{dx} f_H(x)$ , koje će biti izvedeno u 7. poglavlju dobivamo

$$\frac{d}{dx} \mathcal{H}\{r(t)\} = \frac{1}{\pi(x+a)} - \frac{1}{\pi(x-a)}. \quad (5.26)$$

Da bi nestala derivacija na lijevoj strani integriramo cijelu jednadžbu, pa možemo zapisati

$$\mathcal{H}\{r(t)\} = \int \frac{1}{\pi(x+a)} dx - \int \frac{1}{\pi(x-a)} dx. \quad (5.27)$$

Rješimo li integrale slijedi

$$\mathcal{H}\{r(t)\} = \frac{1}{\pi} \ln|x+a| - \frac{1}{\pi} \ln|x-a|, \quad (5.28)$$

odnosno

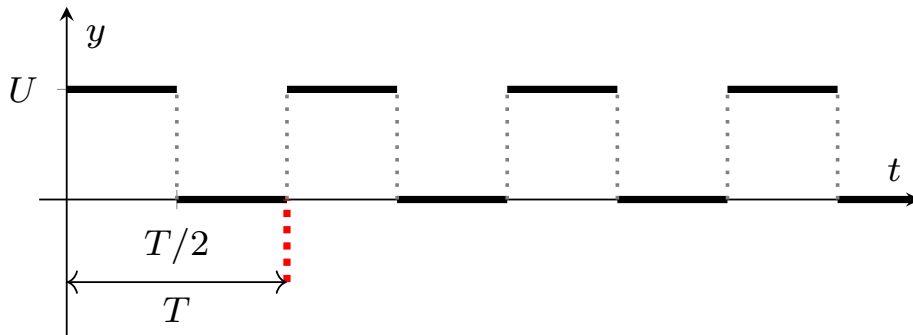
$$\mathcal{H}\{r(t)\} = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right|, \quad (5.29)$$

te smo dokaz priveli kraju.

□

## 6. Hilbertova transformacija periodične funkcije

Periodične funkcije imaju mnoge primjene u teoriji i praksi procesiranja signala. Tako je na sljedećoj slici prikazan jedan važan primjer periodične funkcije kojom se modelira satni signal perioda  $T$  i intenziteta  $U$ .



Slika 6.1. Grafički prikaz funkcije kojom se modelira satni signal

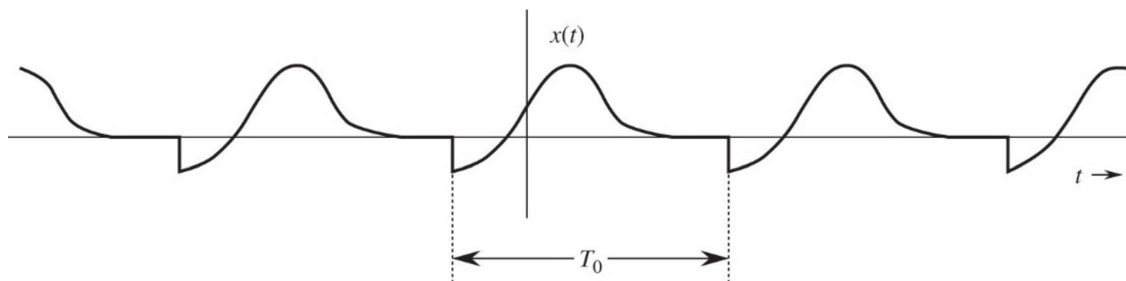
U ovom poglavlju obradit ćemo Hilbertovu transformaciju periodičkih funkcija. Za početak ćemo se prisjetiti matematičke definicije periodične funkcije.

**Definicija 6.1.** Ako je  $u_p(t)$  realna periodična funkcija, za nju vrijedi

$$u_p(t + nT) = u_p(t), \quad (6.1)$$

gdje je  $T$  osnovni period signala  $u_p(t)$ , a  $n$  neki cijeli broj.

Primjer periodične funkcije možemo pogledati na sljedećoj slici, pri čemu je  $x(t) = u_p(t)$  te  $T = T_0$ .



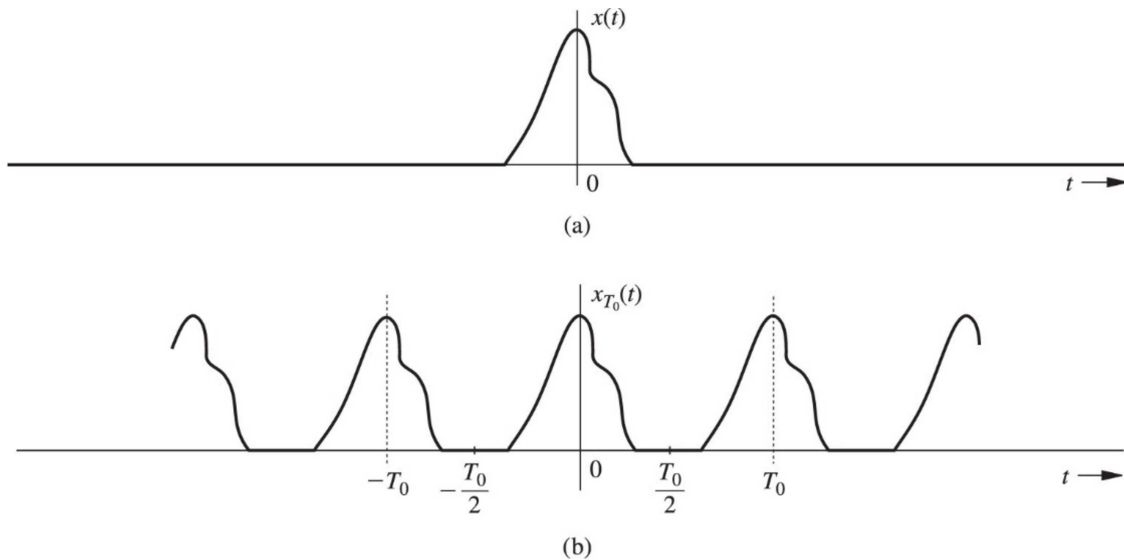
Slika 6.2. Grafički prikaz periodične funkcije, Izvor: [7]

Periodičnu funkciju  $u_p(t)$  možemo prikazati pomoću neperiodične funkcije  $u(t)$  na sljedeći način

$$u_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(t - nT), \quad (6.2)$$

te onda  $u(t)$  nazivamo generirajućom funkcijom periodične funkcije  $u_p(t)$ , koja je na određenom intervalu jednaka  $u_p(t)$ , a na ostalim dijelovima nula. Za tako definiranu periodičnu funkciju odrediti ćemo Hilbertovu transformaciju.

Veza periodične funkcije i njezine generirajuće funkcije dodatno je ilustrirana na sljedećoj slici.



Slika 6.3. Grafički prikaz periodične funkcije pod b i njezine generirajuće funkcije pod a, te vrijedi  $x_{T_0}(t) = u_p(t)$  i  $x(t) = u(t)$ , Izvor: [8]

Sljedeća propozicija govori o Hilbertovoj transformaciji periodične funkcije.

**Propozicija 6.1.** Neka je  $u_p(t)$  periodična funkcija te neka je  $u_T(t)$  njena generirajuća funkcija, tj. neka je

$$u_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_T(t - nT). \quad (6.3)$$

Tada je

$$v_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_T(t - nT), \quad (6.4)$$

pri čemu je  $\mathcal{H}\{u_p(t)\} = v_p(t)$ .

*Dokaz.* Zbog linearnosti Hilbertove transformacije slijedi

$$v_p(t) = \mathcal{H}\{u_p(t)\} = \mathcal{H}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_T(t - nT)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}\{u_T(t - nT)\}. \quad (6.5)$$

Funkciju  $v_p(t)$  možemo zapisati pomoću njezine generirajuće funkcije  $v_T(t)$ , za koju vrijedi

$$v_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}\{u_T(t - kT)\}. \quad (6.6)$$

Primjetimo da  $\mathcal{H}\{u_T(t)\}$  nije jednak  $v_T(t)$ , budući da Hilbertova transformacija funkcije definirane na ograničenom intervalu ne mora ostati ograničena na tom intervalu. Konačno dobivamo

$$v_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_T(t - nT), \quad (6.7)$$

čime smo došli do željenog rezultata koristeći se dvostrukom sumacijom, prvom za definiciju funkcije  $v_T(t)$ , a drugom za definiciju funkcije  $v_p(t)$ .  $\square$

Pokažimo sada kako se koristi Hilbertova transformacija periodične funkcije kroz sljedeći primjer.

**Primjer 6.1.** *Razmotrimo periodični slijed delta impulsa, odnosno periodičan signal dobro poznat u teoriji uzorkovanja*

$$u_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (6.8)$$

Generirajuća funkcija u ovom primjeru je  $u_T(t) = \delta(t)$ , a iz prethodnog poglavlja znamo da je  $\mathcal{H}\{\delta(t)\} = \frac{1}{\pi t}$ , pa slijedi

$$v_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(t - kT)}. \quad (6.9)$$

Prema proceduri opisanoj u [9] izraz (6.9) poprima sljedeći oblik:

$$v_T(t) = \frac{1}{T} \cot(\pi t/T). \quad (6.10)$$

Konačno, možemo odrediti Hilbertovu transformaciju niza delta impulsa

$$\mathcal{H}\{u_p(t)\} = v_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \cot[\pi(t/T - n)]. \quad (6.11)$$

## 7. Osnovna svojstva Hilbertove transformacije

U nadolazećem poglavlju se bavimo osnovnim svojstvima Hilbertove transformacije, koja nam znatno pojednostavljuje kompleksnije matematičke izračune.

Prvo svojstvo govori nam o invarijantnosti Hilbertove transformacije u odnosu na pomake. Drugim riječima, ako originalnu funkciju pomaknemo za  $a$ , za istu vrijednost pomaknuti ćemo i njenu Hilbertovu transformaciju.

**Teorem 7.1.** *Neka je  $\mathcal{H}\{f(t)\} = f_H(x)$  Hilbertova transformacija funkcije  $f(t)$  te neka je  $a \in \mathbb{R}$  proizvoljna konstanta. Tada vrijedi:*

$$\mathcal{H}\{f(t+a)\} = f_H(x+a). \quad (7.1)$$

*Dokaz.* Po definiciji Hilbertove transformacije slijedi

$$\mathcal{H}\{f(t+a)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t+a)}{t-x} dt. \quad (7.2)$$

Uvrštavanjem supstitucije  $u = t+a$ ,  $du = dt$  dobivamo

$$\mathcal{H}\{f(t+a)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{u-(x+a)} du. \quad (7.3)$$

Možemo uočiti definiciju Hilbertove transformacije te imamo

$$\mathcal{H}\{f(t+a)\} = f_H(x+a), \quad (7.4)$$

čime smo dobili traženu tvrdnju. □

Sljedeće svojstvo pokazuje kako se Hilbertova transformacija ponaša u odnosu na skaliranje nezavisne varijable.

**Teorem 7.2.** *Neka je  $\mathcal{H}\{f(t)\} = f_H(x)$  Hilbertova transformacija funkcije  $f(t)$  te neka je  $a \in \mathbb{R}$  proizvoljna konstanta. Tada vrijedi:*

$$\mathcal{H}\{f(at)\} = f_H(ax). \quad (7.5)$$

*Dokaz.* Primjenjujemo definiciju Hilbertove transformacije na zadanu funkciju i dobivamo

$$\mathcal{H}\{f(at)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(at)}{t-x} dt. \quad (7.6)$$

Koristimo li supstituciju  $u = at$ ,  $du = a dt$ , za  $a > 0$  slijedi

$$\mathcal{H}\{f(at)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u) \frac{du}{a}}{\frac{u-ax}{a}}, \quad (7.7)$$

odnosno

$$\mathcal{H}\{f(at)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u) du}{u - ax}. \quad (7.8)$$

Prepoznavamo definiciju Hilbertove transformacije te dolazimo do konačnog rješenja

$$\mathcal{H}\{f(at)\} = f_H(ax), \quad (7.9)$$

čime je dokaz završen.  $\square$

U idućem teoremu pokazujemo kako se Hilbertova transformacija ponaša u odnosu na zrcaljenje nezavisne varijable.

**Teorem 7.3.** *Neka je  $\mathcal{H}\{f(t)\} = f_H(x)$  Hilbertova transformacija funkcije  $f(t)$  te neka je  $a \in \mathbb{R}$  proizvoljna konstanta. Tada vrijedi:*

$$\mathcal{H}\{f(-at)\} = -f_H(-ax). \quad (7.10)$$

*Ovo svojstvo dokazujemo na gotovo identičan način kao prethodno.*

*Dokaz.* Kao i kod prethodnih svojstava polazimo od definicije same Hilbertove transformacije

$$\mathcal{H}\{f(-at)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(-at)}{t - x} dt. \quad (7.11)$$

Upotrijebiti ćemo supstituciju  $u = -at$ ,  $du = -a dt$ , pri čemu treba naglasiti da za razliku od prethodnih primjera, mijenjaju nam se granice integrala (kada ih uvrstimo u supstituciju) pa imamo

$$\mathcal{H}\{f(-at)\} = \frac{1}{\pi} \int_{\infty}^{-\infty} \frac{f(u) \frac{du}{-a}}{\frac{-u-ax}{a}}, \quad (7.12)$$

odnosno pojednostavimo li

$$\mathcal{H}\{f(-at)\} = \frac{1}{\pi} \int_{\infty}^{-\infty} \frac{f(u) du}{u + ax}. \quad (7.13)$$

Primjenom jednakosti koja proizlazi iz pravila integriranja

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt \quad (7.14)$$

slijedi

$$\mathcal{H}\{f(-at)\} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)du}{u+ax}, \quad (7.15)$$

odnosno

$$\mathcal{H}\{f(-at)\} = -f_H(-ax), \quad (7.16)$$

čime smo dokaz priveli kraju.  $\square$

Idući teorem pokazuje kako Hilbertova transformacija djeluje na derivaciju.

**Teorem 7.4.** *Neka je  $\mathcal{H}\{f(t)\} = f_H(x)$  Hilbertova transformacija funkcije  $f(t)$  te neka je  $a \in \mathbb{R}$  proizvoljna konstanta. Tada vrijedi:*

$$\mathcal{H}\{f'(t)\} = \frac{d}{dx} f_H(x). \quad (7.17)$$

*Dokaz.* Polazimo od definicije Hilbertove transformacije pa imamo

$$\mathcal{H}\{f'(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(t)}{t-x} dt. \quad (7.18)$$

Primjenjujemo metodu parcijalne inetgracije za rješavanje integrala pri čemu je  $u = \frac{1}{\pi(t-x)}$ , te  $dv = f'(t)dt$  i dobivamo

$$\mathcal{H}\{f'(t)\} = \frac{f(t)}{\pi(t-x)} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^2} dt. \quad (7.19)$$

Prvi dio jednadžbe nestane zbog svojstva funkcije u teoremu o egzistenciji, a ako bolje pogledamo drugi dio jednadžbe riječ je o derivaciji Hilbertove transformacije funkcije  $f(t)$  pa slijedi

$$\mathcal{H}\{f'(t)\} = \frac{d}{dx} f_H(x), \quad (7.20)$$

čime je dokaz priveden kraju.  $\square$

U posljednjem svojstvu bavimo se transformacijom funkcije  $t \mapsto tf(t)$ .

**Teorem 7.5.** *Neka je  $\mathcal{H}\{f(t)\} = f_H(x)$  Hilbertova transformacija funkcije  $f(t)$  te neka je  $a \in \mathbb{R}$  proizvoljna konstanta. Tada vrijedi:*

$$\mathcal{H}\{tf(t)\} = xf_H(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt. \quad (7.21)$$

*Dokaz.* Po definiciji Hilbertove transformacije imamo

$$\mathcal{H}\{tf(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{tf(t)}{t-x} dt. \quad (7.22)$$



Iskoristimo li jednakost  $t - x + x = t$ , dobivamo

$$\mathcal{H}\{tf(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-x+x)f(t)}{t-x} dt, \quad (7.23)$$

odnosno

$$\mathcal{H}\{tf(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-x)f(t) + xf(t)}{t-x} dt. \quad (7.24)$$

Razdvojimo li na dva integrala slijedi

$$\mathcal{H}\{tf(t)\} = x \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt. \quad (7.25)$$

Možemo uočiti da je u prvom djelu jednadžbe riječ o definiciji Hilbertove transformacije pa konačno imamo

$$\mathcal{H}\{tf(t)\} = xf_H(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt, \quad (7.26)$$

čime smo dokazali početnu tvrdnju. □

## 8. Primjena Hilbertove transformacije u detekciji kvara pri radu induksijskih strojeva

Kroz ovo poglavlje ćemo razmotriti mogućnost detekcije kvara u rotoru induksijskog stroja pomoću spektralne analize struja statora, što nam je važno jer se numerička metoda u tom istraživanju temelji upravo na Hilbertovoj transformaciji, čime se unaprjeđuje otkrivanje kvarova u električnim strojevima. Ovo poglavlje se temelji na izvoru [10].

Prije svega treba napomenuti da se induksijski stroj sastoji od djela koji rotira, odnosno rotora te se na njega električna energija prenosi indukcijom, točnije utjecajem okretnog magnetskog polja koje stvaraju struje statora, mirujućeg djela stroja u kojem se vrti rotor određenom brzinom. Na taj se način dovodi energija ka rotoru ili preuzima energija od njega te pretvara u neki drugi oblik.

Za induksijski stroj je važno napomenuti, da mora postojati razlika u brzini vrtnje rotora od brzine vrtnje okretnog magnetskog polja koje, kao što je rečeno, stvara stator jer samo u tom slučaju će postojati uvjeti za elektromehaničku pretvorbu, odnosno tek tada će se moći razviti moment koji će ubrzavati rotor.

Pojednostavljeno, princip rada induksijskog stroja zasniva se ne presijecanju vodiča rotora od strane okretnog magnetskog polja, na taj način se inducira napon koji potjera struju kroz rotorski namot. Stvorena struja u međudjelovanju s okretnim poljem stvara tangencijalnu silu koja djeluje na rotor, odnosno moment koji ga ubrzava na brzinu koja je bliska sinkronoj brzini (brzini okretnog magnetskog polja).

Svi dijelovi induksijskog stroja prikazani su na sljedećoj slici.



Slika 8.1. Dijelovi induksijskog stroja (1 - rotor, 2 - stator, 3 - kućište, 4 - kutija za priključak vodiča, 5 - ventilator, 6 - kućište ležaja), Izvor: [10]

Postoje dvije vrste induksijskih strojeva koje se razlikuju po građi samog rotora, pa tako imamo induksijske strojeve s kaveznom rotorom i klizno-kolutnim rotorom. Razlika te dvije vrste induksijskih strojeva je što kod klizno-kolutnog se može dodavati vanjske otpornike u rotorski krug, a

time se utječe na momentnu karakteristiku samog stroja i mijenjaju električne prilike u stroju, dok kavezni nema tu mogućnost.

Indukcijski stroj je veoma pouzdan, stoga se koristi u svim vrstama elektromotornih pogona. Upravo zbog važnosti indukcijskog stroja i njegove česte primjene odlučili smo opisati primjenu Hilbertove transformacije kod otkrivanja kvarova na njemu.

Otkrivanje kvara u indukcijskom stroju temelji se na frekvencijskoj analizi signala, pri čemu se najčešće primjenjuje Fourierova transformacija struje koju apsorbira stroj. Nakon toga se uspoređuju dobivene amplitude s amplitudama kada je stroj funkcionalan. Postojanje razlika u amplitudama sugerira prisustvo abnormalnosti u radu.

Na sljedećoj je slici prikazan jedan mogući kvar indukcijskog stroja.



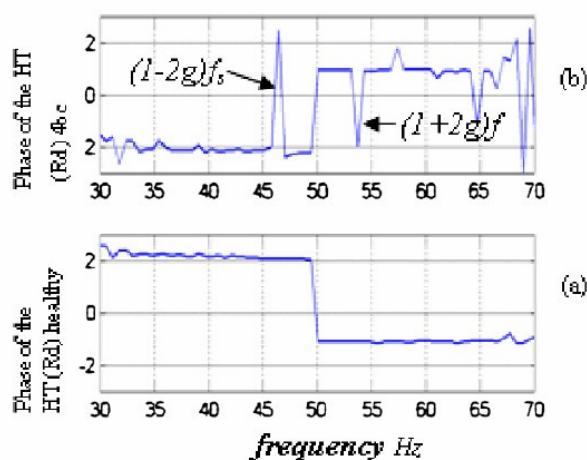
*Slika 8.2. Primjer kvara stroja (slomljene šipke rotora indukcijskog stroja), Izvor: [10]*

Frekvencijsku analizu rada indukcijskog stroja moguće je unaprijediti korištenjem informacija koje dobivamo primjenom Hilbertove transformacije na amplitudni spektar struje statora.

Pokušajmo pobliže objasniti o čemu se tu točno radi. Naime, Fourierova transformacija realnog signala je kompleksno-simetrična, što implicira da su sadržaji na negativnim frekvencijama redundantni u odnosu na pozitivne frekvencije. Uklanjanjem tih redundantnih negativnih frekvencija iz Fourierove transformacije dobiva se analitički signal. Analitički signal ima kompleksne vrijednosti, ali će njegov spektar biti jednostran. Na taj je način sačuvan spektralni sadržaj izvornog signala, a ublažavaju se moguće greške nastale zbog postojanja negativnih i pozitivnih komponenti frekvencije. Budući da je spektralni sadržaj sačuvan u analitičkom signalu, ispada da je realni dio analitičkog signala u vremenskoj domeni zapravo sam izvorni signal. Stoga se postavlja pitanje koju funkciju uzeti kao prateći imaginarni dio u rezultirajućem analitičkom signalu? Pokazuje se da je Hilbertova transformacija povoljan prateći imaginarni dio, u smislu postojanja dobrih matematičkih svojstava.

U ovom konkretnom slučaju, umjesto da radimo izravno na struji statora koristimo modul Fourierove transformacije struje statora, na koji primjenjujemo Hilbertovu transformaciju, a rezultirajući signal će biti izražen u frekvencijskoj domeni. Posljedično tome, na temelju grafova faze analitičkog signala dobivenih izračunavanjem Hilbertove transformacije spektralnog modula struje

statora, možemo zaključiti je li rotor električnog stroja ispravan ili ne. Točnije, kvar prepoznajemo po faznim skokovima, odnosno naglim promjenama faze na određenim frekvencijama, takozvanim frekvencijama kvara (što je kvar veći skokovi su veći), što možemo pogledati na sljedećoj slici.



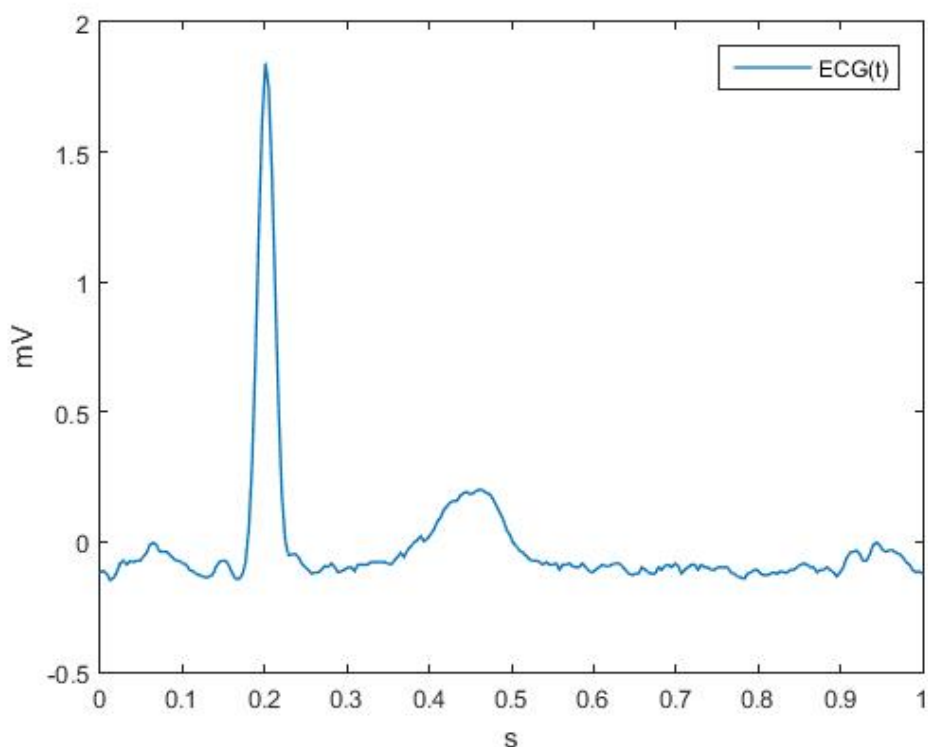
Slika 8.3. Primjer grafa s ispravnim (druga slika) i neispravnim rotorom (prva slika), Izvor: [10], os  $x$  je frekvencija, os  $y$  je faza Hilbertove transformacije ispravnog (druga slika) i neispravnog motora (prva slika)

Učinkovitost ove metode dokazali su eksperimentalni rezultati provedeni na ispitnom stolu.

## 9. Primjena Hilbertove transformacije u medicini

U području medicine, jedan od najvažnijih i najčešće korištenih alata je elektrokardiogram, odnosno EKG. U ovom poglavlju ćemo razmotriti primjenu Hilbertove transformacije pri interpretaciji EKG-a, na temelju njezinog bliskog odnosa s analitičkim signalima koji su opisani u prethodnom poglavlju. Ovo poglavlje je temeljeno na izvoru [11].

Prije svega, EKG je snimka električne aktivnosti srca osobe u vremenu, te je vrlo koristan alat pri otkrivanju srčanih bolesti i nepravilnosti kao što je aritmija. Srce kuca na periodičan način, stoga taj snimak ima jasan valni oblik. Temeljni zadatak pri radu s EKG signalima je zapravo lociranje i ekstrahiranje tako zvanog QRS kompleksa, koji predstavlja depolarizaciju desne i lijeve klijetke srca. QRS kompleks sastoji se od Q, R, i S vala, koji se javljaju brzo jedan nakon drugog, stoga se promatraju kao jedan događaj. Promatranjem QRS kompleksa mogu se otkriti mnoge srčane mane. Na primjer, ako QRS kompleks ima predugo trajanje, odnosno jako je širok to može sugerirati na probleme s provodnim sustavom, dok previsoka amplituda QRS kompleksa može upućivati na hipertrofiju lijeve klijetke. Na sljedećoj slici možemo pogledati dio EKG signala,  $EKG(t)$ , gdje visoki vrh na grafu predstavlja QRS kompleks.



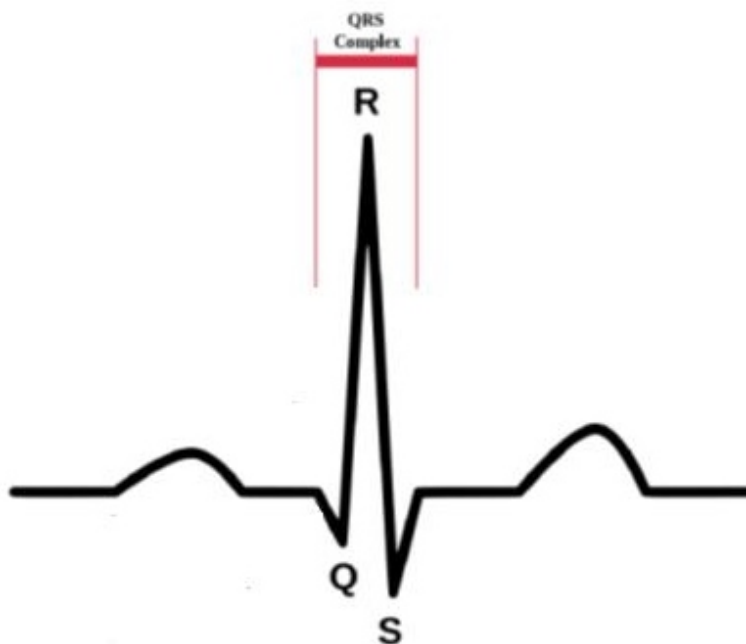
Slika 9.1. Graf  $EKG(t)$ , Izvor: [11]

Mi ćemo određivati Hilbertovu transformaciju QRS kompleksa pomoću koje definiramo analitički signal na temelju kojeg se donose zaključci o zdravlju ljudskog srca, te nam drugi komplici-

raniji matematički proračuni neće biti potrebni što je zapravo i prednost ove veoma važne metode korištene u području medicine.

### 9.1. Hilbertova transformacija QRS kompleksa

QRS kompleks svojim izgledom podsjeća na deformirani sinusni val, što nam može koristiti u njegovoj analizi pomoću Hilbertove transformacije i analitičkih signala. Točan položaj i izgled QRS kompleksa u EKG signalu možemo pogledati na priloženoj slici.



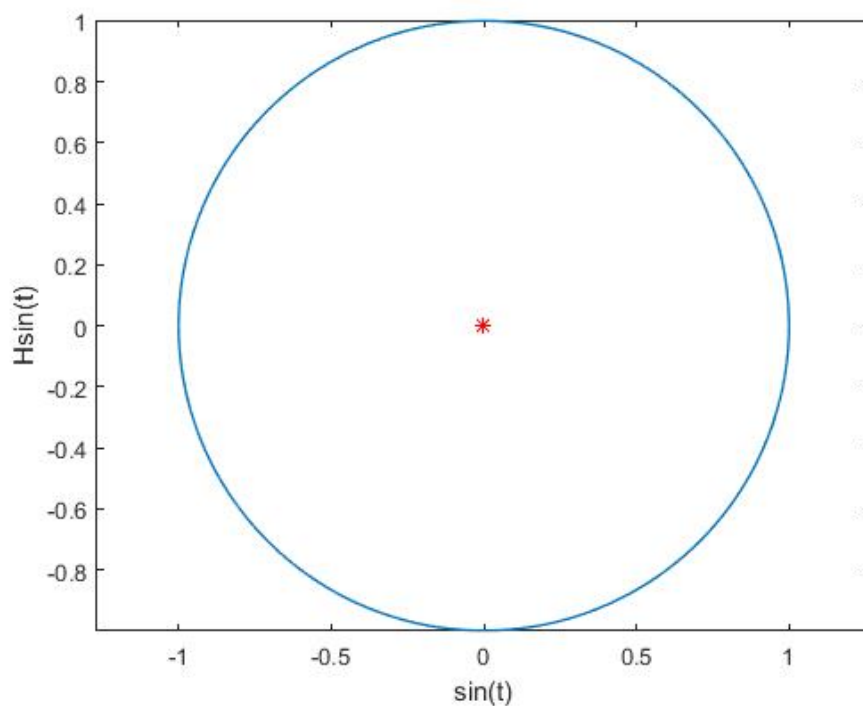
Slika 9.2. Položaj QRS kompleksa u EKG signalu, Izvor: [11]

Kao što smo već rekli, analitički signal predstavlja kompleksnu funkciju u ovisnosti o vremenu, čiji je imaginarni dio Hilbertova transformacija njezinog realnog djela.

Kako QRS kompleks podsjeća na deformirani sinusni val možemo pretpostaviti da proučavamo signal definiran s  $x(t) = \sin(t)$ . Kako je  $\mathcal{H}\{\sin(t)\} = -\cos(t)$ , što smo dokazali u 4. poglavlju, možemo promatrati analitički signal oblika

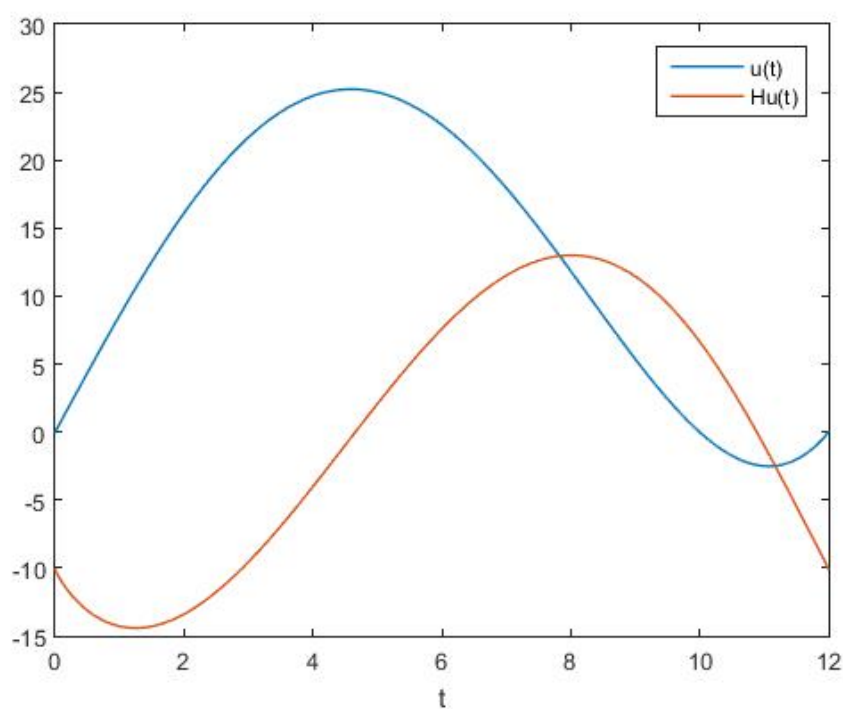
$$z(t) = \sin(t) - i \cos(t). \quad (9.1)$$

Dobiveni analitički signal u kompleksnoj se ravnini može prikazati kao kružnica, što vidimo na sljedećoj slici. Za očekivati je da će se svaki i realni analitički signal EKG-a tada ponašati slično, odnosno da će u kompleksnoj ravnini formirati zatvorenu krivulju oko ishodišta.



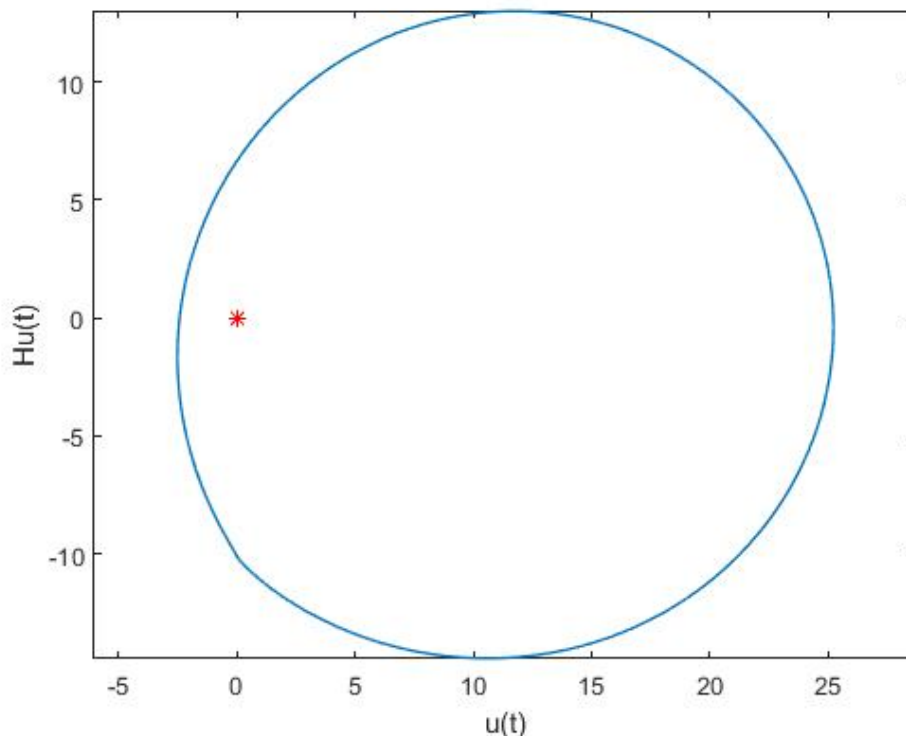
Slika 9.3. Grafički prikaz analitičkog signala  $z(t)$  u kompleksnoj ravnini, Izvor: [11]

Međutim, QRS kompleks odgovara deformiranom sinus, iz tog razloga da bi ga bolje opisali modificiramo sinusni val tako što ga deformiramo, a grafički prikaz deformiranog sinusa i njegove Hilbertove transformacije možemo vidjeti na sljedećoj slici.



Slika 9.4. Grafički prikaz deformirane funkcije sinus označene s  $u(t)$  i njezine Hilbertove transformacije u ovisnosti u vremenu, Izvor: [11]

Deformiranjem sinusnog signala, utječemo i na analitički signal  $z(t)$ , ali on u kompleksnoj ravnini i dalje odgovara zatvorenoj krivulji, odnosno svaki val koji nalikuje na sinusnu funkciju, manje ili više deformiran u kompleksnoj ravnini će tvoriti zatvorenu krivulju.



Slika 9.5. Grafički prikaz analitičkog signala sastavljenog od deformirane funkcije sinus i njezine Hilbertove transformacije, Izvor: [11]

Važno je naglasiti da sve vrste sinusnih valova, u slučaju da se prošire na analitičke signale, kako smo gore i objasnili tvore zatvorene petlje u kompleksnoj ravnini. Usporedimo li slike 9.3 i 9.5, možemo primijetiti da se orijentacija grafa deformiranjem sinusnog vala nije promijenila, što nam omogućava da daljnja razmatranja provodimo za jednostavni sinusni val.

Vratimo li se na naš analitički signal

$$z(t) = \sin(t) - i \cos(t), \quad (9.2)$$

jednostavno možemo izračunati

$$z(0) = -i, \quad (9.3)$$

$$z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad (9.4)$$

$$z\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1, \quad (9.5)$$

$$z(2\pi) = -i, \quad (9.6)$$

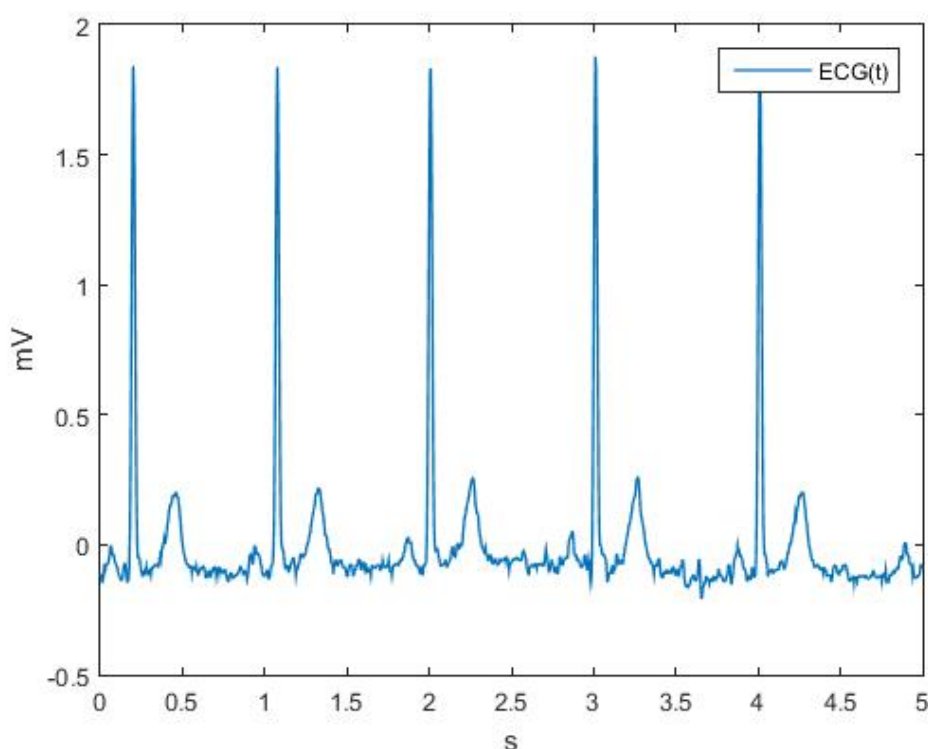
iz čega možemo zaključiti da je orijentacija promatrane zatvorene krivulje u suprotnom smjeru od kazaljke na satu.



Nakon što smo definirali  $EKG(t)$  i QRS kompleks za jedan dio EKG signala, pogledali kako oni izgledaju u ovisnosti o vremenu pa i u kompleksnoj ravnini, sada ćemo se detaljnije posvetiti analizi realnog EKG signala kojeg liječnici pri vršenju kontrola srca prate i na temelju njega donose zaključke o zdravlju srca.

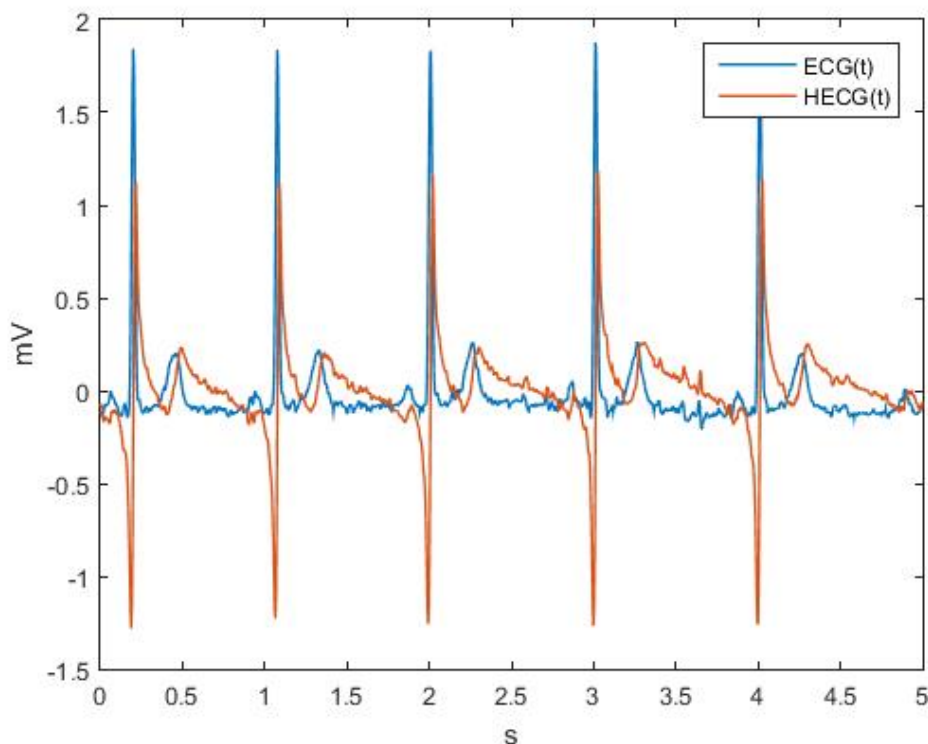
## 9.2. Analiza EKG signala

Do sada smo promatrali dio EKG signala i nastojali uočiti QRS kompleks, no sada možemo smatrati  $EKG(t)$  pravim realnim EKG signalom te na idućem grafu pogledati kako bi on izgledao kada bi promatrali trajanje od pet sekundi.



Slika 9.6. Grafički prikaz  $EKG(t)$  u trajanju od pet sekundi, Izvor: [11]

Vrlo je jednostavno uočiti pet prepoznatljivih istaknutih vrhova, od kojih svaki predstavlja jedan QRS kompleks. Numerički je moguće izračunati Hilbertovu transformaciju takvog signala, no mi nećemo ulaziti u detaljno dokazivanje pomoću jednadžbi, već nas kvalitativno zanima kako izgleda Hilbertova transformacija takvog signala, što je prikazano na sljedećoj slici.



Slika 9.7. Grafički prikaz  $EKG(t)$  i  $\mathcal{H}\{EKG(t)\}$  u trajanju od pet sekundi, Izvor: [11]

Na temelju grafa uočavamo da se za vrijeme velikih vrhova signala  $EKG(t)$ , njegova Hilbertova transformacija ponaša slično funkciji

$$t \mapsto \frac{1}{t}, \quad (9.7)$$

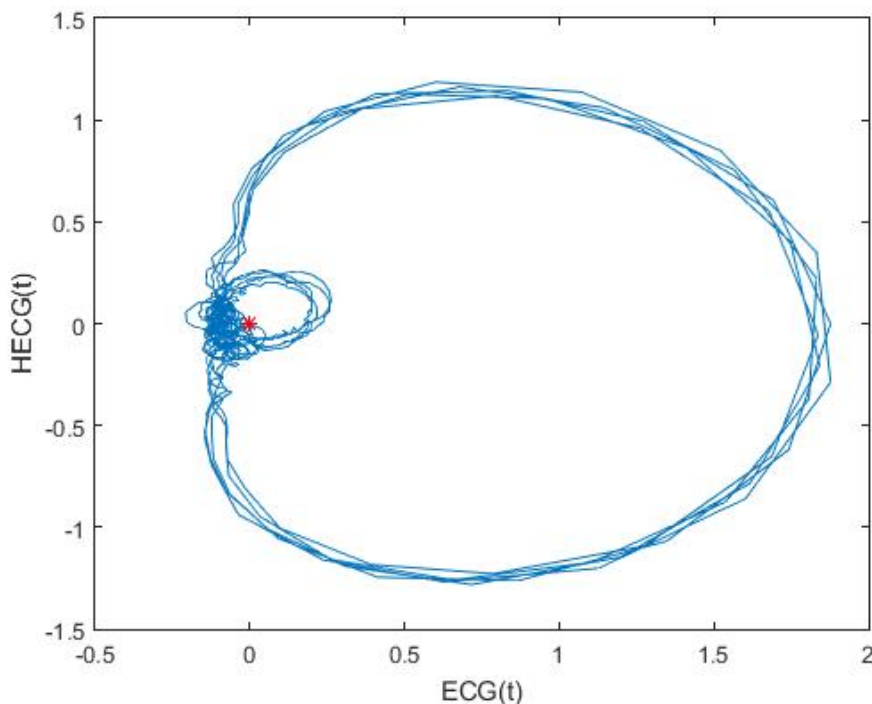
što možemo i teorijski objasniti. Naime, veliki vrhovi u signalu  $EKG(t)$  podsjećaju na delta funkciju čiju smo Hilbertovu transformaciju definirali u 5. poglavlju, te znamo da je

$$\mathcal{H}\{\delta(t)\} = \frac{1}{\pi t}, \quad (9.8)$$

i upravo to je objašnjenje zašto Hilbertova transformacija našeg EKG signala u trenucima kada se javljaju istaknuti vrhovi signala  $EKG(t)$  odgovara spomenutoj funkciji. Napomenimo da su nas na sličnost s danom funkcijom asociirali vertikalni pravci na slici koji sugeriraju postojanje vertikalnih asimptota karakterističnih za hiperbolu zadanu jednačbom  $xy = 1$ .

Nadalje, kao što smo već rekli QRS kompleks nalikuje na deformirani sinusni val, no tada smo ga promatrali za dio EKG signala, iz tog razloga se postavlja pitanje da li to vrijedi kada promatramo cijeli signal  $EKG(t)$ .

Signal  $EKG(t)$  proširit ćemo na analitički signal kao što je to opisano u potpoglavlju 9.1. te to prikazati u kompleksnoj domeni. Dobiveni prikaz vidimo na sljedećoj slici.



Slika 9.8. Grafički prikaz analitičkog signala sastavljenog od  $EKG(t)$  i  $\mathcal{H}\{EKG(t)\}$  u ovisnosti o vremenu, Izvor: [11]

Analizom ovog grafičkog prikaza može se izbrojiti pet zatvorenih petlji, od kojih svaka petlja odgovara jednom QRS kompleksu, a znamo da svaki signal koji nalikuje sinusnom valu kada se proširi na analitički signal u kompleksnoj domeni formira zatvorenu petlju. Stoga možemo zaključiti da za cijeli EKG signal možemo QRS kompleks promatrati kao val sličan sinusnom. Time smo definirali vrijedan alat u otkrivanju QRS kompleksa.

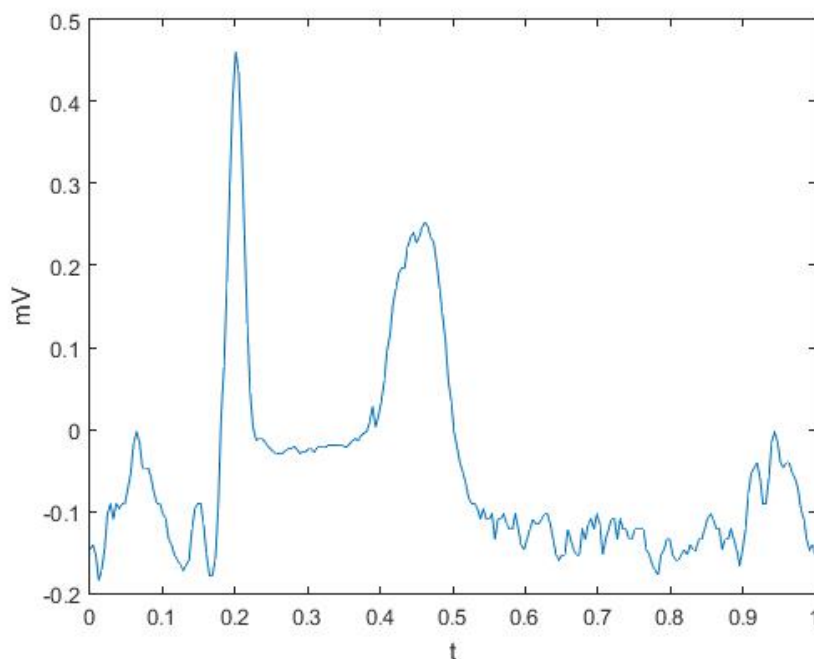
Treba naglasiti da manje kružnice koje se mogu uočiti na slici nisu dio QRS kompleksa, već predstavljaju određene smetnje koje se trebaju ukloniti, a da bi to bilo moguće definira se izraz za QRS kompleks opisan u izvoru [11]. Taj izraz omogućava prikaz čistog QRS kompleksa što nas zapravo jedino i zanima u našem razmatranju EKG signala.

Naime, cilj ovog načina analiziranja EKG signala je lakše otkrivanje QRS kompleksa, a funkcionira tako da najprije proširimo EKG signal na analitički signal koristeći Hilbertovu transformaciju. Tada nam je lako prepoznati QRS kompleks ako znamo da u kompleksnoj domeni odgovara zatvorenoj krivulji koju smo pokazali na prethodnim grafovima. Nakon što ga se prepozna na temelju njegova izgleda donose se zaključci o mogućim problemima i poteškoćama rada ljudskog srca.

### 9.3. Ograničenja metode

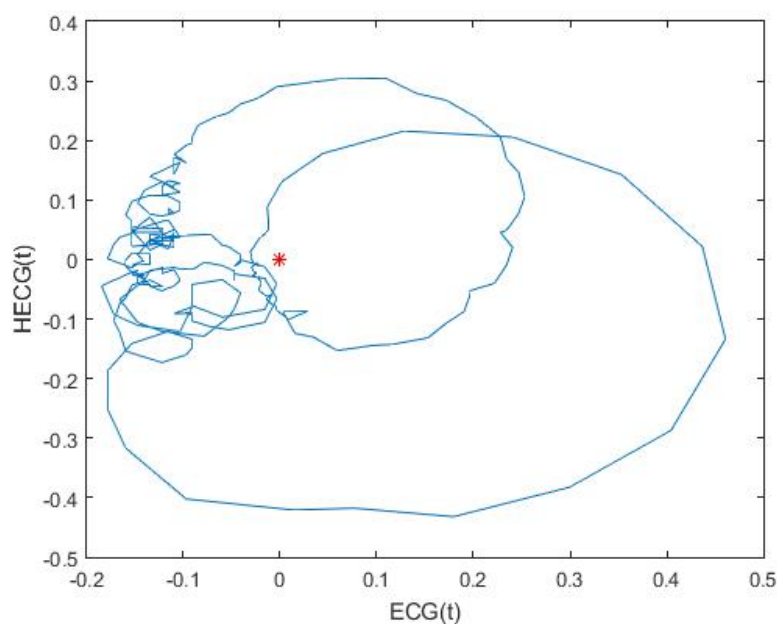
Za kraj, postavlja se pitanja da li ova metoda uvijek funkcionira, točnije možemo li uvijek tako jednostavno razlikovati QRS kompleks od drugih valova prisutnih u EKG signalu, odnosno od

smetnji koje su uvijek prisutne? Na sljedećoj slici možemo vidjeti jedan primjer problematičnog EKG signala kakav se može pojaviti u praksi.



Slika 9.9. Mogući primjer signala  $EKG(t)$  iz stvarnosti, Izvor: [11]

Za razliku od prethodnih primjera visina QRS kompleksa u prikazanom EKG signalu je znatno niža, što će stvarati određene probleme. Prikaz ovog EKG signala u kompleksnoj ravnini dan je na sljedećoj slici.



Slika 9.10. Prikaz analitičkog signala dobivenog iz  $EKG(t)$  sa znatno nižom amplitudom QRS kompleksa, Izvor: [11]

Na grafičkom prikazu više ne postoji jedna glavna prepoznatljiva petlja, već više njih. Posljedično, postoji mogućnost da algoritam ne prepozna QRS kompleks, štoviše da neki drugi vrh protumači kao QRS kompleks, što može dovesti do krive dijagnoze i usmjeriti tijek liječenja srčanog problema u pogrešnom smjeru. Također, može doći do situacije da se ne prepozna nikakva srčana mana i ne krene se u proces liječenja, a samim time se otežava mogućnost samog oporavka.

Predstavljen problem je najveće ograničenje metode analiziranja EKG signala i QRS kompleksa pomoću Hilbertove transformacije i njezine veze s analitičkim signalima.

## 10. Zaključak

U ovom radu obrađena je Hilbertova transformacija kao poseban primjer integralnih transformacija. Ime je dobila po jednom od najpoznatijih matematičara u novijoj povijesti - Davidu Hilbertu te smo prvi dio rada posvetili njegovom liku i djelu. Svakako treba istaknuti da je Hilbertov rad uvelike utjecao na razvoj matematike 20. stoljeća.

U drugom dijelu rada, počevši od općenite definicije integralnih transformacija, objasnili smo definiciju same Hilbertove transformacije. Koristeći se tom definicijom, izveli smo njena temeljna svojstva te odredili Hilbertove transformacije nekih često korištenih funkcija. Tako smo odredili transformacije funkcija sinus i kosinus, transformaciju pravokutne funkcije te Diracove delta funkcije.

Kod svojstava Hilbertove transformacije analizirali smo kako ova transformacija djeluje na pomicanje u vremenskoj domeni, skaliranje i deriviranje, a posebnu pažnju posvetili smo i transformaciji periodične funkcije.

Kao i sve integralne transformacije, tako se i Hilbertova transformacija primjenjuje u raznim problemima inženjerske znanosti, što smo vidjeli na primjeru detektiranja prisutnosti kvara u rotoru indukcijskog stroja. S druge strane, Hilbertova transformacija ima primjene i u području medicine, konkretno pri analizi EKG signala. Time se dokazuje širina primjene Hilbertove transformacije i njena važnost u svakodnevnom životu.

Temelj primjene Hilbertove transformacije leži u formiranju tzv. analitičkog signala koji se formira umjetnim stvaranjem imaginarnog dijela signala koji se definira kao Hilbertova transformacija realnog dijela. Na taj se način izbjegavaju pogreške koje mogu nastati zbog analize negativnih frekvencija kojih u realnom signalu nema. Štoviše, takav pristup omogućava i nove grafičke reprezentacije što smo vidjeli na primjeru EKG signala.

Možemo zaključiti da sve integralne transformacije, pa tako i Hilbertova, znatno pojednostavljuju rješavanje raznih matematičkih i inženjerskih problema. Svakako treba istaknuti i temeljnu razliku u primjeni Hilbertove transformacije u odnosu na standardno korištene transformacije kao što su Laplaceova i Fourierova. Naime, u primjeni Laplaceova transformacija najčešće se koristi kao alat za rješavanje diferencijalnih jednadžbi. Fourierova transformacija temeljni je alat u matematičkoj analizi signala, no kao i Laplaceova transformacija može se koristiti za rješavanje diferencijalnih jednadžbi. Hilbertova transformacija invarijantna je na deriviranje te ona u rješavanju diferencijalnih jednadžbi tako nema neku posebnu primjenu i u kontekstu primjene nalazimo je gotovo isključivo u području analize signala.

## Literatura

- [1] Dražić, I.; "Uvod u kolegij. Laplaceova transformacija", prezentacija, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Rijeka, 26.06.2022.
- [2] "David Hilbert", s Interneta, <https://hr.wikipedia.org/wiki/>, 26.03.2022.
- [3] "Keningzberški mostovi", s Interneta, <https://www.matematika.ba/zadaci-poznatih-matematičara/14-zanimljivi-zadaci-velikih-matematiara/68-keningzberki-mostovi.html>, 15.03.2022.
- [4] "David Hilbert (1862 - 1943) - Biography", s Interneta, <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hilbert/>, 15.04.2022.
- [5] "Hilbert's Problems: 23 and Math", s Interneta, <https://www.simonsfoundation.org/2020/05/06/hilberts-problems-23-and-math/>, 26.3.2022.
- [6] Debnath, L.; Bhatta, D.: "Integral Transforms and Their Applications Second Edition", Taylor and Francis group, The University of Texas-Pan American, New York, 2006.
- [7] Sučić, V.; "Fourierova analiza periodičnih signala", prezentacija, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Rijeka, 22.05.2022.
- [8] Sučić, V.; "Fourierova analiza neperiodičnih signala", prezentacija, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Rijeka, 22.05.2022.
- [9] Stephen, L. H.: "Hilbert Transforms in Signal Processing", The Artech House Signal Processing Library, Norwood, 1996.
- [10] "Application of Hilbert transform to fault detection in electric machines", s Interneta, <https://advancesindifferenceequations.springeropen.com/articles/10.1186/>, 01.04.2022.
- [11] Klingspor, M.: "Hilbert transform: Mathematical theory and applications to signal processing", Matematiska institutionen, Linköpings universitet, 2015.

## Sažetak i ključne riječi

Kroz prvo poglavlje se upoznajemo s Davidom Hilbertom i njegovim najvažnijim postignućima, te uvodimo pojam Hilbertove transformacije. Nadalje, opisujemo njezinu definiciju, primjenjujemo ju na trigonometrijske funkcije sinus i kosinus, na delta i pravokutnu funkciju, a zatim i na periodičnu funkciju. Osim toga, izvodimo i dokazujemo osnovna svojstva Hilbertove transformacije koja se primjenjuju u složenijim izračunima radi njihova pojednostavljenja. Nakon temeljnih svojstava transformacije, kroz zadnja dva poglavlja su objašnjeni primjeri primjene Hilbertove transformacije kod ispitivanja ispravnosti rada indukcijskog stroja i pri analizi EKG signala u medicini.

**Ključne riječi:** Hilbertova transformacija, integralna transformacija, indukcijski stroj, EKG signal, QRS kompleks



## Summary and key words

In the first chapter we familiarise ourselves with David Hilbert and his main achievements and introduce the concept of Hilbertian transformation. We also describe the definition of the Hilbert transform, apply it to the trigonometric functions sine and cosine, to the delta and rectangular functions, and then to the periodic function. In addition, the basic properties of the Hilbert transform are proved and derived, which are applied to simplify more complex calculations. After the basic properties, the last two chapters explain examples of their application in testing the correct operation of an induction machine and in analysing ECG signals in medicine.

**Keywords:** Hilbert transformation, integral transformation, induction machine, ECG signal, QRS complex