Primjena Fourierove transformacije kod rješavanja jednadžbe provođenja topline

Pavelić, Marin

Undergraduate thesis / Završni rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:190:407766

Rights / Prava: Attribution 4.0 International/Imenovanje 4.0 međunarodna

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-06**

Repository / Repozitorij:

Repository of the University of Rijeka, Faculty of Engineering

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

PRIMJENA FOURIEROVE TRANSFORMACIJE KOD RJEŠAVANJA JEDNADŽBE PROVOĐENJA TOPLINE

Rijeka, srpanj, 2022.

Marin Pavelić
JMBAG: 0069083479

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

PRIMJENA FOURIEROVE TRANSFORMACIJE KOD RJEŠAVANJA JEDNADŽBE PROVOĐENJA TOPLINE

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Dražić

Rijeka, srpanj, 2022.

Marin Pavelić
JMBAG: 0069083479

SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET
POVJERENSTVO ZA ZAVRŠNE ISPITE

Rijeka, 18. ožujka 2022.

Zavod: **Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike**
Predmet: **Inženjerska matematika ET**
Grana: **1.01.07 primijenjena matematika i matematičko modeliranje**

ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Marin Pavelić (0069083479)**
Studij: Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Zadatak: **Primjena Fourierove transformacije kod rješavanja jednadžbe provođenja topline // Application of the Fourier transform in the solution of the equation of heat conduction**

Opis zadatka:

U prvom dijelu radu potrebno je izvesti i opisati jednadžbu provođenja topline te pripadne inicijalno rubne probleme i objasniti njihovu fizikalnu interpretaciju.
U drugom dijelu rada potrebno je precizno definirati Fourierovu transformaciju te navesti i objasniti njena temeljna svojstva. Zatim je potrebno opisati postupak rješavanja diferencijalnih jednadžbi metodom Fourierove transformacije i pomoću te metode odrediti rješenje jednadžbe provođenja topline s adekvatnim rubnim i početnim uvjetima.
U posljednjem dijelu rada potrebno je opisanu metodu staviti u povijesni kontekst te kontekst primjene u inženjerstvu i elektrotehnici.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Zadatak uručen pristupniku: 21. ožujka 2022.

Mentor:

Doc. dr. sc. Ivan Dražić

Predsjednik povjerenstva za završni ispit:

Prof. dr. sc. Viktor Sučić

IZJAVA

Sukladno članku 8. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku prediplomskih sveučilišnih studija/stručnih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 1. veljače 2020., izjavljujem da sam samostalno izradio završni rad prema zadatku preuzetom dana 05. travnja 2022.

Rijeka, 01. srpnja 2022.

Marin Pavelić

Zahvale:

Od svih ljudi kojima bi se htio zahvaliti za ostvarenje ovog rada, najviše bi se htio zahvaliti svojim roditeljima. Zahvalio bi se svojoj mami, koja, iako nije među nama, znam da me gleda i da je uvijek uz mene te da me podržava i da je ponosna na mene. Zahvalio bi se svom tati koji je bio uz mene cijeli studij i bio čvrsto rame na koje sam se uvijek i na koje se uvijek mogu osloniti, te ovaj rad posvećujem njima. Hvala što ste mi dali sve.

Nadalje bi se zahvalio svojoj djevojci za ljubav, interes, savjete i preporuke, te mnoga čitanja ovoga rada. Hvala što si pretrpljela moja pametovanja.

Na kraju bi se zahvalio svom mentoru doc. dr. sc. Ivanu Dražiću na trudu i strpljenju kroz godinu, savjetima, optimizmu, potpori i na beskonačnim sitnicama koje su pažljivo oblikovale ovaj rad u ono što smo oboje htjeli. Hvala na posvećenom vremenu, znanju i najbitnije, suradnji.

♡

Sadržaj

1. Uvod

Prolaskom električne struje kroz neki vodič dolazi do zagrijavanja vodiča zbog specifičnog otpora vodiča, odnosno dio električne energije se pretvara u toplinsku energiju. Toplina koja se razvija u vodiču se naziva Jouleova[1] toplina te je proporcionalna s kvadratom jakosti električne struje, odnosno s otporom tog vodiča. U ovom radu ćemo pomoću Fourierove analize, točnije Fourierove transformacije riješiti problematiku distribucije topline u beskonačno dugom vodiču u ovisnosti o vremenu, što se modelira pomoću parcijalna diferencijalne jednadžbe.

Fourierovu analizu je osmislio i oblikovao francuski matematičar Jean-Baptiste Joseph Fourier o kome će biti govora na početku rada. Fourierovu analizu ćemo započeti proučavati s Fourierovim redom koji nam služi za reprezentaciju periodičnih funkcija beskonačnom sumom sinusnih i kosinusnih komponenti. U nastavku ćemo objasniti njegovu matematičku i fizikalnu primjenu, te na primjeru periodične pravokutne funkcije prikazati razvoj u Fourierov red i Gibbsov fenomen. Pošto je Fourierov red ograničen na razvoj samo periodičnih funkcija, pod uvjetom da se poštuju Dirichletovi uvjeti, koje ćemo navesti, uvodimo novi alat s kojim analiziramo neperiodične funkcije, a to su Fourierov integral i Fourierova transformacija.

Fourierova transformacija je vrsta integralnih transformacija koja se često upotrebljava u fizici i inženjerstvu u svrhu analize funkcija i signala te rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi što ćemo tek kasnije razmotriti. Izvod s kojim započinjemo treće poglavlje je izvod Fourierove transformacije direktno iz Fourierovog reda. Nadalje ćemo objasniti ukratko što su to integralne transformacije, te u nastavku prikazati Fourierovu transformaciju nekoliko jednostavnih neperiodičnih funkcija poput pravokutne i eksponencijalne funkcije. Primjenom Fourierove transformacije nailazimo na komplicirane izraze čije rješavanje možemo pojednostaviti primjenom svojstva Fourierove transformacije koja su opisana i izvedena u nastavku poglavlja. Nadalje, koristeći neka od navedenih svojstava, izvest ćemo Fourierovu transformaciju Gaussove funkcije koja će nam poslužiti u nastavku.

Na početku četvrtog poglavlja objasnit ćemo pojam parcijalne diferencijalne jednadžbe te njihovu klasifikaciju. Ne postoji jedinstvena metoda rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi već metode ovise o vrsti i tipu jednadžbe. Neki od tipova rješavanja jednadžbi su direktna integracija i separacija varijabli koje ćemo demonstrirati pri rješavanju jednostavnog primjera. U sljedećem dijelu poglavlja ćemo prikazati kako je izvedena parcijalna diferencijalna jednadžba provođenja topline, te fizikalno i matematički opisati toplinski sustav koji proučavamo.

U zadnjem poglavlju, ćemo rješiti jednadžbu provođenja topline u jednoj dimenziji Fourierovom transformacijom te prikazati ovisnost rješenja o početnoj temperaturi tijela, odnosno sustava kojeg proučavamo.

[1]James Prescott Joule (1818. - 1889.), engleski fizičar matematičar i pivar

2. Uvod u Fourierovu analizu

Ljudsko uho mehaničkim putem razdvaja dolazne zvučne valove na njihove sastavne frekvencije iskorištavanjem prirodnih rezonancija, budući da su različiti živčani završeci u našim ušima osjetljivi na različite frekvencije. Sličan princip koristi se i u matematičkoj analizi zvučnih valova, pri čemu se određuju sve frekvencije komponenti vala, a to se može postići metodama koje je osmislio francuski matematičar Jean-Baptiste Joseph Fourier u 18.-om i 19.-om stoljeću. Svakako treba reći da se Fourierova analiza može koristiti i u drugim područjima matematike, primjerice u rješavanju diferencijalnih jednadžbi što je i tema ovoga rada.

2.1. Jean-Baptiste Joseph Fourier

Jean-Baptiste Joseph Fourier rođen je 21. ožujka 1768. godine u Auxerreu, malom selu u Francuskoj, kao deveto dijete u obitelji od dvanaestero djece. Izgubivši majku s ranih 9 godina i oca s 10 godina, kao siroče svoju osnovnu edukaciju započeo je u lokalnom samostanu završivši je kao uzoran učenik. 1780. godine počinje pohađati *École Royale Militaire of Auxerre*, gdje se s ranih 13 godina zainteresirao za matematiku. [?, ?]

Slika 2.1. Jean-Baptiste Joseph Fourier. Izvor: [?]

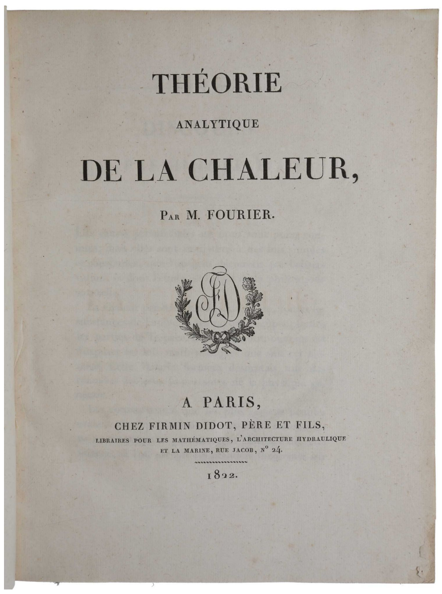
Politička situacija u Francuskoj je u to doba bila složena, zemlja je bila na rubu revolucije te je narod bio željan stvoriti državu bez kraljeva i plemića. Cilj kojeg je Fourier podržavao pridruživši se lokalnom odboru za revoluciju, a ta mu je odluka prilično zakomplicirala život. Braneći svoje stavove 1794. godine, uhićen je i poslan u zatvor. S pogubljenjem najvećeg zagovornika revolucije, takozvane *Vladavine terorom*, *Maximiliena Robespierrea* (1758.-1794.), revolucija je oslabila i izgubila zamah, Fourier biva oslobođen i izabran za studenta u novoj, danas svjetsko poznatoj, školi za obuku srednjoškolskih profesora u samom centru Pariza, *École Normale* kako bi pomogao u edukativnoj obnovi Francuske. [?] Danas je *École Normale* jedan od najboljih i najpoznatijih fakulteta u svijetu koji nudi širok spektar sveučilišnih programa, od umjetnosti, filozofije i lingvistike, do kemijskog inženjerstva, ekonomije, računarstva i prava.

Velika inspiracija u Fourierovom istraživačkom, znanstvenom i matematičkom životu bili su profesori koji su mu predavali, najveća imena u povijesti matematike, matematičari: *Joseph-Louis Lagrange* (1736.-1813.), *Pierre-Simon Laplace* (1749.-1827.), *Gaspard Monge* (1746.-1818.).

Fourier dobiva posao u prestižnoj školi *École Polytechnique* i nakon samo tri godine rada 1797. zamjenjuje *Lagrangea* na poziciji profesora analitike i mehanike. Ova je institucija i nakon dugo godina ostala među najviše rangiranim fakultetima u svijetu, a nudi programe iz matematike, fizike računalnih znanosti i ekonomije. [?]

1798. godine Fourier se pridružuje Napoleonovom pohodu na Egipat kao znanstveni suradnik, te sudjeluje u arheološkim ekspedicijama i pomaže organizirati edukacijske objekte po Kairu. Nakon 3 godine se vraća u Pariz i nastavlja karijeru kao profesor analitike na *École Polytechnique*. Na zahtjev Napoleona, Fourier zauzima administrativnu poziciju na institutu u Grenobleu 1801. godine gdje je, unatoč svojim dužnostima, napisao većinu svojih istraživanja kao i radove na temu teorije o toplini. U njegovu čast, institut je kasnije preimenovan u "*Université Joseph Fourier*". [?]

1815. godine Fourier se vraća u Pariz te je 1817. godine izabran za člana *Académie des Sciences*. U to vrijeme nastavlja svoja istraživanja po kojima je danas u matematici najpoznatiji, a to su rezultati povezani s trigonometrijskim redovima i funkcijama realnih varijabli. [?]



Slika 2.2. Originalno izdanje Fourierove knjige na temu difuzije topline (1822.). Izvor: [?]

Rad koji je izazvao mnoštvo matematičke kontroverznosti je rad o provođenju topline, objavljen 1807. godine pod naslovom *O provođenju topline u čvrstim tijelima*. U tom radu Fourier tvrdi da je tok topline između dvije susjedne molekule proporcionalan razlici njihovih temperatura, te da se valno gibanje molekula može prikazati kao suma više različitih valova. Upravo tu ideju da se valno gibanje može predstaviti kao suma više različitih valova temelj je područja matematike koje danas nazivamo Fourierova analiza, ali i ideja koju su matematičari njegova vremena vrlo teško prihvaćali. Ipak, taj rad mu je 1811. godine donio nagradu na Pariškom znanstvenom institutu. Fourier se aktivno nastavlja baviti matematikom i objavljivati radove sve do svoje tragične smrti 16. svibnja 1830. godine, kada se spotaknuo i pao niz stepenice od svoje kuće. [?]

Kako su Fourierove ideje bile prilično revolucionarne, značajan broj radova znanstvena javnost njegove generacije nije mogla prihvatiti i objavljene su tek iza njegove smrti. Jedna takva ideja je i problem naše svakodnevice, odnosno "Efekt staklenika" (*Effet de serre*). Naime, Fourier je zaključio da bi određeni plinovi u Zemljinoj atmosferi mogli zarobiti sunčevu toplinu umjesto da je zrače natrag u svemir, povećavajući tako površinsku temperaturu Zemlje. Rad je napisan 1824. godine, no ta je tvrdnja dokazana i objašnjena čak 50 godina kasnije Stefan-Boltzmannovim zakonom. [?]

2.2. Fourierov red

Fourierova analiza proizlazi iz ideje da svaku periodičnu funkciju možemo zapisati kao sumu sinusa i kosinusa različitih amplituda, frekvencija i faza. Ta se suma naziva Fourierov red koji se u današnjoj literaturi često objašnjava kao samostalan izraz i ne postavlja se pitanje kako je nastao, još manje, kako je puno naprednija Fourierova transformacija proizašla iz tog reda.

Pri razvoju funkcije u Fourierov red, prvi uvjet koji moramo ispuniti je periodičnost. Neperiodične funkcije definirane na nekom konačnom intervalu također možemo razviti u Fourierov red, ali samo ako ih učinimo periodičnima. Tada proučavani interval postaje period te funkcije i ponavlja se beskonačno puta. Za periodične funkcije vrijedi sljedeće:

Definicija 2.1. *Neka je zadana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodična na intervalu $[-\pi, \pi]$. Reprezentaciju funkcije $f(x)$ danu s*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)], \tag{2.1}$$

nazivamo Fourierov red funkcije $f(x)$, a vrijednosti a_0, a_k, $b_k \in \mathbb{R}$ za $k \in \mathbb{N}$ koeficijentima Fourierova reda. Članove $a_k \sin(kx)$ i $b_k \cos(kx)$ zovemo harmonicima, dok broj k označava broj harmonika.

Kako bi dobili općenitiji izraz Fourierova razvoja, odnosno za funkcije definirane na intervalu $[-L, L]$ promotrit ćemo linearno preslikavanje koje interval $[-\pi, \pi]$ preslikava u interval $[-L, L]$. Korištenjem takve transformacije varijabli iz (2.1) dobivamo Fourierov red za funkcije definirane na $[-L, L]$ koji se zapisuje na sljedeći način:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right), \tag{2.2}$$

gdje su pripadni koeficijenti Fourierovog reda jednaki:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) dx, \tag{2.3}$$

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx, \tag{2.4}$$

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx. \tag{2.5}$$

U suštini, Fourierov razvoj, temeljni princip iza polja Fourierove analize signala, je promatranje složene funkcije kao kompozicije niza sinusnih i kosinusnih komponenti. U fizici i inženjerstvu, konkretno u poljima elektronike, elektrodinamike i kvantne mehanike, takve reprezentacije su korisne jer omogućuju lakše manipuliranje funkcijama koje su diskontinuirane ili ih nije jednostavno prikazati analitički.

Primjer 2.1. *Prikažimo aproksimaciju periodične pravokutne funkcije Fourierovim redom. Općenito, pravokutnu funkciju centriranu oko ishodišta s trajanjem τ definiramo pomoću Heavisideove*[1] *step funkcije u na način:*

$$f(x) = \operatorname{rect}\left(\frac{x}{\tau}\right) = u\left(x + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(x - \frac{\tau}{2}\right), \tag{2.6}$$

gdje je

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

Heavisideova step funkcija.

U ovom primjeru aproksimiramo pravokutnu funkciju s trajanjem $\tau = \pi$ koja glasi:

$$f(x) = \operatorname{rect}\left(\frac{x}{\pi}\right), \tag{2.8}$$

odnosno njeno periodičko proširenje:

$$f(x + nT_0) = \operatorname{rect}\left(\frac{x}{\pi} + nT_0\right) = \begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{2} + nT_0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + nT_0, \text{ za } n \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} \tag{2.9}$$

pri čemu je osnovni period funkcije jednak T_0. Ovdje ćemo uzeti da je $T_0 = 2\pi$, pa naša funkcija poprima oblik:

$$f(x + 2\pi n) = \operatorname{rect}\left(\frac{x}{\pi} + 2\pi n\right) = \begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{ za } n \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{inače}. \end{cases} \tag{2.10}$$

Grafički prikaz ove funkcije prikazan je na slici 2.3.

Slika 2.3. Pravokutna funkcija iz izraza (2.10)*. Izvor: izrada autora.*

[1] Oliver Heaviside (1850. - 1925.), engleski matematičar

Sada možemo izračunati koeficijente Fourierovog reda zadane funkcije:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2}, \tag{2.11}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(kx)dx = \frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & k = parno, \\ \frac{k\pi}{2}, & k = 1,5,9,13..., \\ -\frac{k\pi}{2}, & k = 3,7,11,15..., \end{cases} \tag{2.12}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(kx)dx = 0. \tag{2.13}$$

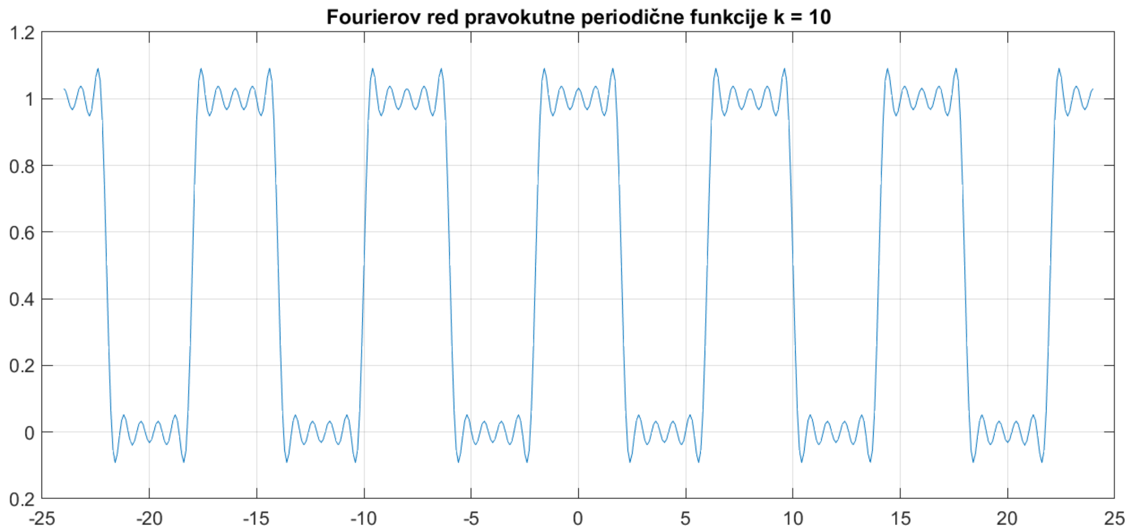
Konačno, Fourierov razvoj funkcije (2.10) *glasi:*

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(x) - \frac{2}{3\pi}\cos(3x) + \frac{2}{5\pi}\cos(5x) - \frac{2}{7\pi}\cos(7x) + \frac{2}{9\pi}\cos(9x) - ..., \tag{2.14}$$

ili jednostavnije:

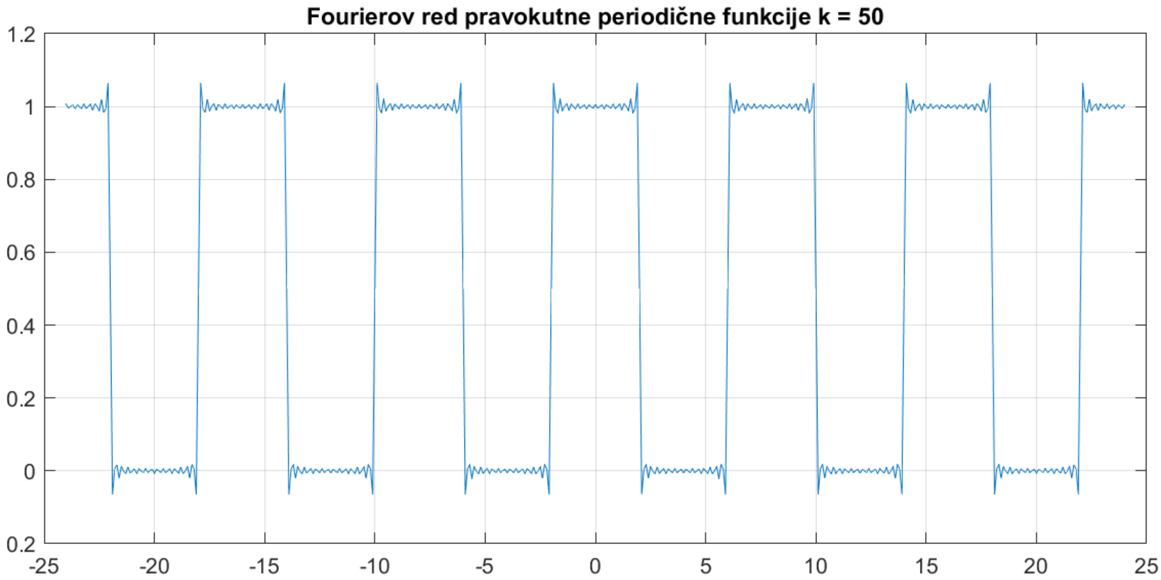
$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\cos(x) - \frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{1}{5}\cos(5x) - \frac{1}{7}\cos(7x) + \frac{1}{9}\cos(9x) - ...\right]. \tag{2.15}$$

Prikažimo sada grafički kako izgleda aproksimacija funkcije $f(x)$ *sa 10 harmonika, što možemo vidjeti na sljedećoj slici.*



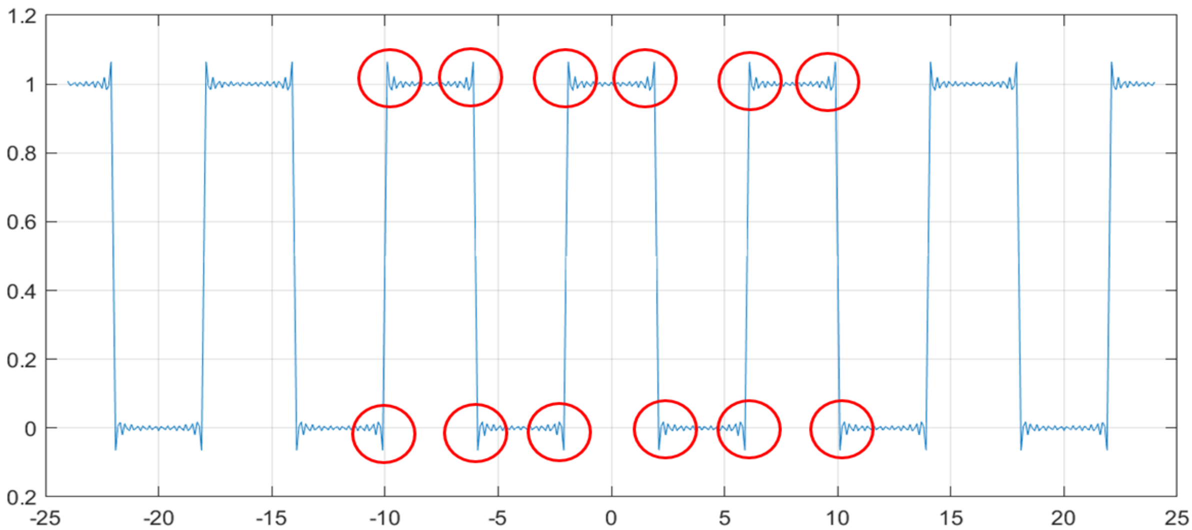
Slika 2.4. Aproksimacija pravokutne funkcije iz izraza (2.10) *pomoću Fourierovog reda za* $k = 10$.
Izvor: izrada autora.

Povećanjem broja harmonika tj. povećanjem broja sinusnih i kosinusnih komponenti kojima aproksimiramo zadanu funkciju očekujemo bolju aproksimaciju, kao što prikazuje grafički prikaz s 50 harmonika na slici 2.5.



Slika 2.5. Aproksimacija pravokutne funkcije iz izraza(2.10) *pomoću Fourierovog reda za* $k = 50$. *Izvor: izrada autora.*

Razvojem funkcije u Fourierov red, vidimo da aproksimacija u točkama diskontinuiteta ima zamjetan skok u amplitudi. Točnije rečeno, aproksimacija u točkama diskontinuiteta funkcije $f(x)$ *ima visoko-frekventne oscilacije (oko* 9% *amplitude) na svakoj strani diskontinuiteta. Ova je pojava još poznata kao* ***Gibbsov***[2] ***fenomen****, a ilustrirana je na slici 2.6.*



Slika 2.6. Gibbsov fenomen na aproksimaciji pravokutne funkcije (2.10) *pomoću Fourierovog reda za* $k = 50$. *Izvor: izrada autora.*

Fenomen Gibbsa jednostavno se može objasniti. Naime, u Fourierov razvoj uključene su samo funkcije sinus i kosinus koje su neprekidne i glatke. Iluzorno je očekivati da će se diskontinuitet moći jako kvalitetno aproksimirati glatkim funkcijama.

[2]Josiah Willard Gibbs (1839. – 1903.), američki teorijski fizičar, kemičar i matematičar.

2.2.1. Konvergencija Fourierovog reda

Za bolje razumijevanje Fourierovog reda i ispravnost Fourierove reprezentacije funkcije, trebamo navesti uvjete koje funkcija treba ispuniti kako bi njen razvoj uopće bio moguć. Ti se uvjeti nazivaju *Dirichletovi*[3] *uvjeti*.

Definicija 2.2. *Neka je na intervalu $[-L, L]$ zadana periodična funkcija $f(x)$ perioda $T = 2L$. Kažemo da funkcija $f(x)$ zadovoljava Dirichletove uvjete na intervalu $[-L, L]$ ako vrijedi sljedeće:*

1. *Funkcija $f(x)$ je na $[-L, L]$ po dijelovima neprekidna i ima najviše konačan broj prekida isključivo prve vrste, odnosno skokova.*
2. *Funkcija $f(x)$ je na $[-L, L]$ monotona ili na $[-L, L]$ ima konačan broj ekstrema.*
3. *Funkcija $f(x)$ mora biti apsolutno integrabilna na $[-L, L]$, odnosno mora vrijediti:*

$$\int_{-L}^{L} |f(x)| dx < \infty. \tag{2.16}$$

U matematici, pojam konvergentnosti opisuje granično ponašanje beskonačnih redova prema nekoj konačnoj vrijednosti odnosno. limesu. Kada Fourierov red ispunjava navedene uvjete, tada kažemo da on konvergira, te da ima konačnu sumu u svakoj točki u kojoj je funkcija neprekidna, dok je u točkama diskontinuiteta, suma reda jednaka aritmetičkoj sredini vrijednosti funkcije s lijeve i s desne strane, matematički zapisano:

$$f(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, \tag{2.17}$$

pri čemu je

$$f(x+0) = \lim_{y \to x^+} f(y), \tag{2.18}$$

$$f(x-0) = \lim_{y \to x^-} f(y), \tag{2.19}$$

dok za točke u kojima je funkcija neprekidna vrijedi:

$$f(x) = f(x+0) = f(x-0). \tag{2.20}$$

Treba napomenuti da Dirichletovi uvjeti nisu previše restriktivni. Drugim riječima, gotovo sve periodične funkcije koje susrećemo u fizici i inženjerstvu mogu se razviti u Fourierov red.

[3] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805.-1859.), njemački matematičar

2.3. Fourierov integral

U principu se samo periodični signali, odnosno funkcije mogu razviti u Fourierov red pod uvjetom da se poštuju Dirichletovi uvjeti. Međutim u praksi se često pojavljuju i neperiodični signali za koje je potrebno naći sličan alat, a to će biti Fourierov integral i Fourierova transformacija. Fourierov integral opisan je u sljedećoj definiciji.

Definicija 2.3. *Neka je zadana neperiodična funkcija $f(x)$. Reprezentacija funkcije $f(x)$ dana s*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} (A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x)\, d\lambda, \tag{2.21}$$

zove se Fourireov integral, pri čemu se funkcije $A(\lambda)$ i $B(\lambda)$ izračunavaju izrazima:

$$A(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x dx, \tag{2.22}$$

$$B(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x dx. \tag{2.23}$$

Uvjeti koji garantiraju egzistenciju reprezentacije funkcije $f(x)$ Fourierovim integralom dani su sljedećim teoremom.

Teorem 2.1 (prema [?]). *Neka je zadana neperiodična funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Funkcija $f(x)$ može se reprezentirati Fourierovim integralom* (2.21) *ako zadovoljava sljedeće uvjete:*

1. *Neprekidna je po dijelovima*[4].
2. *Ima lijeve i desne derivacije u svakoj točki domene.*
3. *Apsoultno je integrabilna na $\mathbb{R}$, odnosno vrijedi:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty. \tag{2.24}$$

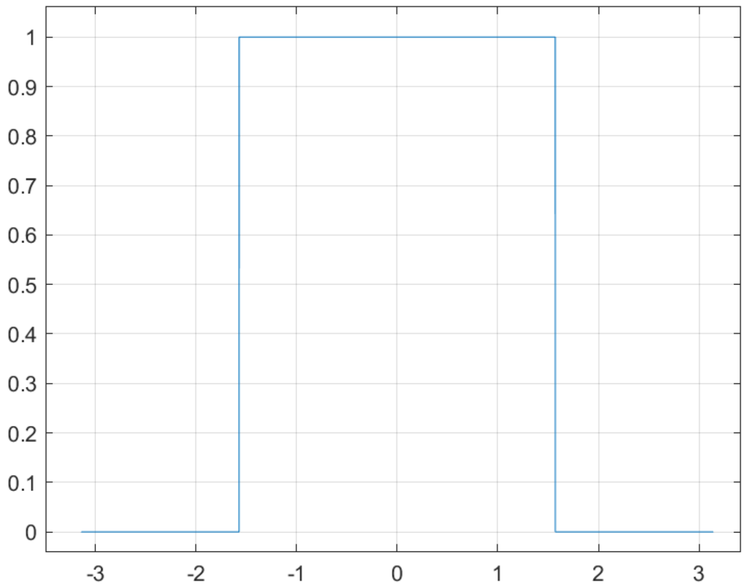
Pokažimo na jednom primjeru kako izgleda Fourierova reprezentacija neperiodične funkcije.

Primjer 2.2. *Prikažimo neperiodičnu pravokutnu funkciju iz prošlog primjera Fourierovim integralom. Drugim riječima, promatramo funkciju definiranu s:*

$$f(x) = \operatorname{rect}\left(\frac{x}{\pi}\right) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leqslant -\dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & \dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant -\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} \leqslant x < \infty. \end{cases} \tag{2.25}$$

[4]Funkcija je neprekidna po dijelovima ako se može rastaviti na intervale na kojima je neprekidna.

Grafički prikaz ove funkcije možemo vidjeti na sljedećoj slici.



Slika 2.7. Neperiodična pravokutna funkcija iz jednadžbe (2.25)*. Izvor: izrada autora.*

Sada možemo izračunati koeficijente Fourierova integrala:

$$A(\lambda) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \lambda x dx = 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos \lambda x dx = \frac{2}{\lambda} \sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right), \tag{2.26}$$

$$B(\lambda) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \lambda x dx = 0. \tag{2.27}$$

Konačno određujemo Fourierov integral po formuli (2.21)*:*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{2}{\lambda} \sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) \cos \lambda x d\lambda = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) \cos \lambda x d\lambda. \tag{2.28}$$

3. Fourierova transformacija

U prošlom poglavlju smo razmatrali kako zapisati te posljedično analizirati periodične funkcije Fourierovim redom na način da ih zapišemo kao beskonačnu sumu sinusnih i kosinusnih komponenti. Želimo li proučavati neperiodične funkcije, upotrijebit ćemo alat koji nazivamo Fourierova transformacija. Ona se može smatrati generalizacijom Fourierovog reda, odnosno njegovo proširenje i na neperiodične funkcije. Fourierova transformacija je funkcija koja razlaže valni oblik, koji je funkcija u vremenu, na frekvencije koje ga čine. Rezultat dobiven Fourierovom transformacijom je složena funkcija frekvencije. Apsolutna vrijednost Fourierove transformacije predstavlja frekvencijsku vrijednost prisutnu u izvornoj funkciji, dok njen kompleksni argument predstavlja fazni pomak osnovne sinusoide u toj frekvenciji.

3.1. Izvod Fourierove transformacije pomoću Fourierovog reda

Koeficijente trigonometrijskog Fourierovog reda iz jednadžbe (2.2) možemo zapisati drugačije na sljedeći način:

$$a_0 = c_0, \qquad a_k = c_k + c_{-k}, \qquad b_k = i(c_k - c_{-k}), \tag{3.1}$$

pri čemu su:

$$c_0 = a_0, \qquad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \qquad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k). \tag{3.2}$$

Funkcija koju promatramo je definirana na intervalu $[-L, L]$ iz čega možemo zaključiti da je perioda osnovnog harmonika te funkcije jednaka $T_0 = 2L$. Uvrstimo li sada u izraz (2.2) za $L = \frac{T_0}{2}$ dobivamo:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2k\pi x}{T_0}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi x}{T_0}\right) \right]. \tag{3.3}$$

Osnovna frekvencija harmonika je jednaka $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ te ju ubacujemo u gornji izraz i dobivamo:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega_0 x) + b_k \sin(k\omega_0 x) \right). \tag{3.4}$$

Uvrštavanjem novog oblika koeficijenata iz jednadžbi (3.1) i (3.2) u jednadžbu Fourierovog trigonometrijskog reda zadanog preko osnovne frekvencije ω_0 dobivamo:

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(c_k + c_{-k}) \cos(k\omega_0 x) + i(c_k - c_{-k}) \sin(k\omega_0 x)], \tag{3.5}$$

odnosno kada izmnožimo dobivamo:

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [c_{-k}[\cos(k\omega_0 x) - i \sin(k\omega_0 x)] + c_k[\cos(k\omega_0 x) + i \sin(k\omega_0 x)]]. \tag{3.6}$$

Koristeći Eulerovu formulu $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$, pretvaramo ovaj izraz u:

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(c_{-k}e^{-k\omega_0 xi} + c_k e^{k\omega_0 xi}), \tag{3.7}$$

odnosno kada razdvojimo sumu:

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{k\omega_0 xi} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{k\omega_0 xi}. \tag{3.8}$$

Dvije sume iz gornjeg izraza možemo jednostavnije zapisati i spojiti u jednu s promijenjenim granicama sumacije. Dobivamo Fourierov eksponencijalni red koji je općenitiji i obično prikladniji i kompaktniji u usporedbi s trigonometrijskim Fourierovim redom:

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{k\omega_0 xi}, \tag{3.9}$$

Može se prikazati da izraz vrijedi za općeniti interval, odnosno interval $[-L, L]$, te tada Fourierov eksponencijalni red glasi:

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{k\pi xi}{L}}, \tag{3.10}$$

s koeficijentom c_k koji je u promatranom intervalu jednak:

$$c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-\frac{k\pi xi}{L}}dx. \tag{3.11}$$

S promjenom frekvencije $\triangle\nu = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{1}{2L} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$ za promatrani interval $[-L, L]$, uvrštavamo koeficijent c_k iz jednadžbe (3.11) u jednadžbu (3.10) te dobivamoo:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\triangle\nu\int_{L}^{L} f(x)e^{-k2\pi\triangle\nu xi}dx\right]e^{k2\pi\triangle\nu xi}. \tag{3.12}$$

Promatrali smo kako funkciju periodičnu na intervalu $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ odnosno $[-L, L]$ razviti u Fourierov red, no pustimo li da $L \to \infty$, dobivamo funkciju koja je periodična na intervalu $\langle -\infty, \infty \rangle$, s beskonačno velikim periodom. Tada i frekvencija teži u nulu tj. $\triangle\nu = 0$ u Fourierovom eksponencijalnom redu. Promatramo li taj izraz u limesu, suma se pretvara u integral, te se frekvencija $\triangle\nu$ pretvara u $d\nu$, tj. diskretna varijabla se pretvara u kontinuiranu varijablu. Jednadžba poprima sljedeći izraz:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \int_{-\infty}^{\infty}[f(x)e^{-2\pi\nu xi}dx]e^{2\pi\nu xi}. \tag{3.13}$$

Zamijenimo ponovno $\omega = 2\pi\nu$ dobivamo

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega, \tag{3.14}$$

gdje je:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx. \tag{3.15}$$

Dobivena funkcija $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ naziva se Fourierovom transformacijom funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, budući da izrazi F i f sadržavaju kompleksne brojeve, oba izraza daju i primaju kompleksne vrijednosti. Tu se jasno vidi da Fourierova transformacija u principu predstavlja frekvencijski spektar periodičnog signala $x(t)$. Fourierova transformacija konačno glasi:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx, \tag{3.16}$$

dok inverzna Fourierova transformacija glasi:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega. \tag{3.17}$$

3.2. Općenito o integralnim transformacijama

U prošlom poglavlju smo prikazali izvod Fourierove transformacije, sada bi valjalo objasniti što su to integralne transformacije. Integralne transformacije su linearni matematički operatori koji djeluju na funkcije za promjenu fizikalne domene. Transformacije se koriste za lakše algebarsko rješavanje integrala i diferencijalnih jednadžbi. Integralna transformacija ili pretvorba je vrsta transformacije koja dodjeljuje funkciji $f(x)$ novu funkciju $F(\omega)$. Za funkciju $f(x)$ njena integralna transformacija $\mathcal{T}\{f(x)\}$ se određuje po formuli:

$$\mathcal{T}\{f(x)\} = F(w) = \int_{\alpha}^{\beta} K(\omega, x)f(x)dx. \tag{3.18}$$

Kompleksnu funkciju K koja sadrži nezavisne varijable obje domene, zovemo jezgrom transformacije, funkciju f originalom, a funkciju F slikom. Domena orginala naziva se x-domena, a domena slike ω-domena. Koeficijenti α i β definiraju interval transformacije. U sljedećoj tablici navodimo nekoliko poznatih transformacija s parametrima:

Transformacija	Oznaka	α	β	Jezgra $K(\omega, x)$
Laplaceova	$\mathcal{L}$	0	∞	$e^{-\omega x}$
Fourierova	$\mathcal{F}$	$-\infty$	∞	$e^{-i\omega x}$
Mellinova	$\mathcal{M}$	0	∞	$x^{\omega-1}$
Abelova	$\mathcal{A}$	ω	∞	$\frac{2f(x)x}{\sqrt{x^2-\omega^2}}$
Hilbertova	$\mathcal{H}$	$-\infty$	∞	$\frac{f(x)}{\pi(\omega-x)}$

Tablica 3.1. Integralne transformacije s pripadnim parametrima

Tako primjerice Laplaceova transformacija glasi:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(\omega) = \int_{0}^{\infty} f(x)e^{-\omega x}dx, \tag{3.19}$$

dok je Fourierova transformacija dana s:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx. \tag{3.20}$$

Sljedeća dva svojstva vrijede za sve integralne transformacije. Budući je svaka integralna transformacija u suštini integral, a integral je linearni operator, iz definicije integralne transformacije možemo zaključiti da vrijedi svojstvo linearnosti.

Teorem 3.1 (Linearnost integralne transformacije)**.** *Neka su zadane funkcije $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ te neka je $\mathcal{T}$ proizvoljna integralna transformacija. Tada za*

$$\mathcal{T}\{f(x)\} = F(\omega) \quad i \quad \mathcal{T}\{g(x)\} = G(\omega), \tag{3.21}$$

vrijedi:

$$\mathcal{T}\{af(x) + bg(x)\} = a\mathcal{T}\{f(x)\} + b\mathcal{T}\{g(x)\} = aF(\omega) + bG(\omega), \tag{3.22}$$

pri čemu su $a, b \in \mathbb{R}$ proizvoljne konstante.

Nadalje, ako nam se u transformacijama pojavljuje neki koeficijent, skalar, koji množi vremensku varijablu, transformaciju takve funkcije izražavamo na sljedeći način:

Teorem 3.2 (Svojstvo skaliranja vremenske varijable). *Neka je zadana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, te neka je $\mathcal{T}$ njezina proizvoljna integralna transformacija. Tada za $\mathcal{T}\{f(x)\} = F(\omega)$ i realnu konstantu $a \neq 0$ vrijedi:*

$$\mathcal{T}\left\{f\left(\frac{x}{a}\right)\right\} = aF(\omega a). \tag{3.23}$$

Direktna posljedica ovog izraza je svojstvo:

$$\mathcal{T}\{f(ax)\} = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right). \tag{3.24}$$

Nakon što primijenimo integralnu transformaciju, nalazimo se u domeni slike (ω-domeni), a za povratak u polaznu domenu moramo primijeniti inverznu transformaciju. Za gore navedenu Laplaceovu transformaciju, inverzna Laplaceova transformacija glasi:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(\omega)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{\omega x}d\omega, \tag{3.25}$$

odnosno, inverzna Fourierova transformacija za Fourierovu transformaciju:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega. \tag{3.26}$$

Postoje mnoge vrste integralnih transformacija sa širokim rasponom primjena, uključujući digitalnu obradu slike i obradu signala, te u fizici, inženjerstvu, statističkoj i matematičkoj analizi. Tako primjerice, primjenom integralnih transformacija, zahtjevnu diferencijalnu jednadžbu svodimo na jednostavniju, često algebarsku jednadžbu. U tom slučaju, da bi došli do rješenja polazne jednadžbe na dobiveni rezultat, potrebno je primijeniti inverznu integralnu transformaciju kako bi dobili konačno rješenje polazne diferencijalne jednadžbe.

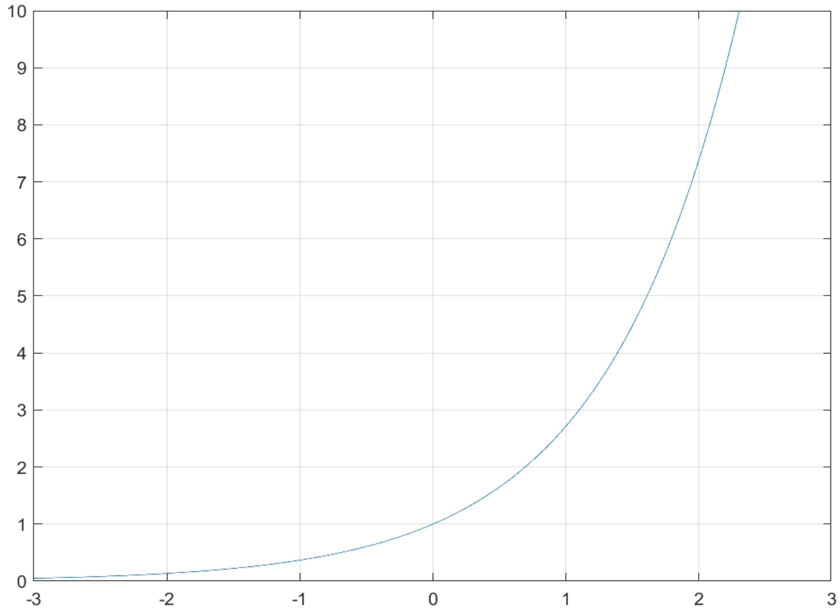
3.3. Fourierova transformacija nekih jednostavnijih funkcija

U ovom ćemo poglavlju izvesti Fourierove transformacije nekih jednostavnijih funkcija koje se često koriste u primjenama.

Primjer 3.1. *U ovom primjeru ćemo proučiti Fourierovu transformaciju eksponencijalne funkcije. Funkcija je zadana na sljedeći način:*

$$f(x) = e^{-ax}u(x), \quad \textit{za} \quad a \in \mathbb{R}^+, \tag{3.27}$$

gdje je $u(x)$ Heavisideova step funkcija. Na sljedećoj slici možemo vidjeti grafički prikaz ove funkcije. Prema definiciji Fourierove transformacije slijedi:



Slika 3.1. Eksponencijalna funkcija iz izraza (3.27) *za $a = 1$. Izvor: Izrada autora.*

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax}u(x)e^{-iwx}dx. \tag{3.28}$$

Pošto je funkcija pomnožena s Heavisideovovom step funkcijom, vrijednosti različite od nule poprima samo na intervalu $[0, \infty]$. Zbog toga možemo promijeniti područje integracije i gornji izraz zapisati u sljedećem obliku:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(w) = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+iw)x}dx. \tag{3.29}$$

Rješavanjem integrala dobivamo:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(w) = \lim_{\varepsilon\to\infty} \frac{-1}{a+i\omega}e^{-(a+iw)x}\bigg|_0^{\varepsilon}. \tag{3.30}$$

Kako je $a > 0$, slijedi da je

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} e^{-(a+iw)\varepsilon} = 0, \tag{3.31}$$

pa gornji izraz prelazi u

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(w) = \frac{1}{a+i\omega}, \tag{3.32}$$

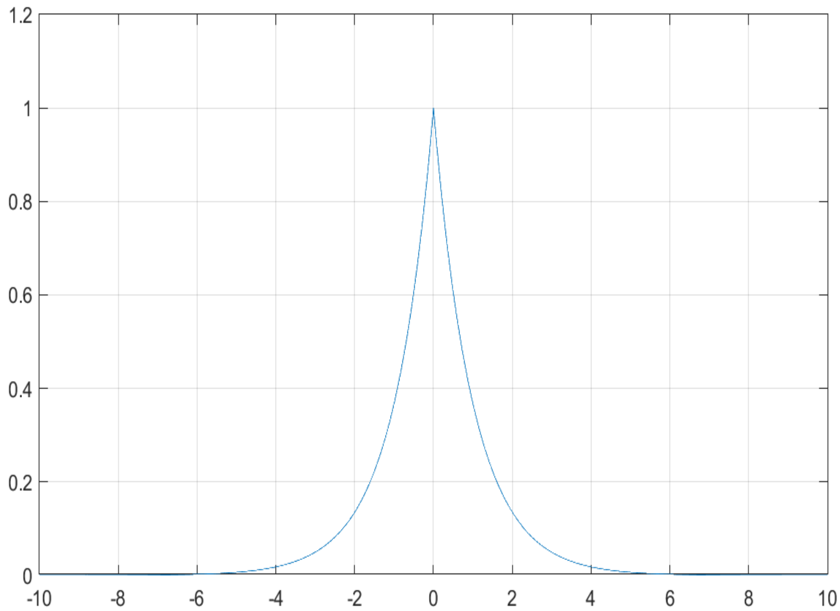
čime smo dobili Fourierovu transformaciju eksponencijalne funkcije. Primijetimo da bi u slučaju da je $a < 0$ pripadni integral divergirao i ne bi bilo moguće odrediti Fourierovu transformaciju.

Odredimo sada Fourierovu transformaciju još jedne eksponencijalne funkcije koja također ima značajnu primjenu.

Primjer 3.2. *U ovom primjeru ćemo proučiti Fourierovu transformaciju eksponencijalne funkcije s apsolutnim argumentom. Funkcija je zadana na sljedeći način:*

$$f(x) = e^{-k|x|} = \begin{cases} e^{-kx}, & x \geqslant 0, \\ e^{kx}, & x < 0, \end{cases} \tag{3.33}$$

pri čemu je $k \in \mathbb{R}^+$, a grafički je prikazana na sljedećoj slici.



Slika 3.2. Eksponencijalna funkcija iz (3.33) *za $k = 1$. Izvor: Izrada autora.*

Zadanu funkciju uvrstimo u definiciju Fourierove transformaciju te dobiveni izraz razdvojimo na dva integrala:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k|x|}e^{-i\omega x}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{kx}e^{-i\omega x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-kx}e^{-i\omega x}dx. \tag{3.34}$$

Sređujemo izraz pod integralom i dobivamo:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{0} e^{(k-i\omega)x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(k+i\omega)x}dx. \tag{3.35}$$

U svrhu lakšeg integriranja, možemo promjeniti granice integracije u prvom integralu promjenom predznaka u eksponentu. Dobivamo:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-(k-i\omega)x} dx + \int_0^\infty e^{-(k+i\omega)x} dx. \tag{3.36}$$

Direktnom integracijom dobivamo:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \left[\frac{1}{-(k-i\omega)} e^{-(k-i\omega)x}\right]\Bigg|_0^\infty + \left[\frac{1}{-(k+i\omega)} e^{-(k+i\omega)x}\right]\Bigg|_0^\infty, \tag{3.37}$$

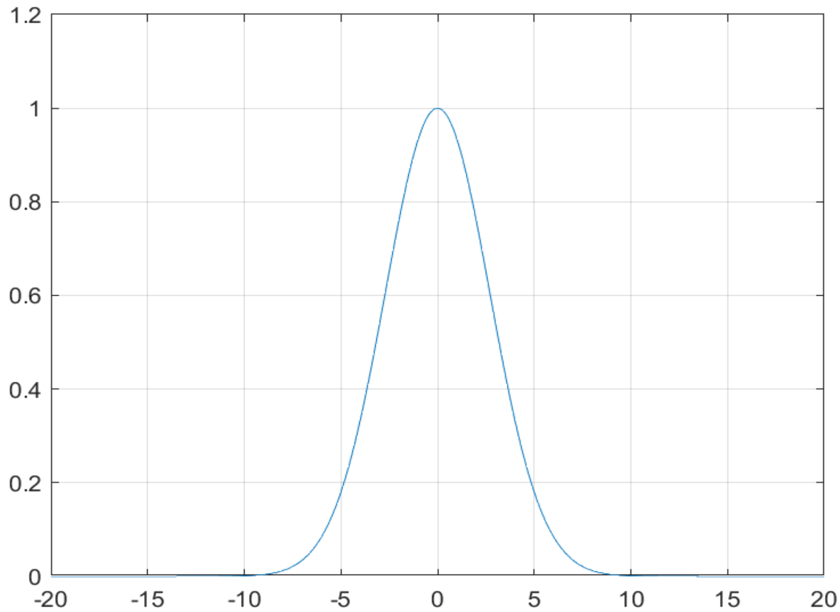
što uvrštavanjem granica integrala prelazi u:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \left[\frac{1}{-(k-i\omega)}\left(e^{-\infty} - e^0\right)\right] + \left[\frac{1}{-(k+i\omega)}\left(e^{-\infty} - e^0\right)\right], \tag{3.38}$$

odnosno:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{k-i\omega} + \frac{1}{k+i\omega} = \frac{k+i\omega+k-i\omega}{(k-i\omega)(k+i\omega)} = \frac{2k}{k^2+\omega^2}. \tag{3.39}$$

Napomenimo da je uvjet pozitivnosti parametra k osigurao konvergenciju svih navedenih integrala. Grafički prikaz dobivene Fourierove transformacije funkcije dan je na sljedećoj slici:



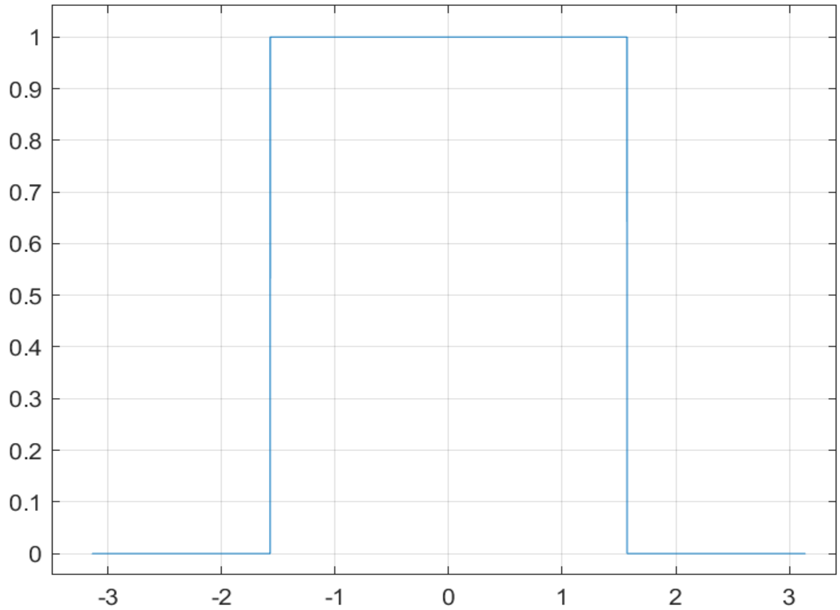
Slika 3.3. Fourierova transformacija funkcije iz (3.33) *za* $k = 1$. *Izvor: Izrada autora.*

U sljedećem primjeru odredit ćemo Fourierovu transformaciju pravokutne funkcije.

Primjer 3.3. *Promotrimo pravokutnu funkciju zadanu s:*

$$f(x) = \mathrm{rect}\left(\frac{x}{\pi}\right) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leqslant -\dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & \dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant -\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} \leqslant x < \infty, \end{cases} \tag{3.40}$$

čiji je grafički prikaz dan na sljedećoj slici.



Slika 3.4. Neperiodična pravokutna funkcija iz jednadžbe (3.40). *Izvor: izrada autora.*

Vidimo da funkcija poprima vrijednost 1 *na intervalu* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, *a inače je jednaka nuli. Da bismo mogli izračunati Fourierovu transformaciju funkcije moramo podijeliti područje integracije u tri dijela: Integral funkcije u intervalu* $\left\langle -\infty, -\frac{\pi}{2}\right]$ *gdje funkcija poprima vrijednost* 0, *u intervalu* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *gdje ima vrijednost* 1, *te u intervalu* $\left[\frac{\pi}{2}, \infty\right\rangle$ *gdje funkcija ponovno ima vrijednost* 0. *Uvrštavanjem u definiciju Fourierove transformacije dobivamo:*

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0e^{-i\omega x}dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1e^{-i\omega x}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} 0e^{-i\omega x}dx. \quad (3.41)$$

Iz gornje jednadžbe vidimo da će prvi i treći integral biti jednaki nuli pošto je vrijednost funkcije u tim intervalima jednaka nuli, pa nam preostaje samo da izračunamo integral:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-i\omega x}dx. \quad (3.42)$$

Nakon integriranja dobivamo sljedeći izraz:

$$F(\omega) = -\frac{1}{i\omega}\left[e^{-i\omega\frac{\pi}{2}} - e^{-i\omega\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\right]. \quad (3.43)$$

Ovaj ćemo izraz zapisati u nešto povoljnijem obliku koji se češće koristi. Algebarskom manipulacijom neposredno slijedi:

$$F(\omega) = \frac{2\pi}{\omega\pi}\frac{1}{2i}\left(e^{i\omega\frac{\pi}{2}} - e^{-i\omega\frac{\pi}{2}}\right). \quad (3.44)$$

Da bismo mogli pojednostaviti gornji izraz moramo upotrijebiti Eulerovu formulu za kompleksni zapis sinusa pomoću eksponencijalnih funkcija koja glasi

$$\sin(\phi) = \mathfrak{Im}\{e^{i\phi}\} = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}, \quad (3.45)$$

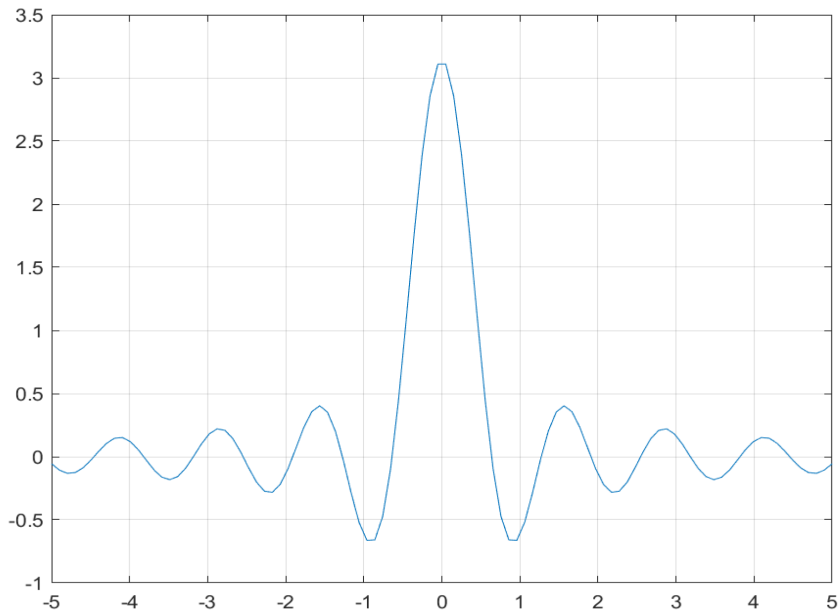
upotrebljavanjem gornjeg izraza slijedi:

$$F(\omega) = \frac{2\pi}{\omega\pi} \sin\left(\frac{\omega\pi}{2}\right) = \pi \frac{\sin(\frac{\omega\pi}{2})}{\frac{\omega\pi}{2}} = \pi \,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\pi}{2}\right), \tag{3.46}$$

gdje je funkcija

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}. \tag{3.47}$$

Grafički prikaz funkcije iz (**??**) *prikazan je na sljedećoj slici.*



Slika 3.5. Fourierova transformacija pravokutne funkcije. Izvor: Izrada autora.

Sada ćemo odrediti Fourierovu transformaciju Diracove delta funkcije.

Primjer 3.4. *Diracova[1] delta funkcija definira se izrazom*

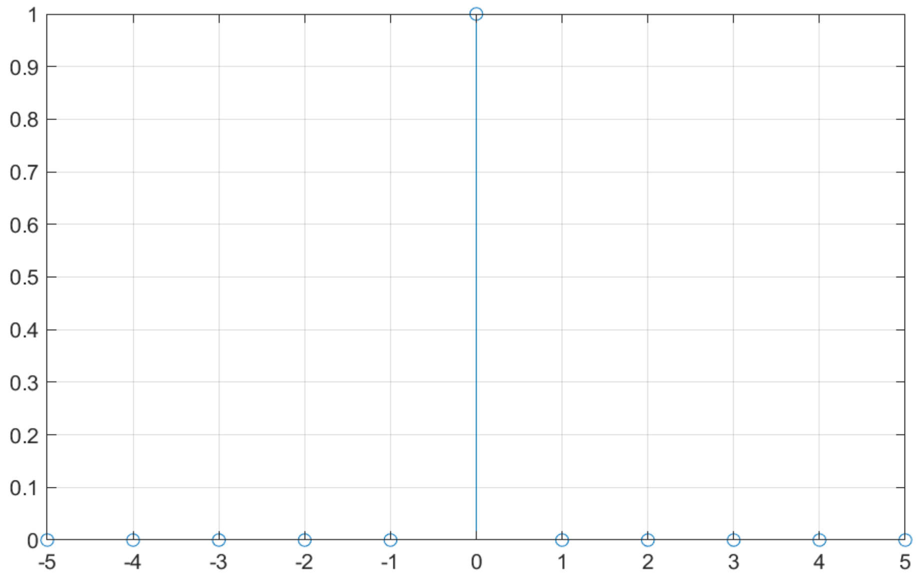
$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0, \\ 0, & \textit{inače}, \end{cases} \tag{3.48}$$

pri čemu mora vrijediti sljedeće svojstvo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) = 1. \tag{3.49}$$

*Svakako treba napomenuti da na Diracovu delta funkciju možemo gledati kao na funkciju samo u generaliziranom smislu budući da su njena definicijska svojstva u kontradikciji s klasičnom teorijom funkcija. [**?**]. Funkcija dana je grafički na sljedećoj slici.*

[1] Paul Dirac (1902. - 1984.), engleski teorijski fizičar



Slika 3.6. Diracova delta funkcija. Izvor: Izrada autora.

*Diracova delta funkcija ima jedno važno svojstvo koje se često koristi kod dokazivanja njenih svojstava, a zove se svojstvo prosijavanja. To je svojstvo opisano u sljedećoj lemi. [**?**]*

Lema 3.1 (Svojstvo prosijavanja). *Neka je f integrabilna funkcija. Za Diracovu δ funkciju vrijedi:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a), \tag{3.50}$$

pri čemu je $a \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta.

Odredimo sada Fourireovu transformaciju Diracove delta funcije. Uvrštavanjem u definiciju Fourierove transformacije slijedi:

$$\mathcal{F}\{\delta(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-iwx}dx. \tag{3.51}$$

Direktnom primjenom svojstva prosijavanja na ovaj izraz dobivamo

$$\mathcal{F}\{\delta(x)\} = e^{-iwx}\big|_{x=0} = 1. \tag{3.52}$$

Analognim postupkom može se zaključiti da vrijedi

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta(w)\} = \frac{1}{2\pi}, \tag{3.53}$$

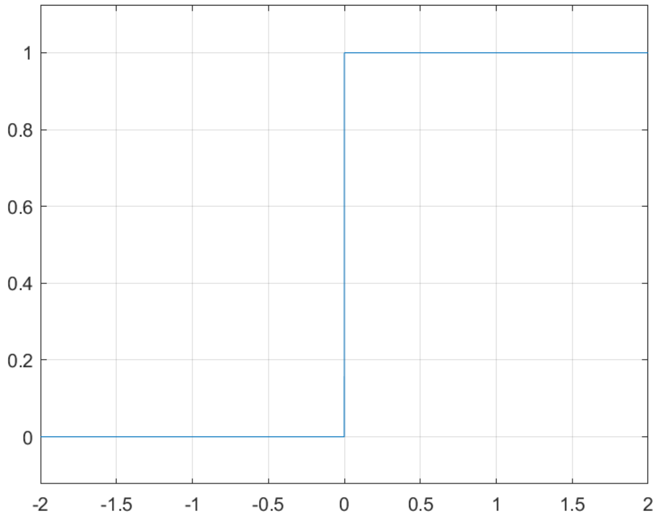
te da je

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\right\} = \pi\delta(\omega), \tag{3.54}$$

što je rezultat koji će nam trebati u sljedećem primjeru.

Sada ćemo odrediti Fourierovu transformaciju Heavisideove step funkcije.

Primjer 3.5. *Heavisideova funkcija je prije spomenuta te je dana izrazom* (2.7)*, te je njen grafički prikaz dan na sljedećoj slici.*



Slika 3.7. Heavisideova step funkcija. Izvor: Izrada autora.

Heavisideova funkcija nije integrabilna na čitavom skupu $\mathbb{R}$*, stoga njenu Fourierovu transformaciju ne možemo odrediti direktno. Kako bi odredili Fourierovu transformaciju Heavisideove funkcije koristit ćemo se sljedećom jednakosti:*

$$u(x) = \lim_{a \to 0^+} e^{-ax} u(x), \tag{3.55}$$

temeljem koje ćemo pronaći kandidata za Fourierovu transformaciju Heavisideove funkcije. Naime, problem je u tome što se razmatra limes kompleksne funkcije koji jako ovisi o putanji, tako da primjenom ove formule možemo samo naslutiti o kojoj se funkciji radi.

Prema rezultatu iz primjera 3.1 vrijedi:

$$U(\omega) = \mathcal{F}\{u(x)\} = \lim_{a \to 0^+} \mathcal{F}\{e^{-ax} u(x)\} = \lim_{a \to 0^+} \frac{1}{a + i\omega} = \frac{1}{i\omega}. \tag{3.56}$$

Da bi se uvjerili da smo dobili dobru transformaciju odredimo Fourierov original funkcije $\frac{1}{i\omega}$*. Prema definiciji inverzne Fourierove transformacije i vrijedi:*

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{i\omega}\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\omega} e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{i\omega x}}{\omega} d\omega + \int_{0}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{\omega} d\omega \right). \tag{3.57}$$

Napravimo li u prvom integralu supstituciju $\omega = -\lambda$*, dobivamo:*

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{i\omega}\right\} = \frac{1}{2\pi i} \left(- \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda x}}{\lambda} d\lambda + \int_{0}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{\omega} d\omega \right). \tag{3.58}$$

Ako varijablu intgracije λ *zamijenimo s* ω*, gornji integral možemo zapisati kao:*

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{i\omega}\right\} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i\omega} d\omega. \tag{3.59}$$

Primjenom formule (**??**) *dobivamo*

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{i\omega}\right\} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \omega x}{\omega} d\omega, \tag{3.60}$$

*čime smo dobili Dirichletov integral, odnosno [**?**]*

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \tag{3.61}$$

Sada možemo zaključiti da je:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{i\omega}\right\} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x > 0, \\ -\frac{1}{2}, & x < 0, \end{cases} \tag{3.62}$$

što je funkcija $u(x) - \frac{1}{2}$. *Prema tome vrijedi:*

$$\mathcal{F}\left\{u(x) - \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{i\omega}, \tag{3.63}$$

odnosno vrijedi:

$$\mathcal{F}\left\{u(x)\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\right\} + \frac{1}{i\omega}. \tag{3.64}$$

Sada primjenom (**??**) *konačno dobivamo*

$$\mathcal{F}\left\{u(x)\right\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}. \tag{3.65}$$

3.4. Svojstva Fourierove transformacije

U nastavku su dana svojstva Fourierove transformacije koja nam koriste za lakše rješavanje nekih problema na koje nailazimo njenom primjenom.

Teorem 3.3 (**Svojstvo vremenskog pomaka**). *Neka je zadana funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, *te neka je* F *njezina Fourierova transformacija. Za* $x_0 \in \mathbb{R}$ *koja predstavlja pomak u vremenu funkcije* $f(x)$ *čija je Fourierova transformacija jednaka* $F(\omega)$, *vrijedi:*

$$\mathcal{F}\{f(x - x_0)\} = F(\omega)e^{-iw\omega_0}. \tag{3.66}$$

Dokaz. Po definiciji Fourierove transformacije imamo:

$$\mathcal{F}\{f(x - x_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0)e^{-i\omega x} dx. \tag{3.67}$$

Supstituiramo li, radi lakšeg integriranja, $\lambda = x - x_0$, dobivamo:

$$\mathcal{F}\{f(x - x_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)e^{-i\omega(\lambda - x_0)} d\lambda. \tag{3.68}$$

Član $e^{-i\omega x_0}$ ne sadrži varijablu integracije pa ga možemo izlučiti ispred integrala:

$$\mathcal{F}\{f(x-x_0)\} = e^{-i\omega x_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)e^{-i\omega\lambda}d\lambda. \tag{3.69}$$

Pod integralom nam ostaje izraz za Fourierovu transformaciju, te konačno dobivamo:

$$\mathcal{F}\{f(x-x_0)\} = F(\omega)e^{-i\omega x_0}. \tag{3.70}$$

□

Teorem 3.4 (**Svojstvo frekvencijskog pomaka**). *Neka je zadana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, te neka je F njezina Fourierova transformacija. Za $\omega_0 \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

$$\mathcal{F}\{f(x)e^{\mp i\omega_0 x}\} = F(\omega \pm \omega_0). \tag{3.71}$$

Dokaz. Po definiciji Fourierove transformacije imamo:

$$\mathcal{F}\{f(x)e^{i\omega_0 x}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}e^{i\omega_0 x}dx. \tag{3.72}$$

Pojednostavimo li vrijednost unutar integrala za lakšu integraciju, izraz poprima oblik:

$$\mathcal{F}\{f(x)e^{i\omega_0 x}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\omega-\omega_0)x}dx. \tag{3.73}$$

Pod integralom nam ostaje definicija Fourierove transformacije, te konačno dobivamo:

$$\mathcal{F}\{f(x)e^{i\omega_0 x}\} = F(\omega - \omega_0). \tag{3.74}$$

□

Teorem 3.5 (**Svojstvo dualnosti**). *Neka je zadana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, te neka je F njezina Fourierova transformacija. Tada postoji funkcija $F(x)$ u vremenskoj domeni koja će imati Fourierovu transformaciju $f(\omega)$ u frekvencijskoj domeni i vrijedi:*

$$\mathcal{F}\{F(x)\} = 2\pi f(-\omega). \tag{3.75}$$

Dokaz. Koristeći inverznu Fourierovu transformaciju imamo:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega. \tag{3.76}$$

Supstituiramo li $u = -x$ dobivamo:

$$f(-u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega u}d\omega. \tag{3.77}$$

Sada zamjenimo varijablu u s varijablom ω i pomnožimo cijelu jednadžbu s 2π:

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{-i\omega u}du. \tag{3.78}$$

Izraz s desne strane jednadžbe je obična Fourierova transformacija, te slijedi:

$$\mathcal{F}\{F(x)\} = 2\pi f(-\omega). \tag{3.79}$$

□

Teorem 3.6 (Fourierova slika derivacije). *Neka je zadana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, te neka je F njezina Fourierova transformacija. Vrijedi:*

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right\} = i\omega F(\omega), \tag{3.80}$$

odnosno:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}\right\} = (i\omega)^n F(\omega), \tag{3.81}$$

pri čemu je $\frac{\partial}{\partial x}$ operator deriviranja po varijabli x.

Dokaz. Inverzna Fourierova transformacija glasi:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega. \tag{3.82}$$

Deriviranjem ovog izraza po varijabli x dobivamo:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega\right]. \tag{3.83}$$

Konstantu $\frac{1}{2\pi}$ stavljamo ispred oznake derivacije, te izraz u integralu deriviramo i dobijemo:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{i\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega. \tag{3.84}$$

Na ovaj izraz sada djelujemo operatorom $\mathcal{F}$ i dobivamo:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right\} = i\omega F(\omega). \tag{3.85}$$

Ponovnom derivacijom povećavamo potenciju člana iw, te možemo zapisati da za n-tu derivaciju funkcije f vrijedi sljedeći izraz:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}\right\} = (i\omega)^n F(\omega). \tag{3.86}$$

□

U nastavku rada od velike važnosti je operacija konvolucije funkcija. Konvolucija dvaju funckija $f_1(x)$ i $f_2(x)$ definira se kao integral njihova umnoška nakon što se jedna funkcija zrcali oko osi ordinata i pomakne za vrijednost τ, a označava se s operatorom $*$.

Fourierova transformacija konvolucije dvaju funkcija u vremenskoj domeni dana je sljedećim teoremom.

Teorem 3.7 (Konvolucija u vremenskoj domeni). *Fourierova transformacija konvolucije funkcija $f_1(x)$ i $f_2(x)$ u vremenskoj domeni jednaka je umnošku njihovih Fourierovih transformacija, odnosno vrijedi:*

$$\mathcal{F}\{f_1(x) * f_2(x)\} = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega), \tag{3.87}$$

pri čemu su $F_1(\omega)$ i $F_2(\omega)$ Fourierove transformacije funkcija $f_1(x)$ i $f_2(x)$, $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Dokaz. Prema definiciji konvolucije i Fourierove transformacije, Fourierova transformacija konvolucije dvaju funkcija dana je izrazom:

$$\mathcal{F}\{f_1(x) * f_2(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(x-\tau) d\tau \right] e^{-i\omega x} dx. \tag{3.88}$$

Pošto je interval integracije isti kod oba integrala, možemo promjeniti poredak integracije. Zatim, član $f_1(\tau)$, pošto ne ovisi o varijabli x, možemo izlučiti ispred integrala. Dobivamo:

$$\mathcal{F}\{f_1(x) * f_2(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-\tau) e^{-i\omega x} dx \right] d\tau. \tag{3.89}$$

Uvođenjem supstitucije $x = \tau + \theta$ slijedi:

$$\mathcal{F}\{f_1(x) * f_2(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\theta) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\theta) e^{-i\omega(\tau+\theta)} dx \right] d\tau, \tag{3.90}$$

što sređivanjem prelazi u:

$$\mathcal{F}\{f_1(x) * f_2(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\theta) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\theta) e^{-i\omega\theta} dx \right] e^{-i\omega\tau} d\tau. \tag{3.91}$$

Izraz u uglatim zagradama je po definiciji Fourierova transformacija, te možemo zapisati:

$$\mathcal{F}\{f_1(x) * f_2(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\theta) F_2(\omega) e^{-i\omega\tau} d\tau. \tag{3.92}$$

Funkcija $F_2(\omega)$ ne ovisi o varijabli τ te ju izlučujemo ispred integrala. Također, uočavamo da je $\tau = x - \omega$ te dobivamo:

$$\mathcal{F}\{f_1(x) * f_2(x)\} = F_2(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \tag{3.93}$$

Izraz s desne strane znaka jednakosti je jednak Fourierovoj transformaciji funkcije $f_1(x)$ pomnožen s Fourierovom transformacijom funkcije $f_2(x)$:

$$\mathcal{F}\{f_1(x) * f_2(x)\} = F_1(\omega) F_2(\omega), \tag{3.94}$$

čime je tvrdnja teorema dokazana. □

Teorem 3.8 (Konvolucija u frekvencijskoj domeni). *Neka su zadane funkcije $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ te neka su F_1 i F_2 njihove Fourierove transformacije. Tada vrijedi.*

$$\mathcal{F}\{f_1(x) f_2(x)\} = \frac{1}{2\pi} \left[F_1(\omega) * F_2(\omega) \right]. \tag{3.95}$$

Dokaz. Konvolucija signala u frekvencijskoj domeni izračunava se slično kao konvolucija signala u vremenskoj domeni. Zapišemo Fourierovu transformaciju umnoška dvaju funkcija:

$$\mathcal{F}\{f_1(x) f_2(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x) e^{-i\omega x} dx. \tag{3.96}$$

Koristeći izraz za inverznu Fourierovu transformaciju funkcije $f_1(x)$ dobivamo:

$$\mathcal{F}\{f_1(x)f_2(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda\right] f_2(x)e^{-i\omega x}dx. \tag{3.97}$$

Kao i kod dokaza prethodnog teorema mijenjamo poredak integracije, a konstantu $\frac{1}{2\pi}$ stavljamo na početak izraza, te izlučujemo član $F_1(\lambda)$ ispred unutarnjeg integrala pošto ne ovisi o varijabli x. Dobivamo:

$$\mathcal{F}\{f_1(x)f_2(x)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)e^{-i(\omega-\lambda)x}dx\right] d\lambda. \tag{3.98}$$

Izraz u uglatim zagradama je po definiciji Fourierova transformacija u varijabli $\omega - \lambda$, te možemo zapisati:

$$\mathcal{F}\{f_1(x)f_2(x)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda)F_2(\omega-\lambda)d\lambda. \tag{3.99}$$

Izraz u integralu je izraz za konvoluciju dvaju signala u frekvencijskoj domeni po varijabli ω s pomakom λ, pa slijedi:

$$\mathcal{F}\{f_1(x)f_2(x)\} = \frac{1}{2\pi}[F_1(\omega) * F_2(\omega)], \tag{3.100}$$

čime je teorem dokazan. □

Teorem 3.9 (**Fourierova transformacija integrala**). *Neka je zadana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, te neka je F njezina Fourierova transformacija. Tada vrijedi*

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{x} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(\omega)}{i\omega} + \pi F(0)\delta(\omega). \tag{3.101}$$

Dokaz. Za dokazivanje ovog svojstva koristimo varijantu Heavisideove funkcije koja poprima vrijednost 1 za $x \geqslant \tau$, a za sve ostale vrijednosti varijable τ je jednaka nuli:

$$u(x-\tau) = \begin{cases} 1, & x \geqslant \tau, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} \tag{3.102}$$

kao i Heavisideovu step funkciju $u(x)$ koju sada možemo definirati s:

$$u(x) = u(x-\tau), \text{ za } \tau = 0. \tag{3.103}$$

Konvolucija funkcije $f(x)$ i $u(x)$ jednaka je:

$$f(x) * u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)u(x-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{x} f(\tau)d\tau, \tag{3.104}$$

što znači da je za dokaz teorema dovoljno promatrati konvoluciju tih dviju funkcija. Prema prethodnom teoremu možemo zapisati sljedeće:

$$\mathcal{F}\{f(x) * u(x)\} = F(\omega)U(\omega), \tag{3.105}$$

pa prema rezultatu primjera **??** dobivamo:

$$\mathcal{F}\{f(x) * u(x)\} = F(\omega)\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right). \tag{3.106}$$

Kako Diracova delta funkcija ima vrijednost samo u nuli, konačno dobivamo:

$$\mathcal{F}\{f(x) * u(x)\} = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega), \tag{3.107}$$

čime je teorem dokazan. □

Moduliranje ili modulacija je postupak mijenjanja amplitude i frekvencije neke funkcije pomoću sinusnih i kosinusnih komponenata. Ovaj se proces koristi u obradi signala u svrhu poboljšanja odziva nekog signala pošto komponenta s kojom moduliramo u praksi ima veću frekvenciju, te ima bolja svojstva širenja prijenosnim medijem. Sljedeći teorem prikazuje kako se moduliranje ponaša u relaciji s Fourierovom transformacijom. Pokazat ćemo da ako neku funkciju $f(x)$ moduliramo sinusoidalnom funkcijom frekvencije ω_0 u vremenskoj domeni, pomičemo spektar signala u frekvencijskoj domeni za vrijednost frekvencije ω_0.

Teorem 3.10 (Svojstvo modularnosti Fourierove transformacije). *Neka je zadana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, te neka je F njezina Fourierova transformacija. Vrijede jednakosti:*

$$\mathcal{F}\{f(x)\sin(\omega_0 x)\} = \frac{1}{2i}F(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2i}F(\omega + \omega_0), \tag{3.108}$$

i

$$\mathcal{F}\{f(x)\cos(\omega_0 x)\} = \frac{1}{2}F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0). \tag{3.109}$$

Dokaz. Koristimo se Eulerovim formulama za raspis sinusa i kosinusa koje glase:

$$\sin(\omega_0 x) = \mathfrak{Im}\{e^{i\omega_0 x}\} = \frac{e^{i\omega_0 x} - e^{-i\omega_0 x}}{2i}, \tag{3.110}$$

$$\cos(\omega_0 x) = \mathfrak{Re}\{e^{i\omega_0 x}\} = \frac{e^{i\omega_0 x} + e^{-i\omega_0 x}}{2}. \tag{3.111}$$

Koristeći svojstvo linearnosti dobivamo:

$$\mathcal{F}\{f(x)\sin(\omega_0 x)\} = \frac{1}{2i}\mathcal{F}\{f(x)e^{i\omega_0 x}\} - \frac{1}{2i}\mathcal{F}\{f(x)e^{-i\omega_0 x}\}. \tag{3.112}$$

Potom primjenom teorema o frekvencijskom pomaku dobivamo:

$$\mathcal{F}\{f(x)\sin(\omega_0 x)\} = \frac{1}{2i}F(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2i}F(\omega + \omega_0). \tag{3.113}$$

Na sličan način možemo i dokazati modularnost signala kosinusoidalnom funkcijom Ponovno, koristeći svojstvo linearnosti dobivamo:

$$\mathcal{F}\{f(x)\cos(\omega_0 x)\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{f(x)e^{i\omega_0 x}\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{f(x)e^{-i\omega_0 x}\}, \tag{3.114}$$

te primjenom teorema o frekvencijskom pomaku slijedi:

$$\mathcal{F}\{f(x)\cos(\omega_0 x)\} = \frac{1}{2}F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0). \tag{3.115}$$

□

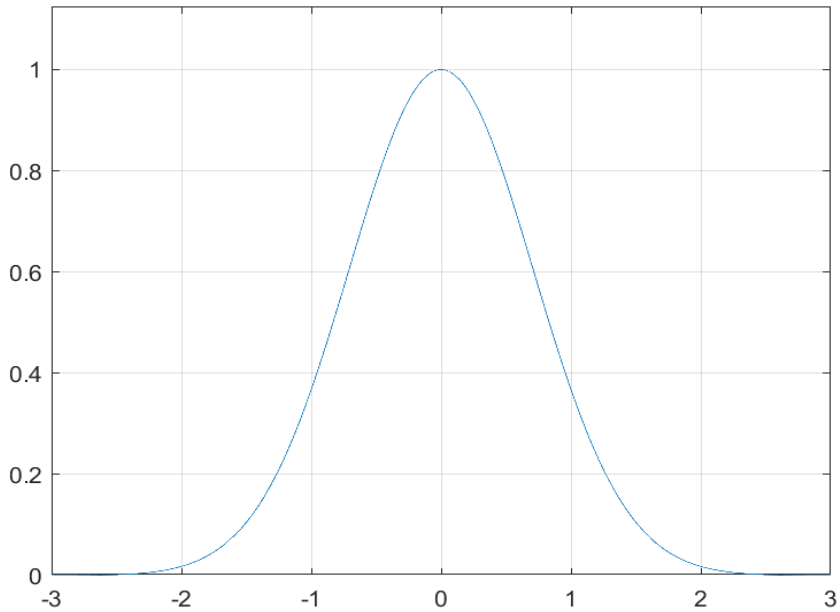
3.5. Fourierova tranformacija Gaussove funkcije

U ovom poglavlju odrediti ćemo Fourierovu transformaciju tzv. Gaussove[2] funkcije koja je izuzetno bitna za rješavanje jednadžbe provođenja topline. Istaknimo da određivanje Fourierove transformacije ove funkcije nije jednostavno i da ćemo u postupku koristiti neke teoreme iz prethodnog poglavlja.

Inače se Gaussova funkcija koristi se modeliranje distribucije normalno distribuiranih slučajnih varijabli, te se naziva još Gaussova prirodna razdioba, a definirana je sljedećim izrazom:

$$f(x) = e^{-ax^2}, \qquad \text{za } a > 0, \tag{3.116}$$

dok je njen grafički prikaz dan na sljedećoj slici:



Slika 3.8. Gaussova funkcija za $a = 1$. Izvor: Izrada autora.

Tijekom izračunavanja Fourierove transformacije Gaussove funkcije nailazimo na jedan složeni nepravi integral kojeg ćemo riješiti u idućoj lemi.

Lema 3.2 (Gaussov integral)**.** *Neka je $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \tag{3.117}$$

Dokaz. Uvedimo oznaku:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx. \tag{3.118}$$

Kvadriranjem ovog izraza i primjenom Fubinijeva teorema dobivamo:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{a(-x^2-y^2)} dx dy. \tag{3.119}$$

[2]Carl Friedrich Gauss (1777. - 1855.) njemački matematičar i fizičar

Prelaskom na polarne koordinate, odnosno supstitucijom za:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \tag{3.120}$$

dobivamo sljedeće:

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} re^{-ar^2} d\phi dr = \int_0^\infty d\phi \int_0^\infty re^{-ar^2} dr = 2\pi \int_0^\infty re^{-ar^2} dr. \tag{3.121}$$

Preostali integral možemo riješiti supstitucijom $-ar^2 = t$, pa je $-2ardr = dt$. Kako bi iskoristili navedenu supstituciju, algebarskom ćemo manipulacijom proširiti podintegralnu funkciju, pri čemu dobivamo:

$$I^2 = -\frac{\pi}{a} \int_0^\infty -2are^{-ar^2} dr = -\frac{\pi}{a} \int_0^{-\infty} e^t dt = -\frac{\pi}{a} e^t \Big|_0^{-\infty} = \frac{\pi}{a}, \tag{3.122}$$

odakle neposredno slijedi tvrdnja leme. □

Odredimo sada Fourierovu transformaciju Gaussove funkcije. Po definiciji Fourierove transformacije imamo:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} e^{-i\omega x} dx. \tag{3.123}$$

Deriviramo li cijeli izraz po varijabli ω dobivamo:

$$\frac{d}{d\omega} F(\omega) = \frac{d}{d\omega} \left[\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} e^{-i\omega x} dx \right]. \tag{3.124}$$

Funkcija s desne strane jednakosti u ω-domeni ovisi o varijabli ω pa dobivamo $F'(\omega)$. Pod integralom jedini član koji ovisi o nezavisnoj varijabli ω je jezgra Fourierovog integrala. Tako dobivamo:

$$F'(\omega) = \int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} \frac{d}{d\omega} \left[e^{-i\omega x} \right] dx, \tag{3.125}$$

odnosno kada sredimo izraz i deriviramo dobivamo:

$$F'(\omega) = -i \int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} x e^{-i\omega x} dx, \tag{3.126}$$

što se u svrhu lakšeg rješavanja može zapisati u obliku:

$$F'(\omega) = -\frac{i}{2a} \int_{-\infty}^\infty 2axe^{-ax^2} e^{-i\omega x} dx. \tag{3.127}$$

Budući je:

$$\frac{d}{dx} \left[e^{-ax^2} \right] = -2axe^{-ax^2}, \tag{3.128}$$

promatrani izraz možemo zapisati u obliku:

$$F'(\omega) = \frac{i}{2a} \int_{-\infty}^\infty \frac{d}{dx} \left[e^{-ax^2} \right] e^{-i\omega x} dx. \tag{3.129}$$

Vidimo da je član pod derivacijom funkcija iz izraza (**??**) čiju Fourierovu transformaciju tražimo. Uvažavajući tu činjenicu, integral možemo zapisati u obliku:

$$F'(\omega) = \frac{i}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx, \tag{3.130}$$

odnosno:

$$F'(\omega) = \frac{i}{2a}\mathcal{F}\{f'(x)\}. \tag{3.131}$$

Sada možemo iskoristiti svojstvo Fourierove transformacije iz Teorema **??**. Slijedi:

$$F'(\omega) = \frac{i}{2a}i\omega F(\omega), \tag{3.132}$$

što sređivanjem prelazi u:

$$F'(\omega) = -\frac{\omega}{2a}F(\omega). \tag{3.133}$$

Ovime smo dobili običnu diferencijalnu jednadžbu koju možemo riješiti metodom separacije varijabli, pa dobivenu diferencijalnu jednadžbu zapisujemo u obliku:

$$\frac{1}{F(\omega)}dF(\omega) = -\frac{\omega}{2a}d\omega. \tag{3.134}$$

Integriranjem ovog izraza slijedi:

$$\int \frac{1}{F(\omega)}dF(\omega) = \int -\frac{\omega}{2a}d\omega. \tag{3.135}$$

odnosno rješavanjem integrala:

$$\ln|F(w)| = -\frac{\omega^2}{4a} + C, \tag{3.136}$$

gdje je $C \in \mathbb{R}$ konstanta integracije. Koristeći svojstva prirodnog logaritma, ovaj se izraz može zapisati u obliku:

$$F(w) = Ce^{-\frac{\omega^2}{4a}}. \tag{3.137}$$

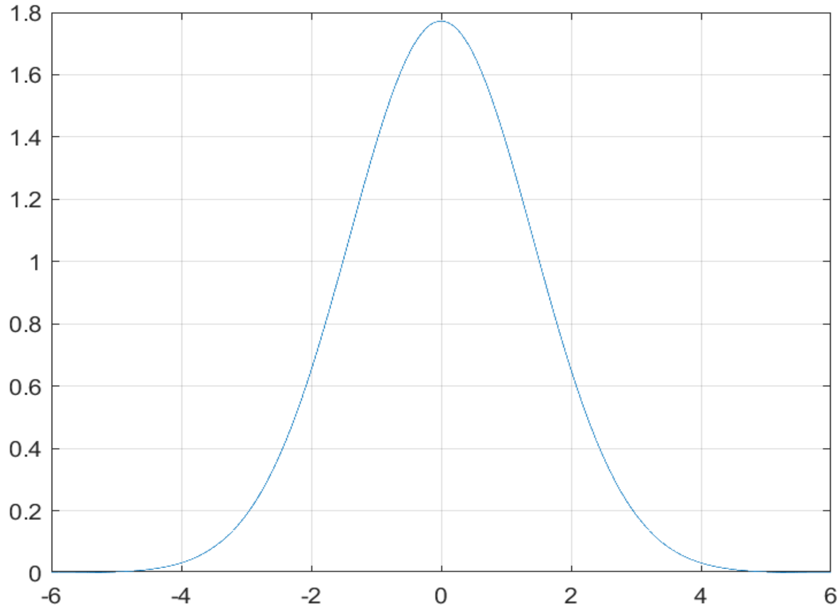
Uočimo da je $F(0) = C$, pa ćemo konstantu C izračunati, ako ω izjednačimo s nula u izrazu (**??**). Primjenom prethodne leme tako slijedi:

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} = C. \tag{3.138}$$

Uvrštavajući vrijednost dobivene konstante C u izraz (**??**) konačno dobivamo Fourierovu transformaciju Gaussove funkcije iz izraza (**??**):

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}, \tag{3.139}$$

čiji je grafički prikaz dan na sljedećoj slici.



Slika 3.9. Fourierova transformacija Gaussove funkcije iz (**??**) *za* $a = 1$*. Izvor: Izrada autora.*

Analizirajući ovaj rezultat možemo uočiti jednu zanimljivu činjenicu. Naime, Fourierova transformacija Gaussove funkcije također je Gaussova funkcija, ali s nešto većom maksimalnom vrijednosti i sporijim padom tj sporijom raspodjelom u vremenu.

4. Jednadžba provođenja topline

U ovom poglavlju ćemo ukratko objasniti što su to parcijalne diferencijalne jednadžbe te proučiti njihovu osnovnu podjelu, te svojstva koja ih opisuju. Na jednom primjeru demonstrirati ćemo postupak rješavanja jedne jednostavne parcijalne diferencijalne jednadžbe. U zadnjem dijelu ovog poglavlja napravit ćemo izvod jednadžbe provođenja topline te objasniti njenu klasifikaciju.

4.1. Općenito o parcijalnim diferencijalnim jednadžbama

Diferencijalne jednadžbe dijelimo na obične i parcijalne diferencijalne jednadžbe. Obična diferencijalna jednadžba je vrsta jednadžbe koja sadrži nepoznatu funkciju koja ovisi samo o jednoj nezavisnoj varijabli, te derivaciju te nepoznate funkcije s obzirom na tu varijablu. Kontrastno, parcijalna diferencijalna jednadžba je vrsta jednadžbe koja u sebi sadrži jednu ili više parcijalnih derivacija nepoznate funkcije $u(x, y)$ s obzirom na varijable x i y, te njezino rješenje, ovisi o barem dvije varijable. Vrlo često ovisi o varijablama x i t kada x označava položaj u prostoru, a t označava vrijeme., pri čemu varijabla x primjerice predstavlja pomak koji ovisi o vremenu y.

Formalnu, parcijalnu diferencijalnu jednadžbu definiramo na sljedeći način.

Definicija 4.1. *Parcijalna diferencijalna jednadžba je jednadžba u obliku:*

$$F(x, y, ..., u, u_x, u_y, ..., u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, ...) = 0. \tag{4.1}$$

za danu funkciju F, gdje je u nepoznata funkcija koja ovisi o nezavisnim varijablama x i y. Parcijalne derivacije nepoznate funkcije s obzirom na te varijable označavamo s:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, ... \tag{4.2}$$

Parcijalne diferencijalne jednadžbe klasificiramo po nekoliko kriterija, što je potrebno pošto prema tim kriterijima moramo odabrati ispravan način za njeno rješavanje. [**?**]

1. **Red:** Red diferencijalne jednadžbe određen je redom najviše derivacije u jednadžbi. Tako je primjerice jednadžba:

   $$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \tag{4.3}$$

   koju zovemo jednodimenzionalna valna jednadžba, parcijalna diferencijalna jednadžba drugog reda.

2. **Broj varijabli:** Pod brojem varijabli mislimo na broj nezavisnih varijabli u jednadžbi. Tako jednadžba:

   $$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \tag{4.4}$$

koju zovemo trodimenzionalna Laplaceova jednadžba, ima tri varijable[1] i drugog je reda.

3. **Linearnost:** Parcijalna diferencijalna jednadžba je linearna ako je linearna u nepoznatoj funkciji i njenoj derivaciji (nisu primjerice kvadrirane ni množene nekim skalarom). Točnije, parcijalna diferencijalna jednadžba drugog reda je linearna ako se može zapisati u obliku:

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x - eu_y + fu = g. \tag{4.5}$$

gdje su a, b, c, d, e, f i g proizvoljne konstante ili funkcije nezavisnih varijabli x i y.

4. **Homogenost:** Linearna parcijalna diferencijalna jednadžba je homogena ako je desna strana jednadžbe (**??**) jednaka nuli, odnosno ako je koeficijent $g = 0$. U protivnom, jednadžba je nehomogena.

5. **Vrsta koeficijenata:** Ako su koeficijenti a, b, c, d, e i f u jednadžbi (**??**) konstante, jednadžba je parcijalna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima, u protivnom je s promjenjivim koeficijentima.

6. **Podskupina jednadžbe:** Sve parcijalne diferencijalne jednadžbe dijelimo u tri glavne podskupine s obzirom na determinantu $\mathcal{D} = b^2 - 4ac$, čije koeficijente uzimamo iz jednadžbe (**??**). Tada jednadžbe klasificiramo na sljedeći način:

   a) **Parabolične:** Opisuju protok topline i difuzijske procese. Primjer:

   $$u_t = u_{xx} \qquad b^2 - 4ac = 0. \tag{4.6}$$

   b) **Hiperbolične:** Opisuju titrajne sustave i valne pojave. Primjer:

   $$u_{tt} = u_{xx} \qquad b^2 - 4ac > 0. \tag{4.7}$$

   c) **Eliptične:** Opisuju stacionarna stanja procesa (*steady-state*). Primjer:

   $$u_{tt} + u_{xx} = 0 \qquad b^2 - 4ac < 0. \tag{4.8}$$

Parcijalne diferencijalne jednadžbe matematički opisuju mnoge procese u fizici poput dinamike fluida, elektriciteta, valnih pojava, magnetizma, elektrodinamike ili što ćemo mi promatrati, protoka topline u vodiču. U elektrostatici parcijalne diferencijalne jednadžbe možemo iskoristiti za opisivnje električnog potencijala ϕ pri danom rasporedu električkog naboja. U kartezijevim koordinatama potencijal je opisan jednadžbom:

$$\Delta\phi = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\phi(x, y, z) = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{4.9}$$

[1] Izraz s lijeve strane znaka jednakosti naziva se još Laplaceov operator ili *Laplacian* i označava se s $\triangle$, definira se kao divergencija (∇) gradijenta funkcije (∇f), $\Delta f = \nabla^2 f$.

gdje je ρ gustoća električnog naboja, ϵ_0 dielektrična permitivnost vakuuma, a Δ već navedeni Laplaceov operator. Ova jednadžba se također naziva i Poissonova[2] parcijalna diferencijalna jednadžba.

Kod rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi ne postoji univerzalna metoda rješavanja, već metode ovise o njihovom tipu, a vrlo često se koriste metode koje mijenjaju parcijalnu diferencijalnu jednadžbu u običnu diferencijalnu jednadžbu. U jednostavnijim slučajevima, parcijalne diferencijalne jednadžbe se mogu riješiti direktnom integracijom ili uvođenjem novih varijabli kao što ćemo vidjeti u sljedećem primjeru.

Primjer 4.1. *Nađimo opće rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe zadane s:*

$$u_x + u_y = 0. \tag{4.10}$$

Zadana jednadžba je linearna, homogena, parcijalna diferencijalna jednadžba prvog reda s dvije varijable i s konstantnim koeficijentima.

Temeljeni princip rješavanja ove jednadžbe leži u pretpostavci da se njeno rješenje $u(x, y)$ može napisati kao produkt dvaju funkcija $\alpha(x)$ i $\beta(y)$, tako da jedna samo o nezavisnoj varijabli x, a druga samo o nezavisnoj varijabli y. Uz danu pretpostavku jednadžbu možemo zapisati na sljedeći način:

$$\beta(y)\alpha'(x) + \alpha(x)\beta'(y) = 0. \tag{4.11}$$

Sada radimo separaciju varijabli, tj. prebacujemo funkcije zavisne o varijabli x na lijevu, te funkcije zavisne o varijabli y na desnu stranu jednadžbe. Dobivamo:

$$\frac{1}{\alpha(x)}\alpha'(x) = -\frac{1}{\beta(y)}\beta'(y). \tag{4.12}$$

Pošto lijeva strana jednakosti ovisi isključivo o nezavisnoj varijabli x, a desna strana jednadžbe o nezavisnoj varijabli y, jedini način da jednadžba ima smisla je da postoji zajednička konstanta $c \in \mathbb{R}$ s kojom se mogu izjednačiti lijeva i desna strana jednakosti, tj. da vrijedi:

$$\frac{1}{\alpha(x)}\alpha'(x) = -\frac{1}{\beta(y)}\beta'(y) = c. \tag{4.13}$$

S ovime smo podijelili parcijalnu diferencijalnu jednadžbu na dvije obične diferencijalne jednadžbe koje su rješive direktnom integracijom.

$$\frac{1}{\alpha(x)}\alpha'(x) = c, \tag{4.14}$$

$$-\frac{1}{\beta(y)}\beta'(y) = c. \tag{4.15}$$

[2]Siméon Denis Poisson (1781. - 1840.) francuski matematičar i fizičar

*Iz jednadžbe (**??**) član pod derivacijom možemo zapisati na drugačiji način pa slijedi:*

$$\frac{1}{\alpha(x)}\frac{d\alpha(x)}{dx} = c. \tag{4.16}$$

Vršimo separaciju varijabli pa dobivamo:

$$\frac{1}{\alpha(x)}d\alpha(x) = cdx. \tag{4.17}$$

Sada integriramo cijeli izraz s lijeve i desne strane s neodređenim integralom.

$$\int \frac{1}{\alpha(x)}d\alpha = \int cdx. \tag{4.18}$$

Rješavanjem integrala dobivamo:

$$\ln|\alpha(x)| = cx + K_1. \tag{4.19}$$

Iz odnosa prirodnog logaritma i eksponencijala možemo zapisati:

$$\alpha(x) = k_1 e^{cx}, \tag{4.20}$$

pri čemu je $k_1 = e^{K_1}$.

*Analogno možemo rješiti i jednadžbu (**??**) pa možemo vidjeti da opća rješenja običnih diferencijalnih jednadžbi (**??**) i (**??**) glase:*

$$\alpha(x) = k_1 e^{cx}, \tag{4.21}$$

$$\beta(y) = k_2 e^{-cy}, \tag{4.22}$$

gdje su $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ *proizvoljne konstante.*

Iz pretpostavke da je rješenje izvorne parcijalne diferencijalne jednadžbe jednak umnošku dvaju funkcija $\alpha(x)$ *i* $\beta(x)$ *dobivamo da je konačno opće rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe jednako:*

$$u(x,y) = \alpha(x)\cdot\beta(y) = k_1 e^{cx}\cdot k_2 e^{-cy}, \tag{4.23}$$

odnosno:

$$u(x,y) = ke^{c(x-y)}, \tag{4.24}$$

gdje je $k = k_1 \cdot k_2, k \in \mathbb{R}$ *proizvoljna konstanta.*

4.2. Izvod jednadžbe provođenja topline

U ovom poglavlju ćemo prikazati kako je izvedena parcijalna diferencijalna jednadžba provođenja topline iz nekoliko pretpostavki, te je ovo poglavlje pisano po [**?**]. Parcijalna diferencijalna jednadžba provođenja topline opisuje promjena topline u vremenu u nekom homogenom tijelu, te se iz nje može odrediti temperatura neke proizvoljne točke tijela u određenom trenutku. Jednadžbu ćemo izvesti prema sljedećim fizikalnim pretpostavkama:

1. Specifični toplinski kapacitet $\sigma,\ [J/kgK]$ i gustoća materijala $\rho,\ [kg/m^3]$ tijela su konstantni, te se toplina ne proizvodi i ne gubi u tijelu.

2. Tok topline u tijelu usmjeren je prema smanjujućoj temperaturi, odnosno stopa protoka proporcionalna je gradijentu temperature, iz čega slijedi da je vektor brzine protoka $\vec{v}$ topline dan u obliku:
$$\vec{v} = -K\,\mathrm{grad}(u), \tag{4.25}$$
gdje je $u(x, y, z, t)$ temperatura tijela u točki s koordinatama (x, y, z) u vremenu t.

3. Toplinska vodljivost K je konstantna za homogene materijale i neekstremne temperature.

Neka je T volumen tijela ograničen plohom S s vektorom normale na površini $\vec{n}$. Tada je:
$$\vec{v}\cdot\vec{n}, \tag{4.26}$$
normalna komponenta protoka topline gdje oznaka $\cdot$ označava skalarni produkt vektora. Slijedi da apsolutna količina topline koja ulazi ili izlazi iz volumena tijela T u jedinici vremena t u nekoj točki P od S kroz mali dio plohe $\triangle S$ površine $\triangle A$ je dana s sljedećim izrazom:
$$|\vec{v}\cdot\vec{n}\triangle A|. \tag{4.27}$$
Ako toplina ulazi u volumen tijela T vrijedi: $\vec{v}\cdot\vec{n} < 0$ u nekoj točki P, odnosno ako toplina izlazi iz volumena tijela tijela T vrijedi $\vec{v}\cdot\vec{n} > 0$ u nekoj točki P. Slijedi da je sveukupna količina topline kroz plohu S iz volumena tijela T dana sljedećim plošnim integralom:
$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dA. \tag{4.28}$$
Kada uvrstimo izraz (**??**) u gornji izraz dobivamo:
$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dA = \iint_S -K\,\mathrm{grad}(u)\cdot\vec{n}\,dA. \tag{4.29}$$
Pošto je K konstanta, te ne ovisi o površini A možemo ju premjestiti ispred integrala pa konačno dobivamo:
$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dA = -K\iint_S \mathrm{grad}(u)\cdot\vec{n}\,dA. \tag{4.30}$$
Kako bi pojednostavili ovaj izraz, moramo upotrijebiti teorem o divergenciji koji daje vezu između plošnog integrala vektorskog polja po zatvorenoj plohi S i trostrukog integrala po području V kojeg ploha S omeđuje. U svrhu lakšeg praćenja teorem navodimo u nastavku.

Teorem 4.1 (**Teorem o divergenciji**). *Neka je $\vec{a}$ zadano vektorsko polje, a S orijentabilna ploha s normalom $\vec{n}$ koja omeđuje volumen V. Tada vrijedi:*
$$\oiint_S \vec{a}\cdot\vec{n}dS = \iiint_V \mathrm{div}(\vec{a})\,dV. \tag{4.31}$$

Integral na lijevoj strani jednakosti u teoremu predstavlja protok vektorskog polja $\vec{a}$ po pozitivno orijentiranoj zatvorenoj plohi, dok je integral na desnoj strani trostruki integral divergencije tog vektorskog polja po području V kojeg ploha S omeđuje. Dakle, primjenom gore navedenog teorema, dobivamo trostruki integral po volumenu tijela T umjesto plošnog integrala po plohi S. Tako vrijedi:

$$\iint\limits_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, dA = -K \iiint\limits_T \operatorname{div}[\operatorname{grad}(u)]\, dxdydz. \tag{4.32}$$

Kod definicije parcijalnih diferencijalnih jednadžbi spomenuli smo pojam Laplaceova operatora ili jednostavnije Laplaciana, te smo ga definirali kao divergencija gradijenta funkcije. U ovom slučaju, pod integralom imamo točno to, Laplacian funkcije u, pa taj izraz možemo zamjeniti oznakom $\nabla^2 u$ odnosno Δu te možemo pisati:

$$\iint\limits_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, dA = -K \iiint\limits_T \Delta u\, dxdydz, \tag{4.33}$$

odnosno prema (**??**), Laplacian je jednak sumi parcijalnih derivacija neke funkcije po Kartezijevim koordinatama:

$$\nabla^2 u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{4.34}$$

Izrazom (**??**) dobili smo količinu topline koja izlazi iz tijela T. Sada modeliramo količinu topline koja se nalazi u tijelu T i označavamo je s H. Vrijedi:

$$H = \iiint\limits_T \sigma\, \rho\, u\, dxdydz, \tag{4.35}$$

gdje su σ i ρ navedeni u prvoj pretpostavki. Slično se može vidjeti iz jednadžbe promjene toplinske energije:

$$Q = mc(T_1 - T_2), \tag{4.36}$$

gdje je m, $[kg]$ masa promatranog tijela, c, $[J/kgK]$ specifični toplinski kapacitet tijela, te se definira kao količina topline potrebna da se tijelu od jednog kilograma promjeni temperatura za jedan stupanj celzijev. T_1 $[K]$ je početna temperatura tijela, dok je T_2 $[K]$ temperatura tijela mase m nakon promjene toplinske energije.

Nadalje, možemo zapisati da promjena, odnosno smanjenje temperature u vremenu u volumenu tijela T kao derivaciju ukupne temperature koja se nalazi u tijelu H po vremenu t. Deriviramo cijeli izraz i dobivamo:

$$-\frac{\partial H}{\partial t} = -\iiint\limits_T \sigma\, \rho\, \frac{\partial u}{\partial t}\, dxdydz. \tag{4.37}$$

Pošto, po pretpostavki 1, toplina se ne gubi i ne stvara u tijelu, ovaj izraz mora biti jednak izrazu (**??**). Zaključujemo da količina topline koja je izašla iz tijela mora biti jednaka promjeni količine topline koja se nalazi u tijelu, odnosno:

$$-\iiint\limits_T \sigma\, \rho\, \frac{\partial u}{\partial t}\, dxdydz = -K \iiint\limits_T \Delta u\, dxdydz, \tag{4.38}$$

pa vrijedi:

$$\iiint_T \left[\sigma\,\rho\,\frac{\partial u}{\partial t} - K\Delta u\right] dxdydz = 0. \tag{4.39}$$

Podijelimo li cijelu jednakost s $\sigma\rho$, te napravimo supstituciju za:

$$c^2 = \frac{K}{\sigma\rho}, \tag{4.40}$$

dobivamo izraz:

$$\iiint_T \left[\frac{\partial u}{\partial t} - c^2\Delta u\right] dxdydz = 0. \tag{4.41}$$

Gornja tvrdnja vrijedi za bilo koji dio volumena tijela T, a kako je integral jednak nuli, ako je integrand jednak nuli, slijedi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c^2\Delta u = 0, \tag{4.42}$$

odnosno:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\Delta u. \tag{4.43}$$

Dobiveni izraz se naziva parcijalna diferencijalna jednadžba provođenja topline. Ona modelira tok topline u homogenom tijelu T u jedinici vremena t, te daje temperaturu $u(x, y, z, t)$ u nekoj točki (x, y, z) tog tijela u jedinici vremena t. Izvedena konstanta c^2 naziva se konstanta toplinske difuzivnosti.

Sa znanjem s početka ovog poglavlja sada možemo klasificirati ovu jednadžbu po navedenim kriterijima. Pošto je najviši stupanj derivacije u jednadžbi dva, zaključujemo da je parcijalna diferencijalna jednadžba provođenja topline drugog reda. Nadalje, tok topline opisan je u svim smjerovima unutar tijela u jedinici vremena što znači da jednadžba sadrži 4 varijable. Jednadžba je linearna jer je zavisna varijabla u linearna te je linearna u svim njenim derivacijama te se ne pojavljuje pod potencijom, te vrijedi svojstvo superpozicije. Jednadžba je homogena, pošto po izrazu (**??**) član g koji ne stoji uz zavisnu varijablu je jednak nuli. Jednadžba u sebi sadrži jednan koeficijent opisan izrazom (**??**), taj koeficijent ne ovisi o nezavisnim varijablama odnosno koeficijent je konstanta. Jednadžba je parabolična po kriteriju $b^2 - 4ac = 0$, čije koeficijente uzimamo iz jednadžbe (**??**), što ćemo kasnije detaljnije objasniti.

5. Rješavanje jednadžbe provođenja topline Fourierovom transformacijom

Prethodno smo napravili izvod parcijalne diferencijalne jednadžbe provođenja topline koja modelira tok topline u volumenu nekog tijela u jedinici vremena. Raspišemo li izraz (**??**), odnosno Laplaceov operator Δ po (**??**), slijedi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]. \tag{5.1}$$

Vidimo iz ove jednadžbe da je tok topline opisan u Kartezijevim[1] koordinatama x, y i z u jedinici vremena t. Mi ćemo u ovom radu proučavati tok topline u vremenu u tankom, beskonačno dugom cilindričnom tijelu, orijentiranom oko osi apscisa, odnosno u nekom vodiču ili žici, kao na sljedećoj slici.

Slika 5.1. Proučavano tijelo. Izvor: izrada autora.

Pretpostavimo li da je tijelo idealno lateralno izolirano, točnije da toplina teče samo u smjeru osi apscisa , što znači da će promjena temperature u smjeru osi ordinata i aplikata, odnosno derivacije po varijablama y i z biti jednake nuli. Dobivamo jednadžbu provođenja topline u jednoj dimenziji, koja modelira tok topline samo u smjeru osi apscisa, te osim varijable vremena t, ovisi samo o varijabli x.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{5.2}$$

ili zapisano kraće:

$$u_t = c^2 u_{xx}. \tag{5.3}$$

Iz gornjeg izraza po jednadžbi (**??**) primjećujemo da su vrijednosti $b = 0$, $a = 1$, te $c = 0$ iz čega slijedi da je $b^2 - 4ac = 0$. Zaključujemo da je parcijalna diferencijalna jednadžba primjer parabolične parcijalne diferencijalne jednadžbe. Pošto smo ograničili tok topline samo u smjeru osi apscisa u jedinici vremena, varijabla sadrži sada samo dvije nezavisne varijable x i t. Ostala svojstva jednadžbe ostaju nepromijenjena kao iz prethodnog poglavlja.

[1] René Descartes (1596. - 1650.), francuski filozof, fizičar i matematičar

5.1. Rješavanje jednadžbe provođenja topline s općenitim početnim uvjetima

Pretpostavimo da promatrano tijelo ima neku početnu temperaturu, odnosno da će u tijelu u trenutku $t = 0$ distribucija temperature biti zadana funkcijom:

$$u(x, 0) = p(x), \tag{5.4}$$

gdje je $p(x)$ proizvoljna funkcija.

Rješavanje parcijalne diferencijalne jednadžbe provođenja topline započinjemo tako da cijeli izraz transformiramo s Fourierovom transformacijom, odnosno vršimo Fourierovu transformaciju lijeve i desne strane jednadžbe (**??**):

$$\mathcal{F}\{u_t\} = \mathcal{F}\{c^2 u_{xx}\}. \tag{5.5}$$

Fourierovu transformaciju u ovom izrazu vršimo kao integralnu transformaciju po prostornoj varijabli x. S desne strane jednakosti transformiramo dvostruku derivaciju funkcije u po varijabli x, pri čemu ćemo primijeniti teorem o Fourierovoj slici derivacije dan izrazom (**??**). Dobivamo sljedeće:

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = c^2 (i\omega)^2 \hat{u}, \tag{5.6}$$

pri čemu je $u(\hat{\omega}, t) = \mathcal{F}\{u(x, t)\}$. Koristeći definiciju imaginarne jedinice $i^2 = -1$, nakon sređivanjem izraza slijedi:

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = -\omega^2 c^2 \hat{u}. \tag{5.7}$$

Važno je primjetiti da smo iz parcijalne diferencijalne jednadžbe (**??**) dobili običnu diferencijalnu jednadžbu koju možemo lako riješiti metodom separacije varijabli, slično kao u primjeru **??**. Dobivamo:

$$\frac{d\hat{u}}{\hat{u}} = -\omega^2 c^2 dt. \tag{5.8}$$

Integriranjem ove jednakosti dobivamo:

$$\int \frac{1}{\hat{u}} d\hat{u} = \int -\omega^2 c^2 dt, \tag{5.9}$$

$$\ln|\hat{u}| = -\omega^2 c^2 t + \ln P(\omega), \tag{5.10}$$

pri čemu je $\ln P(\omega)$ konstanta integracije koja može ovisiti o parametru ω budući se integriralo po varijabli t. Koristeći vezu logaritma i potencije možemo zapisati:

$$\hat{u}(\omega, t) = P(\omega) e^{-\omega^2 c^2 t}. \tag{5.11}$$

Funkciju $P(\omega)$ možemo dobiti ako u izraz (**??**) uvrstimo vrijednost $t = 0$ te iskoristimo početni uvjet. Vrijedi:

$$\hat{u}(\omega, 0) = P(\omega) e^{-\omega^2 c^2 0} = P(\omega), \tag{5.12}$$

odakle zaključujemo da funkcija $P(\omega)$ nije ništa drugo nego Fourierova transformacija početnog uvjeta (**??**). Odnosno vrijedi:

$$P(\omega) = \hat{u}(\omega, 0) = \mathcal{F}\{u(x,0)\} = \mathcal{F}\{p(x)\}. \tag{5.13}$$

Konačno dobivamo:

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{u}(\omega, 0)e^{-\omega^2 c^2 t} = P(\omega)e^{-\omega^2 c^2 t}, \tag{5.14}$$

što je rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe provođenja topline u ω-domeni uz zadani početni uvjet (**??**). Kako bi dobili rješenje u vremenskoj t-domeni, na (**??**) moramo primijeniti inverznu Fourierovu transformaciju, pri čemu ćemo koristiti Teorem (**??**), tj. Teorem o konvoluciji u vremenskoj domeni. Teorem govori da je umnožak Fourierovih transformacija funkcija u frekvencijskoj domeni jednak konvoluciji dvaju funkcija u vremenskoj domeni, pa iz gornjeg izraza slijedi:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{u}(\omega, t)\} = \mathcal{F}^{-1}\{P(\omega)\} * \mathcal{F}^{-1}\{e^{-\omega^2 c^2 t}\}. \tag{5.15}$$

Izraz s lijeve strane jednak je traženom rješenju u vremenskoj domeni, odnosno slijedi:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{u}(\omega, t)\} = u(x,t), \tag{5.16}$$

dok za inverznu Fourierovu transformaciju početnog uvjeta vrijedi:

$$\mathcal{F}^{-1}\{P(\omega)\} = p(x) = u(x, 0). \tag{5.17}$$

Prema tome možemo pisati da je:

$$u(x,t) = u(x,0) * \mathcal{F}^{-1}\{e^{-\omega^2 c^2 t}\}. \tag{5.18}$$

Iz ovog izraza vidimo da je rješenje jednadžbe provođenja topline jednako konvoluciji početnog uvjeta i inverznoj Fourierovoj transformaciji Gaussove funkcije, čiju ćemo inverznu Fourierovu transformaciju odrediti algebarskom manipulacijom izraza (**??**) u kojem je dana Fourierova transformacija Gaussove funkcije. Uvođenjem supstitucije

$$c^2 t = \frac{1}{4a}, \tag{5.19}$$

dobivamo:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-\omega^2 c^2 t}\right\} = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\mathcal{F}^{-1}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}\right\}, \tag{5.20}$$

pa prema (**??**) slijedi:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-\omega^2 c^2 t}\right\} = \sqrt{\frac{a}{\pi}}e^{-ax^2}. \tag{5.21}$$

Iz (**??**) je:

$$a = \frac{1}{4c^2 t}, \tag{5.22}$$

pa dobivamo:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-\omega^2c^2t}\right\} = \sqrt{\frac{\frac{1}{4c^2t}}{\pi}}e^{-\frac{1}{4c^2t}x^2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi c^2t}}e^{-\frac{x^2}{4c^2t}} = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4c^2t}}. \tag{5.23}$$

Uvrstimo li sada ovaj izraz u (**??**), dobivamo:

$$u(x,t) = u(x,0) * \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4c^2t}} = p(x) * \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4c^2t}}, \tag{5.24}$$

što je traženo rješenje problema u t-domeni.

Iz ovog izraza vidimo da će vrijednost topline u promatranom tijelu, kako vrijeme prolazi, opadati i ovisiti o početnoj raspodjeli temperature, te na kraju pasti na nulu. Po definiciji konvolucije slijedi:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)f_2(t-\xi)d\xi, \tag{5.25}$$

odnosno za naš izraz imamo:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4c^2t}}p(\xi)d\xi, \tag{5.26}$$

odnosno:

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4c^2t}}p(\xi)d\xi. \tag{5.27}$$

Ovime smo dobili općenito rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe provođenja topline, neovisno o zadanom početnom uvjetu.

5.2. Rješavanje jednadžbe provođenja topline s Gaussovim početnim uvjetom

U ovom ćemo se dijelu baviti jednadžbom provođenja topline kod koje je početni uvjet, odnosno početna distribucija temperature tijela zadana kao Gaussova funkcija, odnosno početni uvjet je zadan na sljedeći način:

$$p(x) = u(x,0) = e^{-ax^2}, \tag{5.28}$$

Promatrana distribucija temperature za $a = 1$ prikazana je na slici **??**.

Uvrštavanjem (**??**) u (**??**) dobivamo:

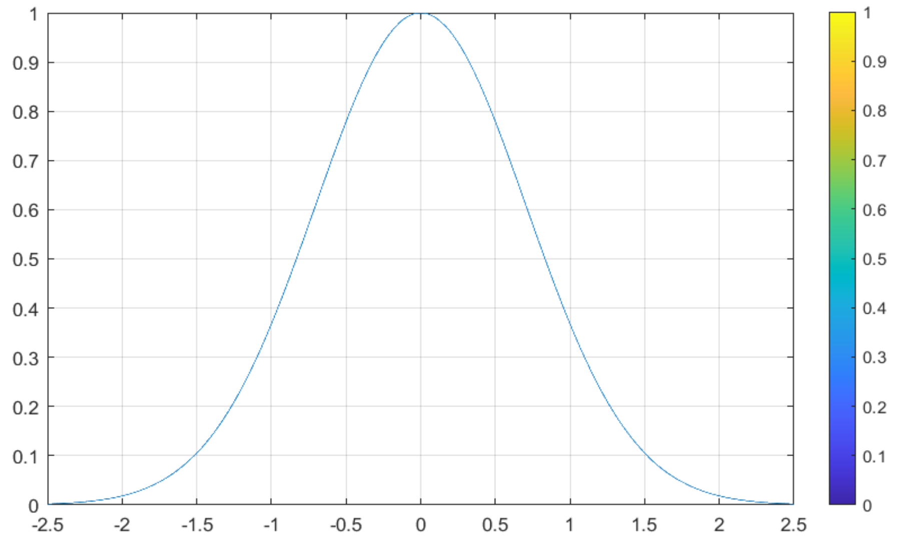
$$u(x,t) = e^{-ax^2} * \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4c^2t}}, \tag{5.29}$$

što se u integralnoj formulaciji zapisuje kao:

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4c^2t}}e^{-a\xi^2}d\xi, \tag{5.30}$$

odnosno:

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4c^2t}-a\xi^2}d\xi. \tag{5.31}$$



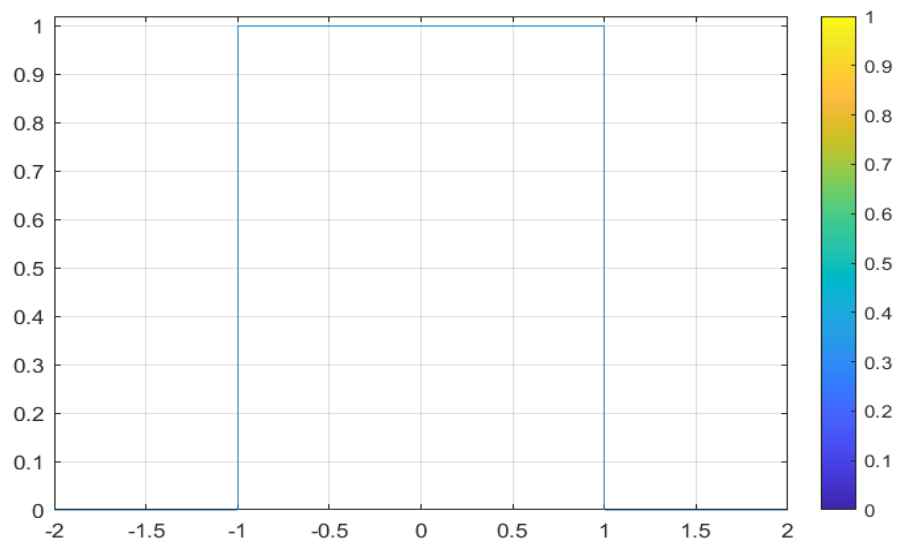
Slika 5.2. Gaussov početni uvjet. Izvor: Izrada autora.

5.3. Rješavanje jednadžbe provođenja topline s početnim uvjetom zadanim pravokutnom funkcijom

U ovom slučaju početnu distribucija temperature zadajemo pravokutnom funkcijom:

$$u(x,0) = \mathrm{rect}\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} 1, & x \leqslant |1|, \\ 0, & x > |1|, \end{cases} \tag{5.32}$$

koja je prikazana na sljedećoj slici.



Slika 5.3. Početni uvjet zadan kao pravokutna funkcija. Izvor: Izrada autora.

Uvrštavanjem ovog izraza u (**??**) dobivamo:

$$u(x,t) = \operatorname{rect}\left(\frac{x}{2}\right) * \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}}, \tag{5.33}$$

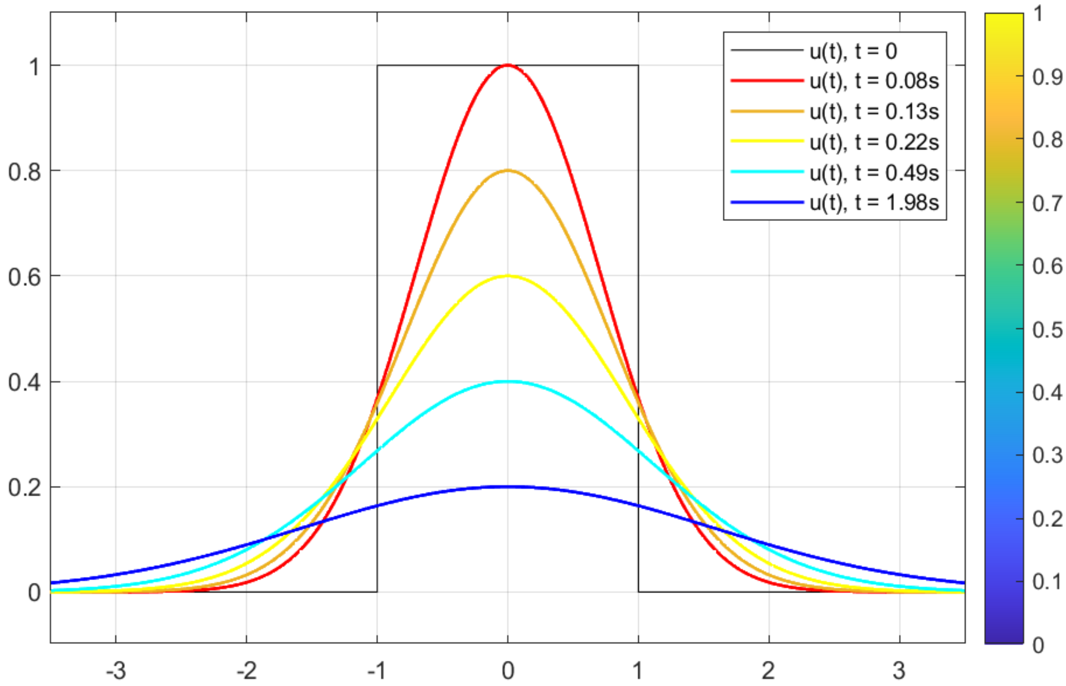
odnosno:

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4c^2 t}} \operatorname{rect}\left(\frac{x}{2}\right) d\xi. \tag{5.34}$$

Kako je pravokutna funkcija različita od nule samo na intervalu $[-1, 1]$, a na tom intervalu jednaka je 1, gornji izraz može se zapisati u obliku:

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4c^2 t}} d\xi. \tag{5.35}$$

Za $c = 1$ dobivamo temperaturu koja se snižava kroz vrijeme te se raspoređuje duljinom vodiča kao na sljedećoj slici:



Slika 5.4. Početni uvjet zadan pravokutnom funkcijom. Izvor: Izrada autora.

6. Zaključak

U ovom radu obrađena je primjena Fourierove transformacije na rješavanje parcijalne diferencijalne jednadžbe provođenja topline u beskonačno dugom vodiču s proizvoljnim početnim uvjetima. Zadatak prije rješavanja jednadžbe provođenja topline je bio objasniti sve elemente Fourierove analize, te svojstva transformacija i parcijalnih diferencijalnih jednadžbi kako bi mogli konačno rješiti jednadžbu.

Započeli smo s definiranjem Fourierovog reda te objasnili njegovu matematičku i fizikalnu primjenu na primjeru razvoja pravokutne funkcije u Fourierov red. Fourierov red mora ispunjavati određene uvjete kako bi uopće razvoj funkcije bio moguć. Ti se uvjeti nazivaju Dirichletovi uvjeti, te su navedeni u nastavku istog poglavlja. U teoriji, samo se periodični signali mogu razviti u Fourierov red, što poprilično ograničava primjenu Fourierovog reda, zato, uvodimo novi alat, Fourierovu transformaciju s kojom proučavamo neperiodične funkcije u vremenu. Fourierovu transformaciju smo dobili direktno iz Fourierovog reda u izvodu koji slijedi u nastavku poglavlja.

Fourierova transformacija je vrsta integralnih transformacija koje smo objasnili u nastavku. Koristimo u svrhu napredne analize funkcija, a služe i za rješavanje složenih diferencijalnih jednadžbi, što je bila tema ovog rada. Kada transformiramo neku jednadžbu ili izraz izlazimo iz vremenske domene, te problem prevodimo u frekvencijsku domenu u kojoj problem postaje jednostavniji. Primjerice, obična diferencijalna jednadžba postaje algebarska, a parcijalna diferencijalna jednadžba postaje obična. Kako bi dobili konačno rješenje transformirane jednadžbe ili izraza u vremenskoj domeni, moramo primijeniti inverznu integralnu transformaciju.

Tijekom rješavanja možemo naići na komplicirane izraze koji su teško rješivi i oduzimaju previše vremena, zato se koristimo svojstvima Fourierove transformacije koja nam olakšavaju cijeli postupak rješavanja, a većinu tih svojstava smo u radu i naveli. Odredili smo Fourierove transformacije nekoliko funkcija, od kojih je posebno važna Fourierova transformacija Gaussove funkcije budući će se koristi kod rješavanje jednadžbe provođenja topline.

U nastavku smo definirali parcijalne diferencijalne jednadžbe te objasnili svojstva i kriterije po kojima se klasificiraju. Parcijalne diferencijalne jednadžbe imaju mnogo metoda rješavanja ali nemaju univerzalnu metodu rješavanja. Tako smo na primjeru jednostavne parcijalne diferencijalne jednadžbe demonstrirali metode direktne integracije i separacije varijabli.

U sljedećem poglavlju smo napravili izvod jednadžbe provođenja topline uz nekoliko pretpostavki. Također smo fizikalno opisali sustav te homogeno tijelo, odnosno vodič u kojem proučavamo distribuciju topline. Pretpostavili smo da je vodič lateralno izoliran, točnije da toplina teče samo u jednom smjeru. Ta pretpostavka omogućava proučavanje distribucije topline u samo jednoj prostornoj dimenziji. Nadalje smo krenuli s rješavanjem jednadžbe primjenom Fourierove transformacije, te iz teško rješive parcijalne diferencijalne jednadžbe, dobili jednostavnu i lako rješivu običnu diferencijalnu jednadžbu. Upravo nam to govori o snazi Fourierove transformacije kao metode rješavanja rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

Pošto vodič u početnom trenutku ima neku početnu vrijednost, morali smo ju uzeti u obzir tijekom rješavanja. Pokazali smo da je rješenje u frekvencijskoj domeni umnožak transformiranog početnog uvjeta i Gaussove funkcije, odnosno u vremenskoj domeni konvolucija početnog uvjeta s Gaussovom funkcijom. U zadnjem dijelu rada analizirali smo dva konkretna početna uvjeta, jedan je bio opisan pomoću pravokutne funkcije, a drugi pomoću Gaussove funkcije.

Možemo zaključiti da je Fourierova transformacija moćan alat za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, konkretno jednodimenzionalne jednadžbe provođenja topline. Ipak treba istaknuti da je dobiveno analitičko rješenje složeno i dano u obliku integrala koji je u pravilu rješiv isključivo numeričkim metodama.

Bibliografija

[1] Stanley J. Farlow: "Partial Differential Equations for Scientists and Engineers", The University of Maine, Dover Publications, INC., New York 1982.

[2] B. Osgood: "Lecture Notes for: The Fourier Transform and its Applications", EE 261, Electrical Engineering Department, Stanford University. 2007.

[3] M. Hollingsworth: "Applications of the Fourier Series", Abstract, Sematic Scholar, 2008.

[4] D. Matijević, S. Poljak: "Fourierov red i Fourierova transformacija", Hrčak Srce, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, 2009.

[5] Alan Chodos: "This Month in Physics History, March 21, 1768: Birth of Jean-Baptiste Joseph Fourier", APS News, Vol 19, No 3, ožujak 2010.

[6] A. Dominguez: "Highlights in the History of the Fourier Transform", IEEE Pulse, s Interneta, https://www.embs.org/pulse/articles/highlights-in-the-history-of-the-fourier-transform/, 25. travnja 2022.

[7] E. Cheever, "The Fourier Series", s Interneta, https://lpsa.swarthmore.edu/Fourier/Series/, 25. travnja 2022.

[8] E. Cheever, "Introduction to the Fourier Transform", s Interneta, https://lpsa.swarthmore.edu/Fourier/Xforms/FXformIntro.html, 25. travnja 2022.

[9] M. DeCross, Steve The Philosophist and J. Khim contributed "Fourier Series", s Interneta, https://brilliant.org/wiki/fourier-series/, 25. travnja 2022.

[10] "Diferencijalne jednadžbe", Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021., s Interneta: http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=15036, 25. travnja 2022.

[11] M. DeCross, Steve The Philosophist and J. Khim contribute "Fourier Series", s Interneta, https://brilliant.org/wiki/fourier-series/, 25. travnja 2022.

[12] M. A. B. Deakin, "Euler's invention of the integral transforms," Springer, New Yourk Arch. Hist. Exact Sci., Vol. 33, pp. 307–319, 1985.

[13] G. P. Tolstov, R. A. Silverman (Preveo) "Fourier Series", Courier-Dover. 1976.

[14] A. Papoulis, "The Fourier Integral and Its Applications", New York: McGraw-Hill, 1962.

[15] J. P. Keener, "Principles of Applied Mathematics: Transformation and Approximation", Boulder, Westview Press, 1995.

[16] J. J. O'Connor, E. F. Robertson, "Jean Baptiste Joseph Fourier", School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland, 1997.

[17] Sophia Rare Books, slika s Interneta https://www.sophiararebooks.com/pages/books/3841/jean-baptiste-joseph-fourier/theorie-analytique-de-la-chaleur

[18] N. Elezović, "Matematika 3: Fourierov red i integral, Laplaceova transformacija", Element, Zagreb, 2008.

[19] I. Ivanšić, "Fourierov red i integral - Diferencijalne jednadžbe", Sveučilišna naklada Liber, Zagreb, 1987.

[20] B.D. Reddy, D. Daya Reddy, "Introductory Functional Analysis: With Applications to Boundary Value", Springer University of Cape Town, 1998.

[21] E. Kreyszig, in collaboration with H. Kreyszig, "Advanced Engineering Mathematics", 10th edition. John Wiley and Sons INC., Ohio State University Columbus, Ohio, 2011.

Sažetak i ključne riječi

U radu je obrađena primjena Fourierove transformacija na rješavanje parcijalne diferencijalne jednadžbe provođenja topline. Na početku rada smo objasnili Fourierov red te na primjeru pravokutne funkcije pokazali kako neperiodičnu funkciju možemo razviti u Fourierov red. Napravili smo izvod Fourierove transformacije iz Fourierovog reda, te u nastavku objasnili što su to integralne transformacije. Nadalje smo definirali Fourierov integral i Fourierovu transformaciju te objasnili ključna svojstva Fourierove transformacije koja smo primijenili u transformiranju nekoliko jednostavnih funkcija kao što su eksponencijalna, pravokutna i Gaussova funkcija. U nastavku smo ukratko opisali parcijalne diferencijalne jednadžbe, te objasnili po kojim se kriterijima te jednadžbe klasificiraju, a potom klasificirali i riješili jednu jednostavnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu. Napravili smo izvod parcijalne diferencijalne jednadžbe provođenja topline te ju klasificirali po navedenim kriterijima. Konačno smo riješili jednadžbu provođenja topline Fourierovom transformacijom te pokazali razliku u rješenjima ovisno o različitim početnim uvjetima.

Ključne riječi: Fourier, Fourierov red, Fourierova transformacija, toplina, integralna transformacija, parcijalna diferencijalna jednadžba, provođenje topline

Summary and key words

In this paper we study the application of the Fourier transform to the solution of the partial differential equation of heat conduction. At the beginning of the paper, we explained the Fourier series and used the example of a rectangular function to show how a nonperiodic function can be evolved into a Fourier series. We made an extract of the Fourier transform from the Fourier series and explained what integral transforms are. Furthermore, we defined the Fourier integral and the Fourier transform in more detail and explained the most important properties of the Fourier transform, which we applied to the transformation of several simple functions such as the exponential function, rectangular function and the Gaussian function. Next, we briefly studied partial differential equations and described the criteria by which these equations are classified, then used the knowledge we learned to classify and solve an example of a simple partial differential equation. We made a derivation of the partial differential equation of heat conduction and classified it according to the criteria mentioned. Finally, we solved the heat conduction equation by Fourier transform and showed the difference in the solutions depending on the different initial conditions.

Keywords: Fourier, Fourier series, Fourier transform, heat, integral transform, partial differential equation, heat transfer