SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

MELLINOVA TRANSFORMACIJA

Rijeka, srpanj 2022.

Ivan Brusić
00690847808

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

MELLINOVA TRANSFORMACIJA

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Dražić

Rijeka, veljača 2022.

Ivan Brusić
00690847808

SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET
POVJERENSTVO ZA ZAVRŠNE ISPITE

Rijeka, 18. ožujka 2022.

Zavod: **Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike**
Predmet: **Inženjerska matematika ET**
Grana: **1.01.07 primijenjena matematika i matematičko modeliranje**

ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Ivan Brusić (0069084780)**
Studij: Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Zadatak: **Mellinova transformacija // Mellin transformation**

Opis zadatka:

U radu je potrebno precizno definirati Mellinovu transformaciju kao specijalan slučaj integralne transformacije. Zatim je potrebno iskazati i dokazati najvažnija svojstva Mellinove transformacije. Mellinovu transformaciju potrebno je staviti u povijesni kontekst te u kontekst primjene u inženjerstvu s naglaskom na primjene u elektrotehnici.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Zadatak uručen pristupniku: 21. ožujka 2022.

Mentor:

Doc. dr. sc. Ivan Dražić

Predsjednik povjerenstva za završni ispit:

Prof. dr. sc. Viktor Sučić

IZJAVA

Sukladno članku 8. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku predDiplomskih sveučilišnih studija/stručnih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 1. veljače 2020., izjavljujem da sam samostalno izradio završni rad prema zadatku preuzetom dana 21.03.2022.

Rijeka, 12.07.2022

Ivan Brusić

Ovim putem želim se zahvaliti svojoj obitelji i prijateljima koji su bili uz mene u teškim i sretnim trenutcima ovog puta. Također želio bih se zahvaliti i doc. dr. sc. Ivanu Dražiću mentoru koji me pratio kroz ovaj rad, nesebično djelio svoje znanje te još jednom dokazao koliko mu je stalo do svojih studenata. Siguran sam da bez podrške i vjerovanja ovih ljudi ovaj uspjeh nebi bio moguć stoga ću im na tom doprinosu zauvjek biti zahvalan. Nakraju se želim zahvaliti dragom Bogu na ovakvoj obitelji i prijateljima. Hvala svima!!

Sadržaj

1. Uvod

U ovom radu baviti ćemo se proučavanjem integralnih transformacija, te pokušati prikazati koliko su one ustvari bitne u inženjerstvu. Razlikujemo više integralnih transformacija, no proučavati ćemo Mellinove transformacije, te se upoznati s osnovama Fourierove i Laplaceove transformacije. razumijevanje Fourierove i Laplaceove transformacije neophodno je da bi razumjeli Mellinovu transformaciju.

U prvom poglavlju upoznati ćemo se s izumiteljem ove transformacije Robertom Hjamarom Mellinom, njegovim životnom te njegovim postignućima za života. U sljedećem poglavlju pokušati ćemo prikazati što su diferencijalne jednadžbe te zašto pri njihovom rješavanju koristimo integralne transformacije U trećem poglavlju detaljnije ćemo se upoznati s integralnim transformacijama te definirati jezgre pojedinih transformacija.

U nastavku proučavati ćemo Gama i Beta funkciju te prikazati područje na kojem će Mellinova transformacija egzistirati. Također u ovom poglavlju ćemo opisati neka svojstva Mellinove transformacije, te izvesti Mellinove transformacije nekih elementarnih funkcija. Uz to promatrati ćemo i Mellinovu transformaciju Heavisidove i Diracove funkcije.

U zadnjem poglavlju prikazati ćemo primjenu Mellinovih transformacije, njihovu upotrebu kod mjernih instrumenata te primjenu kod analize strujnih krugova.

2. Robert Hjalmar Mellin

Izumitelj transformacije koju ćemo proučavati je finski matematičar Robert Hjalmar Mellin. Mellin je rođen 19.6.1854. u gradu Liminka u sjevernoj regiji Ostrobozhnia u Finskoj. Njegov otac Gustaf Robert Mellin (1826-1880) bio je učitelj no kasnije postaje svećenik. Zbog svoje službe često se selio sve do 1862. kada postaje kapelan u Sievi. Zbog problema s alkoholom 1864. razriješen je dužnosti te 1866. izbačen iz svećeništva. Nakon toga zapošljava se kao prevoditelj te upoznaje Sofiu Augustu Thermén, sestru državnog vijećnika Karla Otta Therména te je s njom imao četvero djece, a najstariji je bio Hjalmar Robert Mellin.

Mellin je imao dvije kćeri i sina, a tokom svog života ženio se dvaput. Njegova prva žena bila je Hilda Koskinen koja umire relativno mlada. Nakon ženine smrti Mellin se 1917, godine ponovno oženio sa Hildom Mariom Petrol, no sa njom nije imao više djece. Hjamar je odrastao i započeo svoje školovanje u Hameenlinnu, te je daljnje školovanje nastavio na Sveučilištu Helsinki. Uz matematiku i fiziku pohađao je i ostale predmete kao što su astronomija, botanika te povijest sjevernih zemalja.

Mellinovo zanimanje za teoriju funkcija potaknuo je njegov profesor i matematičar Mittag-Leffler. Dokaz tome nam je njegov doktorat u kojem je promatrao algebarske funkcije jedne kompleksne varijable te mu je mentor bio upravo Mittag-Leffler. Svoje školovanje Mellin je nastavio u Stockholmu gdje postaje i docent, no nikad nije predavao. U isto vrijeme postaje i predavač na novo osnovanom Politehničkom fakultetu u Helsinkiju koji poslije postaje poznat kao Technical University of Finland. Od 1904. do 1907. Mellin je bio direktor Politehničkog instituta te 1908. postao prvi profesor matematike na novom sveučilištu, na kojem ostaje sve do svoje mirovine.

Hjalmar Mellin osim što je bio i znanstvenik bio je poznat po svojoj borbi za Finski jezik i kulturu. Naime Finska je tijekom svoje povijesti pripadala pod Švedsku no nakon Napoleonovih ratova te Prvog svjetskog rata Finska je postala nezavisna država. Mellin kao direktor Politehničkog instituta i kao strastveni borac za finski jezik iz protesta ispred zgrade Politehničkog instituta uz natpis napisan na Švedskom jeziku napisao i natpis na finskom. To je naljutilo njegove kolege te je godinu dana nakon toga odstupio od mjesta direktora, no uz nastavio je predavati na sveučilištu sve do svoje 72-e godine kada se umirovio.

Kao učitelj Mellin je opisan kao strastveni predavač koji je često ulazio u rasprave sa svojim studentima u želji da im što bolje objesni određene teme. Nije nam poznato jeli bio strog i je li zahtijevao mnogo no zapamćen je kao izvrstan predavač. Uz posao njegova velika strast bila je i obitelj, stoga nikad nije volio javno se isticati te se činio dosta sramežljiv. U svoje slobodno vrijeme, iako ga nije puno imao volio je biciklirati i jedriti. Melin je ujedno i jedan od osnivača Finske akademije znanosti i književnosti te je aktivno sudjelovao u zastupanju svoje države sve do svoje smrti.

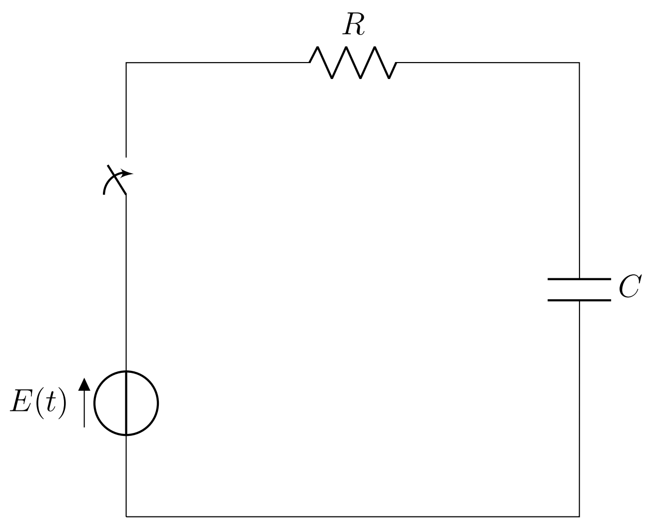
Zadnje desetljeće svog života Mellin je proučavao Einstenovu teoriju relativnosti. U svojim sedamtesetim objavio je 10 radova u kojima ukazuje na probleme u Einsteinovom pristupu, i to samo pokazuje koliko zanimanje i želju je imao zananost te njen razvitak. Nažalost Mellin nije uspio dokazati te svoje tvrdnje te 1933 godine umire u svojoj 79-oj godini života.

Slika 2.1. Hjalmar Mellin; Izvor: europeana.eu

3. Primjena integralnih transformacija na rješavanje diferencijalnih jednadžbi

Da bismo se bolje upoznali s integralnim transformacijama te Mellinovim transformacijama koje ćemo u ovom djelu proučavati potrebno je razumjeti razlog zašto su nam te transformacije potrebne te gdje ih koristiti, a jedna od najznačajnihih primjena integralnih transformacija je upravo u području rješavanja diferencijalnih jednadžbi. Većina se integralnih transformacija može iskoristiti za tu svrhu, no ipak se najviše koriste Laplaceove transformacije.

Korištenje diferencijalnih jednadžbi vrlo je često u svim granama inžinjerstva iz razloga što se pomoću njih opisuje veći broj fizikalnih i inženjerskih modela. U elektrothehnici najbolje to možemo prikazati na strujnom krugu koji se sastoji od otpornika, kondenzatora i izvora.



Slika 3.1. RC spoj

Na slici 3.1 možemo vidjeti zadani RC spoj sa varijablinim naponom izvora. Kako bi odredili struju u tom strujnom krugu primjenjujemo 2. Kirchhoffov zakon koji kaže da je zbroj padova napona na otporniku i kondenzatoru u zatvorenoj petlji jednak naponu izvora.

Za napon na otporniku koristimo Ohmov zakon

$$U_R(t) = i(t) \cdot R, \tag{3.1}$$

gdje je $U_R(t)$ napon na otporniku, $i(t)$ jakost struje, a R iznos otpora, dok za napon na kondenzatoru koristimo definiciju kapaciteta kondenzatora, odnosno vrijedi:

$$U_C(t) = \frac{q(t)}{C}, \tag{3.2}$$

pri čemu je $U_C(t)$ napon na kondenzatoru, $q(t)$ količina naboja, a C kapacitet kondenzatora. Tako vrijedi:

$$E(t) = U_R(t) + U_C(t), \tag{3.3}$$

pa primjenom navedenih izraza dolazimo dolazimo do sljedeće jednadžbe:

$$R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C} = E(t). \tag{3.4}$$

Iz definicije struje slijedi:

$$i(t) = q'(t), \tag{3.5}$$

odnosno

$$q(t) = \int\limits_0^t i(t)dt \tag{3.6}$$

te tako navedena diferencijalna jednadžba postaje integralna jednadžba:

$$i(t) \cdot R + \frac{1}{C}\int\limits_0^t i(\tau)d\tau = E(t). \tag{3.7}$$

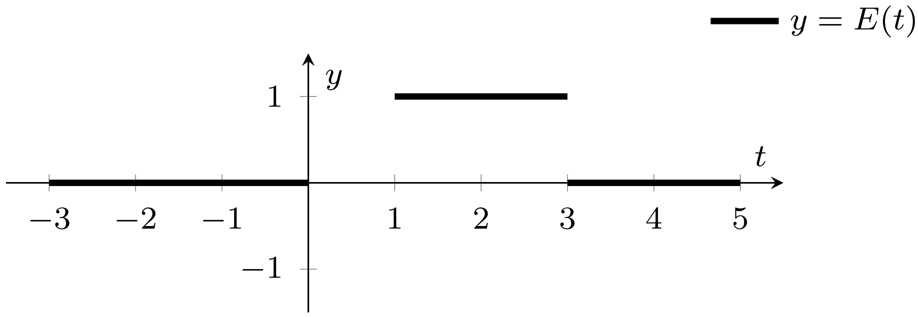
Ova jednadžba mogla bi se riješiti deriviranjem, pri čemu bi se dobila diferencijalna jednadžba oblika:

$$i'(t) \cdot R + \frac{1}{C} i(t) = E'(t). \tag{3.8}$$

Međutim, ako je napon izvora funkcija zadana s

$$E(t) = \begin{cases} 0, \text{ za } t < 1 \\ 1, \text{ za } 1 \leq t \leq 3 \\ 0, \text{ za } t > 3 \end{cases}, \tag{3.9}$$

rješavanje ove jednadžbe ne bi bilo moguće budući bi trebalo derivirati funkciju koja nije derivabilna. Naime, kako sa sljedećeg grafičkog prikaza vidimo kod funkcije $E(t)$ prisutni su skokovi, a derivacija funkcije nije definirana u točkama u kojima funkcija ima prekid.



Slika 3.2. Grafički prikaz funkcije $E(t)$

Spomenutom problemu možemo pristupiti transformacijskom metodom, tj. da se čitav problem prevede u domenu kod koje ne postoje matematički kompleksne operacije poput deriviranja i integriranja.

Primjerice, kod Laplaceove transformacije vrijede sljedeća svojstva koja dokazuju tu tvrdnju.

Sljedeći teorem govori da se Laplaceovom transformacijom deriviranje svodi na množenje s varijablom.

Teorem 3.1 (Teorem o slici derivacije)**.** *Ako je* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$*, tada je*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f(0) + sF(s). \tag{3.10}$$

U idućem teoremu ćem vidjeti da se Laplaceovom trasformacijom integriranje svodi na dijeljenje s varijablom.

Teorem 3.2 (Teorem o slici integrala)**.** *Ako je* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$*, tada je*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}. \tag{3.11}$$

4. Integralne transformacije

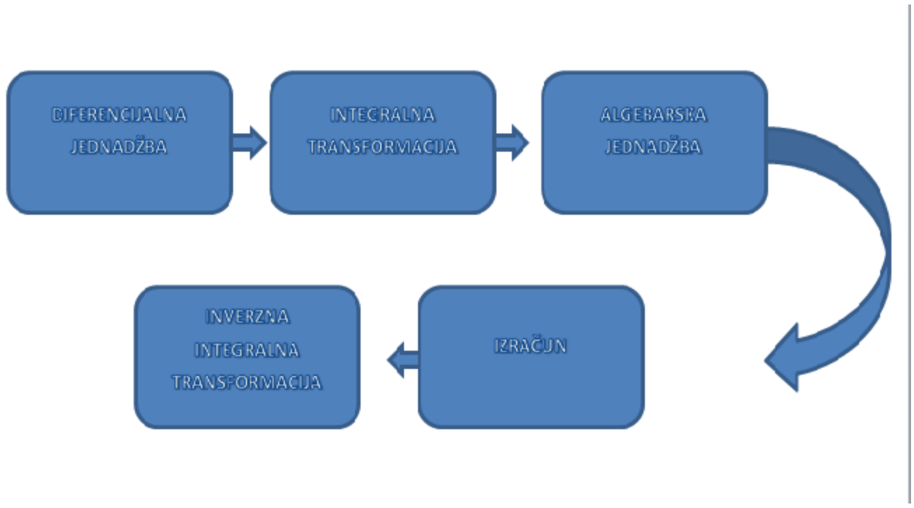
U sklopu ovog pogljava definirati ćemo integralne transformacije i navesti njihova temeljna svojstva.

4.1. Integralne transformacije

U raznim izračunima te pri raznim postupcima uvijek težimo nekoj jednostavnosti, te pokušavamo u svakom koraku izračuna pojednostaviti i skratiti postupak radi lakšeg i bržeg računanja. Ujedno što je postupak izračuna kraći i jednostavniji vjerojatnost pogreške je puno manja.

Funkcije predstavljaju fizikalne veličine, a deriviranjem funkcija modeliramo brzinu promjene fizikalne veličine. Izrazi koji povezuju funkcije i njihove derivacije nazivaju se diferencijalne jednadžbe. U svim granama inženjerstva diferencijalne jednadžbe predstavljaju veliku ulogu te je njihova upotreba česta, no problem predstavlja njihovo rješavanje. Rješenje tog problema je korištenje integralnih transformacija.

Postojeću diferencijalnu jednadžbu predstavljenu kao složeni matematički model korištenjem integralne transformacije pretvaramo u jednostavniji model te nakon izračuna pomoću inverzne integralne transformacije vraćamo u prvobitni oblik. Često će tako parcijalna diferencijalna jednadžba postati obična, a obična diferencijalna jednadžba postati će algebarska.



Slika 4.1. Grafički prikaz integralnih transformacija; Izvor: Izrada autora

4.2. Definicija integralne transformacije

Sada možemo i formalno definirati integralnu transformaciju.

Definicija 4.1. *Integralna transformacija kompleksne funkcije realne varijable $t \mapsto f(t)$ definiran je izrazom*

$$\mathcal{T}f(t) = F(s) = \int_a^b K(s,t) \cdot f(t)\, dt, \tag{4.1}$$

pri čemu je K kompleksna funkcija koju zovemo jezgrom transformacije, f ćemo zvati originalom, a F slikom.

Treba napomenuti da integral u definiciji integralne transformacije može biti i nepravi, odnosno može konverigati i divergirati. Da bi definicija imala smisla taj integral mora konvergirati.

Područje na kojem je definirana funkcija $f(t)$ često se naziva t ili vremenska domena, dok je područje definicije transformirane funkcije nazvano s ili frekvencijska domena. Brojevi a i b pripadaju intervalu $[-\infty, \infty]$.

U praksi se koristi veći broj integralnih transformacija, najčešće se koriste sljedeće:

1. Laplaceova transformacija $\mathcal{L}$:

$$a = 0, b = +\infty, K(s,t) = e^{-st} \tag{4.2}$$

2. Fourierova transformacija $\mathcal{F}$:

$$a = -\infty, b = +\infty, K(s,t) = \frac{1}{\sqrt{2pi}} e^{-st} \tag{4.3}$$

3.Mellinova transformacija $\mathcal{M}$:

$$a = 0, b = +\infty, K(s,t) = t^{s-1} \tag{4.4}$$

U elektrotehnici se Laplaceova i Fourierova transformacija češće upotrebljuju nego Mellinova.

4.3. Fourierova transformacija

Fourierova transformacija je integralna transformacija pomoću koje signal iz jedne varijable prelazi u signal neke druge varijabla. Taj prelazak u inžinjerstvu prikazuje se kao prijelaz iz vremenske u frekvencijsku domenu. Također, Fourierova transformacija može se koristiti i za rješavanje diferencijalnih jednadžbi.

Fourierova transformacija izvodi se iz Furierovog integrala na sljedeći način:

$$F_{iK}(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cdot e^{j\omega(x-v)}\, dv\, d\omega, \tag{4.5}$$

što se može zapisati u obliku:

$$F_{iK}(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cdot e^{-j\omega v} \, dv \right] \cdot e^{j\omega x} \, d\omega. \tag{4.6}$$

Promatramo izraz u zagradi

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cdot e^{-j\omega v} \, dv, \tag{4.7}$$

Korištenjem supstitucije $v = x$, zapisuje se

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-j\omega x} \, dx. \tag{4.8}$$

te upravo izraz (5.1) predstavlja Fourierovu transformaciju.

Iz općeg zapisa integralne transformacije vidimo da je jezgra Fourierove transformacije (5.1) jednaka

$$K(S,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-j\omega x}, \tag{4.9}$$

s granicama integracije

$$a = -\infty \qquad b = \infty. \tag{4.10}$$

4.4. Laplaceova transformacija

Laplaceova transformacija važan je matematički alat koji je prvenstveno namijenjen za rješavanje diferencijalnih jednadžbi i povezanih problema s kojima se u matematici i fizici svakodnevno susrećemo. Izrazito je korisna pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi prvog i drugog reda iako ju primjenjujemo i na diferencijalne jedandžbe viših redova, kao i na parcijalne diferencijalne jednadžbe. Laplaceova transformacija se kao i sve ostale transformacije tumači kao prelazak iz vremenske u frekvencijsku domenu no taj prijelaz kod Laplaceove transformacije nije toliko očit.

Kod Laplaceove transformacije granice integralne stransformacije su $\alpha = 0$ i $\beta = \infty$, te je jezgra opisana kao e^{-st} . Dakle Laplaceova transformacija definirana je kao:

$$\mathcal{L}(s) = \int_{0}^{\infty} f(x) \cdot e^{-st} \, dx. \tag{4.11}$$

Laplaceova transformacija nije uvijek moguća, stoga da bi Laplaceova transformacija funkcije $f : [0, \infty] \to \mathcal{C}$ postojala, moraju biti ispunjeni sljedeći uvjeti.

- Funkcija f je po djelovima neprekidna s najviše prebrojivo prekida prve vrste.
- Funkcija f je funkcija eksponencijalnog rasta.

Pokažimo na jednom primjeru kako se izračunava Laplaceova transformacija.

Odredimo Laplaceovu transformaciju eksponencijalne funkcije $t \mapsto e^t$, koja je neprekidna i očito eksponencijalnog rasta te njena transformacija postoji. Imamo:

$$\mathcal{L}\{e^t\} = \int\limits_0^\infty e^t e^{-st} dt = \int\limits_0^\infty e^{(1-s)t} dt = \frac{1}{1-s} e^{(1-s)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s-1}, \tag{4.12}$$

za $s > 1$ (ili ispravnije $Re(s) > 1$).

Za Laplaceovu transformaciju funkcije $t \mapsto e^{-t}$ imamo

$$\mathcal{L}\{e^{-t}\} = \int\limits_0^\infty e^{-t} e^{-st} dt = \int\limits_0^\infty e^{-(1+s)t} dt = \frac{-1}{1+s} e^{-(1+s)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s+1}, \tag{4.13}$$

za $s > -1$ (ili ispravnije $Re(s) > -1$).

5. Mellinove transformacije

U prethodnom poglavlju opisali smo integralne funkcije, njihove jezgre i granice te naveli da za Mellinovu transformaciju vrijedi:

$$\mathcal{M}\left\{f(t)\right\} = F(s) = \int_0^\infty t^{s-1} f(t) dt. \tag{5.1}$$

5.1. Gama funkcija

Da bismo bolje razumjeli Mellinove transformacije potrebno je upoznati se sa gama funkcijama iz razloga što se upravo one pojavljuju u nekim svojstvima Mellinovih transformacija.

Definicija 5.1. *Gama funkcija definirana je sljedećim izrazom*

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt. \tag{5.2}$$

Gama funkcija poznata nam je iz Eulerovih radova gdje se pokušava generalizirati faktorijel na brojeve koji nisu prirodni. Gama funkcija nije definirana za negativne cijele brojeve, no definirana je za sve kompleksne brojeve.
Na Slika 5.1 možemo vidjeti grafički prikaz gama funkcije

Povezanost Mellinove transformacije i gama funkcije prikazana je sljedećim izrazom.

$$\Gamma(s) = \mathcal{M}\left\{e^{-t}\right\} \tag{5.3}$$

Kako smo već prije naveli gama funkcija se u Eulerovim radovima uvela kao generalizacija faktorijela te za prirodni argument vrijedi:

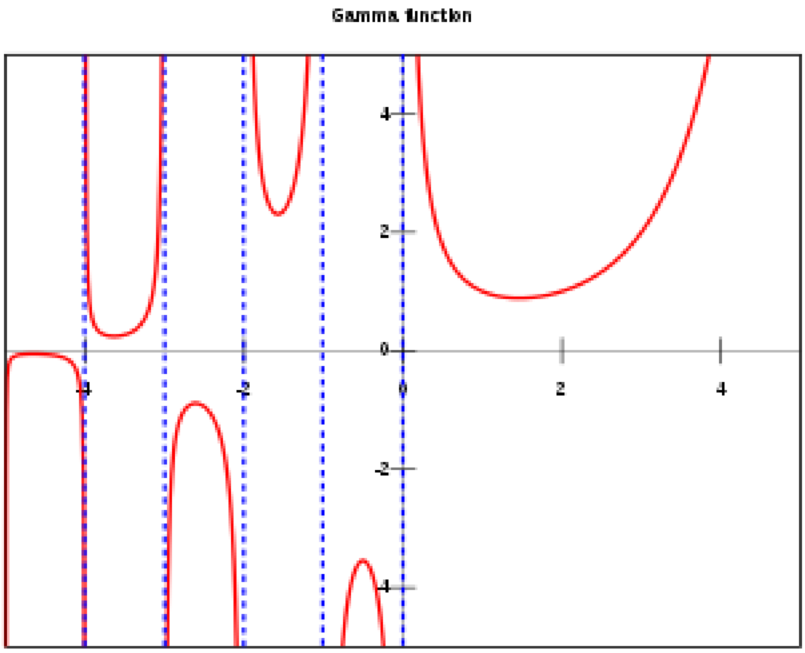
$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n \cdot (n-1) ... 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n! \tag{5.4}$$

Razlikujemo više svojstva gama funkcije no u ovom radu koristit ćemo se sljedećim izrazom:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}. \tag{5.5}$$

5.2. Beta funkcija

Uz gama funkciju koristiti ćemo i beta funkciju koja je često koristi se često povezuje s gama funkcijom.



Slika 5.1. Gama funkcija; Izvor:mathos.unios.hr

Definicija 5.2. *Beta funkcija definirana je sljedećim izrazom*

$$B(x,y)(s) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt. \tag{5.6}$$

Dokaz da su gama i beta funkcija povezane vidimo iz sljedećeg izraza:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{5.7}$$

Na slici 5.2 možemo vidjeti grafički prikaz beta funkcije:

5.3. Egzistencija Mellinove transformacije

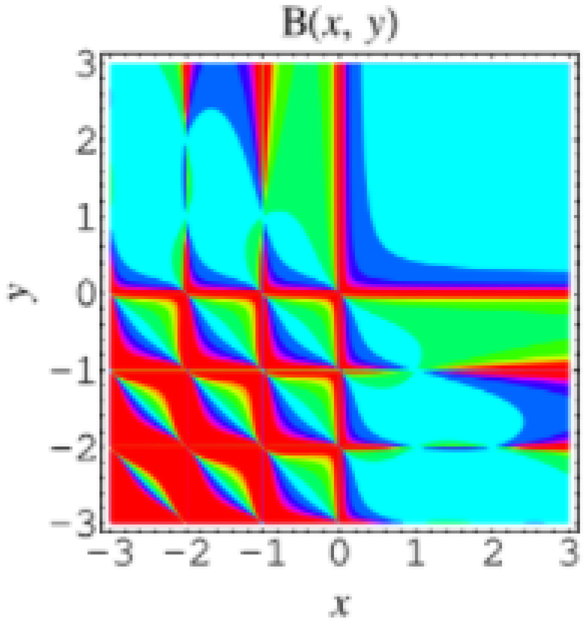
Da bi Mellinova transformacija bila moguća moramo opisati područje u kojem će egzistirati pa ćemo uvesti vrpcu koja se nalazi u kompleksnoj ravnini te je prikazana u sljedećoj definiciji

Definicija 5.3. *Vrpca Sab je skup iz* $\mathbb{C}$ *definiran s*

$$Sab = \{z = x + yi \in \mathbb{C}\; a < x < b, y \in \mathbb{R}\}. \tag{5.8}$$

Mellinova transformacija neke funkcije će egzistirati ako postiji vrpca na kojoj je ta funkcija definirana, da bi ona postojala ujedino mora biti zadovoljen i sljedeći teorem.

Teorem 5.1. *Ukoliko funkcija f zadovoljava sljedeće uvjete Mellinova transformacija te funkcije bit će definirana na vrpci Sab*



Slika 5.2. Beta funkcija; Izvor: malishoaib.wordpress.com

$$1.f(x) = \mathcal{O}(x^{-a}) kad\ x \to 0^+,$$
$$2.f(x) = \mathcal{O}(x^{-b}) kad\ x \to +\infty$$

U sljedećoj definiciji objaniti ćemo asimptotsku notaciju korištenu u predhodnom teoremu.

Definicija 5.4. *Za funkciju f(x) pišemo f(x)=$\mathcal{O}$(g(x)) ako i samo ako postoje pozitivan broj M i realan broj x_0 tako da vrijedi*

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \tag{5.9}$$

za sve x$\leq x_0$.

Dakle možemo zaključiti da npr. fukcija $x \to x^2$ nema svoju Mellinovu transformaciju.

5.4. Svojstva Mellinove transformacije

U sljedećim Teoremima dokazati ćemo neka od najvažnijih svojstava Mellinove transformacije. Započinjemo s teoremom koji govori o skaliranju varijable originala.

Teorem 5.2. *Ako je f(t) funkcija čija je Mellinova transformacija F(s)=$\mathcal{M}$ $\{f(t)\}$ te ako je a pozitivan realni broj. Sljedi:*

$$\mathcal{M}\{f(at)\} = a^{-s}F(s) \tag{5.10}$$

Dokaz

Ukoliko koristimo Mellinovu transformaciju dobivamo:

$$\mathcal{M}\left\{f(t)\right\} = F(s) = \int\limits_0^\infty t^{s-1} f(t)dt. \tag{5.11}$$

U integral uvodimo supstituciju $at = u$ te dobivamo

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left\{f(t)\right\} = F(s) &= \int\limits_0^\infty f(u)(\frac{u}{a})^{s-1}\frac{du}{a} \\ &= a^{-s}\int\limits_0^\infty t^{s-1} f(u)dt \\ &= a^{-s}F(s)\end{aligned} \tag{5.12}$$

Time smo dokazali da je navedena tvrdnja istinita.

Korolar 5.1. *Dana je funkcija f(t) te je njena transformacija F(s)=*$\mathcal{M}\ \left\{f(t)\right\}$ *, odabiremo realni parametar* Θ *tako da navedena transformacija postoji. Vrijedi:*

$$\mathcal{M}\left\{f(te^{i\Theta})\right\} = e^{-i\Theta s}F(s) \tag{5.13}$$

Ukoliko prijašnji izraz razdvojimo na realni i imaginarni dio dobivamo sljedeći zapis:

$$\mathcal{M}\left\{Re[f(te^{i\Theta})]\right\} = cos(\Theta s)F(s) \tag{5.14}$$

$$\mathcal{M}\left\{Im[f(te^{i\Theta})]\right\} = -sin(\Theta s)F(s) \tag{5.15}$$

Sada ćemo navesti teorem o potenciranju varijable originala.

Teorem 5.3. *Za pozitivan realni broj a vrijedi:*

$$\mathcal{M}\left\{f(t^a)\right\} = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}) \tag{5.16}$$

pri čemu je F(s)=$\mathcal{M}\ \left\{f(t)\right\}$.

Dokaz

Mellinovom transformacijom dobivamo:

$$\mathcal{M}\left\{f(t^a)\right\} = F(s) = \int\limits_0^\infty f(t^a)t^{s-1}dt. \tag{5.17}$$

U nastavku uvodimo supstituciju

$$t^a = u$$

$$t = u^{\frac{1}{a}}$$

$$at^{a-1}dt = du$$

Tada je:

$$\mathcal{M}\left\{f(t^a)\right\} = \int_0^\infty f(u)u^{\dfrac{s-1}{a}} \frac{u^{\frac{1-a}{a}}du}{a}$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^\infty f(u)u^{\dfrac{s}{a}-1}du$$

$$\frac{1}{a}F(\frac{s}{a}) \tag{5.18}$$

što nam dokazuje da je tvrdnja istinita.

Sada uvodimo teorem o pomaku u slici.

Teorem 5.4. *Za pozitivan realni broj vrijedi:*

$$\mathcal{M}\left\{t^a f(t)\right\} = F(s+a) \tag{5.19}$$

pri čemu je F(s)=$\mathcal{M}\left\{f(t)\right\}$.

Dokaz

Mellinovom transformacijom dobivamo

$$\mathcal{M}\left\{t^a f(t)\right\} = \int_0^\infty t^a f(t)t^{s-1}dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)t^{s+a-1}dt$$

$$= F(s+a) \tag{5.20}$$

što nam dokazuje da je tvrdnja istinita.

Teorem 5.4, teorem 5.3 impliciraju sljedeće svojstvo:

Korolar 5.2. *Zadana je funkcija f(t), te je njena Mellinova transformacija F(s)=*$\mathcal{M}\left\{f(t)\right\}$ *tada je:*

$$\mathcal{M}\left\{\frac{1}{t}f(\frac{1}{t})\right\} = -F(1-s) \tag{5.21}$$

Dokaz ovoj tvrdnji proizlazi nam (5.16) i (5.19) tako da umjesto varijable a uvrštavamo -1

Sada navodimo teorem koji se naziva teorem o derivaciji slike.

Teorem 5.5. *Vrijedi:*

$$\mathcal{M}\left\{f(t)\ln t\right\} = F'(s) \tag{5.22}$$

pri čemu je F(s)=$\mathcal{M}\left\{f(t)\right\}$.

Dokaz

Ukoliko se koristimo pravilom za deriviranje pod znakom integrala dobivamo:

$$\begin{aligned} F'(s) &= \int_0^\infty f(t)t^{s-1}\ln t dt \\ &= \mathcal{M}\left\{f(t)\ln t\right\} \end{aligned} \tag{5.23}$$

što nam dokazuje da je tvrdnja istinita.

U općenitom slučaju imamo sljedeću tvrdnju.

Korolar 5.3. *Vrijedi:*

$$\mathcal{M}\left\{f(t)(\ln t)^n\right\} = F^{(n)}(s) \tag{5.24}$$

pri čemu je F(s)=$\mathcal{M}\left\{f(t)\right\}$.

Sljedeći teorem govori o derivaciji originala.

Teorem 5.6. *Vrijedi*

$$\mathcal{M}\left\{f'(t)\right\} = -(s-1)F(s-1) \tag{5.25}$$

pri čemu je F(s)=$\mathcal{M}\left\{f(t)\right\}$. *Dokaz*

Mellinovom transformacijom dobivamo

$$\mathcal{M}\left\{f'(t)\right\} = \int_0^\infty f'(t)t^{s-1}tdt \tag{5.26}$$

Koristeći se parcijalnom integracijom

$$u = t^{s-1}$$

$$du = (s-1)t^{s-2}$$

te

$$dv = f'(t)dt$$

$$du = (s-1)t^{s-2}$$

$$v = f(t)$$

dobivamo:

$$\mathcal{M}\left\{f'(t)\right\} = (s-1)t^{s-2}f(t)|_0^\infty - (s-1)\int\limits_0^\infty f(t)t^{s-2}dt$$

$$= -(s-1)\int\limits_0^\infty f(t)t^{s-1-1}tdt$$

$$= -(s-1)F(s-1) \tag{5.27}$$

što nam dokazuje da je tvrdnja točna.

Općenito vrijedi sljedeća tvrdnja.

Korolar 5.4. *Zadana je funkcija f(t), te je njena Mellinova transformacija F(s)=*$\mathcal{M}\left\{f(t)\right\}$ *tada je:*

$$\mathcal{M}\left\{f^n(t)\right\} = (-1)^n \frac{(s-1)!}{(s-n-1)!}F(s-n) \tag{5.28}$$

Dokaz

Sljedeći korolar dokazati ćemo metodom matematičke indukcije, za bazu indukcije koristiti ćemo izraz iz Teorema 5.6. Dakle dokaz sljedeće tvrdnje dobivamo korištenjem navedenog teorema na izraz (5.28)

$$\mathcal{M}\left\{f^{(n+1)}(t)\right\} = \mathcal{M}\left\{(f^{(n)}(t))'\right\} = -(s-1)(-1)^{(n)}\frac{((s-1)-1)!}{((s-1)-n-1)!}F(s-1-n)$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{(s-1)!}{(s+(n+1)-1)!}F(s-(n+1)) \tag{5.29}$$

što nam dokazuje da je tvrdnja istinita.

Sljedeći korolar posljedica je Teorema 5.4 i prijašnjeg Korolara.

Korolar 5.5. *Vrijedi:*

$$\mathcal{M}\left\{t^n f^{(n)}(t)\right\} = (-1)^{(n)}\frac{(s+n-1)!}{(s-1)!}F(s) \tag{5.30}$$

pri čemu je F(s)=$\mathcal{M}\left\{f(t)\right\}$.

Teorem 5.7. *Vrijedi:*

$$\mathcal{M}\left\{\int_0^\infty f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s+1)}{s} \tag{5.31}$$

pri čemu je F(s)=$\mathcal{M}\ \{f(t)\}$.

Dokaz

Mellinovom transformacijom dobivamo:

$$\mathcal{M}\left\{\int_0^\infty f(\tau)d\tau\right\} = \int_0^\infty (\int_0^\infty f(\tau)d\tau)t^{s-1}dt \tag{5.32}$$

Primjenjujemo formulu parcijalne integracije

$$u = \int_0^\infty f(\tau)d\tau$$

$$du = -f(t)dt$$

te

$$dv = t^{s-1}dt$$

$$v = \frac{t^s}{s}$$

pri čemu dobivamo

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{t^s}{s}\int_t^{\inf} f(\tau)d\tau|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty t^s f(t)dt$$

$$= \frac{1}{s}\int_0^\infty tt^{s-1}f(t)dt \tag{5.33}$$

5.5. Izračunavanje Mellinove transformacije funkcija

U ovom poglavlju nećemo izvesti sve Mellinove transformacije elementarnih funkcija već samo neko koje češće koristimo.

Primjer 5.1. *Pronađimo Mellinovu transformaciju sljedeće funkcije*

$$f(t) = e^{-\alpha t}, \alpha > 0. \tag{5.34}$$

Ukoliko uvedemo Mellinovu transformaciju dobivamo

$$\mathcal{M}\left\{e^{-\alpha t}\right\} = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-\alpha t}dt \tag{5.35}$$

Uvodimo supstituciju

$$\alpha t = u$$

$$du = \alpha dt$$

te dobivamo

$$\mathcal{M}\left\{e^{-\alpha t}\right\} = \frac{1}{\alpha^2}\int\limits_0^\infty u^{s-1}e^{-u}du \tag{5.36}$$

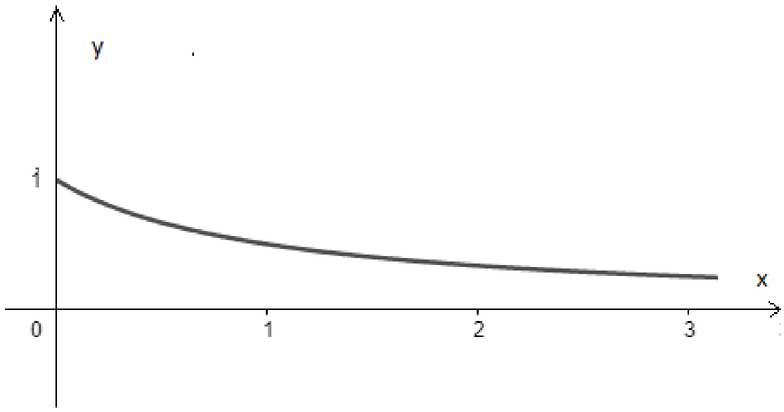
Koristimo li definiciju gama funkcije prijašnji izraz zapisujemo

$$\mathcal{M}\left\{e^{-\alpha t}\right\} = \frac{1}{\alpha^2}\Gamma(s) \tag{5.37}$$

te ovime dobivamo traženu transformaciju.

Primjer 5.2. *Pronađimo Mellinovu transformaciju sljedeće funkcije*

$$f(t) = (1+t)^{-1} \tag{5.38}$$



Slika 5.3. Grafički prikaz funkcije $f(t) = (1+t)^{-1}$*; Izvor: Izrada autora*

Ukoliko uvedemo Mellinovu transformaciju dobivamo

$$\mathcal{M}\left\{(1+t)^{-1}\right\} = \int\limits_0^\infty t^{s-1}(1+t)^{-1}dt \tag{5.39}$$

Uvodimo supstituciju

$$t+1 = \frac{1}{1-u}, t = \frac{u}{1-u}$$
$$dt = \frac{du}{(1-u)^2}, u = \frac{t}{t+1}$$

te dobivamo

$$\mathcal{M}\left\{(1+t)^{-1}\right\} = \int\limits_0^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u)^{s-1}}(1-u)\frac{du}{(1-u)^2} \tag{5.40}$$

$$\int_0^1 u^{s-1}(1-u)^{-s}du$$

Korištenjem definicije beta funkcije (5.6) već prije spomenute relacije:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

dobivamo traženu transformaciju

$$\mathcal{M}\left\{(1+t)^{-1}\right\} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \tag{5.41}$$

Primjer 5.3. *Za izračun Mellinovih transformacija funkcija kosinus i sinus koristimo zapis iz kompleksne analize.*

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{5.42}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{5.43}$$

Izvedimo Mellinovu transformaciju funkcije $f(t) = e^{it}$

$$\mathcal{M}\left\{e^{it}\right\} = \int_0^\infty e^{it}t^{s-1}dt \tag{5.44}$$

Uvodimo supstituciju

$$t = iu, dt = idu$$

te dobivamo

$$\mathcal{M}\left\{e^{it}\right\} = \int_0^{-i\infty} e^{-t}(it)^{s-1}idt \tag{5.45}$$

$$-i^s \int_{-i\infty}^{0} e^{-t}t^{s-1}dt$$

Postupkom prebacivanja područja integracije sa negativnog napozitivni dio realne osi dobivamo

$$\mathcal{M}\left\{e^{it}\right\} = -i^s \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt \tag{5.46}$$

$$= -i^s\Gamma(s) = e^{i\pi s}\Gamma(s)$$

Također dobivamo i

$$\mathcal{M}\left\{e^{it}\right\} = -i^s\Gamma(s) = e^{-i\pi s}\Gamma(s) \tag{5.47}$$

Sada možemo odrediti Mellinovu transformaciju funkcije sin *t*

$$\mathcal{M}\left\{\sin t\right\} = \mathcal{M}\left\{\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right\} = \frac{1}{2i}\mathcal{M}\left\{e^{it}\right\}\frac{1}{2i}\mathcal{M}\left\{e^{-it}\right\} \tag{5.48}$$

$$= \frac{1}{2i}(e^{\frac{i\pi s}{2}} - e^{\frac{-i\pi s}{2}}\Gamma(s) = sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)$$

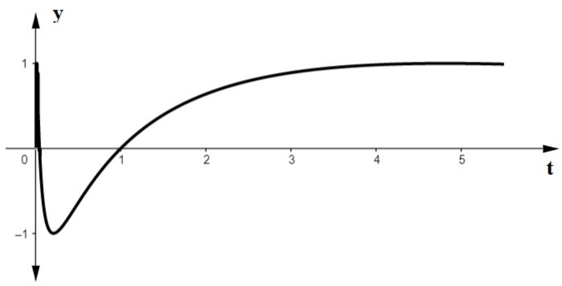
Istim postupkom dobivamo i Mellinovu transformaciju funkcije $f(t) = \cos t$ *koja glasi:*

$$\mathcal{M}\left\{\cos t\right\} = \cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s) \tag{5.49}$$

Primjer 5.4. *Pronađimo Mellinovu transformaciju sljedeće funkcije*

$$f(t) = \sin(\ln t) \tag{5.50}$$

U nastavku možemo vidjeti grafički prikaz funkcije.



Slika 5.4. Grafički prikaz funkcije f(t)=sin(ln t); Izvor; Izrada autora

,

Ukoliko uvedemo Mellinovu transformaciju dobivamo

$$\mathcal{M}\left\{\sin(\ln t)\right\} = \int_0^\infty t^{s-1}\sin(\ln t)dt \tag{5.51}$$

Koristimo parcijalnu integraciju

$$u = \sin(\ln t), du = \frac{1}{t}\cos(\ln t)\frac{1}{t}$$

$$dv = t^{s-1}dt, v = \frac{1}{s}t^s$$

te dobivamo

$$\int_0^\infty t^{s-1}\sin(\ln t)dt = \frac{1}{s}t^s\sin(lnt)|_0^\infty - \frac{1}{s}\int_0^\infty t^{s-1}\cos(\ln t)dt \tag{5.52}$$

*Ponovnom primjenom parcijalne integracije dobivamo Mellinovu transformaciju funkcije f(t)=*sin(ln *t) koja glasi*

$$\mathcal{M}\left\{\sin(\ln t)\right\} = \frac{-1}{s^2+1} \tag{5.53}$$

5.6. Mellinove transformacije Heavisidove i Diracove funkcije

5.6.1. Hevisideova funkcija

Hevisideova funkcija koristi pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi kod kojih funkcije imaju neki prekid. Promatrati ćemo Hevisideovu funkciju upravo iz tog razloga što se takve jednadžbe pojavljuju kod mehaničkih vibracija te u analizi strujnih krugova. U literaturi se osim oznake H koriste i Y, Θ ,u.

Primjer 5.5. *Hevisideova funkcija definirana je*

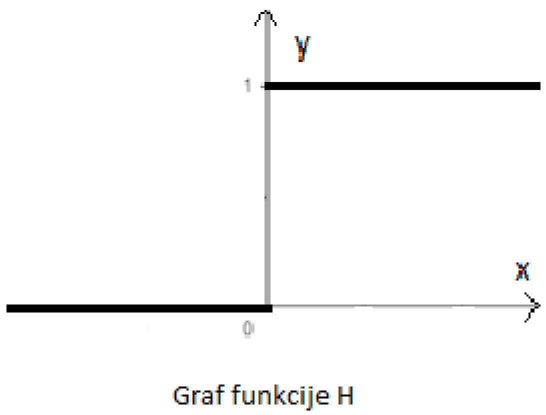
$$H(t) = \begin{cases} 0, \; za\, t < 0 \\ 1, \; za\, t \leq 0 \end{cases} .$$

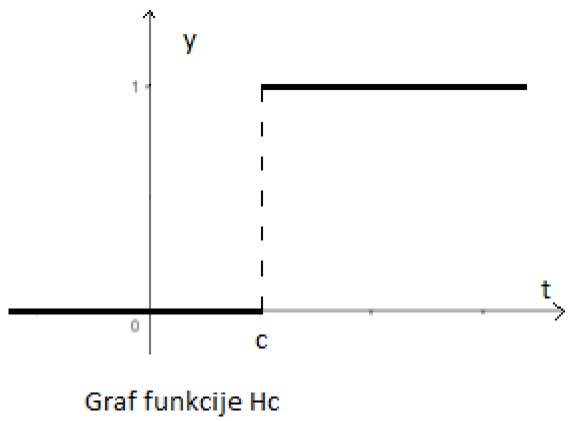
tj.

$$H_c(t) = \begin{cases} 0, \; za\, t < c \\ 1, \; za\, t \leq c \end{cases} .$$

No uz uvjet da je c$\leq$ 0

Grafove navedenih funkcija možemo vidjeti na sljedećoj slici.





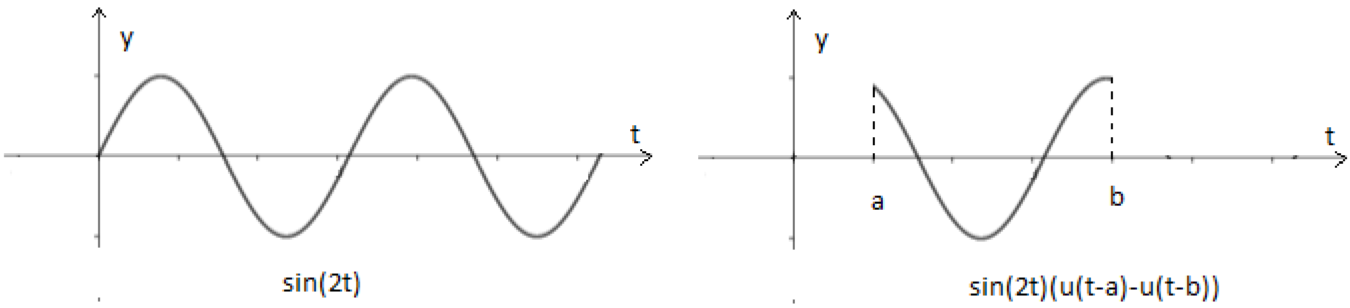
Slika 5.5. Grafički prikaz Heavisidove funkcije; Izvor: Izrada autora

Iz definicije Mellinove transformacije dobivamo:

$$\mathcal{M}\left\{H_a(t)\right\} = \int_0^\infty t^{s-1} H_a(t)dt = \int_0^\infty t^{s-1}dt \tag{5.54}$$

$$\frac{t^s}{s}|_0^\infty = 0 - \frac{a^s}{s} = -\frac{a^s}{s}$$

Važno je napomenuti da Re (s)<0, zbog konvergencije nepravog integrala.



Slika 5.6. Ograničavanje funkcije; Izvor:Izrada autora

Na ovim slikama vidimo da je moguće koristiti Hevisideovu funkciju tako da ju ograničimo na neki interval.

5.6.2. Diracova funkcija

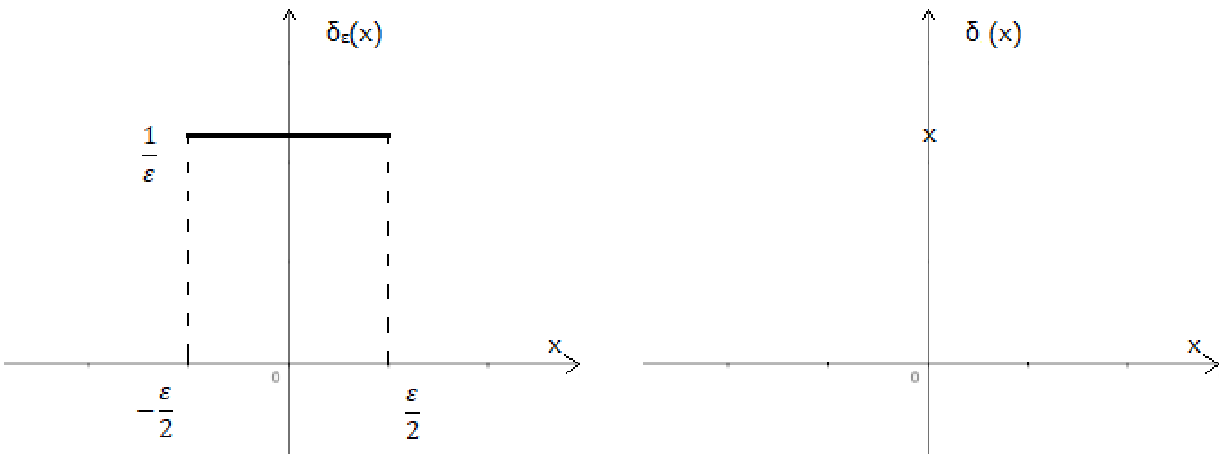
Diracovu funkciju nazivamo i delta funkcijom, to je funkcija čija vrijednost u u svim točkama iznosi 0 osim u 0 kada iznosi beskonačno. Diracova funkcija služi za predočavanje električnih, mehaničkih ili nekih drugih impulsa, služi kod modeliranja impulsnih pojava, te je vrlo korisna pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi i promatranja fizikalnih zakona.

Primjer 5.6. *Diracova funkcija definirana je:*

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, \; za\, t = 0 \\ 0, \; za\, t \neq 0 \end{cases} . \tag{5.55}$$

te vrijedi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \tag{5.56}$$



Slika 5.7. Grafički prikaz Diracove funkcije i njezine aproksimacije; Izvor: Izrada autora

Sada ćemo odrediti Mellinovu transformaciju Diracove funkcije δ(t-a). Navedena funkcija modelira impulsno djelovanje u trenutku t=a.

Stoga korištenjem Mellinove transformacije dobivamo:

$$\mathcal{M}\left\{\delta_a(t)\right\} = \int\limits_0^{\infty} t^{s-1}\delta_a(t)dt = \int\limits_{a^-}^{a^+} t^{s-1}\delta_a(t)dt \tag{5.57}$$

Iz razloga što je djelovanje Diracove funkcije koncentrirano u t=0 dobivamo:

$$\mathcal{M}\left\{\delta_a(t)\right\} = \int\limits_{a^-}^{a^+} a^{s-1}\delta_a(t)dt = a^{s-1}\int\limits_{a^-}^{a^+} \delta_a(t)dt \tag{5.58}$$

Iz tvrdnje da je integral Diracove funkcije jednak jedinici dobivamo:

$$\mathcal{M}\left\{\delta_a(t)\right\} = a^{s-1} \tag{5.59}$$

Važno je spomenuti da u praksi se često koristi sljedeća aproksimacija Diracove funkcije :

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon},\ za\ x\ \epsilon\ [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}], \\ 0,\ za\, x\ \epsilon\ [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}] \end{cases} . \tag{5.60}$$

pri čemu je

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon(x). \tag{5.61}$$

Ova aproksimacija prikazana je na prethodnoj slici.

Treba istaknuti da Diracova delta funkcija zbog svojih definicijskih svojstava nije funkcija u klasičnom smislu. Naime, ona se geometrijski svodi na pravac, a površina pravca jednaka je nuli što je u kontradikciji s njenim konačnim integralom.

Upravo je to razlog što se u praksi umjesto sa stvarnom delta funkcijom puno češće radi s njenom aproksimacijom, a problemi koji uključuju delta funkciju uglavnom se rješavaju pomoću integralnih transformacija.

6. Primjena Mellinove transformacije

U ovom poglavlju ćemo pomoću ranije u radu nvedeih svojstava i dokaza proučavati primjenu Mellinova transformacija. Točnije fokusirati ćemo se na primjenu u elektrotehnici.

6.1. Primjena Mellinove transformacije kod mjernih instumenata

Ukoliko se koristimo mjernim instumentom te stuja koja teče kroz stujni krug koji proučavamo nije konstantna nego se mjenja potrebno nam je primjeniti integralnu transformaciju, točnije u ovom primjeru Mellinovu transforamciju.

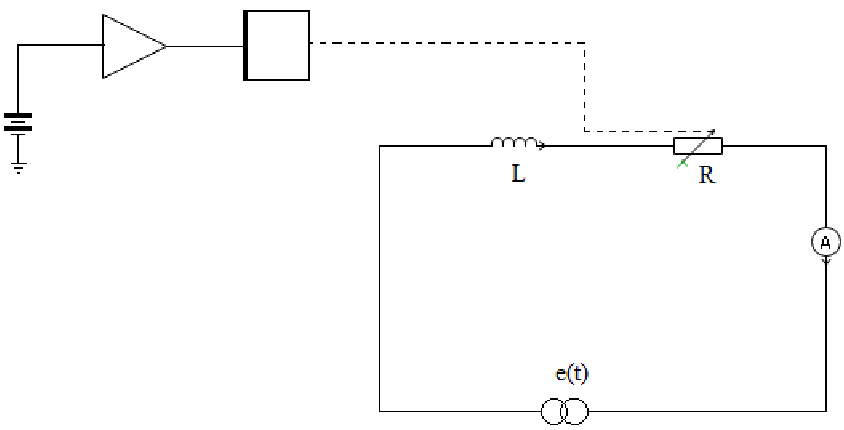
Ampermetar pokazuje da je struja definirana kao:

$$i(t) = \frac{1}{t^2} + 1\frac{1}{t^3} \tag{6.1}$$

te je otpor definiran kao:

$$R = \frac{R_O}{t} \tag{6.2}$$

Na sljedećoj slici prikazan je stujni krug za koji je potrebno odrediti napon pobude:



Slika 6.1. Zadani stujni krug; Izvor; Izrada autora

Diferencijalna jednadžba ovog strujnog kruga je:

$$e(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = L\frac{di(t)}{dt} + \frac{R_O}{t}i(t)$$

ili

$$te(t) = Lt\frac{di(t)}{dt} + R_O i(t). \tag{6.3}$$

Koristeći Mellinovu transformaciju dobivamo:

$$\mathcal{M}\left\{te(t)\right\} = L\mathcal{M}\left\{t\frac{di(t)}{dt}\right\} + R_O\mathcal{M}\left\{i(t)\right\} \tag{6.4}$$

Primjenom Teorema 5.4 koji kaže da vrijedi:

$$\mathcal{M}\left\{t^a f(t)\right\} = F(s+a) \tag{6.5}$$

te korištenjem tvrdnje

$$\mathcal{M}\left\{(t\frac{d}{dt})^n f(t)\right\} = (-1)^n s^n F(s) \tag{6.6}$$

dobivamo:

$$\begin{aligned} E(s+1) &= -LSI(S) + R_O I(S) \\ &= I(S)(R_O - LS) \end{aligned} \tag{6.7}$$

Kao što je već napomenuto stuja je definirana kao

$$i(t) = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} \tag{6.8}$$

te korištenjem Mellinove transformacije dobivamo:

$$I(s) = \frac{-2s+5}{(s-2)(s-3)} \tag{6.9}$$

uvrštavanjem (6.8) u (6.7) dobivamo:

$$E(s+1) = \frac{(-2s+5)L[\frac{R_O}{L} - s]}{(s-2)(s-3)} \tag{6.10}$$

Korištenjem metode parcijalnih razlomaka dobvamo:

$$E(s+1) = \frac{L(3-\frac{R_O}{L})}{s-2} - \frac{L(\frac{R_O}{L} - s)}{s-3}. \tag{6.11}$$

Tu smo iskoristili rastav:

$$\frac{(-2s+5)L[\frac{R_O}{L} - s]}{(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{Bs+C}{s-3}, \tag{6.12}$$

a zatim smo odredili nepoznate parametre A, B i C.

Da bi dobli jednadžbu u vremenskoj do meni koristimo se inverznom mellinovom trasformacijom, te iz frekvencijeske domene prelazimo u vremensku:

$$te(t) = (3 - \frac{R_O}{L})Lt^{-2} - (2 - \frac{R_O}{L})Lt^{-3}$$

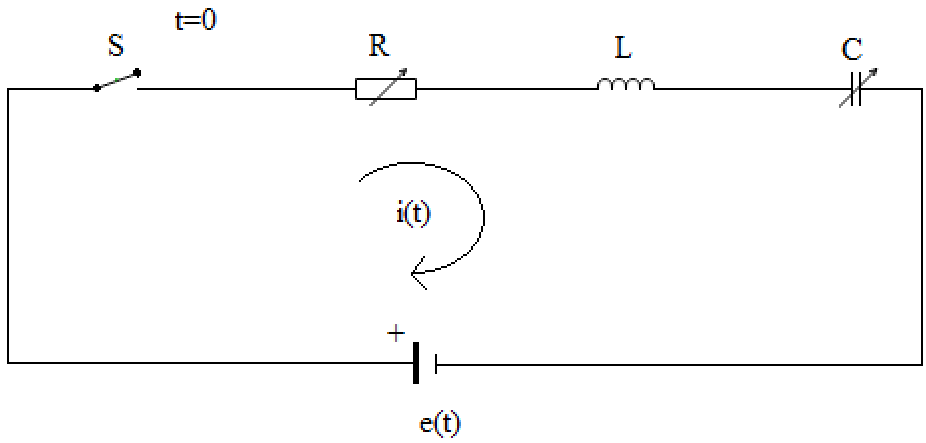
odnosno

$$e(t) = \frac{L}{t^3}\left[(3 - \frac{R_O}{L}) - (\frac{2 - \frac{R_O}{L}}{t})\right] \tag{6.13}$$

Iz jednadžbe (6.11) možemo vidjeti koliki napon je potreban da bi dobili zadanu struju.

6.2. Primjena Mellinove transformacije kod analize strujnih krugova

U ovom poglavlju promatrati ćemo korištenje Mellinove transformacije na analizu strujnog kruga prikazanog na sljedećoj slici.



Slika 6.2. RLC strujni krug; Izvor: Izrada autora

Kada je sklopka S zatvorena tada je stuja dana sljedećom jednadžbom:

$$i(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}. \tag{6.14}$$

Kapacitet kondenzatora dan je izrazom:

$$\frac{1}{c} = \frac{c_0}{t^2}. \tag{6.15}$$

Otpor je definiran s:

$$R = \frac{R_0}{t} \tag{6.16}$$

Da bismo odredili vrjednost napona koristiti ćemo se II. Kirchhoffovim zakonom, odnosno napon izvora određen je padovima napona na komponentama. Pripadna jednadžba glasi:

$$e(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{c}\int i(t)dt, \tag{6.17}$$

što uvrštavanjem zadanih veličina poprima oblik:

$$e(t) = L\frac{di(t)}{dt} + \frac{R_0}{t}i(t) + \frac{c_0}{t^2}\int i(t)dt, \tag{6.18}$$

odnosno

$$te(t) = Lt\frac{di(t)}{dt} + R_0 i(t) + c_0\int \frac{i(t)}{t}dt. \tag{6.19}$$

Mellinovom transformacijom dobivamo:

$$\begin{aligned} E(s+1) &= -LSI(S) + R_O I(S) - \frac{C_O}{s}I(S) \\ &= \left[-LS + R_O - \frac{C_O}{s}\right] I(S) \\ &= \left[-s + \frac{R_O}{L} - \frac{C_O}{Ls}\right] LI(S). \end{aligned} \tag{6.20}$$

Kao što je već napomenuto struja je definirana kao

$$i(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \tag{6.21}$$

te korištenjem Mellinove transformacije dobivamo:

$$I(s) = \frac{-2s+3}{(s-1)(s-2)}. \tag{6.22}$$

Naime, iz teorema o pomaku u slici vrijedi

$$\mathcal{M}\left(\frac{1}{t}\right) = H(s-1), \tag{6.23}$$

$$\mathcal{M}\left(\frac{1}{t^2}\right) = H(s-2), \tag{6.24}$$

gdje je $\mathcal{M}1 = H(s)$ što se može tretitrati kao Heavisideova funkcija te je

$$H(s) = \frac{1}{s}. \tag{6.25}$$

Uvrštavanjem jednadžbe (6.18) u jednadžbu (6.17) dobivamo:

$$E(s+1) = \frac{(-2s+3)L[-S + \frac{R_O}{L} - \frac{C_O}{Ls}]}{(s-1)(s-2)} \tag{6.26}$$

Korištenjem metode parcijalnih razlomaka dobvamo:

$$E(s+1) = \frac{-L(\frac{R_O}{L} - \frac{C_O}{L} - 1)}{s-1} - \frac{L(\frac{R_O}{L} - \frac{C_O}{2L} - 2)}{s-2} \tag{6.27}$$

Da bi dobli jednadžbu u vremenskoj do meni koristimo se inverznom Mellinovom trasformacijom, te iz frekvencijeske domene prelazimo u vremensku:

$$te(t) = L(\frac{R_O}{L} - \frac{C_O}{L} - 1)t^{-1} + L(\frac{R_O}{L} - \frac{C_0}{2L} - 2)t^{-2}$$

$$e(t) = L(\frac{R_O}{L} - \frac{C_O}{L} - 1)t^{-2} + L(\frac{R_O}{L} - \frac{C_0}{2L} - 2)t^{-3} \quad (6.28)$$

odnosno

$$e(t) = \frac{L}{t^2}\left[\frac{\frac{R_O}{L} - \frac{C_O}{2L} - 2}{t} + (\frac{R_O}{L} - \frac{C_O}{L} - 1)\right] \quad (6.29)$$

Iz jednadžbe (6.22) možemo vidjeti koliki napon je potreban da bi dobili zadanu struju.

7. Zaključak

Nakon što smo se bolje upoznali s integralnim transformacijama, definirali one važnije te posebno proučavali Mellinovu transformaciju sada možemo vidjeti koliko su zabravo ove transformacije značajne u inžinjerstvu.

U odnosu na Laplaceovu i Fourierovu transformaciju Mellinova transformacija se rjeđe koristi no kao što smo u radu vidjeli nije manje bitna od predhodna dvije. Primjena Mellinove transformacije biti će šira ukoliko ima dobra svojstva. Upravo ta svojstva smo proučavali u petom poglavlju.

U radu smo istaknuli i važnost Heavisidove funkcije koju koristimo pri rješavanju kod funkcija koje imaju nekakav prekid te se upravo te funkcije koriste kod mehaničkih vibracija i u analizi strujnih krugova. Također istaknuli smo i važnost Diracove funkcije koja je isto tako važna u inžinjerstvu te je koristimo za predočavanje električkih ili nekih drugih impulsa.

Nakon što smo dublje ušli u problematiku Mellinove transformacije i definirali u kojem području se koristi se bitno je pokazati njenu primjenu koju smo prikazali u posljednjem poglavlju. Mellinove transformacije koriste se u raznim granama inžinjerstva no u radu smo prikazali primjenu u elektrotehnici.

Literatura

[1] Flajolet, P.; Gourdon, X.; Dumas, P.: "Mellin transforms and asymptotics: Harmonic sums", Theoretical Computer Science 144, pp. 3-58, 1995.

[2] Davies, P.: "Integral Transforms and Their Applications", Springer, Berlin, 1978.

[3] Stojković, N.: "Elektronika 1 - zavodska skripta", Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Rijeka, 2015.

[4] "Pierre Simon de Laplace", s Interneta, http://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=35431, 05.09.2018.

[5] "Poisson's and Laplace's equations", s Interneta, https://ece.illinois.edu/, 05.09.2018.

[6] "Laplace's equation in the Polar Coordinate System", s Interneta, https://www.math.ucdavis.edu/, 05.09.2018.

[7] Wakita, H.: "Normalization of vowels by vocal-tract length and its application to vowel identification", IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 25, pp. 183 – 192, 1977.

[8] Budulica, J.: "Određivanje vektora značajki govornog signala pomoću procesora za digitalnu obradbu signala", diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb, 2013.

[9] De Sena, A.; Rocchesso, D.: "A study on using the Mellin Transform for vowel recognition", Proceedings of the 2006 Sound and Music Computing Conference, Salerno, 2005.

[10] Irino, T.; Patterson, R. D.: "Segregating information about the size and shape of the vocal tract using a time-domain auditory model: The stabilised wavelet-Mellin transform", Speech Communication, Vol. 36, No. 3-4, pp. 181-203, 2002.

[11] Umesh, S.; Cohen, L.; Nelson, D.: "Frequency warping and speaker-normalization", Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 2, pp. 983 – 986, 1997.

[12] Ribčić-Penava, M.; Škrobar, D: "Gama i beta funkcije", Osječki matematički list Vol. 15, pp. 93-111, 2015.

[13] Bertrand, J.; Bertrand, P.; Ovarlez, J.: "The Mellin Transform", s Interneta, http://dsp-book.narod.ru/TAH/ch11.pdf, 05.09.2018.

[14] "Servomotor", s Interneta, http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=55546, 05.09.2018.

Sažetak i ključne riječi

U radu je opisana Mellinova transformacija kao poseban slučaj integralne transformacije. Navedena su njena osnovna svojstva i izračunte transformacije nekoliko jednostavnijih funkcija. Mellinove transformacije stavljene su u povijesni kontekst te u kontekst primjene u elektrotehnici.

Ključne riječi: integralna transformacija, Mellinova transformacija, analiza električne mreže

Summary and key words

he paper describes the Mellin transformation as a special case of integral transformation. Its basic properties and calculated transformations of several simpler functions are listed. Mellin's transformations are placed in a historical context and in the context of application in electrical engineering.

Keywords: integral transform, Mellin transform, electrical network analysis