Markovljevi lanci

Predovan, Marko

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

MARKOVLJEVI LANCI

Rijeka, srpanj 2022.

Marko Predovan
0069086145

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

MARKOVLJEVI LANCI

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Dražić

Rijeka, srpanj 2022.

Marko Predovan
0069086145

IZJAVA

Sukladno članku 8. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku preddiplomskih sveučilišnih studija/stručnih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 1. veljače 2020., izjavljujem da sam samostalno izradio/izradila završni rad prema zadatku preuzetom dana 21. ožujka 2022..

Predovan

Rijeka, 8. srpnja 2022.

Marko Predovan

SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET
POVJERENSTVO ZA ZAVRŠNE ISPITE

Rijeka, 18. ožujka 2022.

Zavod:	**Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike**
Predmet:	**Inženjerska matematika ET**
Grana:	**1.01.07 primijenjena matematika i matematičko modeliranje**

ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik:	**Marko Predovan (0069086145)**
Studij:	Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Zadatak:	**Markovljevi lanci // Markov chains**

Opis zadatka:

U radu je potrebno definirati Markovljeve lance, te navesti i opisati njihova temeljna svojstva. Također je potrebno objasniti različite klasifikacije Markovljevih lanaca te objasniti specifičnosti ergodičkih i apsorpcijskih lanaca.
Markovljeve lance potrebno je staviti u povijesni kontekst te kontekst primjene u inženjerskoj struci, s naglaskom na primjenu u elektrotehnici.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Predovan

Zadatak uručen pristupniku: 21. ožujka 2022.

Mentor:

Doc. dr. sc. Ivan Dražić

Predsjednik povjerenstva za završni ispit:

Prof. dr. sc. Viktor Sučić

Prvobitno bih se htio zahvaliti svom mentoru, doc. dr. sc. Ivanu Dražiću koji u mentorstvu stvarno daje cijeloga sebe. Sav trud koji sam uložio mi se duplo vratio zbog njega. Također se zahvaljujem mojim roditeljima na distanciranoj podršci, bez stvaranja pritiska, jer tako najbolje funkcioniram. Uvijek sam znao da ste na dohvat ruke ako vas zatrebam. I za kraj, hvala Ivona na strpljenju.

Sadržaj

1. Uvod

U ovom radu baviti ćemo se vjerojatnostim strukturama odnosno objektima koji omogućavaju predviđanja budućih stanja nekih pojava. To su takozvani Markovljevi lanci. Mi ćemo se naime fokusirati na Markovljeve lance diskretnog vremena. To su stohastični modeli koji opisuju niz mogućih događaja u nekom sustavu. Kod njih je zanimljivo to što vjerojatnost svakog idućeg događaja ovisi samo o trenutnom stanju sustava, bez utjecaja prošlosti, što ga čini bezmemorijskim modelom.

U drugom poglavlju ćemo definirati potrebne matematičke pojmove, vezane uglavnom uz vjerojatnost, statistiku i stohastiku, za lakše razumijevanje Markovljevih lanaca u nastavku.

U trećem poglavlju ćemo dati lagani uvodni primjer lanca, te ćemo dati povijesni kontekst Markovljevih lanaca. Njih je izumio Andrej Andrejevič Markov, pa ćemo napisati i najbitnije stavke njegovog života. Nakon toga ćemo definirati Markovljeve lance, te početi s obradom Markovljevih lanaca diskretnog vremena.

U četvrtom poglavlju ćemo definirati različite moguće klasifikacije Markovljevih lanaca i njihovih stanja, te dati primjere za svaki od njih.

U petom poglavlju ćemo dati najzanimljivije specijalne primjere Markovljevih lanaca, kao što su *slučajna šetnja*, *proces rađanja i umiranja*, *PageRank algoritam* (algoritam kojim se koristi Google tražilica), *Problem propasti kockara*. Tako ćemo najbolje vidjeti kako i gdje se primjenjuju Markovljevi lanci.

2. Uvod u teoriju vjerojatnosti

Ovo poglavlje obrađeno je prema izvorima: [1, 2, 3, 4].

Za lakše čitanja ovog rada, moramo definirati neke pojmove potrebne za razumijevanje nastavka, a prvi takav pojam je **vjerojatnost**. Vjerojatnost je mjera šanse da se neki događaj dogodi i označava se slovom P. Mnogi se događaji ne mogu predvidjeti s potpunom sigurnošću, ali može se predvidjeti šansa da će se dogoditi, odnosno kolika je vjerojatnost da će se dogoditi. Vjerojatnost može biti vrijednost u rasponu od 0 do 1, gdje 0 znači da je događaj nemoguć, a 1 označava siguran događaj.

Kako bi mogli formalno definirati vjerojatnost, najprije trebamo objasniti što je to uopće događaj i kako se događaj tretira matematički.

Definicija 2.1. *Promotrimo neki eksperiment koji ima određene ishode. Skup svih ishoda tog eksperimenta zovemo **prostorom ishoda** i označavamo s Ω, pri čemu u skup Ω ulaze samo oni ishodi koji se ne mogu rastaviti na jednostavnije ishode.*

Objasnimo prostor ishoda na sljedećem primjeru.

Primjer 2.1. *Promatramo bacanje homogene igraće kocke. Ishodi u tom eksperimentu mogu biti "pao je broj 2", ali i "pao je paran broj". Prvi ishod ne može se rastaviti na jednostavnije ishode, dok se drugi ishod može promatrati kao unija triju jednostavnijih ishoda "pao je broj 2", "pao je broj 4" i "pao je broj 6." Drugim riječima u prostor ishoda ulazi prvi, ali ne i drugi ishod te će u ovom eksperimentu prostor ishoda biti dan s*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \tag{2.1}$$

pri čemu primjerice broj 5 označava ishod "pao je broj 5".

Svaki kompleksniji ishod koji se sastoji od unije ishoda iz skupa Ω zove se događaj. Tako je u prethodnom primjeru "pao je paran broj" primjer jednog događaja. Naravno svaki ishod je ujedno i događaj.

Definicija 2.2. *Neka je zadan prostor ishoda Ω. Svaki podskup skupa Ω zove se **događaj**, a skup svih događaja zovemo **prostorom događaja** i obilježavamo s $\mathcal{F}$.*

Primjer 2.2. *Za prostor ishoda Ω iz prethodnog primjera prostor događaja bit će*

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, ..., \{1, 2, 3, 4, 5\}, ..., \Omega\}, \tag{2.2}$$

pri čemu primjerice skup $A = \{2, 4, 6\}$ opisuje događaj "pao je paran broj". Napomenimo da $\emptyset$ označava da nije pao niti jedan broj ili nemoguć događaj, dok Ω označava da je pao bilo koji broj između 1 i 6 što je siguran događaj.

Sada možemo i formalno definirati vjerojatnost.

Definicija 2.3. *Neka je zadan prostor ishoda Ω nad kojim je definiran prostor događaja $\mathcal{F}$. Funkciju $p : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ zovemo* ***vjerojatnost*** *ako vrijedi:*

1. $p(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$,
2. $p(\Omega) = 1$,
3. $p\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i p(A_i)$,

pri čemu $\bigcup$ označava uniju disjunktnih događaja.

Definiciju 2.3 uveo je ruski matematičar Andrej Nikolajevič Kolmogorov[1], a spomenuta tri svojstva u definiciji često se nazivaju Kolomogorovljevi aksiomi vjerojatnosti. Često se koristi i sljedeća definicija.

Definicija 2.4. *Uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{F}, p)$, gdje je Ω prostor ishoda, $\mathcal{F}$ prostor događaja te p vjerojatnost zovemo* ***prostorom*** *vjerojatnosti.*

Primjer 2.3. *Najjednostavniji primjer vjerojatnosti je tzv. klasična vjerojatnost koju definiramo za konačan broj jednakovjerojatnih ishoda. U tom je slučaju*

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \tag{2.3}$$

pri čemu $|A|$ označava broj elemenata u skupu A. Tako bi vjerojatnost događaja "pao je paran broj" iz prethodnog primjera mogli odrediti na sljedeći način:

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = 0.5 = 50\%. \tag{2.4}$$

Promotrimo sada sljedeći primjer.

Primjer 2.4. *U vrećici od 2 bijele i 2 crne kuglice (ukupno 4 kuglice), vjerojatnost uzimanja bijele kuglice je $\frac{1}{2}$; međutim, kada uzimamo drugu kuglicu, vjerojatnost da će ona biti bijela ili crna ovisi o prethodno uzetoj kuglici. Ako je uzeta bijela kuglica, tada bi vjerojatnost ponovnog odabira bijele kuglice bila $\frac{1}{3}$, budući da bi preostale samo 1 bijela i 2 plave kuglice, a ako je prethodno uzeta crna kuglica, vjerojatnost uzimanja bijele kuglice biti će $\frac{2}{3}$.*

Iz primjera 2.4 je jasno da neki događaji utječu na realizaciju drugih događaja, što stvara potrebu za definiranjem uvjetne vjerojatnosti.

[1]Andrej Nikolajevič Kolmogorov (25. travnja 1903., Tambov, Rusija–20. listopada 1987., Moskva), ruski matematičar čiji je rad utjecao na mnoge grane moderne matematike, posebno na harmonijsku analizu, vjerojatnost, teoriju skupa, teoriju informacija i teoriju brojeva. Čovjek široke kulture, s interesima za tehnologiju, povijest i obrazovanje, igrao je aktivnu ulogu u reformi obrazovanja u Sovjetskom Savezu. Najviše ga se pamti po briljantnom nizu radova o teoriji vjerojatnosti.

Definicija 2.5. *Neka je zadan prostor vjerojatnosti* $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ *te neka je* $B \in \mathcal{F}$ *takav da je* $p(B) > 0$. *Vjerojatnost* $p(A|B)$ *definirana s*

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \tag{2.5}$$

*zove se **uvjetna vjerojatnost**. Uvjetna vjerojatnost je vjerojatnost da će se događaj* A *dogoditi uz uvjet realizacije događaja* B.

U sljedećem primjeru ćemo kroz eksperiment jasnije vidjeti uvjetnu vjerojatnost na djelu.

Primjer 2.5. *Promotrimo eksperiment koji se sastoji od testiranja dva integrirana sklopa koji dolaze iz iste silicijske pločice, te promatrajući u svakom slučaju je li sklop prihvaćen* (p) *ili odbijen* (o). *Prostor uzorka eksperimenta je* $S = \{oo, op, po, pp\}$. *Neka* B *označava slučaj u kojemu je prvi testirani čip odbijen. Matematički,* $B = \{oo, op\}$. *Slično, neka* $A = \{oo, po\}$ *označava događaj da je drugi sklop u kvaru.*

Sklopovi dolaze iz visokokvalitetne proizvodne linije. Stoga prethodna vjerojatnost $p(A)$ *je vrlo niska. Unaprijed smo prilično sigurni da će drugi krug biti prihvaćen. Međutim, neke pločice postaju kontaminirane prašinom, pa imaju visok udio neispravnih čipova. S obzirom na saznanje o događaju* B *da je prvi čip odbijen, naše znanje o kvaliteti drugog čipa se mijenja. Uz događaj* B *da je prvi čip odbijen, vjerojatnost* $p(A|B)$ *da će drugi čip također biti odbijen veća je od apriorne vjerojatnosti* $p(A)$ *zbog vjerojatnosti da je prašina kontaminirala cijelu pločicu.*

Primjer 2.6. *S obzirom na primjer 2.5, razmotrimo model apriorne vjerojatnosti*

$$p[oo] = 0.01, \quad p[op] = 0.01, \quad p[po] = 0.01, \quad p[pp] = 0.97. \tag{2.6}$$

Nađimo vjerojatnost $A =$ *"drugi čip odbijen" i* $B =$ *"prvi čip odbijen". Također pronađimo uvjetnu vjerojatnost da je drugi čip odbijen u slučaju da je prvi čip odbijen.*

U primjeru 2.5 vidjeli smo da je A *unija dva disjunktna događaja (ishoda)* oo *i* po. *Stoga je apriorna vjerojatnost da je drugi čip odbijen*

$$p[A] = p[oo] + p[po] = 0.02 \tag{2.7}$$

Također, ovo je apriorna vjerojatnost da će prvi čip biti odbijen:

$$p[B] = p[oo] + p[op] = 0.02. \tag{2.8}$$

Uvjetna vjerojatnost odbijanja drugog čipa s obzirom da je prvi čip odbijen je, po definiciji, omjer $p[AB]$ *prema* $p[B]$, *gdje je, u ovom primjeru,*

$$p[AB] = p[\textit{oba odbijena}] = p[oo] = 0.01 \tag{2.9}$$

Prema tome

$$p[A|B] = \frac{p[AB]}{p[B]} = \frac{0.01}{0.02} = 0.5. \tag{2.10}$$

Informacija da je prvi čip odbijen drastično mijenja naše stanje znanja o drugom čipu. Počeli smo s gotovo sigurnošću, $p[A] = 0.02$, da drugi čip neće biti odbijen i završili s potpunom neizvjesnošću o kvaliteti drugog čipa, $p[A|B] = 0.5$.

Do sada smo objasili na koji se način ishodima nekog eksperimenta pridružuju vjerojatnosti. Međutim, u praksi se često ishodi eksperimenta povezuju s nekim drugim veličinama. Primjerice kod eksperimenta u kojem igraću kocku bacamo tri puta možemo promatrati "broj šestica." Ta promatrana veličina u eksperimentu zove se varijabla. Međutim, kako je varijabla povezana s prostorom vjerojatnosti jasno je da za svaku njenu moguću vrijednost znamo i vjerojatnost njene realizacije te je tada nazivamo slučajnom varijablom. Jednostavnije rečeno, svaku varijablu kod koje znamo vjerojatnost pojavljivanja njenih vrijednosti zovemo slučajnom varijablom. Formalna definicija slučajne varijable dana je u sljedećoj definiciji.

Definicija 2.6. *Neka je dan prostor vjerojatnosti $(\Omega, \mathcal{F}, p)$. Izmjerivu funkciju $X : \Omega \to \mathbb{R}$ zovemo* ***slučajnom varijablom****.*

U ovisnosti o tome je li skup vrijednosti slučajne varijable diskretan ili kontinuiran, slučajne varijable možemo podijeliti na diskretne i kontinuirane, a za potrebe ovog rada važne su nam diskretne slučajne varijable. Kako diskretna slučajna varijabla ima najviše prebrojivo vrijednosti nju obično zadajemo matrično na sljedeći način:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

pri čemu su x_i moguće vrijednosti slučajne varijable X, a p_i pripadne vjerojatnosti.

Ilustrirajmo diskretnu slučajnu varijablu na jednom primjeru promatranja poziva na telefonskom prekidaču.

Primjer 2.7. *Pretpostavimo da promatramo tri poziva na telefonskom prekidaču gdje su glasovni pozivi (g) i podatkovni pozivi (p) jednako vjerojatni. Neka X označava broj glasovnih poziva, Y broj podatkovnih poziva i neka je $R = XY$. Prostor uzorka eksperimenta i odgovarajućih vrijednosti slučajnih varijabli X, Y i R su*

	Ishodi	ppp	ppg	pgp	pgg	gpp	gpg	ggp	ggg
	$p[\cdot]$	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8
Slučajne	X	0	1	1	2	1	2	2	3
varijable	Y	3	2	2	1	2	1	1	0
	R	0	2	2	2	2	2	2	0

Tablica 2.1. Prostor uzorka eksperimenta i odgovarajućih vrijednosti slučajnih varijabli X, Y i R

Definicija 2.7. *Recimo da imamo slučajnu varijablu X s distribucijom f,* ***očekivana vrijednost*** *X, označena $E(X)$, definirana je s $E(X) = \sum_i x_i f(x_i)$. Riječima, očekivana vrijednost X je zbroj* *svake od mogućih vrijednosti X pomnožen s vjerojatnošću dobivanja te vrijednosti. Očekivana vrijednost X naziva se i srednja vrijednost distribucije f.*

Istraživanje vjerojatnosti odnosi se na eksperiment koji se sastoji od postupka i opažanja. Kada proučavamo slučajne varijable, svako opažanje odgovara jednom ili više brojeva. Kada proučavamo stohastičke procese, svako opažanje odgovara funkciji vremena. Riječ stohastički znači slučajan ili nasumičan. Riječ proces u ovom kontekstu označava funkciju vremena. Stoga, kada proučavamo stohastičke procese, proučavamo slučajne funkcije vremena. Gotovo sve praktične primjene vjerojatnosti uključuju višestruka opažanja uzeta kroz neki vremenski period. Kada proučavamo stohastičke procese, ne zanima nas samo koliko često se dogodi neki događaj, nego i vremenski slijed događaja.

Definicija 2.8. *Neka je dan prostor vjerojatnosti $(\Omega, \mathcal{F}, p)$.* ***Stohastički proces*** *$X(t)$ sastoji se od eksperimenta i funkcije koja dodjeljuje vremensku funkciju $x(t, s)$ svakom ishodu iz Ω.*

Pogledajmo kako izgleda stohastički proces na sljedećem primjeru lansiranja svemirskog šatla.

Primjer 2.8. *Počevši od vremena lansiranja $t = 0$, neka $X(t)$ označava temperaturu u stupnjevima Kelvina na površine svemirskog šatla. Sa svakim lansiranjem s bilježimo temperaturni slijed $x(t, s)$. Cjelina eksperimenta može se promatrati kao katalog mogućih temperaturnih sekvenca koje možemo zabilježiti. Na primjer,*

$$x(8073.68, 175) = 207 \tag{2.12}$$

ukazuje da je u 175. upisu u katalogu mogućih temperaturnih sekvenci temperatura na $t = 8073.68$ sekundi nakon lansiranja bila $207^{\circ}K$.

Slučajne procese često možemo modelirati kao Markovljev lanac. To je proces u kojem imamo konačan broj određenih stanja, pri čemu su nam razmaci između vremenskih jedinica diskretni, uz uvjet da nam na buduće stanje utječe samo prethodno stanje.

Primjer 2.9. *Napravimo jednostavni model vremenske prognoze. Smatrati ćemo da stanja vremena mogu biti ili* sunčano *ili* kišno *i da se vrijeme može promijeniti tek kada završi dan, odnosno da nam je jedinica vremena diskretna. Ako odredimo koja je vjerojatnost da je sutra sunčano ako je danas sunčano ili kišno, i obrnuto, vjerojatnost da je sutra kišno ako je danas sunčano ili kišno možemo vršiti predviđanja budućih stanja ovog sustava uz pomoć samo trenutnog stanja.*

Dakle, u primjeru 2.9 imamo konačan skup stanja, vrijeme je diskretno i na buduće stanje nam utječe samo njegovo prethodno stanje, pa je to Markovljev lanac, koji će biti glavni smisao ovoga rada.

Definicija 2.9. ***Zakon velikih brojeva*** *kaže da ako imamo uzorak neovisnih*[2] *i identično raspoređenih slučajnih varijabli, kako veličina uzorka raste, njihova srednja vrijednost uzorka će se približavati njihovoj teoretskoj sredini.*

Zakon velikih brojeva nam jamči stabilne dugoročne rezultate za prosjeke nekih slučajnih događaja. Prvi ga je dokazao Jakob Bernoulli[3] 1713. godine. On i njegovi suvremenici razvijali su formalnu teoriju vjerojatnosti s ciljem analize igara na sreću.

Kod većine standardnih Markovljevih lanaca vjerojatnost p da će X_n biti određene vrijednosti u nekon trenutku n konvergira ka nekom broju, ako je n dovoljno veliki broj. Tako bi se recimo i primjer 2.10 bacanja kocke, koji će nam pokazati zakon velikih brojeva u praksi, mogao modelirati kao Markovljev lanac. Tu vidimo usku povezanost Markovljevih lanaca i zakona velikih brojeva.

Primjer 2.10. *Jedno bacanje kocke je slučajna varijabla opisana kao*

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Stoga je očekivana vrijednost prosjeka bacanja:

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5 \tag{2.14}$$

Prema zakonu velikih brojeva, ako se baci veliki broj kocki, prosjek njihovih vrijednosti (ili srednja vrijednost uzorka) vjerojatno će biti blizu 3.5, s time da preciznost raste kako se baca više kocki. Na slici 2.1 vidimo da su nam grafovi bacanja kocke 10 puta i 10000 puta vrlo različiti. Dobivene rezultate možemo prikazati u tablici:

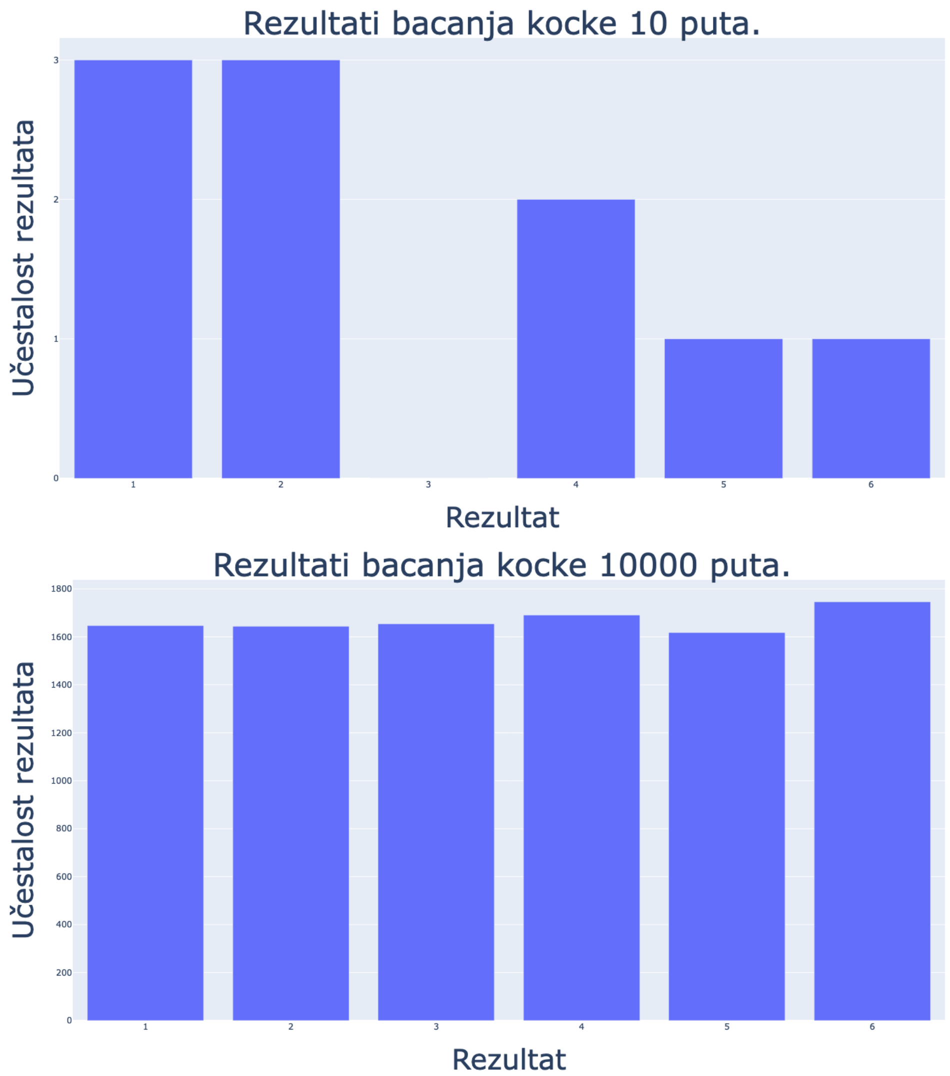
	Rezultat	1	2	3	4	5	6
10	Učestalost rezultata	3	3	0	2	1	1
bacanja	%	30%	30%	0%	20%	10%	10%
10000	Učestalost rezultata	1647	1644	1654	1691	1618	1746
bacanja	%	16.47%	16.44%	16.54%	16.91%	16.18%	17.46%

Tablica 2.2. Rezultati i njihova učestalost u postotku

Iz ovih podataka možemo izračunati i vrijednost prosjeka bacanja tako da zbrojimo sva bacanja i podijelimo s brojem bacanja. Gore smo vidjeli da je očekivana vrijednost 3.5.

[2] *Neovisna varijabla* je varijabla koja predstavlja veličinu kojom se manipulira u eksperimentu. *Zavisna varijabla* predstavlja veličinu čija vrijednost ovisi o tim manipulacijama.

[3] Jakob Bernoulli (6. siječnja 1655., Basel, Švicarska–16. kolovoza 1705., Basel, Švicarska), švicarski matematičar koji je prvi upotrijebio izraz integral. Proučavao je lančanu mrežu, krivulju viseće žice. Bio je rani korisnik polarnih koordinata i otkrio je izokron.



Slika 2.1. Eksperiment bacanja kocke 10 *puta i* 10000 *puta. Izvor: izrada autora (A.1).*

Broj bacanja	Vrijednost prosjeka bacanja
10	2.8
10000	3.5227

Tablica 2.3. Usporedba vrijednosti prosjeka bacanja

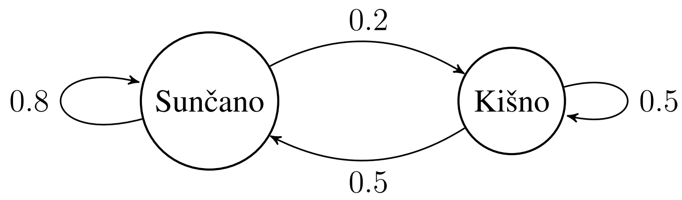
Vidimo da kako se broj bacanja kocke povećava, tako se sve više približavamo toj teorijskoj vrijednosti.

3. Markovljevi lanci

Ovo poglavlje obrađeno je prema izvorima: [1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 13].

Markovljev lanac je matematički sustav koji doživljava prijelaze iz jednog stanja u drugo prema određenim pravilima vjerojatnosti. Definirajuća karakteristika Markovljevog lanca je da bez obzira na to kako je proces došao u svoje sadašnje stanje, moguća buduća stanja su fiksna. Drugim riječima, vjerojatnost prijelaza u bilo koje određeno stanje ovisi isključivo o trenutnom stanju i proteklom vremenu. *Prostor stanja*, ili skup svih mogućih stanja, može biti bilo što: slova, brojevi, vremenski uvjeti, sportski rezultati itd. Kako bi ilustrirali ovaj proces, možemo ući malo dublje u prije spomenuti primjer 2.9, model Markovljevog lanca za predviđanje vremenske prognoze.

Primjer 3.1. *Radi jednostavnosti, zamisliti ćemo da postoje samo dva moguća stanja za vrijeme:* sunčano *ili* kišno. *Uvijek možemo izravno promatrati trenutno vremensko stanje, a zajamčeno je da će uvijek biti jedno od dva gore navedena stanja. Ako želimo predvidjeti kakvo će vrijeme biti sutra možemo intuitivno pretpostaviti da postoji inherentna tranzicija u ovom procesu, jer trenutno vrijeme ima utjecaja na to kakvo će vrijeme biti sljedećeg dana. Recimo da onda odlučimo prikupiti podatke o vremenu od prijašnjih nekoliko godina i izračunamo da je vjerojatnost da se nakon oblačnog dana pojavi sunčan dan* 0.5*, a nakon sunčanog kišni* 0.2*; sukladno tome, vjerojatnost da se kišni dan ponovi je* 0.5*, te da se sunčani dan ponovi* 0.8[1]*. Sada možemo koristiti ovu distribuciju da bi predvidjeli vrijeme za dane koji dolaze, na temelju trenutnog stanja vremena u to vrijeme. To bi grafički prikazano izgledalo ovako*[2]*:*



Slika 3.1. Grafički prikaz modela za predviđanje vremena

Ovaj primjer ilustrira mnoge ključne koncepte Markovljevih lanaca. Oni se u suštini sastoje od skupa prijelaza, koji su određeni nekom distribucijom vjerojatnosti, koji zadovoljavaju Markovljevo svojstvo. Primijetimo kako se u ovom primjeru distribucija vjerojatnosti dobiva isključivo promatranjem prijelaza iz tekućeg dana u sljedeći. Ovo ilustrira Markovljevo svojstvo, jedinstvenu karakteristiku Markovljevih procesa koja ih čini **bez pamćenja/memorije**. Stoga im nedostaje sposobnost proizvodnje sadržaja ovisnog o kontekstu jer ne mogu uzeti u obzir cijeli lanac prethodnih stanja.

[1] Ta promjena stanja, iz sunčanog u kišno, ili iz sunčanog u sunčano, u Markovljevim lancima se nazivam **korak**.

[2] O grafičkim prikazima Markovljevih lanaca ćemo reći više malo kasnije.

Slika 3.2. Andrej Andrejevič Markov, izvor: [13]

3.1. Andrej Andrejevič Markov

Andrej Andrejevič Markov, sin Nadežde Petrovne i Andreja Grigorijeviča Markova, rodio se 14. lipnja 1856. u Rjazanju u Rusiji. Od djetinjstva je bio lošeg zdravlja, koje je uzrokovala tuberkuloza koljena te je prvih deset godina života proveo hodajući uz pomoć štaka. Kasnije je provedena uspješna operacija koja mu je omogućila normalno kretanje. Srednju školu je pohađao u 5. Gimnaziji u Sankt Peterburgu te je već tada počeo pokazivati izvanredne talente za matematiku.

Iako njegov prvi matematički rad o integraciji linearnih diferencijalnih jednadžbi, koji je napisao dok je bio u Gimnaziji, nije bio originalan, njegovo pisanje dovelo ga je do susreta s Korkinom[3] i Zolotarevom[4], dvojicom vodećih profesora na Sveučilištu. 1874. godine upisao je Fizičko-matematički fakultet Sveučilišta u Sankt Peterburgu gdje je upisao seminare koje su vodili Korkin i Zolotarev. Također je pohađao Čebiševa[5] predavanja, pročelnika matematičkog odjela, koji je poticao istraživačku atmosferu.

Markov je diplomirao 1878. godine osvojivši zlatnu medalju za podnošenje najboljeg eseja,

[3]Aleksandar Nikolajevič Korkin (19. veljače 1837., Židovinovo, Tot'ma, Vologda, Rusija–1. rujna 1908., Sankt Peterburg, Rusija), ruski matematičar čija je najveća kontribucija bila razvoj parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

[4]Egor Ivanovič Zolotarev (12. travnja 1847., Sankt Peterburg, Rusija–19. srpnja 1878., Sankt Peterburg), ruski matematičar koji je proizveo temeljno djelo o analizi i teoriji brojeva.

[5]Pafnuti Čebišev (16. svibnja 1821., Okatovo, Rusija–8. prosinca 1894., Sankt Peterburg, Rusija), uglavnom je zapamćen po svojim istraživanjima u teoriji brojeva. Čebišev je također bio zainteresiran za mehaniku i poznat je po ortogonalnim polinomima koje je izumio.

čija je tema bila integracija diferencijalnih jednadžbi pomoću kontinuiranih razlomaka.[6] Iduće dvije godine radio je za magisterij, a 1880. godine dobio je diplomu za svoju izvanrednu tezu o binarnim kvadratnim oblicima s pozitivnom determinantom[7]. Nakon podnošenja magistarskog rada, počeo je predavati na Sveučilištu u Sankt Peterburgu kao privatni docent dok je pisao doktorat. Doktorirao je 1884. godine disertacijom o određenim primjenama kontinuiranih razlomaka.

1886. Markov je postao profesor u Sankt Peterburgu te ga je Čebišev predložio za dopunskog člana Ruske akademije znanosti. Izabran je za izvanrednog člana 1890., a za običnog akademika 1896. Markov se na početku karijere uglavnom bavio teorijom brojeva i analizom, algebarskim kontinuiranim razlomcima, granicama integrala, teorijom aproksimacije i konvergencijom redova. Nakon 1900. Markov je primijenio metodu kontinuiranih razlomaka, kojoj je pionir njegov učitelj Čebišev, na teoriju vjerojatnosti. Također je proučavao nizove međusobno ovisnih varijabli, nadajući se da će uspostaviti zakone granica vjerojatnosti u njihovom najopćenitijem obliku. On je dokazao središnji granični teorem pod prilično općim pretpostavkama. Markova se posebno pamti i po svom proučavanju tematike ovog rada, a to su Markovljevi lanci. Tim radom utemeljena je potpuno nova grana teorije vjerojatnosti i pokrenuta teorija stohastičkih procesa. Službeno se umirovio 1905., ali je nastavio podučavati veći dio svog života. 20.7.1922. preminuo je u Sankt Peterburgu u Rusiji.

3.2. Povijest Markovljevih lanaca

Andrej Andrejevič Markov početkom 20. stoljeća istraživao je stohastičke procese koji danas nose njegovo ime. Svoj prvi rad na tu temu objavio je 1906. godine. U njemu je pokazao da pod određenim uvjetima prosječni ishodi Markovljevog lanca konvergiraju ka fiksnom vektoru vrijednosti, dokazujući tako slab zakon velikih brojeva bez pretpostavke neovisnosti, što se do tada uobičajeno smatralo uvjetom da takvi matematički zakoni vrijede. Markov je kasnije koristio Markovljeve lance za proučavanje raspodjele samoglasnika u Jevgenij Onjeginu, koji je napisao Aleksandar Puškin[8]

1912. Henri Poincaré[9] proučavao je Markovljeve lance na konačnim skupovima s ciljem proučavanja miješanja karata. Pod ostale ranije upotrebe Markovljevih lanaca spadaju model difu-

[6]Ekspanzija kontinuiranog razlomka broja r izraz je oblika: $r = \frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d+\dots}}}}$. Ako je r racionalan broj, ovaj razvoj će biti konačan.

[7]Binarni kvadratni oblik koji glasi $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ je kvadratni homogeni polinom u dvije varijable gdje su a, b, i c koeficijenti. Ima diskriminantu $d = b^2 - 4ac$ i pozitivno je određen ako je $d < 0$, a neodređen ako je $d > 0$.

[8]Aleksandar Sergejevič Puškin (6. lipnja 1799., Moskva–10. veljače 1837., Sankt Peterburg), ruski pjesnik, dramatičar i prozaik. Pisao je djelo *Jevgenij Onjegin* od 1823. do 1831. godine; jedno od bitnijih djela ruske književnosti. Petar Iljič Čajkovsi napisao je istoimenu operu prema motivima romana.

[9]Henri Poincaré, puno ime Jules Henri Poincaré (29. travnja 1854., Nancy, Francuska–17. srpnja 1912., Pariz) bio je francuski matematičar, jedan od najvećih matematičkih fizičara s kraja 19. stoljeća. Napravio je niz inovacija u geometriji, teoriji diferencijalnih jednadžbi, elektromagnetizmu, topologiji i filozofiji matematike.

zije[10], koji su uveli Paul[11] i Tatyana Ehrenfest[12] 1907. godine, i proces grananja[13], koji su uveli Francis Galton[14] i Henry William Watson[15] 1873.,a koji je prethodio Markovljevom radu. Počevši od 1928. godine, Maurice Fréchet[16] se zainteresirao za Markovljeve lance, što je na kraju rezultiralo time da je 1938. objavio detaljnu studiju o Markovljevim lancima.

Andrej Kolmogorov razvio je u radu iz 1931. veliki dio rane teorije Markovljevih procesa s kontinuiranim vremenom. Kolmogorov je djelomično bio inspiriran radom Louisa Bacheliera[17] iz 1900. o fluktuacijama na burzi, kao i radom Norberta Wienera[18] na Einsteinovom modelu Brownovog gibanja[19]. Uveo je i proučavao određeni skup Markovljevih procesa poznatih kao difuzijski procesi, gdje je izveo skup diferencijalnih jednadžbi koje opisuju procese. Neovisno o Kolmogorovljevom radu, Sydney Chapman[20] je u radu iz 1928. godine izveo jednadžbu, koja se danas naziva Chapman-Kolmogorovljeva jednadžba[21], na manje matematički rigorozan način od Kolmogorova, dok je proučavao Brownovo gibanje. Drugi matematičari koji su značajno doprinijeli temeljima Markovljevih procesa uključuju Williama Fellera, počevši od 1930-ih, a zatim kasnije Evgenija Dynkina[22], počevši od 1950-ih.

---

[10]Ehrenfestov model difuzije predložen je početkom 1900-ih godina kako bi se rasvijetlilo statističko tumačenje drugog zakona termodinamike, da se entropija zatvorenog sustava može samo povećati.

[11]Paul Ehrenfest (18. siječnja 1880.–25. rujna 1933.) bio je austrijsko-nizozemski teorijski fizičar, koji je dao veliki doprinos području statističke mehanike i njezinih odnosa s kvantnom mehanikom, uključujući teoriju faznog prijelaza i Ehrenfestov teorem. Povezao se s Albertom Einsteinom tijekom posjeta Pragu 1912. i postao profesor u Leidenu, gdje je često ugostio Einsteina.

[12]Tatyana Pavlovna Ehrenfest, kasnije van Aardenne-Ehrenfest (28. listopada 1905., Beč-29. studenog 1984., Dordrecht), nizozemska matematičarka. Bila je kći Paula Ehrenfesta. Pod svojim udanim imenom, Tanja van Aardenne-Ehrenfest, poznata je po svojim doprinosima De Bruijn sekvencama, nizovima s niskim odstupanjem i BEST teoremu.

[13]Proces grananja, također zvan Galton-Watson proces, je jednostavan, ali elegantan model rasta stanovništva.

[14]Francis Galton (16. veljače 1822., Sparkbrook, Engleska–17. siječnja 1911., Surrey, Engleska), istraživač i antropolog, Francis Galton poznat je po svojim pionirskim studijama ljudske inteligencije. Psoljednji dio svog života posvetio je eugenici, odnosno poboljšanju fizičkog i mentalnog sastava ljudske vrste odabranim roditeljstvom.

[15]Henry William Watson (25. veljače 1827., London, Engleska–11. siječnja 1903., Berkswell, Engleska), engleski matematičar koji je napisao neke utjecajne udžbenike o elektricitetu i magnetizmu.

[16]René Maurice Fréchet (2. rujna 1878., Maligny, Francuska–4. lipnja 1973., Pariz, Francuska), francuski matematičar koji je dao veliki doprinos topologiji skupova točaka te definirao i utemeljio teoriju apstraktnih prostora.

[17]Louis Bachelier (11. ožujka 1870., Le Havre, Francuska–26. travnja 1946., St-Servan-sur-Mer, Francuska), francuski matematičar kojemu se pripisuje da je bio prva osoba koja je modelirala stohastički proces koji se danas naziva Brownovo gibanje. Smatra se ocem financijske matematike.

[18]Norbert Wiener (26. studenog 1894., Columbia, Mo., Sad–18. ožujka 1964., Stockholm, Švedska), američki matematičar koji je uspostavio znanost kibernetike. Međunarodnu slavu stekao je formulirajući neke od najvažnijih doprinosa matematici u 20. stoljeću.

[19]Brownovo gibanje, nasumično gibanje čestica koje su mnogo veće nego atomi i obične molekule, ali premalene da bi bile vidljive golim okom u nekom fluidu, kao primjerice gibanje čestica dima u zraku ili peludnih čestica u vodi.

[20]Sydney Chapman(29. siječanj 1888., Eccles, Lancashire, Engleska–16. lipnja 1970., Boulder, Colo., SAD), engleski matematičar i fizičar poznat po svojim istraživanjima u geofizici.

[21]U matematici, posebno u teoriji Markovljevih Stohastičkih procesa u teoriji vjerojatnosti, Chapman-Kolmogorovljeva jednadžba je identitet koji povezuje zajedničke distribucije vjerojatnosti različitih skupova koordinata na stohastičkom procesu.

[22]Evgenij Borisovič Dynkin (11. svibnja 1924.. Sankt Peterburg, Rusija–14. studenog 2014., Ithaca, SAD), američki matematičar ruskog porijekla koji je radio na područjima vjerojatnosti i algebre, posebno polujednostavnih Lijevih grupa i algebri, te Markovljevih procesa. Dynkinovi dijagrami su nazvani po njemu.

3.3. Markovljevi lanci diskretnog vremena

Markovljev lanac opisuje evoluciju nekog sustava ili varijable u prisutnosti nekog šuma, tako da je samo gibanje sustava nasumično. Gotovo svaki koristan ili zanimljiv nasumični proces kojeg se možemo sjetiti može se opisati kao Markovljev proces ako pravilno definiramo pojam stanja. *Stanje* Markovljevog lanca u trenutku n je vrijednost X_n.[23] *Prostor stanja* Markovljevog lanca, S, skup je vrijednosti koje svaki X_t može uzeti. U tom lancu X_{n+1} ovisi o X_n, ali ne i o ranijim vrijednostima $X_0, \dots, X_{n-1}$ nasumičnog slijeda. Za početak ćemo se ograničiti na promatranje slučaja diskretnog vremena, gdje je svaki X_n diskretna slučajna varijabla s rasponom $S_X = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Definicija 3.1. *Markovljev lanac diskretnog vremena $\{X_n | n = 0, 1, \dots\}$ je nasumični slijed diskretnog vremena i vrijednosti takav da za zadani $X_0, \dots, X_n$, sljedeća nasumična varijabla X_{n+1} ovisi samo o X_n kroz vjerojatnost prijelaza*

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0] = P[X_{n+1} = j | X_n = i] = P_{ij}. \tag{3.1}$$

Vrijednost X_n sažima svu prošlost sustava potrebnu za predviđanje sljedeće varijable X_{n+1} u nasumičnom nizu. X_n nazivamo *stanje* sustava za vrijeme n, a prostor uzorka naziva se *skup stanja* ili *prostor stanja*. Postoji fiksna *vjerojatnost prijelaza* P_{ij} da će iduće stanje biti j s obzirom da je trenutno stanje i. Vjerojatnosti prijelaza tvore *matricu prijelaza* $P = (p_{ij})$. Prijelaz iz jednog stanja u drugo nazivamo *korak*. Dakle, recimo da u istom sustavu krenemo iz dva različita stanja. U trenutku kada nakon n broja koraka završimo u oba slučaja u istom stanju s_i, "sjećanje" na to otkuda smo krenuli se briše, jer u tom trenutku oba slučaja imaju identične vjerojatnosti za idući korak. Ove činjenice odražavaju se u sljedećem teoremu.

Teorem 3.1. *Vjerojatnosti prijelaza P_{ij} Markovljevog lanca zadovoljavaju*

$$P_{ij} \geq 0, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1. \tag{3.2}$$

Pošto se sustav mijenja nasumično, nemoguće je sa sigurnošću predvidjeti stanje Markovljevog lanca u određenoj točki u budućnosti. Međutim, statistička svojstva budućnosti sustava mogu se predvidjeti i baš ta svojstva su važna u mnogim primjenama.

Markovljev lanac ne možemo zadati bez da definiramo prostor stanja i matricu prijelaza. Graf kojim prikazujemo Markovljev lanac nazivamo *dijagram stanja*. U njemu vrhovi predstavljaju stanja, a bridovi vjerojatnosti prijelaza. U dijagramu stanja crtaju se samo bridovi koji reprezentiraju vjerojatno prijelaza veće od nule ($P_{ij} > 0$). Također možemo definirati *stazu* od vrha s_i do vrha s_j koja predstavlja skup bridova koji vode od vrha s_i do vrha s_j. Za stanje s_i reći ćemo da je *dohvatljivo* iz stanja s_j ako u dijagramu stanja postoji staza od vrha s_i do vrha s_j. Za dva stanja reći ćemo da su *povezana* ako su međusobno dohvatljiva.

[23] Na primjer, ako je $X_n = 6$, kažemo da je proces u stanju 6 u trenutku n.

Definicija 3.2. ***Matrica prijelaza*** *Markovljevog lanca daje vjerojatnosti prijelaza iz jednog stanja u drugo u jednoj vremenskoj jedinici. Te vjerojatnosti prijelaza u jednom koraku Markovljevog lanca s konačnim skupom stanja predstavljamo matricom*

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots & P_{0K} \\ P_{10} & P_{11} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ P_{K0} & \dots & & P_{KK} \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

P ima nenegativne elemente i zbroj svakog reda je 1. Nenegativna matrica P s redovima kojima je zbroj 1 naziva se *matrica prijelaza* ili *stohastička matrica*. Informacije potrebne za predviđanje nekog budućeg stanja X_{n+m}, ako je trenutno stanje X_n, sadržane su u *vjerojatnosti prijelaza u* $n-tom$ *koraka*.

Definicija 3.3. *Za konačni Markovljev lanac,* ***vjerojatnosti prijelaza u*** $\mathbf{n}$***-tom koraku*** *dane su matricom* $P(n)$ *koja ima* i, j*-ti element*

$$P_{ij}(n) = P[X_{n+m} = j | X_m = i]. \tag{3.4}$$

i, j-ti element $P(n)$ nam govori o vjerojatnosti prijelaza iz stanja i u stanje j za točno n koraka. Za $n = 1$, $P(1) = P$, matrica prijelaza stanja. Bitno je imati na umu da $P_{ij}(n)$ mora uzeti u obzir vjerojatnost svakog *puta* od n koraka od stanja i do stanja j, pa je lakše definirati nego izračunati vjerojatnosti prijelaza u n koraka. Chapman-Kolmogorove jednadžbe daju rekurzivni postupak za izračunavanje vjerojatnosti prijelaza u n koraka. Te jednadžbe se temelje na opažanju da prelazak od i do j u $n + m$ koraka zahtijeva da budemo u nekom stanju k nakon n koraka.

Teorem 3.2. *Za konačni Markovljev lanac, vjerojatnosti prijelaza u* $n-tom$ *koraku zadovoljavaju*

$$P_{ij}(n+m) = \sum_{k=0}^{K} P_{ik}(n) P_{kj}(m), \qquad \mathbf{P}(n+m) = \mathbf{P}(n)\mathbf{P}(m). \tag{3.5}$$

Za konačni Markovljev lanac s K stanja, Chapman-Kolmogorove jednadžbe mogu biti izražene u terminima matričnog množenja prijelazne matrice P. Za $m = 1$, matrični oblik Chapman-Kolmogorovljevih jednadžbi daje $P(n+1) = P(n)P$, iz čega slijedi naš sljedeći rezultat.

Teorem 3.3. *Za konačni Markovljev lanac s matricom prijelaza* $\mathbf{P}$*, matrica prijelaza u* $n - tom$ *koraku je*

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}^n. \tag{3.6}$$

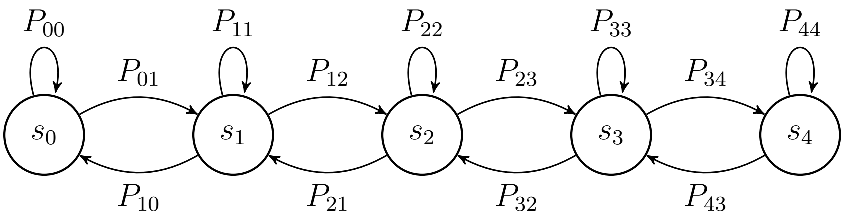
Definicija 3.4. ***Stacionarna distribucija*** *Markovljevog lanca opisuje distribuciju* X_t *nakon dovoljno dugog vremena da se raspodjela* X_t *više ne mijenja. Uzmimo da je* π *vektor stupca vjerojatnosti na stanjima koja Markovljev lanac može posjetiti. Tada je* π *stacionarna distribucija ako ima svojstvo*

$$\pi^T = \pi^T P. \tag{3.7}$$

Nemaju svi Markovljevi lanci stacionarnu distribuciju, ali za neke klase matrice prijelaza (one koje definiraju ergodičke Markovljeve lance) stacionarna distribucija zajamčeno postoji.

Sada kada smo definirali nama najpotrebnije pojmove za baratanje Markovljevim lancima, vrijeme je da damo jedan malo složeniji primjer Markovljevog lanca. Dobar primjer njegove upotrebe je predviđanje ponašanja reda na blagajnama nekog dućana/supermarketa.

Primjer 3.2. *Recimo da imamo supermarket sa četiri blagajne. U ovom sustavu za svaki korak n postoje četiri opcije, osim za krajnje slučajeve 0 i 4, u kojima kupac ne može otići s blagajne (jer nema nijednog kupca na blagajni), odnosno ne može doći novi kupac na red na blagajnu (jer su sve blagajne zauzete), što se može vidjeti iz slike njegovog dijagrama stanja:*



Slika 3.3. Dijagram stanja za red na blagajnama

Dakle, četiri spomenute opcije su, kao što se vidi iz slike 3.3:

1. *Kupac dolazi na blagajnu (sustav se pomiče u desno)*
2. *Kupac odlazi s blagajne (sustav se pomiče u lijevo)*
3. *U istom trenutku jedan kupac dolazi na blagajnu, dok drugi odlazi s blagajne (sustav ostaje u istom stanju)*
4. *Ne dogodi se ništa (sustav ostaje u istom stanju)*

Kako možemo predvidjeti buduće stanje u supermarketu? Jednostavno, ovisi o tome kakvo je stanje trenutno u njemu, to je sve što trebamo znati da bi mogli napraviti predviđanje njegovog budućeg stanja, ako znamo vjerojatnosti mogućih koraka iz svih mogućih stanja.

Recimo da je u svakom trenutku jednaka vjerojatnost da kupac dođe na blagajnu ili ode s blagajne. Onda će vjerojatnost pomaka sustava u lijevo ili desno biti 0.25 *te* 0.5 *da ostane u istom stanju, pošto postoje dvije mogućnosti da sustav ostane u istom stanju, odnosno* 0.33 *i* 0.67 *za krajnja stanja. Pogledajmo sada kako bi izgledala matrica prijelaza dobivena iz dijagrama stanja:*

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & 0 & 0 & 0 \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & 0 & 0 \\ 0 & P_{21} & P_{22} & P_{23} & 0 \\ 0 & 0 & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ 0 & 0 & 0 & P_{43} & P_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.33 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0.33 & 0.67 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Probajmo sada vršiti predviđanja nekoliko budućih stanja ovog sustava. Uzeti ćemo da je $P(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$*, odnosno da nema kupaca na blagajnama. Matricu prijelaza prvog koraka dobiti ćemo tako da pomnožimo početno stanje* $P(0)$ *s matricom prijelaza:* $P(1) = P(0) \cdot P$*, i tako dalje za sve iduće korake. Izračunajmo matrice prijelaza prva tri koraka:*

$$P(1) = P(0) \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.67 & 0.33 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0.33 & 0.67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.33 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

$$P(2) = P(1) \cdot P = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.33 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot P = \begin{bmatrix} 0.5314 & 0.3861 & 0.0825 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

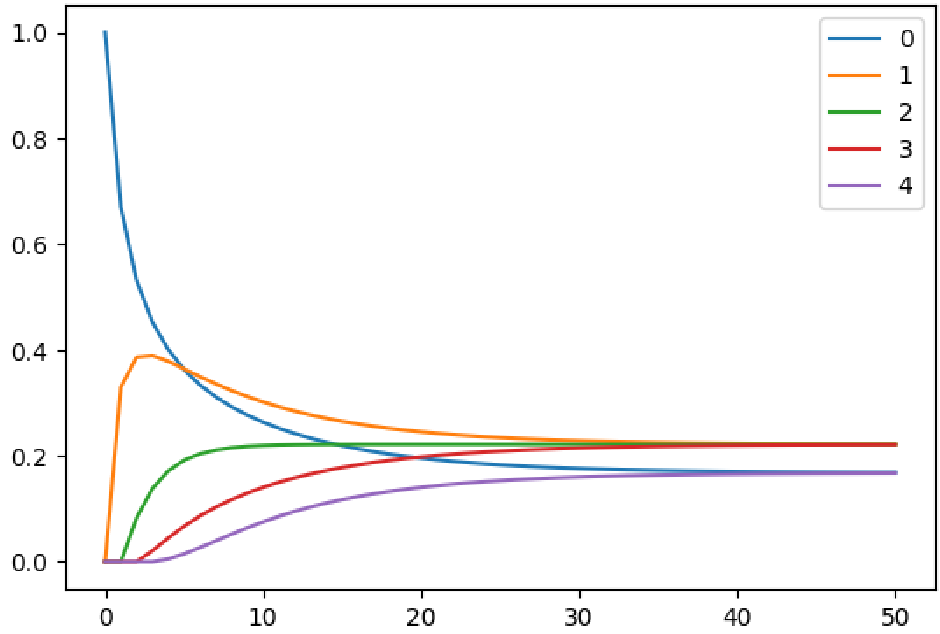
$$P(3) = P(2) \cdot P = \begin{bmatrix} 0.5314 & 0.3861 & 0.0825 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot P = \begin{bmatrix} 0.4526 & 0.389 & 0.1378 & 0.0206 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Ovi rezultati nam govore koja je vjerojatnost da se nađemo u pojedinom stanju nakon određenog broja koraka ako krenemo iz stanja 0*. Tako vidimo da je nakon* 1 *koraka vjerojatnost da budemo u stanju* $s_0 = 0.67$ *te stanju* $s_1 = 0.33$*, što je lako uočiti i bez množenja matrica, no, ovaj proces postaje korisniji kako raste broj koraka. Ako se pitamo koja je vjerojatnost da se nađemo u stanju* s_2 *nakon* 3 *koraka, samo trebamo pogledati u matricu* $P(3)$ *iz koje možemo očitati da je* $P_{02}(3) = 0.1378$*. Kako je ovaj Markovljev lanac ergodički (više o tome kasnije), zajamčeno je da će imati stacionarnu distribuciju. Ako nastavimo računati* P*-ove do određenog broja, matrica prijelaza će se prestati mijenjati. Pa je tako recimo* $P(49)$ *i* $P(50)$*:*

$$P(49) = \begin{bmatrix} 0.16857158 & 0.22215133 & 0.22147651 & 0.22080169 & 0.16699889 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

$$P(50) = \begin{bmatrix} 0.16848079 & 0.22207341 & 0.22147651 & 0.22087961 & 0.16708968 \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

Vidimo da su $P(49)$ *i* $P(50)$ *praktički identični (razlika tek na četvrtoj decimali), što nam govori da je lanac već sigurno ušao u stacionarnu distribuciju.*



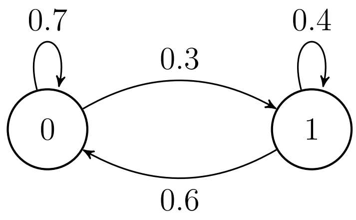
Slika 3.4. Simulacija Markovljevog lanca, isprogramirano u Python-u (A.2).

Slika 3.4 je simulacija ovog Markovljevog lanca isprogramirana u programskom jeziku Python i pokazuje ponašanje vektora stanja za korake $n = 0, 1, \ldots, 50$. Ako usporedimo naš izračun i sliku odokativno vidimo da lijepo prati naše dobivene vrijednosti. Uzmimo recimo stanje s_0 (na slici označeno plavom bojom), vidimo da za $n = 1$ ima vrijednost ≈ 0.67, za $n = 2$ vrijednost ≈ 0.53, za $n = 3$ vrijednost ≈ 0.45 i za $n = 50$ vrijednost ≈ 0.17. To odgovara našim izračunima u (3.9)*,* (3.10)*,* (3.11)*,* (3.12) *i* (3.13)*. Kod provjere vidimo da i za ostala stanja sve odgovara. Također možemo primijetiti da već oko* 30*-og koraka ulazimo u stacionarno stanje. S pomoći programiranja lako izbjegnemo mukotrpno računanje sa samo par linija koda, te vidimo lijepim grafičkim prikazom kako se ponaša Markovljev lanac.*

Primjer 3.2 spada pod specijalni tip Markovljevih lanaca koje nazivamo slučajna šetnja. Njome ćemo se više pozabaviti u 5. poglavlju.

Prije nego što nastavimo dalje na klasifikacije stanja Markovljevih lanaca, dajmo još jedan primjer Markovljeva lanca.

Primjer 3.3. *Markovljev lanac s dva stanja može se koristiti za modeliranje širokog spektra sustava koji se naizmjenično kreću između stanja* ON *i* OFF*. Nakon svake jedinice vremena u* OFF *stanju, sustav se uključuje s vjerojatnošću p. Nakon svake jedinice vremena u stanju* ON*, sustav se isključuje s vjerojatnošću q. Dajmo neke brojeve vrijednostima p i q. Recimo da je $p = 0.3$, a $q = 0.6$. Koristeći 0 i 1 za označavanje stanja* ON *i* OFF*, Markovljev lanac za ovaj sustav je*



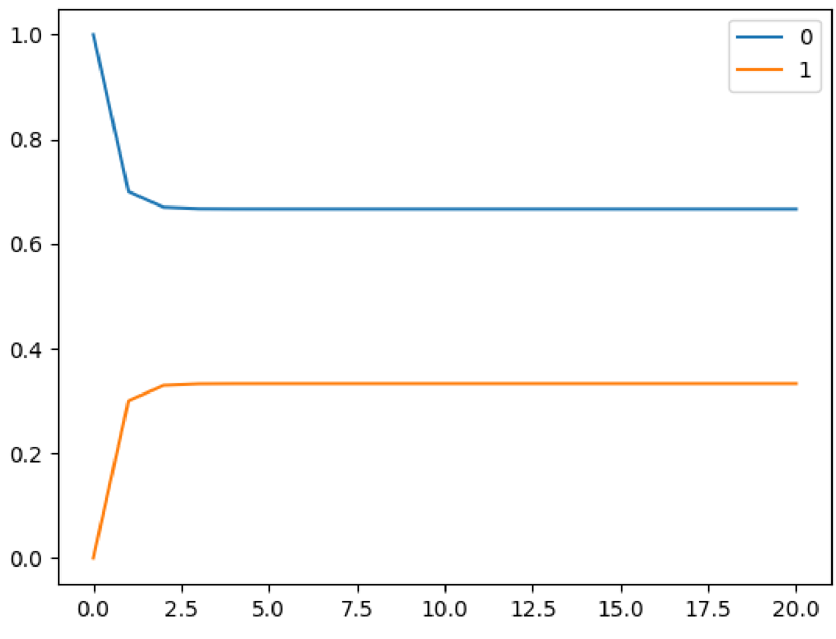
Matrica prijelaza onda izgleda:

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

Recimo da je početno stanje $P(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, *odnosno početno stanje je* OFF. *Matrica prvog koraka* $P(1)$ *bila bi:*

$$P(1) = P(0) \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}, \tag{3.15}$$

što znači da je vjerojatnost da nakon jednog koraka budemo u stanju OFF 0.7 *te u stanju* ON 0.3.



Slika 3.5. Simulacija Markovljevog lanca, isprogramirano u Python-u (A.2).

Isto dobivamo matrice $P(2)$ *i* $P(3)$*:*

$$P(2) = P(1) \cdot P = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.33 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

$$P(3) = P(2) \cdot P = \begin{bmatrix} 0.67 \\ 0.33 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.667 & 0.333 \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

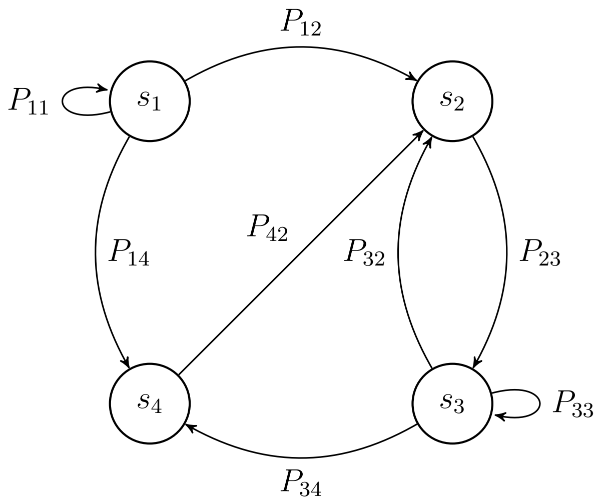
Vidimo da su jednadžbe (3.16) *i* (3.17) *gotovo identične (razlika na* 3*. decimali), što znači da ovaj lanac ulazi u stacionarnu distribuciju vrlo brzo, već nakon* 3 *koraka. Slika 3.5 je dobivena na isti način kao 3.4, te na njoj također vidimo da nakon* 3 *koraka ulazimo u stacionarnu distribuciju.*

4. Klasifikacija stanja u Markovljevu lancu

U ovom poglavlju analiziramo stanja Markovljeva lanca u odnosu na njegovu povezanost s drugim stanjima, te kako se te različite povezanosti stanja odražavaju na cijeli Markovljev lanac. Primjerice, postoje stanja koja su povezana sa svim njima dohvatljivim stanjima koja nazivamo povratnim, stanja iz kojih lanac ne može izaći, kao što je, na primjer, završetak igre na sreću, koja nazivamo apsorpcijskim te prijelazna stanja u kojima se kratko zadržavamo. Da bismo mogli jasno objasniti različita stanja, moramo prvo objasniti osnovne pojmove potrebne za to, a to su *dohvatljivost* i *povezanost*.

Definicija 4.1. *Stanje j je* ***dohvatljivo*** *iz stanja i, zapisano $i \to j$, ako je $P_{ij}(n) > 0$ za neki $n > 0$. Kada j nije dohvatljivo iz i, pišemo $i \nrightarrow j$. U grafu Markovljevog lanca, $i \to j$ vrijedi ako postoji put od i do j.*

Definicija 4.2. *Stanja i i j su* ***povezana****, zapisano $i \leftrightarrow j$, ako vrijedi $i \to j$ i $j \to i$, odnosno da je i dohvatljivo iz j i obrnuto.*



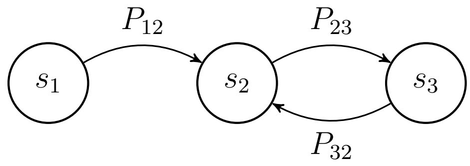
Slika 4.1. Primjer dohvatljivih *i* povezanih *stanja*

Na slici 4.1 stanja s_2, s_3 i s_4 dohvatljiva su iz s_1 (te i iz svih ostalih stanja), no stanje s_1 nije dohvatljivo iz njih, tako da međusobno nisu povezani. Stanja s_2, s_3 i s_4 međusobno su dohvatljiva, pa su povezana.

Stanja Markovljevih lanaca klasificiramo na sljedeći način:

1. Stanje s_i zovemo **prijelaznim** ako postoji stanje s_j dohvatljivo iz s_i, ali da s_i nije dohvatljivo iz s_j. Ako iz prijelaznog stanja izađemo, postoji vjerojatnost veća od 0 da se u njega više nikad ne vratimo.

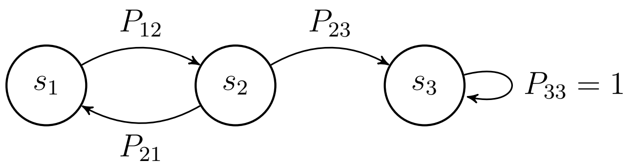
2. Stanje s_i zovemo **povratnim** ako je povezano sa svim stanjima s_j koja su dohvatljiva iz s_i.



Slika 4.2. Primjer prijelaznog i povratnog stanja

U ovom primjeru stanje s_1 je *prijelazno*, a stanja s_2 i s_3 su *povratna*.

3. Stanje s_i zovemo **apsorpcijsko** ako je p_{ii} = 1, odnosno ako uđemo u to stanje, više iz njega ne možemo izaći.



Slika 4.3. Primjer apsorpcijskog stanja

U ovom primjeru stanje s_3 je apsorpcijsko. Vidimo da kada u njega uđemo, nikada više iz njega nećemo izaći.

4.1. Ergodički Markovljevi lanci

Definicija 4.3. ***Ergodički*** *Markovljev lanac je onaj kojemu su sva stanja povezana.*

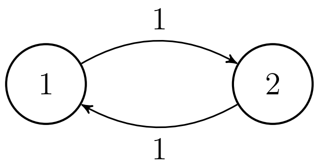
Ergodičnost Markovljevog lanca lako se provjerava na dijagramu stanja. To je lanac kod koji, uz neke uvjete, u dovoljno velikom vremenskom periodu prolazi kroz sva svoja stanja. Vektor stacionarnih vjerojatnosti nazivamo vektor stanja $\vec{p}$ za kojeg vrijedi $\vec{p} = \vec{p}P$. Svaki ergodički Markovljev lanac ima jedinstveni vektor stacionarnih vjerojatnosti te vrijedi zakon velikih brojeva za ergodičke Markovljeve lance koji kaže da i-ta komponenta vektora stacionarnih vjerojatnosti aproksimativno predstavlja postotak vremena koji lanac provede u stanju s_i i to je obično vrijednost koju promatramo kod ovog tipa lanaca.

Riješimo nekoliko primjera zadataka s ergodičnim Markovljevih lanaca. Glavna stvar koja nas zanima je ispitati njihovu ergodičnost i izračunati njihovu stacionarnu distribuciju.

Primjer 4.1. *Ispitajmo ergodičnost Markovljevog lanca zadanog prostorom stanja* $S = 1, 2$ *i matricom prijelaza*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

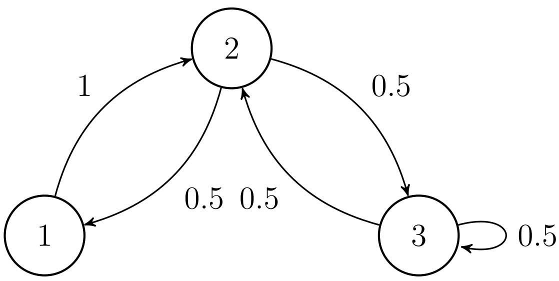
Rješenje.
Dijagram stanja ovako zadanog Markovljevog lanca izgledati će:



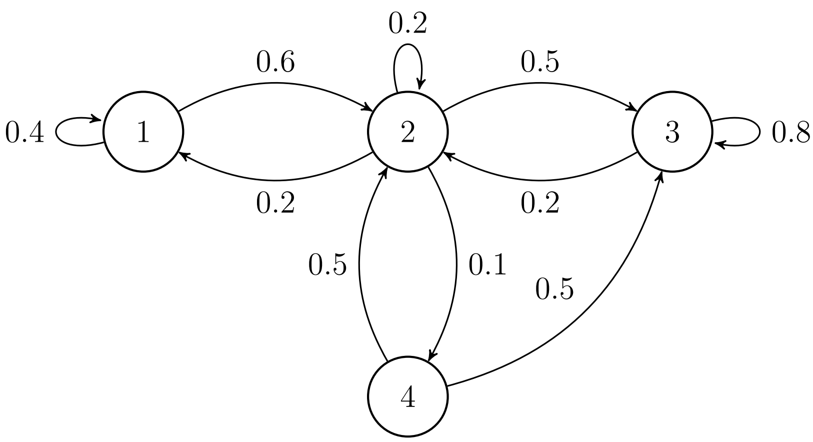
Vidimo da su oba stanja povezana, te da u dijagramu nema petlji, odnosno niti jedno stanje nije apsorpcijsko. Zaključujemo da je lanac ergodički. □

Primjer 4.2. *Odredimo vektore stacionarnih stanja za Markovljeve lance definirane sa sljedećim dijagramima stanja:*

a)



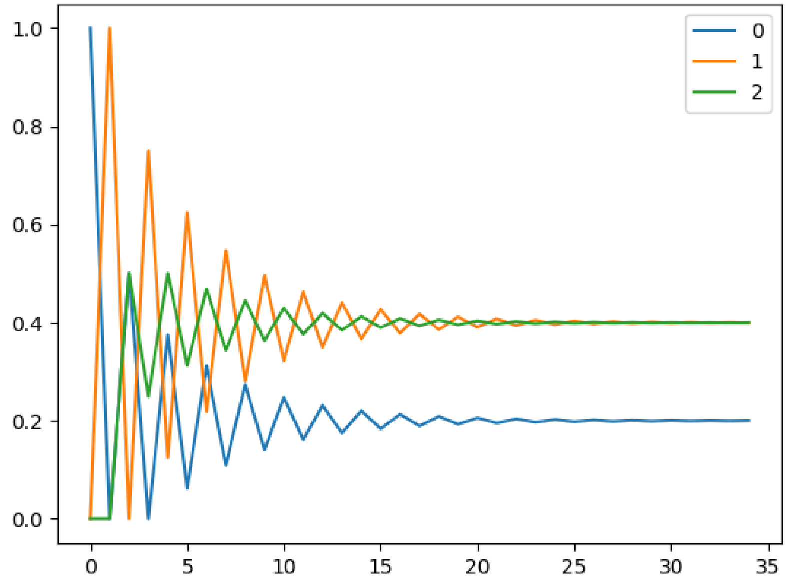
b)



Rješenje.

a) Simulacijom lanca dolazimo do odgovora:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

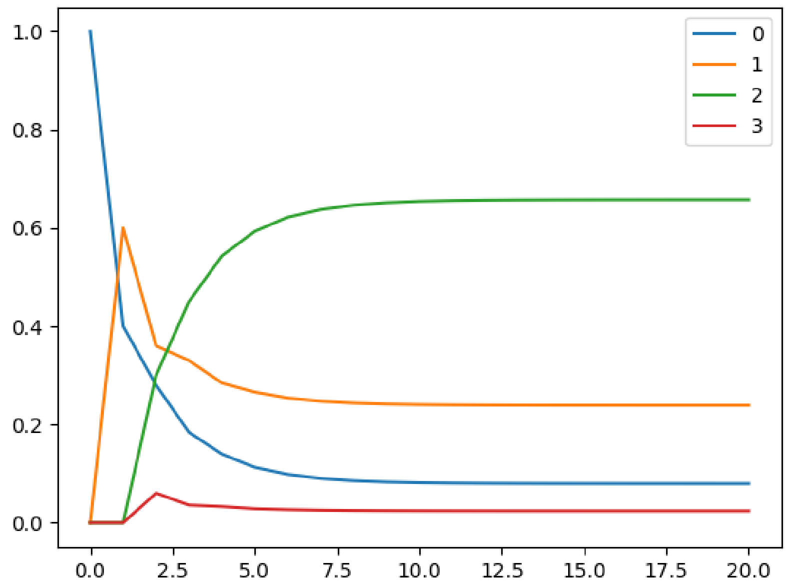


Slika 4.4. Simulacija Markovljevog lanca, prikaz stacionarne distribucije. Isprogramirano u Python-u. (A.2).

Za pojašnjenje slike 4.4 pogledati 3.4.

b) Simulacijom lanca dolazimo do odgovora:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0.797 & 0.239 & 0.6574 & 0.0239 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$



Slika 4.5. Simulacija Markovljevog lanca, prikaz stacionarne distribucije. Isprogramirano u Python-u. (A.2).

Za pojašnjenje slike 4.5 pogledati sliku 3.4.

□

Primjer 4.3. *Jedan trgovački lanac istražuje prodaju nekog artikla od dvaju različitih proizvođača, označimo ih s A i B. U prvom je periodu prodaja artikla proizvođača A bila 55%, naprema prodaji proizvođača B od 45%. U drugom periodu odnos je bio $67\% : 33\%$, dok je u trećem odnos bio $70\% : 30\%$. Pretpostavljeno je da se opisani proces može pratiti kao Markovljev lanac. Odredimo:*

a) Prostor stanja i interpretirajmo zadane informacije u terminima teorije Markovljevih lanaca.

b) Matricu prijelaznih vjerojatnosti.

c) Koliki će biti odnos prodaje u trećem periodu.

d) Odnos prodaje nakon dužeg vremenskog perioda.

Rješenje.

a) Prostor stanja Markovljevog lanca ovdje definiraju događaji A - prodan je proizvod proizvođača A i B - prodan je proizvod proizvođača B. Informacije o omjeru prodaje u zadatku su u biti vektori stanja te možemo pisati

$$\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} 0.55 & 0.45 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}(1) = \begin{pmatrix} 0.67 & 0.33 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}(2) = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

b) Iz teksta zadatka ne možemo direktno odrediti vjerojatnosti prijelaza, pa tako i matricu prijelaza, već ćemo to učiniti korištenjem vektora stanja. Kako prostor stanja ima samo dva elementa A i B to će matrica prijelaza biti drugog reda, odnosno bit će oblika

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & 1-p_1 \\ p_2 & 1-p_2 \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Vrijedi:

$$\vec{p}(1) = \vec{p}(0)P, \quad \vec{p}(2) = \vec{p}(1)P \tag{4.5}$$

odakle slijedi sustav jednadžbi:

$$0.55p_1 + 0.45p_2 = 0.67, \quad 0.67p_1 + 0.33p_2 = 0.7 \tag{4.6}$$

koje rješavamo:

$$\begin{aligned}
&0.33p_2 = 0.7 - 0.67p_1 \rightarrow p_2 = 2.\dot{1}\dot{2} - 2.\dot{0}\dot{3}p_1 \qquad (4.7)\\
&0.55p_1 + 0.45(2.\dot{1}\dot{2} - 2.\dot{0}\dot{3}p_1) = 0.67\\
&-0.364p_1 = -0.284545\\
&p_1 + 0.7825 \rightarrow p_2 = 2.\dot{1}\dot{2} - 2.\dot{0}\dot{3}p_1 = 0.5325
\end{aligned}$$

pa su rješenja:

$$\begin{aligned} p_1 &= 0.7825 \quad \text{i} \quad p_2 = 0.5325 \\ 1 - p_1 &= 0.2175 \quad \text{i} \quad 1 - p_2 = 0.4675 \end{aligned} \tag{4.8}$$

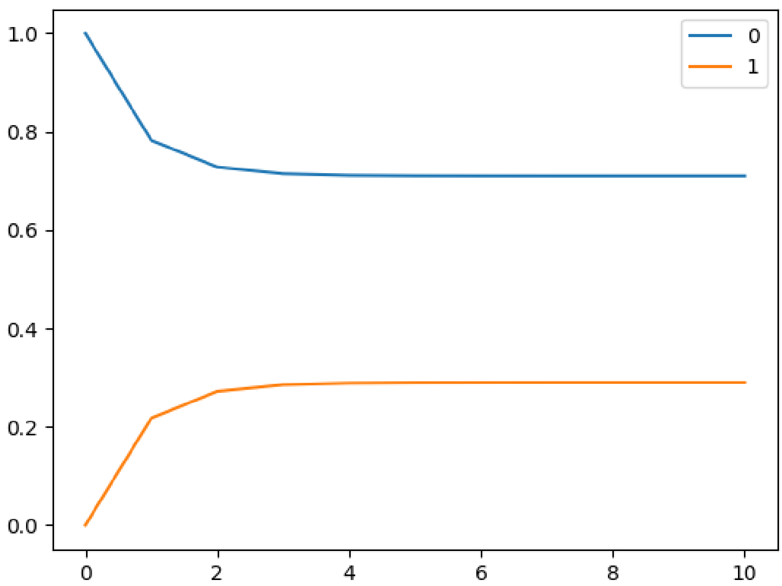
te je matrica prijelaza oblika

$$P = \begin{pmatrix} 0.7825 & 0.2175 \\ 0.5325 & 0.4675 \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

c) Odnos prodaje u trećem periodu predstavlja vektor stanja $\vec{p}(3)$, pa imamo:

$$\vec{p}(3) = \vec{p}(2)P = \begin{pmatrix} 0.7075 & 0.2925 \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

d) Odnos prodaje nakon dužeg vremenskog perioda dan je vektorom stacionarnih vjerojatnosti. Vektor stacionarnih vjerojatnosti dobivamo rješavanjem jednadžbe $\vec{p} = \vec{p}P$ odakle dobivamo da je $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0.71 & 0.29 \end{pmatrix}$ što znači da će se nakon dužeg vremenskog perioda odnos prodaje stabilizirati na $71\% : 29\%$. Istu stvar dobijemo simulacijom ovog lanca:



Slika 4.6. Simulacija Markovljevog lanca, prikaz stacionarne distribucije. Isprogramirano u Python-u. (A.2).

Za pojašnjenje slike 4.6 pogledati sliku 3.4.

□

Primjer 4.4. *Uređaj u laboratoriju se testira svaki tjedan i bilježi se njegovo stanje. Stanje uređaja može biti izvrsno, dobro, zadovoljavajuće i loše. Novi uređaj će nakon tjedan dana rada ostati u izvrsnom stanju s vjerojatnošću od 0.7. Ocjenu dobro dobit će s vjerojatnošću od 0.2, a ocjenu zadovoljavajuće s vjerojatnošću od 0.1. Uređaj koji je ocijenjen ocjenom dobro, nakon tjedan dana rada i dalje dobiva ocjenu dobro u 60% slučajeva, ocjenu zadovoljavajuće u 20% te ocjenu loše također u 20% slučajeva. Uređaj koji je dobio ocjenu zadovoljavajuće nakon tjedan dana rada dobiva istu ocjenu s vjerojatnošću od 0.5, što je i vjerojatnost da dobije ocjenu loše. Uređaj koji dobije ocjenu loše mora se popraviti. Popravak traje tjedan dana i nakon popravka je uređaj u izvrsnom stanju.*

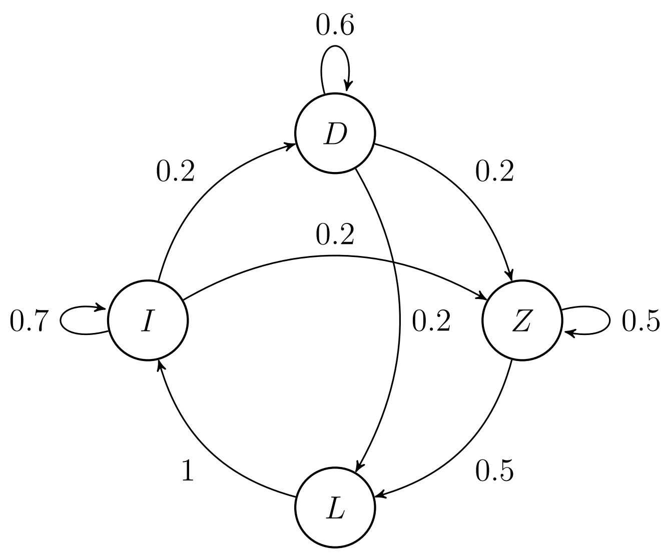
a) Modelirajmo opisanu situaciju pomoću Markovljeva lanca. Nacrtajmo dijagram stanja i odredimo matricu prijelaza.

b) Gledajući duži period vremena, odredimo koliki dio vremena laboratorij radi s uređajem u izvrsnom stanju, a koliki dio vremena s uređajem u lošem stanju.

c) Ako je uređaj trenutno u dobrom stanju, odredimo kolika je vjerojatnost da će u tom stanju biti i za dva tjedna.

Rješenje.

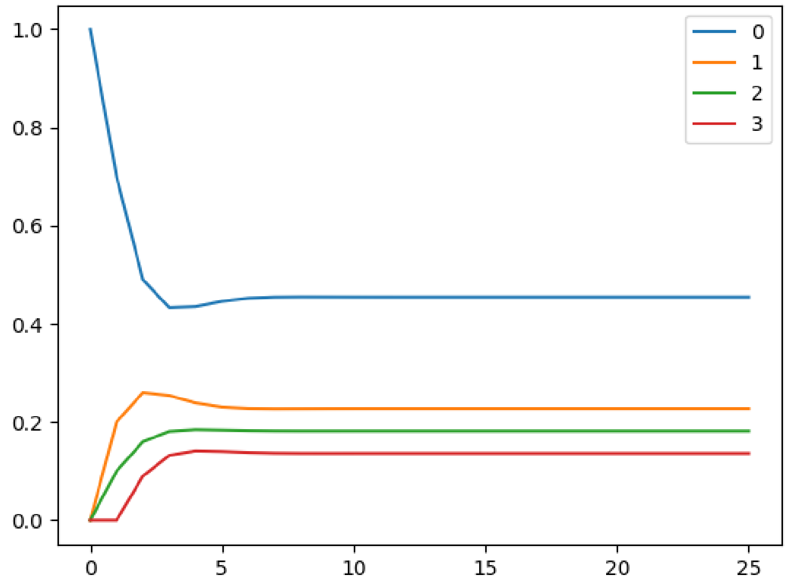
a) Označimo stanja s početnim slovom ocjene redom s I (izvrsno), D (dobro), Z (zadovoljavajuće) i L (loše). Pripadni dijagram Markovljeva lanca izgleda ovako:



dok je pripadna matrica prijelaza oblika:

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

b) Da bi odredili koliki dio vremena u nekom dužem periodu laboratorij radi s uređajem u određenom stanju, trebamo odrediti stacionarnu distribuciju.



Slika 4.7. Simulacija Markovljevog lanca, prikaz stacionarne distribucije. Isprogramirano u Python-u. (A.2).

Kao što vidimo na slici 4.7, uređaj je u izvrsnom stanju oko 45% vremena, a u lošem stanju oko 14% vremena. Za detaljnije pojašnjenje slike 4.7 pogledati sliku 3.4.

c) Označimo trenutno stanje, *dobro*, s $P(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tražimo kolika je vjerojatnost da smo za dva tjedna (u ovom slučaju to su 2 koraka) i dalje u *dobrom* stanju, dakle $P(2) = ?$.

$$P(1) = P(0) \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

$$P(2) = P(1) \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.36 & 0.22 & 0.22 \end{pmatrix}$$

Tražena vjerojatnost jednaka je 36%.

$\square$

4.2. Apsorpcijski Markovljevi lanci

Definicija 4.4. ***Apsorpcijski*** *Markovljev lanac je onaj koji ima barem jedno apsorpcijsko stanje dohvatljivo iz svih preostalih stanja. U njemu će sva stanja koja nisu apsorpcijska biti* ***prijelazna****.*

Osnovna karakteristika apsorpcijskih Markovljevih lanaca je da će se nakon dovoljnog broja koraka proces apsorbirati u jedno od apsorpcijskih stanja, odnosno ući u stanje iz kojeg više neće moći izaći. Matrica prijelaza apsorpcijskog Markovljevog lanca može se zapisati

$$P = \left(\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I \end{array}\right), \tag{4.13}$$

gdje je Q matrica prijelaznih vjerojatnosti između prijelaznih stanja, R matrica vjerojatnosti prijelaza iz prijelaznih u apsorpcijska stanja, a I jedinična matrica odgovarajućih dimenzija. Matricu

$$N = (I - Q)^{-1} \tag{4.14}$$

zovemo **baznom matricom** apsorpcijskog Markovljevog lanca. Ako proces kreće iz prijelaznog stanja s_i, očekivani broj dohvaćanja prijelaznog stanja s_j jednak je elementu n_{ij} bazne matrice. Očekivano vrijeme t_i (odnosno broj koraka) do apsorpcije procesa ako proces kreće iz stanja s_i jednako je sumi elemenata i-tog retka bazne matrice.

Kod apsorpcijskih Markovljevih lanaca promatra se i matrica

$$B = NR \tag{4.15}$$

čiji element b_{ij} označava vjerojatnost apsorpcije procesa u apsorpcijskom stanju a_j ako je proces krenuo iz prijelaznog stanja s_i.

Sada ćemo, kao i kod ergodičkih, riješiti nekoliko primjera apsorpcijskih Markovljevih lanaca. Tu će glavna stvar koju ćemo ispitivati biti je li lanac apsorpcijski, te koliko mu treba da dođe do apsorpcijskog stanja.

Primjer 4.5. *Prostor stanja Markovljeva lanca dan je sa $S = \{1, 2, 3, 4\}$, a pripadna matrica prijelaza sa*

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & 0 & p & 0 \\ q & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & p \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

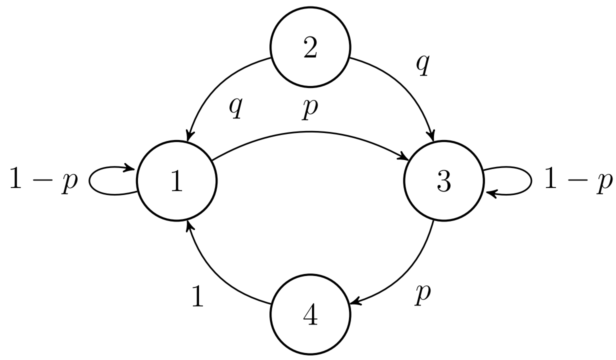
a) Odredimo vrijednost parametra q i nacrtajamo dijagram prijelaza zadanog Markovljevog lanca.

b) Klasificirajmo stanja zadanog Markovljevog lanca u ovisnosti o vrijednosti parametra p.

c) Odredimo postoji li vrijednost parametra p za koju je lanac apsorpcijski, te postoji li vrijednost parametra p za koju je lanac ergodički.

Rješenje.

a) Parametar q mora biti jednak 0.5 budući da suma vjerojatnosti u svakom retku mora biti jednaka 1. Dijagram prijelaza izgleda ovako:



b) Sa dijagrama prijelaza je odmah vidljivo da je stanje 2 prijelazno neovisno o vrijednosti parametra p. Ako je $p = 0$, stanja 1 i 3 postaju apsorbirajuća, a stanje 4 prijelazno. Ako je $0 < p \leq 1$ stanja 1, 3 i 4 su povratna.

c) Lanac može biti apsorpcijski samo ako je $p = 0$ jer tada dozvoljava apsorpcijska stanja. Međutim, u tom slučaju apsorpcijsko stanje 1 nije dohvatljivo iz stanja 4, a apsorpcijsko stanje 3 ni iz stanja 1 ni iz stanja 4, pa lanac nije apsorpcijski jer nema niti jedno apsorpcijsko stanje dohvatljivo iz svih preostalih stanja. Kako stanje 2 nije dohvatljivo niti iz jednog stanja, neovisno o vrijednosti p, lanac ne može biti ni ergodički.

□

Primjer 4.6. *Apsorpcijski Markovljev lanac zadan je prostorom stanja $S = \{1, 2, 3\}$ i matricom prijelaza*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

u kanonskoj formi. Odredimo očekivano vrijeme koje je potrebno da se dogodi apsorpcija, počevši od stanja 1.

Rješenje.

Odredimo najprije baznu matricu zadanog lanca. Vrijedi:

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Nadalje vrijedi:

$$t_1 = \sum_{j=1}^{2} n_{1j} = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}, \tag{4.19}$$

što je traženo očekivano vrijeme. □

Primjer 4.7. *Odredimo kanonski oblik matrice prijelaza i baznu matricu za apsorpcijski Markovljev lanac sa prostorom stanja $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i matricom prijelaza zadanom sa:*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Preuredimo prostor stanja tako da odgovara matrici prijelaza u kanonskom obliku i odredimo očekivani broj koraka potreban da sustav iz stanja 4 dođe do apsorpcijskog stanja.

Rješenje.
Da bi dobili kanonski oblik matrice prijelaza prostor stanja moramo urediti primjerice ovako $S = \{2, 4, 1, 3, 5\}$. Matrica prijelaza sada izgleda ovako:

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

Za baznu matricu dobivamo:

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ -0.5 & 0.9 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.25 & 0 \\ 0.694 & 1.111 \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

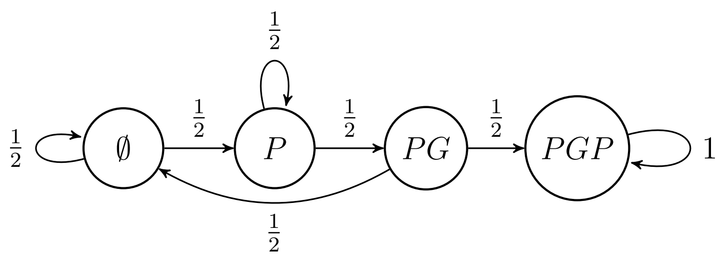
U novom prostoru stanja originalno stanje 4 je stanje 2 tako da tražimo t_2. Vrijedi

$$t_2 = \sum_{j=1}^{2} n_{2j} = 0.694 + 1.111 = 1.805. \tag{4.23}$$

□

Primjer 4.8. *Bacamo novčić uzastopno i nezavisno. Odredimo očekivani broj bacanja do pojave uzorka PGP, gdje P označava da je palo pismo, a G da je pala glava. Prikažimo dijagram pripadnog Markovljevog lanca i izdvojimo apsorpcijsko stanje. Odredimo koliko je prosječno bacanja potrebno da se pojavi uzorak $PGPP$.*

Rješenje.
Dijagram stanja lanca izgleda ovako:



Uz pretpostavku da je prostor stanja $S = \{\emptyset, P, PG, PGP\}$ matrica prijelaza ima oblik

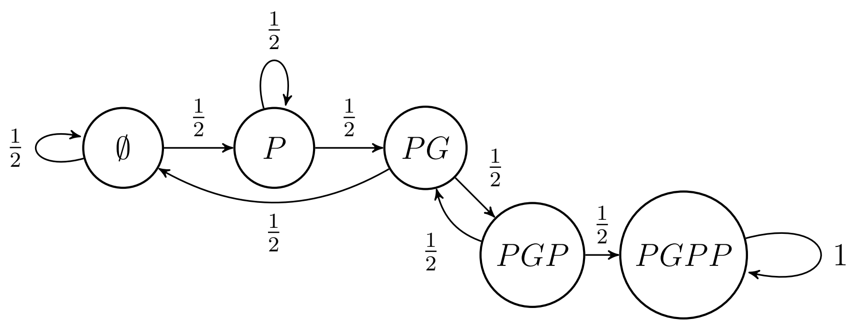
$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

Apsorpcijsko stanje je stanje PGP. Pripadna bazna matrica je oblika

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.25}$$

Traženi očekivani broj bacanja predstavlja očekivano vrijeme do apsorpcije za stanje $\emptyset$ i jednako je sumi elemenata prvog retka bazne matrice, odnosno iznosi 10.

Ako se promatra uzorak $PGPP$, tada treba promatrati lanac



sa pripadnim matricama

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \tag{4.26}$$

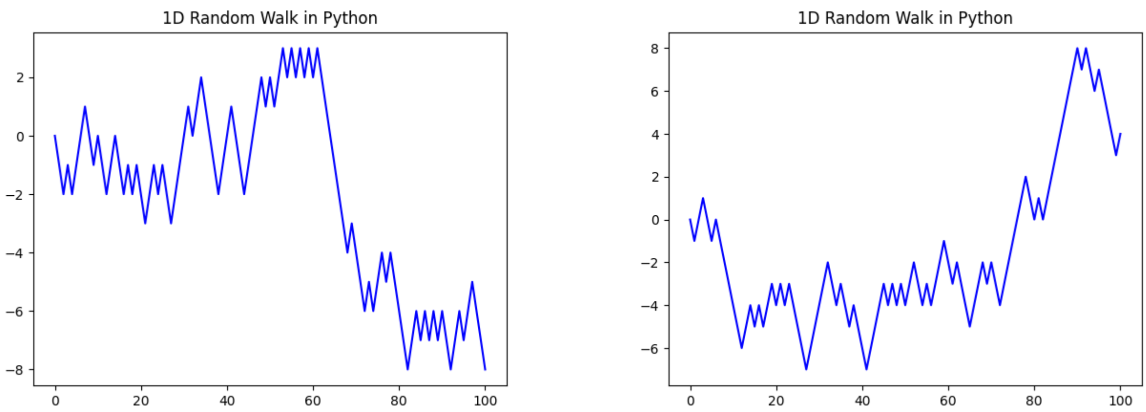
pa zaključujemo da će do pojave uzorka $PGPP$ proći u prosjeku 18 bacanja. $\square$

5. Specijalni primjeri Markovljevih lanaca

Markovljevi lanci imaju vrlo široku primjenu u modeliranju svakakvih sustava u mnoštvu grana znanosti. U ovom poglavlju ćemo detaljnije pogledati neke od zanimljivih primjera specijalnih slučaja upotrebe Markovljevih lanaca. Među njima su slučajna šetnja, proces rađanja i umiranja, problem propasti kockara i PageRank algoritam kojim se koristila prva verzija Google tražilice. Poglavlje je obrađeno po izvorima: [1, 2, 25, 26, 27].

5.1. Slučajna šetnja

Razmotrimo sljedeću jednostavnu slučajnu šetnju cijelim brojevima $\mathbb{Z}$: počinjemo u 0, zatim u svakom vremenskom koraku idemo gore za jedan uz vjerojatnost p ili dolje za jedan uz vjerojatnost $q = 1 - p$. Kada je $p = q = \frac{1}{2}$, jednako je vjerojatno da ćemo ići gore kao i dolje, a to nazivamo jednostavnom simetričnom slučajnom šetnjom.



Slika 5.1. Dvije simulacije jednostavne slučajne šetnje. Izvor: izrada autora (A.4).

Na slici 5.1 vidimo dvije simulacije jednostavne slučajne šetnje. Vidimo da za svaki korak po x-osi stanje se može pomaknuti ili za 1 prema gore ili za 1 prema dolje po y-osi. Brzo možemo zaključiti da je vjerojatnost da će dvije slučajne šetnje biti identične praktički 0.

Jednostavna slučajna šetnja jednostavan je, ali vrlo koristan model za mnoge procese, poput cijena dionica, veličine populacije ili položaja čestica plina. Jednostavna slučajna šetnja ponekad se naziva i "šetnja pijanca", sugerirajući da bi mogla modelirati pijanu osobu koja pokušava doteturati kući.

Ovo možemo napisati kao stohastički proces (X_n) s diskretnim vremenom $n = \{0, 1, 2, \dots\} =$

$\mathbb{Z}_+$ i diskretnim prostorom stanja $\mathbf{S} = \mathbb{Z}$, gdje je $X_0 = 0$ i, za $n \geq 0$, imamo

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 & \text{s vjerojatnošću } p, \\ X_n - 1 & \text{s vjerojatnošću } q. \end{cases} \tag{5.1}$$

Iz (5.1) se jasno vidi da X_{n+1} (budućnost) ovisi o X_n (sadašnjosti), ali, s obzirom na X_n, ne ovisi o $X_{n-1}, \ldots, X_1, X_0$ (prošlost). Stoga Markovljevo svojstvo vrijedi, a jednostavna slučajna šetnja je diskretni vremenski Markovljev proces odnosno Markovljev lanac.

Alternativni način zapisa jednostavne slučajne šetnje je

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} Z_i, \tag{5.2}$$

gdje je početna točka $X_0 = 0$, a priraštaji $Z_1, Z_2, \ldots$ su neovisne i identično distribuirane slučajne varijable s distribucijom danom s $\mathbb{P}(Z_i = 1) = p$ i $\mathbb{P}(Z_i = -1) = q$. Svaki stohastički proces oblika (5.2) za neki X_0 i neku distribuciju za neovisne i identično distribuirane Z_i-eve zove se *slučajna šetnja* (bez riječi jednostavna).

Slučajne šetnje često imaju prostor stanja $\mathbf{S} = \mathbb{Z}$, poput jednostavne slučajne šetnje, ali se mogu definirati na drugim prostorima stanja. Mogli bismo promatrati višedimenzionalne jednostavne slučajne šetnje. U Z_2, na primjer, mogli bismo iskoračiti gore, dolje, lijevo ili desno s vjerojatnošću za svaki smjer $\frac{1}{4}$. Čak bismo mogli imati i kontinuirani prostor stanja kao što je $\mathbb{R}$, kada bi, na primjer, Z_i-evi imali normalnu distribuciju. Ovu strukturu možemo koristiti za izračunavanje očekivanja ili varijance bilo koje slučajne šetnje (uključujući jednostavnu slučajnu šetnju).

Počnimo s izračunavanjem očekivanja. Za slučajnu šetnju (X_n) imamo

$$\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}\left(X_0 + \sum_{i=1}^{n} Z_i\right) = \mathbb{E}X_0 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}Z_i = \mathbb{E}X_0 + n\mathbb{E}Z_1, \tag{5.3}$$

gdje smo koristili linearnost očekivanja i da su Z_i-evi identično raspoređeni. U slučaju jednostavnog slučajnog hoda, imamo $\mathbb{E}X_0 = 0$, budući da sa sigurnošću polazimo iz 0, i

$$\mathbb{E}Z_1 = \sum_{z \in \mathbb{Z}} z\mathbb{P}(Z_1 = z) = 1 \times p + (-1) \times q = p - q. \tag{5.4}$$

Dakle, za jednostavnu slučajnu šetnju, $\mathbb{E}X_n = n(p - q)$. Ako je $p > \frac{1}{2}$, tada je $p > q$, pa $\mathbb{E}X_n$ s vremenom postaje sve veći, dok ako je $p < \frac{1}{2}$, tada $\mathbb{E}X_n$ s vremenom postaje sve manji. Ako je $p = \frac{1}{2} = q$, što je slučaj jednostave simetrične slučajne šetnje, tada je očekivanje $\mathbb{E}X_n = 0$ za sva vremena.

Izračunajmo sada varijancu slučajne šetnje. Imamo

$$Var(X_n) = Var\left(X_0 + \sum_{i=1}^{n} Z_i\right) = VarX_0 + \sum_{i=1}^{n} VarZ_i = VarX_0 + nVarZ_1, \tag{5.5}$$

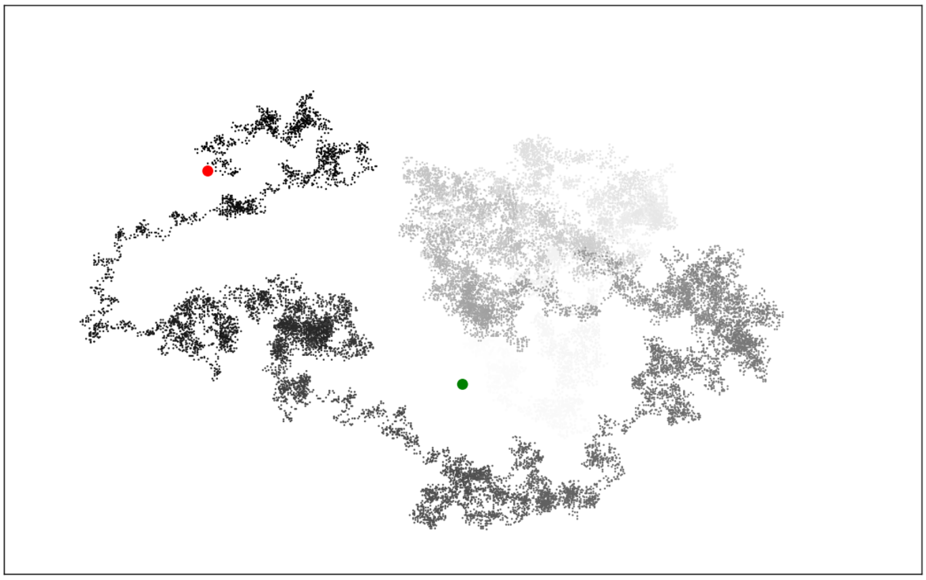
gdje je bilo presudno da su X_0 i svi Z_i-evi bili neovisni (pa nismo imali članove kovarijacije).

Za jednostavnu slučajnu šetnju imamo $VarX_0 = 0$, budući da uvijek sa sigurnošću polazimo iz 0. Da bismo izračunali varijancu inkremenata, pišemo

$$
\begin{aligned}
Var(Z_1) &= \mathbb{E}(Z_1 - \mathbb{E}Z_1)^2 \\
&= p(1-(p-q))^2 + q(-1-(p-q))^2 \\
&= p(2q)^2 + q(-2p)^2 \\
&= 4pq^2 + 4p^2q \\
&= 4pq(p+q) \\
&= 4pq.
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Ovdje smo upotrijebili $1-p=q$, $1-q=p$ i $p+q=1$. Stoga je varijanca jednostavne slučajne šetnje $4pqn$. Vidimo da (osim ako p nije 0 ili 1) varijanca raste tijekom vremena, tako da postaje sve teže i teže predvidjeti gdje će biti slučajna šetnja. Varijanca jednostavne slučajne šetnje je $4\frac{1}{2}\frac{1}{2}n = n$.

Primjer 5.1. *Peludno zrno koje pluta na kapi vode kreće se po površini vode jer ga molekule vode neprestano guraju. Molekularno gibanje u kapljici vode je nasumično, tako da je putanja koju peludno zrno prati na površini vode slučajna šetnja.*



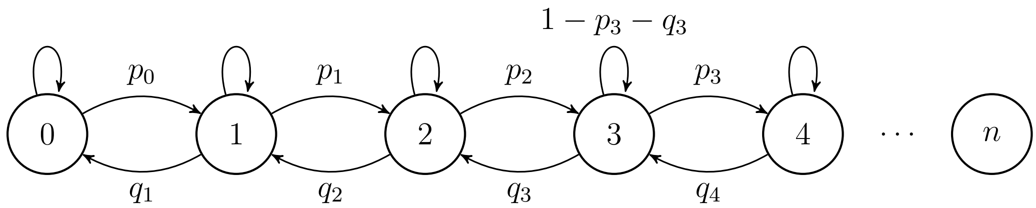
Slika 5.2. Simulacija slučajne šetnje. Isprogramirano u Python-u (A.3).

Slika 5.2 grafički prikazuje slučajnu šetnju peludnog zrna po površini vode. Dobivena je u programskom jeziku Python koristeći Matplotlib library. Vremenski tok šetnje je označen nijansama sive boje. Što je tamnija nijansa, to je kasniji trenutak u šetnji, odnosno veći broj koraka n.

Također, početak i kraj označeni su zelenom, odnosno crvenom točkom. Ovo je primjer dvodimenzionalne slučajne šetnje jer u svakom trenutku možemo ići u bilo kojem od smjerova prema gore, dolje, lijevo ili desno, za razliku od samo prema gore ili dolje, ili samo prema lijevo ili desno.

5.2. Proces rađanja i umiranja

Markovljev lanac **rađanja i umiranja** je onaj u kojem je prostor stanja skup cijelih nenegativnih brojeva. Za sve $i \geq 0$, vjerojatnosti prijelaza zadovoljavaju $P_{i,i+1} > 0$, a za sve $|i - j| > 1$, $P_{ij} = 0$. Prijelaz iz stanja i u $i + 1$ smatra se rođenjem, a prijelaz iz $i + 1$ u i smrću. Stoga ograničenje na matricu prijelaza znači da se u jednoj jedinici vremena može dogoditi samo jedno rođenje ili smrt. Mnoge primjene procesa rađanja i umiranja javljaju se u teoriji redova, gdje je stanje i broj kupaca (3.2). U tom primjeru rođenja su dolasci kupaca, a smrti su odlasci kupaca. Ograničenje na samo jedan dolazak ili odlazak u isto vrijeme izgleda prilično neobično, ali obično je takav lanac fino uzorkovana aproksimacija kontinuiranom vremenskom procesu, a vremenski prirašta ji su tada dovoljno mali da je višestruko rađanje ili umiranje u vremenskom prirastu malo vjerojatno te se može zanemariti u granicama. Procesom rađanja i umiranja možemo modelirati širenje određene zarazne boleste u nekoj populaciji, kao na primjer gripe. Još jedna osoba dobije gripu, broj raste, još jedna osoba ozdravi, broj se smanjuje. Te bi vjerojatnosti zasigurno ovisile o trenutnom stanju. Ako nitko nema gripu, vjerojatnost da će se netko zaraziti vrlo je mala. Ako je ima puno ljudi, vjerojatnost je prilično velika.



Slika 5.3. Markovljev lanac rađanja i umiranja.

$P_{i,i+1}$ označavamo s p_i i $P_{i,i-1}$ s q_i. Dakle $P_{ii} = 1 - p_i - q_i$. Postoji jednostavan način za pronalaženje stacionarne distribucije lanaca rađanja i umiranja. U bilo kojoj funkciji uzorka procesa, moramo imati na umu da se broj prijelaza iz stanja i u $i + 1$ razlikuje za najviše 1 od broja prijelaza iz $i + 1$ u i. Ako proces počinje lijevo od i i završava desno od i, tada se događa još jedan prijelaz $i \to i + 1$ od $i + 1 \to i$, itd. Dakle, ako vizualiziramo proces obnove-nagrade s obnovama na pojavljivanjima stanja i i jediničnu nagradu za prijelaze iz stanja i u $i+1$, ograničeni vremenski prosjek broja prijelaza po jedinici vremena je $\pi_i p_i$. Slično tome, ograničeni vremenski prosjek broja prijelaza po jedinici vremena od $i + 1$ do i je $\pi_{i+1} q_{i+1}$. Budući da ova dva moraju biti jednaka granici,

$$\pi_i p_i = \pi_{i+1} q_{i+1} \qquad \text{za } i \geq 0 \tag{5.7}$$

Intuicija u (5.7) je da brzina prijelaza prema dolje od $i+1$ do i jednostavno mora biti jednaka stopi prijelaza prema gore.

5.3. Problem propasti kockara

Problem propasti kockara (engl. *The Gambler's Ruin Problem*) je poznati statistički scenarij usredotočen na uvjetne vjerojatnosti i eksperimentalne ishode. Njegova struktura proteže se izvan uvjetne vjerojatnosti u slučajne varijable i distribucije, posebno kao primjena jedinstvenih Markovljevih lanaca sa zanimljivim svojstvima.

Problem propasti kockara u svom najosnovnijem obliku sastoji se od dva kockara A i B koji igraju probabilističku igru više puta jedan protiv drugog. Svaki put kada se igra igra, postoji vjerojatnost p $(0 < p < 1)$ da će kockar A pobijediti protiv kockara B, te vjerojatnost q $(0 < q < 1)$ da će pobijediti kockar B. Svaki kockar također ima početno bogatstvo koje ograničava koliko se može kladiti. Ukupno kombinirano bogatstvo označeno je s k, a kockar A ima početno bogatstvo označeno s i, što implicira da kockar B ima početno bogatstvo $k-i$. Bogatstvo mora biti pozitivno. Posljednji uvjet koji primjenjujemo na ovaj problem je da će oba kockara igrati na neodređeno vrijeme dok jedan od njih ne izgubi svo svoje početno bogatstvo i stoga više ne može igrati.

Zamislimo da je početno bogatstvo i kockara A cijeli broj eura i da se svaka igra igra za jedan euro. To znači da će kockar A morati igrati najmanje i igara da bi njegovo bogatstvo palo na nulu. Vjerojatnost da dobiju jedan dolar u svakoj igri je p, što će biti jednako $\frac{1}{2}$ ako je igra poštena za oba kockara. Ako je $p > \frac{1}{2}$, tada kockar A ima sustavnu prednost, a ako je $p < \frac{1}{2}$, tada kockar A ima sustavni nedostatak. Niz igara može završiti samo s dva ishoda: kockar A ima bogatstvo od k eura (kockar B je izgubio sav svoj novac), ili kockar A ima bogatstvo od 0 eura (kockar B ima svo bogatstvo). Glavni fokus analize je odrediti vjerojatnost da će kockar A završiti s bogatstvom od k eura ili 0 eura. Bez obzira na ishod, jedan od kockara će završiti u financijskoj propasti, otuda i naziv *propast kockara*.

5.3.1. Rješenje problema

Igra kockanja se nastavlja sve dok kockar A ne bude upropašten ($X_n = 0$), ili dok kockar B ne bude upropašten ($X_n = k$). Želimo odrediti vjerojatnost r_i da će kockar A završiti s 0 eura (kockar A upropašten) s obzirom da je počeo s i eura. Dodati ćemo još jednu dodatnu pretpostavku: sve igre su identične i neovisne. Svaki put kada kockari igraju novu igru, to se može protumačiti kao nova iteracija problema propasti kockara gdje je početno bogatstvo svakog kockara različito, ovisno o ishodu posljednje igre.

Što možemo reći o r_i? Jasno je da imamo $r_0 = 1$, jer $X_n = 0$ znači da je kockar A ostao bez novca i da je upropašten, i $r_k = 0$, jer $X_n = k$ znači da je kockar A osvojio sav novac, a kockar B propao. Što kada je $1 \leq i \leq k-1$? Ključ je uvjetovati prvi korak, odnosno, možemo zapisati

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{propast}) &= \mathbb{P}(\text{pobjeda u prvoj rundi})\mathbb{P}(\text{propast}|\text{pobjeda u prvoj rundi}) \\ &\quad + \mathbb{P}(\text{gubitak u prvoj rundi})\mathbb{P}(\text{propast}|\text{gubitak u prvoj rundi}) \\ &= p\mathbb{P}(\text{propast}|\text{pobjeda u prvoj rundi}) + q\mathbb{P}(\text{propast}|\text{gubitak u prvoj rundi}).\end{aligned} \tag{5.8}$$

Ovdje smo uvjetovali hoće li kockar A pobijediti ili izgubiti u prvoj rundi. Formalnije, koristili smo zakon potpune vjerojatnosti, koji kaže da ako su događaji $B_1, \ldots, B_k$ disjunktni i pokrivaju cijeli prostor uzorka, tada

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i). \tag{5.9}$$

Ovdje $\{$Kockar A pobjeđuje u prvoj rundi$\}$ i $\{$Kockar B gubi u prvoj rundi$\}$ doista su nepovezani događaji koji pokrivaju cijeli prostor uzorka. Ova ideja "uvjetovanja na prvom koraku" biti će najvažniji alat u ovom modulu.

Ako kockar A pobijedi imajući i eura, on sada ima $i + 1$ eura. Njegova vjerojatnost propasti sada je r_{i+1} jer, prema Markovljevom svojstvu, to je kao da igra ponovno počinje s kockarom A koji ima $i + 1$ eura za početak. Slično, ako kockar A izgubi prvu rundu, on sada ima $i - 1$ eura, a vjerojatnost propasti je r_{i-1}. Stoga imamo

$$r_i = pr_{i+1} + qr_{i-1}. \tag{5.10}$$

Preuređivanjem i uključivanjem granica, vidimo da je jednaždba koju želimo riješiti

$$pr_{i+1} - r_i + qr_{i-1} = 0 \quad \text{podložno} \quad r_0 = 1, r_k = 0. \tag{5.11}$$

Ovo je (homogena) linearna diferencijalna jednadžba. Ako postavimo $\rho = q/p$, tada je vjerojatnost propasti r_i dana izrazom:

$$r_i = \begin{cases} \frac{\rho^i - \rho^k}{1-\rho^k} & \text{ako } \rho \neq 1, \\ 1 - \frac{i}{k} & \text{ako } \rho = 1. \end{cases} \tag{5.12}$$

Primijetimo da je $\rho = 1$ isto što i simetrični uvjet $p = q = \frac{1}{2}$.

Zamislimo da kockar A ne igra protiv sličnog protivnika, već protiv velikog kasina. U ovom slučaju, kapital kasina $k - i$ tipično je puno veći od bogatstva i kockara A. To možemo modelirati držeći i fiksno uzimajući granicu $m \to \infty$. Tipično, kasino ima šanse za dobitak veće od 50%. To znači da je $p < 1 - p$, dakle $\rho > 1$. U ovom slučaju vidimo da je vjerojatnost propasti:

$$\lim_{m\to\infty} r_i = \lim_{m\to\infty} \frac{\rho^i - \rho^k}{1 - \rho^k} = \lim_{m\to\infty} \frac{\rho^i/\rho^k - 1}{1/\rho^k - 1} = \frac{0-1}{0-1} = 1, \tag{5.13}$$

pa će kockar A sigurno biti upropašten.

Čak i s velikodušnim kasinom koji bi nudio posve poštenu igru $p = 1 - p = \frac{1}{2}$, pa je $\rho = 1$, imali bismo

$$\lim_{m\to\infty} r_i = \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{i}{k}\right) = 1 - 0 = 1, \tag{5.14}$$

tako da bi čak i uz ovu poštenu igru kockar A sigurno bio upropašten.

Također se možemo zapitati koliko dugo očekujemo da igra traje. Ovome pristupamo kao i prije. Neka d_i označava očekivano trajanje igre od stanja kada kockar A ima i eura. Naši granični uvjeti su $d_0 = d_k = 0$ jer $X_n = 0$ ili $X_n = k$ znači da je igra gotova s propasti kockara A ili B. Opet, nastavljamo uvjetovanjem na prvom koraku, dakle

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\text{trajanje}) &= \mathbb{P}(\text{pobjeda u prvoj rundi})\mathbb{E}(\text{trajanje}|\text{pobjeda u prvoj rundi}) \\ &\quad + \mathbb{P}(\text{gubitak u prvoj rundi})\mathbb{E}(\text{trajanje}|\text{gubitak u prvoj rundi}) \\ &= p\mathbb{E}(\text{trajanje}|\text{pobjeda u prvoj rundi}) + (1-p)\mathbb{E}(\text{trajanje}|\text{gubitak u prvoj rundi}).\end{aligned} \tag{5.15}$$

Formalnije, upotrijebili smo drugu verziju zakona potpune vjerojatnosti,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{E}(X|B_i). \tag{5.16}$$

Sada, očekivano trajanje s obzirom na pobjedu u prvoj rundi je $1 + d_{i+1}$. To je zato što sama runda traje 1 vremenski korak, a zatim, prema Markovljevom svojstvu, kao da ponovno krećemo od $i+1$. Slično tome, očekivnao trajanje ako izgubimo prvu rundu je $1 + d_{i-1}$. Tako imamo

$$d_i = p(1 + d_{i+1}) + (1-p)(1 + d_{i-1}) = 1 + pd_{i+1} + (1-p)(d_{i-1}). \tag{5.17}$$

Preuređivanjem i uključivanjem graničnih uvjeta, imamo (nehomogenu) linearnu diferencijalnu jednadžbu:

$$pd_{i+1} = -d_i + (1-p)d_{i-1} = -1 \quad \text{podložno} \quad d_0 = 0, d_k = 0 \tag{5.18}$$

kojoj je rješenje:

$$d_a = \begin{cases} \frac{1}{(1-p)-p}\left(i - k\frac{1-\rho^i}{1-\rho^k}\right) & \text{ako } \rho \neq 1, \\ i(k-i) & \text{ako } \rho = 1. \end{cases} \tag{5.19}$$

Vratimo li se ponovno razmišljanju o igranju protiv kasina, s $q - p > p$, $\rho > 1$ i $m \to \infty$, vidimo da je očekivano trajanje

$$\lim_{m\to\infty} d_i = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{q-p}\left(i - k\frac{1-\rho^i}{1-\rho^k}\right) = \frac{1}{q-p}(i-0) = \frac{i}{q-p}, \tag{5.20}$$

Pošto ρ^k raste mnogo brže od k. Dakle, kockar A će sigurno propasti i trebati će, prosječno, $k/(q-p)$ vremena da bi se to dogodilo. Međutim, u slučaju velikodušnog kasina, s $q = p$, pa je $\rho = 1$, imamo

$$\lim_{m\to\infty} d_i = \lim_{m\to\infty} i(k-i) = \infty \tag{5.21}$$

Dakle, ovdje će kockar A sigurno propasti, ali može proći jako dugo vremena dok se propast ne dogodi, budući da je očekivano trajanje beskonačno.

5.3.2. Markovljevi lanci i problem propasti kockara

Koristeći teorijski okvir za Markovljeve lance, sada možemo primijeniti ove koncepte na problem propasti kockara. Koliko statistička teorija i vjerojatnost mogu biti isprepletene nam pokazuje činjenica da to možemo učiniti. Prvotno smo postavili problem koristeći isključivo uvjetne teoreme vjerojatnosti izvedene iz osnovnih aksioma vjerojatnosti. Sada možemo jos više formalizirati problem i dati mu više strukture pomoću Markovljevih lanaca.

Problem propasti kockara u biti je Markovljev lanac gdje slijed iznosa bogatstva koje kockar A ima u bilo kojem trenutku u vremenu određuje temeljnu strukturu. U bilo kojoj točki vremena n, kockar A može imati i bogatstvo, gdje i također predstavlja stanje lanca u trenutku n. Kada kockar dosegne ili 0 bogatstva ili k bogatstva, lanac je prešao u apsorpcijsko stanje i igre se više ne igraju. Proces propasti kockara je u biti isti kao proces jednostavne slučajne šetnje (5.1.) započete od $X_0 = i$, osim što imamo apsorpcijske granice 0 i k, gdje se slučajna šetnja zaustavlja jer je jedan od igrača propao.

Ako se lanac pomakne u bilo koje od preostalih $k-1$ stanja $1, \dots, k-1$, ponovno se igra igra u kojoj vjerojatnost da će kockar A pobijediti p određuje graničnu distribuciju stanja u tom određenom trenutku u vremenu. Matrica prijelaza ima dva apsorpcijska stanja. Prvi red odgovara scenariju kada kockar A ima 0 bogatstva, a elementi retka su $(1, 0, \dots, 0)$. Isto tako, zadnji red matrice odgovara scenariju kada je kockar A dosegao k bogatstvo, a elementi su $(0, 0, \dots, 1)$. Za svaki drugi redak i, svi elementi su nula osim za članove s koordinatima $i-1$ i $i+1$, koji imaju vrijednosti q odnosno p.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & q & 0 & p \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

Također možemo odrediti vjerojatnosti stanja u više koraka koristeći matricu prijelaza s m koraka $\mathbf{P}^m$. Kako m ide u beskonačnost, matrica m koraka konvergira, ali stacionarne distribucije nisu jedinstvene. Granična matrica od $\mathbf{P}^m$ ima sve nule osim u prvom i zadnjem stupcu. Posljednji stupac sadrži sve vjerojatnosti a_i da će kockar završiti s k eura s obzirom da je počeo s i dolara, dok prvi stupac sadrži sve odgovarajuće komplemente a_i. Budući da stacionarne distribucije nisu jedinstvene, to znači da sve vjerojatnosti pripadaju apsorpcijskim stanjima.

$$\begin{pmatrix} 1-a_0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1-a_k & 0 & \dots & 0 & a_k \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

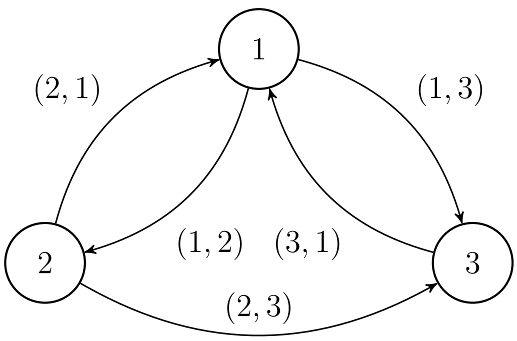
Ova posljednja stavka posebno je važna jer potvrđuje naš početni logički slijed koraka pri izvođenju formula rješenja za propast kockara. Drugim riječima, u mogućnosti smo izvesti opću formulu za problem kao cjelinu jer stohastički procesi (slijed igara) koji se javljaju u problemu konvergiraju u jedno od dva apsorpcijska stanja: kockar A odlazi s k eura ili kockar A odlazi s 0 eura. Iako se može igrati beskonačno mnogo igara, svejedno možemo odrediti vjerojatnost da će se jedan od ova dva događaja dogoditi jer prijelazna matrica Markovljevog lanca konvergira na obje stacionarne distribucije.

5.4. PageRank algoritam

Algoritmi za rangiranje ili algoritmi za analizu poveznica određuju uspjeh web tražilica izračunavajući važnost i relevantnost pojedine stranice na World Wide Webu. Primjeri algoritama za analizu poveznica su HITS (Hyperlink Induced Topic Search), PageRank i SALSA (Stochastic Approach for Link Structure Analyis). Ovi se algoritmi oslanjaju na strukturu poveznica web stranica.

U ovom primjeru ostati ćemo fokusirani na PageRank algoritam. PageRank algoritam je neovisan o upitu i sadržaju. Neovisno o upitu znači da algoritam rangira sve stranice izvan mreže nakon što alat za indeksiranje preuzme i indeksira stranice, a rang ostaje konstantan za sve stranice. Neovisan o sadržaju znači da algoritam ne uključuje sadržaj web stranice za rangiranje, već koristi strukturu veza na webu za izračun ranga. Kada korisnik upiše pojam upita u tražilicu, PageRank algoritam pronalazi samo stranice na webu koje odgovaraju pojmu upita i predstavlja te stranice korisniku prema njihovom redu njihovog PageRank-a. To nije jednostavno koliko se čini.

PageRank algoritam tretira web kao usmjereni označeni graf čiji su čvorovi stranice, a bridovi hiperveze između njih. Ova struktura usmjerenog grafa se naziva *Web Graf* (engl. *Web Graph*). Graf G sastoji se od dva skupa V i E. Skup V je konačan, neprazan skup vrhova. Skup E je skup parova vrhova. Ti se parovi nazivaju bridovi. Zapisi $V(G)$ i $E(G)$ predstavljaju skupove vrhova i bridova, odnosno grafa G. Također se može izraziti $G = (V, E)$.



Slika 5.4. Usmjereni Web Graf G.

Na slici 5.4 vidimo da imamo vrhove V od G, $V(G) = \{1, 2, 3\}$, te bridove E od G, $E(G) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1)\}$. U usmjerenom grafu s n vrhova, maksimalan broj rubova je $n(n-1)$. S 3 vrha, maksimalan broj bridova može biti $3(3-1) = 6$.

Postoji niz algoritama za rangiranje temeljenih na poveznicama, među njima PageRank je najpopularniji. PageRank algoritam i Google razvili su Brin i Page[1] tijekom svog doktorata na Stanford Sveučilištu kao istraživački projekt. PageRank algoritam je srce Google tražilice. Google je kao tražilica predstavljen 1998. Ubrzo nakon uvođenja, postala je jedna od najučinkovitijih traži-

[1] Larry Page, po imenu Lawrence Edward Page (26. ožujka 1973., East Lansing, Michigan, SAD) i Sergey Brin (21. kolovoza 1973., Moskva, Rusija, SSSR), američki računalni znanstvenici i poduzetnici koji su zajedno stvorili online tražilicu Google, jednu od najuspješnijih na Internetu.

lica baš zbog toga što je tražilica neovisna o upitu i sadržaju. To daje brže rezultate jer ne ovisi o upitu, odnosno web-stranice se preuzimaju, indeksiraju i rangiraju izvan mreže. Kada korisnik upiše upit na tražilici, PageRank algoritam samo pronalazi stranice na webu koje odgavaraju pojmu upita i prikazuje te stranice korisniku njihovog PageRank-a. PageRank algoritam koristi samo strukturu poveznice weba radi utvrđivanja važnosti stranice, ne ulazeći u sadržaj stranice. On pruža učinkovitiji način za izračunavanje važnosti web stranice brojeći broj stranica koje se povezuju na njega. Ako dolazna poveznica dolazi od poznate stranice, tada joj se daje veća težina od one dolazne poveznice s nepoznate stranice. PageRank-ov PR stranice p može se izračunati uzimajući u obzir skup stranica $pa(p)$ koje pokazuju na p prema formuli koju je dao Brin:

$$PR(p) = d \sum_{q \in pa_p} \frac{PR_q}{O_q} + (1 - d) \tag{5.24}$$

Ovdje je d faktor prigušenja tako da je $0 < d < 1$, a O_q je broj izlaznih poveznica stranice q.

5.4.1. Korištenje Markovljeva lanca u PageRank algoritmu

Zamislimo surfera koji surfa webom, nasumično prelazeći s jedne stranice na drugu odabirujući odlaznu poveznicu s jedne stranice za odlazak na sljedeću. To ponekad može dovesti do slijepih ulica, odnosno stranica bez odlaznih poveznica. Dakle, određeni dio vremena, surfer odabire nasumično stranicu s weba. To je u biti isto kao Markovljev lanac slučajne šetnje (5.1.). Granična vrijednost da beskonačno predani nasumični surfer posjećuje bilo koju stranicu je njezin PageRank.

Broj poveznica prema stranici i sa stranice pruža informacije o važnosti stranice. Što ima više tih poveznica, to je stranica važnija. Povratne poveznice s više dobrih stranica imaju veću težinu od povratnih poveznica s manje važnih stranica. Također, ako dobra stranica upućuje na nekoliko drugih stranica, tada je njegova težina ravnomjerno raspoređena na sve te stranice. Osnovni PageRank počinje sa sljedećom jednadžbom za definiranje ranga stranice p kao $PR(p)$:

$$PR(p) = \sum_{q \in pa_p} \frac{PR_q}{|O_q|} \tag{5.25}$$

gdje je p web stranica, a $PR(p)$ PageRank stranice p. pa je skup stranica koje pokazuju na p. O_q je broj poveznica prema naprijed stranice q. PageRank dodjeljuje početnu vrijednost od $PR_p^{(0)} = \frac{1}{n}$, gdje je n ukupan broj stranica na webu. PageRank algoritam se onda iterira

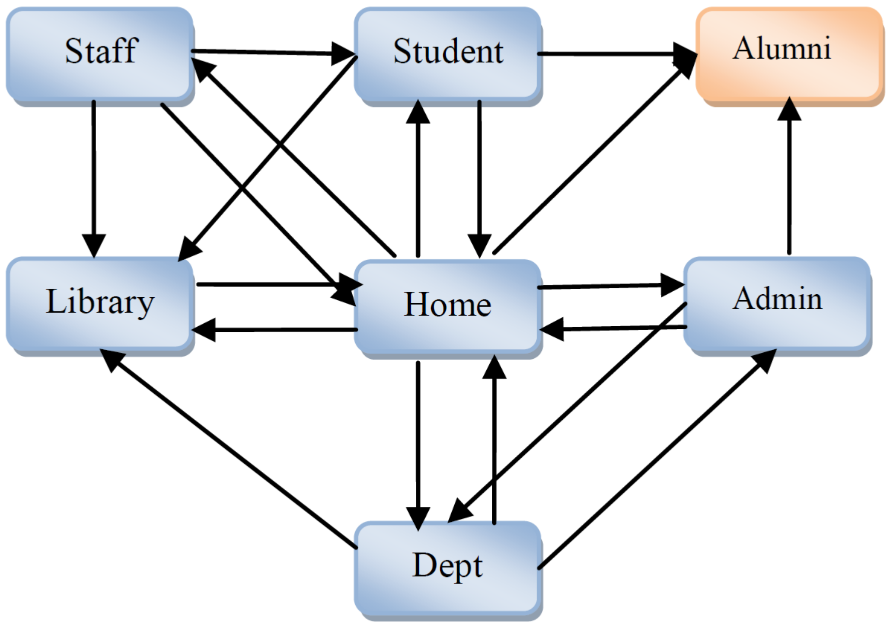
$$PR_p^{(k+1)} = \sum_{q \in pa_p} \frac{PR_q^k}{|O_q|} \quad \text{za } k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5.26}$$

gdje je PR_q^k PageRank stranice p u iteraciji k. Jednadžba (5.26) može se zapisati u matričnom obliku. Neka je q^k PageRank vektor u k-toj iteraciji i neka je T matrica prijelaza za web, zatim slijedi

$$q^{k+1} = Tq^k. \tag{5.27}$$

Ako postoji n web stranica na Internetu, T je $n \times n$ matrica takva da je t_{pq} vjerojatnost prelaska sa stranice p na stranicu q u vremenskom intervalu. Nažalost, jednadžba (5.27) ima problema s konvergencijom, odnosno može kružiti ili granica može ovisiti o početnom vektoru. Kako bi riješili ovaj problem, Brin i Page izrađuju ergodički Markovljev lanac (4.1.), karakteriziran primitivnom matricom prijelaza. Ergodičnost jamči postojanje jedinstvenog vektora stacionarne distribucije q, koji postaje PageRank vektor. Osnovni model uzima $t_{pq} = \frac{1}{|O_q|}$. Ako stranica q ima skup poveznica prema naprijed, O_q, sve se poveznice biraju jednako:

$$t_{pq} = \begin{cases} \frac{1}{O_q}, & \text{ako postoji poveznica od } p \text{ do } q, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{5.28}$$

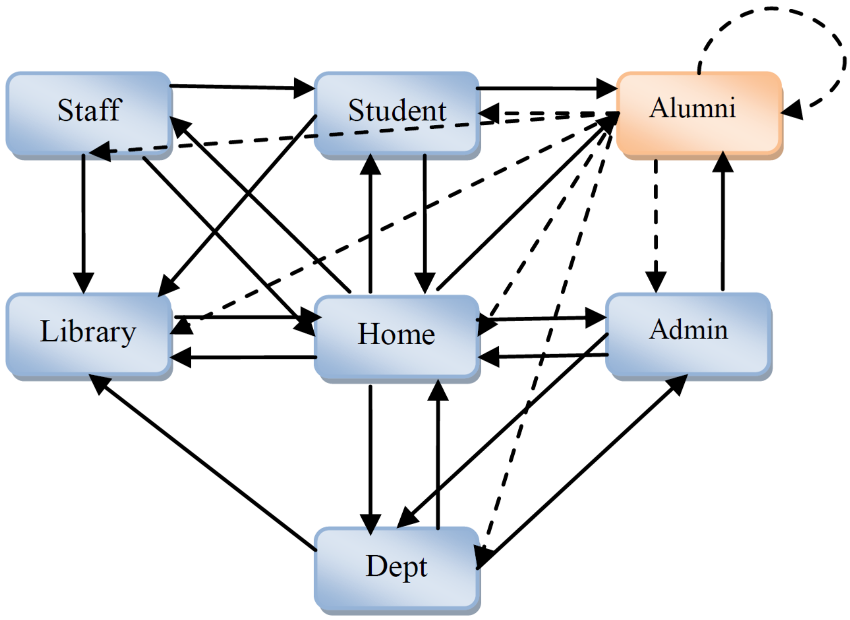


Slika 5.5. Primjer web grafa W nekog sveučilišta, izvor: [27]

Slika 5.5 prikazuje primjer web grafa uzetog sa stranice Sveučilišta. Sadrži sedam stranica, naime, *Početna (Home), Admin, Osoblje (Staff), Student, Knjižnica (Library), Odjel (Dept) i Bivši studenti (Alumni)*. Koristiti ćemo ovaj uzorak u našoj Markovljevoj analizi i PageRank izračunu. Matrica prijelaza T može se dobiti primjenom (5.28) na naš primjer web grafa sa slike 5.5.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

U matrici prijelaza, ako je zbroj bilo kojeg reda 0, to označava da postoji stranica bez poveznica prema naprijed. Ova vrsta stranice se naziva *viseći čvor*. Viseći čvorovi se ne mogu prikazati na web grafu ako se želi koristiti Markovljev model. Postoji nekoliko metoda za eliminiranje ovog problema. Jedna od njih je zamijeniti sve retke visećeg čvora s e/n, gdje je e vektor retka svih jedinica i n je red matrice. U našem primjeru, vrijednost n je 7. Koristeći tu metodu, web graf sa slike 5.5 se modificira te izgleda ovako:



Slika 5.6. Modificirani primjer web grafa W, izvor: [27]

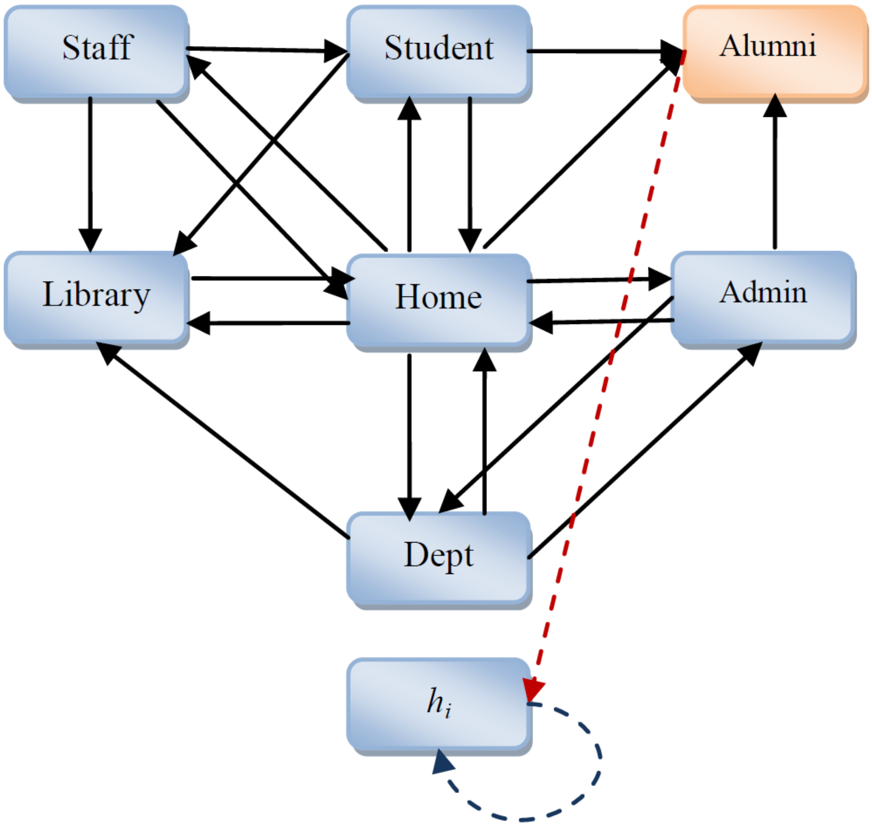
Nove poveznice prema naprijed sa stranice *Alumni* prikazane su pomoću isprekidanih linija. To čini matricu prijelaza T stohastičkom[2]:

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

Redak 3 u matrici prijelaza $\bar{T}$ iz jednadžbe (5.30) je povezan sa svim čvorovima.

Postoji još jedna metoda kod koje povezujemo hipotetski apsorpcijski čvor h_i sa svim visećim čvorovima.

[2]Matrica je stohastička ako je suma njenih elemenata svakog retka jednaka 1.



Slika 5.7. Modificirani primjer web grafa W, izvor: [27]

Na slici 5.7 h_i je hipotetski apsorpcijski čvor (prikazan plavom isprekidanom linijom), a *Alumni* stranica je povezana s njim. Sada modificirana matrica prijelaza T izgleda ovako:

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.31}$$

Zadnji redak i stupac u matrici prijelaza $\bar{T}$ iz jednadžbe (5.31) je hipotetski čvor h_i. Vjerojatnost prijelaza iz stranice *Alumni* u h_i u modificiranom grafu je 1. Sada *Alumni* stranica više nije viseća, te je ovaj web graf isto stohastičan.

Ovo stohastičko svojstvo nije dovoljno da bi nam jamčilo da će Markovljev lanac konvergirati i da će postojati vektor stacionarnog stanja. Postoji još jedan problem s matricom prijelaza T, a to je da možda nije *regularna*[3]. Na grafu, svaki čvor mora biti povezan sa svakim drugim čvorom. Ali

[3]Kao što smo rekli u 4.3, Markovljev lanac je ergodički ako su mu sva stanja povezana, no ako se iz svakog stanja u preostala stanja može doći u točno n koraka kažemo da je Markovljev lanac i **regularan**. Regularnost nužno povlači ergodičnost, no obrat ne vrijedi.

na Internetu, svaka stranica nije povezana sa svakom drugom stranicom. Da bi je napravili regularnom, prisiljavamo da svi unosi u matrici zadovoljavaju $0 < t_{pq} < 1$. To osigurava konvergenciju q^n prema jedinstvenom, pozitivnom vektoru stacionarne distribucije.

Brin i Page dodavanjem matrice $E = ee^t/n$ su napravili ovu stohastičnu ireducibilnu matricu Google matricom, kao što vidimo u jednadžbi:

$$\bar{\bar{T}} = \alpha\bar{T} + (1-\alpha)E \tag{5.32}$$

gdje je $0 < \alpha < 1$. Google je vjerovao da ova nova matrica T bolje modelira stvarnog surfera Internetom. U stvarnom životu surfer ima $1 - \alpha$ vjerojatnost da skoči na slučajnu stranicu na Internetu upisivanjem URL-a u naredbeni redak preglednika i α vjerojatnost klika na poveznicu prema naprijed u toku stranica. Mnogi istraživači navode da je vrijednost α koju koristi PageRank algoritam Googlea 0.85. Izračunajmo Google matricu u jednadžbi (5.32) pomoću našeg primjera web grafa W tako da uzmemo vrijednost 0.85 za α i prikažemo je u matrici T. Ovo izračunavanje matrice može se normalizirati na stacionarni vektor izračunavanjem potencije matrice prijelaza. U jednoj fazi izračuna, vrijednosti matrice postaju stacionarne.

$$\bar{\bar{T}} = 0.85 \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} + 0.15 \begin{bmatrix} 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \end{bmatrix} \tag{5.33}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.021 & 0.304 & 0.021 & 0.304 & 0.304 & 0.021 & 0.021 \\ 0.021 & 0.021 & 0.304 & 0.304 & 0.304 & 0.021 & 0.021 \\ 0.142 & 0.142 & 0.142 & 0.142 & 0.142 & 0.142 & 0.142 \\ 0.021 & 0.021 & 0.021 & 0.021 & 0.871 & 0.021 & 0.021 \\ 0.163 & 0.163 & 0.163 & 0.163 & 0.021 & 0.163 & 0.163 \\ 0.021 & 0.021 & 0.304 & 0.021 & 0.304 & 0.021 & 0.304 \\ 0.021 & 0.021 & 0.021 & 0.304 & 0.304 & 0.304 & 0.021 \end{bmatrix} \tag{5.34}$$

(5.34) su rezultati PageRank vrijednosti za 7 stranica iz primjera web grafa W. Pretpostavimo da nakon 30 iteracija uđemo u stacionarno stanje, onda bi stacionarni vektori izgledali ovako:

$$s = \begin{bmatrix} 0.043 & 0.334 & 0.047 & 0.341 & 0.441 & 0.041 & 0.041. \end{bmatrix} \tag{5.35}$$

PageRank interpretira stacionarni vektor na sljedeći način. Na primjer, korisnik unese upit u Google tražilicu koji traži riječ 1 i riječ 2. Zatim tražilica traži obrnutu indeksnu bazu podataka s riječju 1 i 2. Ova baza podataka sadrži popis svih riječi ili pojmova i popis dokumenata koji sadrže riječi ili pojmove.

Pretpostavimo da su sljedeći popisi dokumenata pohranjeni u obrnutoj indeksnoj bazi podataka za riječ 1 i 2.

Upitna riječ/pojam	Popis dokumenata
Riječ 1	Dokument 2, Dokument 4, Dokument 7
Riječ 2	Dokument 1, Dokuemnt 7

Tablica 5.1. Obrnuto indeksni popis dokumenata.

Dakle, relevantnost postavljena za korisnikov upit *riječ* 1 i *riječ* 2 je $\{1, 2, 4, \text{i } 7\}$. PageRank ova 4 dokumenta uspoređuje se kako bi se utvrdio redoslijed važnosti. Prema našem primjeru, 1 je stranica osoblja, 2 je stranica učenika, 4 je stranica knjižnice, a 7 stranica odjela. Odgovarajuće PageRank ocjene su $s_1 = 0.043$, $s_2 = 0.334$, $s_4 = 0.341$, $s_7 = 0.041$. Ovaj PageRank algoritam tretira stranicu dokumenta 4 (knjižnica) kao najrelevantniju za navedeni korisnikov upit, a zatim slijede dokument 2, 1, pa 7. Kada korisnik upiše novi pojam upita, ponovno se pristupa bazi podataka obrnutog indeksa i stvara se novi skup relevantnosti. Tako radi PageRank algoritam u Google tražilici.

6. Zaključak

U ovom radu raspisane su osnove vjerojatnosti, statistike i stohastike, te je s tim znanjem objašnjeno i definirano što su Markovljevi lanci, nakon što im je dan povijesni kontekst. Također su definirane klasifikacije stanja Markovljevih lanaca, te kako utječu na same lance. Shodno tome, objašnjena je razlika dvije glavne skupine Markovljevih lanaca, a to su ergodički i apsorpcijski, te što proučavamo kod jednih, a što kod drugih. Nakon toga je navedeno više specijalnih primjera Markovljevih lanaca, a to su slučajna šetnja, proces rađanja i umiranja, PageRank algoritam i Problem propasti kockara.

U radu vidimo vrlo širok spektar upotrebljivosti Markovljevih lanaca u modeliranju pravog života i njihovu stvarno široku primjenu u raznim granama znanosti, kao što su statistika, biologija, medicina, modeliranje promjene određene populacije, pa tako i u tehničkim znanostima. Tako nam, recimo, u elektrotehnici mogu pomoći u modeliranju količine potrošnje električne energije u nekoj populaciji, koja u mnogo aspekata ovisi o trenutnom stanju te populacije. To stanje može ovisiti o vremenu, starosti, dobu godine, financijskoj ili političkoj situaciji i slično. Markovljevi lanci su savršeni za rješavanje problema tog tipa, te ih treba imati na umu u takvim slučajevima.

Literatura

[1] Yates, R. D.; Goodman, D. J.: Probability and Stochastic Processes - A Friendly Introduction for Electrical and Computer Engineers - John Wiley & Sons, Inc, 2005.

[2] Eric Matthes - Python Crash Course: A Hands-On, Project-Based Introduction to Programming, No Starch Press, San Francisco, 2019.

[3] O'Connor, J. J.; Robertson, E. F.: "Jacob (Jacques) Bernoulli", s Interneta, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Jacob/, 5. travnja 2022.

[4] Siegmund, D. O.: "Probability theory", s Interneta, https://www.britannica.com/science/probability-theory, 8. travnja 2022.

[5] Soni, Devin: "Introduction to Markov Chains", s Interneta, https://towardsdatascience.com/introduction-to-markov-chains-50da3645a50d, 10. travnja 2022.

[6] Gray, J. J.: "Henri Poincaré", s Interneta, https://www.britannica.com/biography/Henri-Poincare 14. travnja 2022.

[7] Fewster, R.: "Branching Processes: The Theory of Reproduction", s Interneta, https://www.stat.auckland.ac.nz/ fewster/325/notes/ch6.pdf, 14. travnja 2022.

[8] Cooke, R. L.: "Andrey Nikolayevich Kolmogorov", s Interneta, https://www.britannica.com/biography/Andrey-Nikolayevich-Kolmogorov, 14. travnja 2022.

[9] Forfar, D. O.: "Louis Bachelier", s Interneta, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bachelier/, 14. travnja 2022.

[10] Urednici Enciklopedije Britanike: "Norbert Wiener", s Interneta, https://www.britannica.com/biography/Norbert-Wiener, 14. travnja 2022.

[11] Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje: "Brownovo gibanje", s Interneta, https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=9755, 15. travnja 2022.

[12] Urednici Enciklopedije Britanike: "Sydney Chapman", s Interneta, https://www.britannica.com/biography/Sydney-Chapman, 15. travnja 2022.

[13] O'Connor, J.J.; Robertson, E. F.: "Andrei Andreyevich Markov, Biography", s Interneta, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Markov/, 17. travnja 2022.

[14] O'Connor, J.J.; Robertson, E. F.: "Egor Ivanovich Zolotarev", s Interneta, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Zolotarev/, 15. travnja 2022.

[15] O'Connor, J.J.; Robertson, E. F.: "Pafnuty Lvovich Chebyshev", s Interneta, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Chebyshev/, 15. travnja 2022.

[16] O'Connor, J.J.; Robertson, E. F.: "Aleksandr Nikolaevich Korkin", s Interneta, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Korkin/, 15. travnja 2022.

[17] O'Connor, J.J.; Robertson, E. F.: "Francis Galton, Biography", s Interneta, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Galton/, 15. travnja 2022.

[18] O'Connor, J.J.; Robertson, E. F.: "Henry William Watson", s Interneta, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Watson_Henry/, 17. travnja 2022.

[19] O'Connor, J.J.; Robertson, E. F.: "René Maurice Fréchet", s Interneta, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Frechet/, 17. travnja 2022.

[20] O'Connor, J.J.; Robertson, E. F.: "Eugene Borisovich Dynkin", s Interneta, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dynkin/, 17. travnja 2022.

[21] Routledge, Richard: "Law of large numbers", s Interneta, https://www.britannica.com/science/law-of-large-numbers, 29. travnja 2022.

[22] Scheepers, Herman: "Computing Stationary Distributions of a Discrete Markov Chain", s Interneta, https://towardsdatascience.com/markov-chain-analysis-and-simulation-using-python-4507cee0b06e, 17. svibnja 2022.

[23] Jalli, Artturi: "Random Walk in Python", s Interneta, https://www.codingem.com/random-walk-in-python/, 17. lipnja 2022.

[24] Aldridge, Matthew: "Random Walk", s Interneta, https://mpaldridge.github.io/math2750/S02-random-walk.html, 21. lipnja 2022.

[25] Malaver, Juan Andrés: "The Gambler's Ruin Problem", s Interneta, https://towardsdatascience.com/the-gamblers-ruin-problem-9c97a7747171, 22. lipnja 2022.

[26] Aldridge, Matthew: "Gambler's Ruin", s Interneta, https://mpaldridge.github.io/math2750/S03-gamblers-ruin.html, 23. lipnja 2022.

[27] Ravi Kumar, Kwang Leng Goh i Ashutosh Kumar Singh: "Application of Markov Chain in the PageRank Algorithm", s Interneta, https://www.researchgate.net/profile/Kwang-Leng-Goh/publication/256089617_Application_of_Markov_Chain_in_the_PageRank_Algorithm, 30. lipnja 2022.

Sažetak i ključne riječi

Ovaj rad objašnjava i definira Markovljeve lance. Definiraju se različite klasifikacije stanja Markovljevih lanaca, te razlika ergodičkih i apsorpcijskih lanaca. Nakon toga promatramo njihovu upotrebu u raznim područjima znanosti kroz zanimljive primjere.

Ključne riječi: Vjerojatnost, statistika, stohastika, Markovljevi lanci, ergodički Markovljevi lanci, apsorpcijski Markovljevi lanci, slučajna šetnja, Problem propasti kockara, PageRank algoritam

Summary and key words

This paper explains and defines Markov chains. Different classifications of states of Markov chains are defined, as well as the difference between ergodic (irreducible) and absorbing Markov chains. After that, we observe their use cases in varoius fields of science through interesting examples.

Keywords: Probability, statistics, stochastics, Markov chains, ergodic Markov chains, absorbing Markov chains, Random walk, Gambler's ruin problem, PageRank algorithm

A Kodovi

Listing A.1. Kod korišten za primjer 2.10 (Python), radi se o modifikaciji koda iz knjige [2]

```
from random import randint

class Die:
        """A class representing a single die."""
        def __init__(self, num_sides=6):
                """Assume a six-sided die."""
                self.num_sides = num_sides

        def roll(self):
                """Return a random value between 1 and
                number of sides."""
                return randint(1, self.num_sides)

----------------------------------------------------------------

import plotly.express as px
import plotly.graph_objects as go

from die import Die

# Create a D6 die.
die_1 = Die()

# Make some rolls, and store results in a list
results = []
for roll_num in range(10):
        result = die_1.roll()
        results.append(result)

# Analyze the results
max_results = die_1.num_sides
frequencies = [results.count(value) for value in
                                range(1, max_result+1)]
```

```
# Visualize the results.
x_values = list(range(1, max_results+1))
y_values = frequencies

fig = px.bar(x=x_values, y=y_values)

fig.update_layout(
                title={
                'text': "Rezultati␣bacanja␣kocke␣10␣puta.",
                'y':0.97,
                'x':0.5,
                'xanchor': 'center',
                'yanchor': 'top'
                'font': {'size': 45}
                        }
                )
fig.update_xaxes(
                title_text = "Rezultat",
                title_font = {'size': 40},
                title_standoff = 25,
                dtick = 1
                )
fig.update_zaxes(
                title_text = "Učestalost␣rezultata",
                title_font = {'size': 40},
                title_standoff = 25,
                dtick = 1
                )
fig.show()
```

Listing A.2. Kod korišten za izračunavanje stacionarne distribucije primjera 3.2 (Python), radi se o modifikaciji koda iz [22]

```
import numpy as np
import pandas as pd
from random import seed
from random import random
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
P = np.array([[0.67, 0.33, 0, 0, 0],
        [0.25, 0.5, 0.25, 0, 0],
        [0, 0.25, 0.5, 0.25, 0],
        [0, 0, 0.25, 0.5, 0.25],
        [0, 0, 0, 0.33, 0.67]])
state=np.array([[1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]])
stateHist=state
dfStateHist=pd.DataFrame(state)
distr_hist = [[0,0,0,0,0]]

for x in range(50):
        state=np.dot(state,P)
        print(state)
        stateHist=np.append(stateHist,state,axis=0)
        dfDistrHist = pd.DataFrame(stateHist)
        dfDistrHist.plot()

plt.show()
```

Listing A.3. Kod korišten za simulaciju slučajne šetnje u primjeru 5.2 (Python), radi se o modifikaciji koda iz [22]

```
from random import choice

class RandomWalk:
"""A class to generate random walks."""

        def __init__(self, num_points=5000):
                """Initialize attributes of a walk."""
                self.num_points = num_points

                # All walks start at (0,0).
                self.x_values = [0]
                self.y_values = [0]


        def fill_walk(self):
                """Calculate all the points in the walk."""

                # Keep taking steps until the walk reaches
```

```
        # the desired length.
        while len(self.x_values) < self.num_points:

        x_step = self.get_step()
        y_step = self.get_step()

        # Reject moves that go nowhere.
        if x_step == 0 and y_step == 0:
        continue

        # Calculate the new position.
        x = self.x_values[-1] + x_step
        y = self.y_values[-1] + y_step

        self.x_values.append(x)
        self.y_values.append(y)

    def get_step(self):
        """Determine the direction and distance for each
            step, and then calculate the step."""

        # Decide which direction to go and how far to go
        # in that direction.
        direction = choice([1, -1])
        distance = choice([0, 1, 2, 3, 4])
        step = direction * distance
        return step


import matplotlib.pyplot as plt

from random_walk import RandomWalk

# Make a random walk.
rw = RandomWalk(25_000)
rw.fill_walk()

# Plot the points in the walk.
plt.style.use('classic')
```

```
fig, ax = plt.subplots(figsize=(15, 9))
point_numbers = range(rw.num_points)
ax.scatter(rw.x_values, rw.y_values, c=point_numbers,
                cmap=plt.cm.Greys, edgecolors='none', s=3)

# Emphasize the first and last points.
ax.scatter(0, 0, c='green', edgecolors='none', s=100)
ax.scatter(rw.x_values[-1], rw.y_values[-1], c='red',
                edgecolors='none', s=100)

# Remove the axes.
ax.get_xaxis().set_visible(False)
ax.get_yaxis().set_visible(False)

plt.show()
```

Listing A.4. Kod korišten za simulaciju slučajne šetnje 5.1 (Python), radi se o modifikaciji koda iz [23]

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import random

def randomwalk1D(n):
        x, y = 0, 0

        # Generate the time points [1, 2, 3, ... , n]
        timepoints = np.arange(n + 1)
        positions = [y]

        directions = ["UP", "DOWN"]
        for i in range(1, n + 1):
                # Randomly select either UP or DOWN
                step = random.choice(directions)

                # Move the object up or down
                if step == "UP":
                        y += 1
                elif step == "DOWN":
                        y -= 1
```

```
                # Keep track of the positions
                positions.append(y)
        return timepoints, positions

time_data, pos_data = randomwalk1D(100)
plt.plot(time_data, pos_data, 'b-')
plt.title("1D␣Random␣Walk␣in␣Python")
plt.show()
```