SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

Bayesov teorem

Rijeka, rujan 2022.

Valerija Peša
0069083575

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

Bayesov teorem

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Dražić

Rijeka, rujan 2022.

Valerija Peša
0069083575

SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET
POVJERENSTVO ZA ZAVRŠNE ISPITE

Rijeka, 18. ožujka 2022.

Zavod:	**Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike**
Predmet:	**Inženjerska matematika ET**
Grana:	**1.01.07 primijenjena matematika i matematičko modeliranje**

ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik:	**Valerija Peša (0069083575)**
Studij:	Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Zadatak: **Bayesov teorem // Bayes' theorem**

Opis zadatka:

U radu je potrebno iskazati i dokazati Bayesov teorem. Ujedno je potrebno uvesti pojam uvjetne vjerojatnosti i objasniti ga u kontekstu primjene na Bayesov teorem.
Bayesov teorem također treba staviti u povijesni kontekst i jasno objasniti njegovu primjenu u inženjerskoj struci s naglaskom na primjene u elektrotehnici.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Valerija Peša

Zadatak uručen pristupniku: 21. ožujka 2022.

Mentor:

Doc. dr. sc. Ivan Dražić

Predsjednik povjerenstva za završni ispit:

Prof. dr. sc. Viktor Sučić

IZJAVA

Sukladno članku 8. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku preddiplomskih sveučilišnih studija/stručnih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 1. veljače 2020., izjavljujem da sam samostalno izradila završni rad prema zadatku preuzetom dana 21. ožujka 2022.

Rijeka, 19. rujna 2022.

Valerija Peša

Valerija Peša

Zahvaljujem se mentoru doc. dr. sc. Ivanu Dražiću na stručnom vodstvu, suradnji i trudu uloženom pri izradi ovog završnog rada.

Sadržaj

1. Uvod

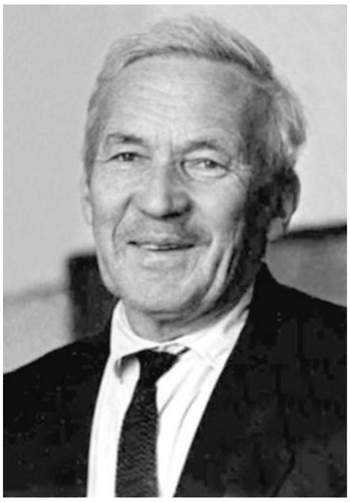
Predmet završnog rada je Bayesov teorem, važan teorem teorije vjerojatnosti nazvan prema matematičaru i filozofu Thomasu Bayesu koji ga je prvi osmislio i dokazao. Bayesov teorem ili češće Bayesova formula služi za posteriorno određivanje vjerojatnosti promatranih hipoteza, ako znamo da je neki događaj ostvaren. Ovaj teorem ima širok spektar primjene u statistici, filozofiji, ekonomiji, genetici, forenzici, mehanici, računarstvu i ostalim znanstvenim područjima.

U ovome radu su kroz poglavlja opisane važne teme teorije vjerojatnosti na koje se Bayesov teorem nadovezuje. Prvo poglavlje pružit će nam pregled osnovnih pojmova teorije vjerojatnosti opisom prostora elementarnih događaja te pravila i operacija na prostoru događaja. Zatim ćemo postaviti koncept vjerojatnosnog prostora kroz aksiome vjerojatnosti i temeljna svojstva vjerojatnosti koja su posljedica aksioma vjerojatnosti. U četvrtom poglavlju definirat ćemo uvjetnu vjerojatnost, razmotriti njezina svojstva i primjenu, a potom ćemo definirati nezavisne događaje. U sljedećem poglavlju pozabavit ćemo se formulom potpune vjerojatnosti i njezinom primjenom u problemima nabave, pouzdanosti sigurnosne kopije i kontrole kvalitete proizvodnje. Posljednje poglavlje objasnit će nam Bayesov teorem kroz povijesni osvrt, matematičku definiciju i razne primjere koji proizlaze iz primjene teorema u određivanju najvjerojatnijeg uzroka kvara, ispravljanju grešaka u komunikaciji i analizi dijagnostičkih testova.

Cilj rada je pružiti matematički opis Bayesova teorema i njegove primjene u različitim problematikama, uz razumijevanje važnih pojmova i formula iz teorije vjerojatnosti koji predstavljaju matematičku podlogu Bayesovom teoremu.

2. Osnove teorije vjerojatnosti

Teorija vjerojatnosti jedna je od vodećih matematičkih disciplina suvremene matematike, s primjenom u mnogim drugim matematičkim disciplinama poput matematičke statistike, te različitim područjima fizike, biologije, ekonomije, informatike, tehnike, genetike i sl. Ova se znanstvena disciplina počela razvijati kroz igre na sreću još u 17. stoljeću i njezine su početke obilježili Blaise Pascal i Pierre de Fermat, a značajan doprinos ostvarili su Daniel Bernoulli, Abraham de Moivre i Pierre-Simon Laplace krajem 18. i početkom 19. stoljeća. Prilikom razvoja teorije vjerojatnosti prošlo je otprilike 300 godina, bez strogo definiranih aksioma i upravo je nedostatak aksiomatske definicije predstavljao najveći problem u njezinom vrednovanju i uvrštavanju među ostale "prave" matematičke discipline. Ruski matematičar Andrej Nikolajevič Kolmogorov 1933. godine stvara opće prihvaćenu aksiomatiku koja zastupa intuitivne predodžbe o vjerojatnosti, a uz to ujedinjuje i sva dotadašnja otkrića na ovome području. Nakon uvođenja aksiomatike uslijedio je izniman razvoj teorije vjerojatnosti.



Slika 2.1. Andrej Nikolajevič Kolmogorov, ruski matematičar, iz izvora [7]

Andrej Nikolajevič Kolmogorov je ostvario velik doprinos na području teorije vjerojatnosti za koju je postavio osnove aksiomima objavljenima u svojoj knjizi "Temelj teorije vjerojatnosti", a osim toga u širokom području svoje znanstvene djelatnosti bavio se matematičkom logikom, topologijom, teorijom funkcije realne varijable, funkcionalnom analizom i drugim. Pažnju je posvećivao problematici nastave matematike, a svoje radove objavljivao je u člancima, knjigama i udžbenicima, čime je za života i posthumno stekao brojne matematičke nagrade i počasti. (Iz izvora [7], [8].)

U ovome poglavlju definirani su osnovni pojmovi prostora elementarnih događaja i operacija s događajima, prema literaturi [3], [4] i [5].

2.1. Prostor elementarnih događaja

Prvi korak u provođenju pokusa je određivanje odnosa između uzroka i posljedice na temelju čega se postavljaju uvjeti pokusa i predviđaju ishodi prilikom realizacije. Prema tome slijedi podjela na dvije osnovne kategorije: determinističke i slučajne pokuse. Ishod determinističkih pokusa jednoznačno je određen uvjetima pokusa. Formiranjem i proučavanjem slučajnih pokusa bavi se teorija vjerojatnosti, a to su oni kod kojih ishod nije jednoznačno određen uvjetima u kojima se pokus izvodi. Kod slučajnih pokusa u teoriji vjerojatnosti, skup uvjeta mora biti organiziran tako da je pokus moguće ponoviti proizvoljno konačno mnogo puta. Događajima zovemo rezultate slučajnog pokusa, a ovisno o tome isključuju li se međusobno njihovi ishodi ili ne - događaji mogu biti elementarni (nerazloživi) i složeni (razloživi).

U slučaju da je događaj A mogući rezultat slučajnog pokusa, a n broj ponavljanja pokusa za koje se događaj A ponovio točno n_A puta. Tada je broj n_A frekvencija događaja A, a broj

$$\frac{n_A}{n} \tag{2.1}$$

relativna frekvencija događaja za n ponavljanja pokusa. Prema definiciji relativne frekvencije vrijedi da je:

$$0 \leq \frac{n_A}{n} \leq 1. \tag{2.2}$$

Teorija vjerojatnosti proučava one pokuse koji ispunjavaju uvjet statističke stabilnosti relativnih frekvencija, koji se očituje u mogućnosti grupiranja relativnih frekvencija događaja oko nekoga fiksnog boja pri velikom broju ponavljanja pokusa.

Vjerojatnost *a posteriori* proizvoljnog događaja A promatranog pokusa definira se kao realan broj $P(A)$ za kojeg vrijedi

$$0 \leq P(A) \leq 1, \tag{2.3}$$

oko kojega se grupiraju relativne frekvencije toga događaja. Ova definicija vrijedi za slučajne pokuse koji ispunjavaju uvjet statističke stabilnosti relativnih frekvencija, a zbog problema provjere stabilnosti relativnih frekvencija za konkretne slučajne pokuse i problema statičke stabilnosti u serijama pokusa, definicija se smatra matematički nepreciznom. Usprkos tome ova je definicija vjerojatnosnim matematičarima poslužila za ostvarivanje mnogih značajnih rezultata.

Vjerojatnost *a priori* nekoga događaja za promatrani pokus, bit će omjer povoljnih elementarnih događaja i ukupnog broja elementarnih događaja. Ova definicija se odnosi na slučajni pokus s konačno mnogo elementarnih događaja od kojih su svi jednako mogući. Nedostatak definicije vjerojatnosti *a priori* je u ograničenju na pokuse s konačno mnogo elementarnih događaja. Zbog pojma jednako moguć (događaj), što ukazuje na jednaku vjerojatnost, definicija je kružna.

Prostor elementarnih događaja je neprazan skup Ω koji predstavlja skup svih ishoda slučajnog pokusa. Točke ω skupa Ω zovu se elementarni događaji. Skup Ω i njegovi elementi osnovni su i nedefinirani pojmovi teorije vjerojatnosti. Prostor elementarnih događaja karakterizira idealizirani slučajni pokus gdje svako provođenje pokusa rezultira ishodom koji odgovara jednoj i samo jednoj točki u Ω, odnosno jednom i samo jednom elementarnom događaju. Događaj je podskup prostora elementarnih događaja Ω, a povoljna točka događaja, svaka je točka koja mu pripada. Siguran događaj podrazumijeva cjelokupan prostor elementarnih događaja Ω koji se mora dogoditi pri svakom izvođenju pokusa. Nemoguć događaj se nikada neće ostvariti i čini prazan skup.

Primjer 2.1. *Objasnimo pojmove: slučajni pokus, događaj, elementarni događaj i prostor elementarnih događaja na jednostavnom pokusu "pismo-galva". Ako se pokus zasniva na bacanju novčića uvis iznad ravne plohe, te se nakon pada novčića na njegovoj gornjoj strani nalaze pismo (P) ili glava (G) kao jedini mogući ishodi.*

Pokus bacanja novčića je tipičan primjer slučajnog pokusa jer za novčić u primjeru pretpostavljamo da je idealno simetričan pa stoga ishod ovog pokusa - hoće li pasti pismo ili glava nije unaprijed određen uvjetima izvođenja eksperimenta.

U teoriji vjerojatnosti je pri proučavanju slučajnih pokusa od velike važnosti unaprijed dogovoriti koji su sve elementarni događaji mogući rezultati promatranog pokusa.

Prema navedenim pretpostavkama dva su moguća ishoda navedenog pokusa: novčić pada na pismo (P) ili glava (G) i ta su dva moguća ishoda koja se međusobno isključuju elementarni događaji koje u ovome primjeru označavamo s P i G . Elementarna događaje obuhvaća prostor elementarnih događaja Ω koji je skup svih mogućih ishoda promatranog pokusa: $\Omega = \{P, G\}$.

Događajem nazivamo rezultat slučajnog pokusa, primjerice ako promatramo pokus bacanja sedam simetričnih novčića, onda događaj može biti "palo je barem tri pisma".

2.2. Operacije s događajima

Događaji su podskupovi istog prostora elementarnih događaja Ω, stoga za njih vrijede sva pravila i operacije teorije skupova. Kroz niz sljedećih definicija uvesti ćemo operacije na prostoru događaja.

Definicija 2.1. *Za događaj A kažemo da povlači događaj B, ako je A podskup skupa B, odnosno ako vrijedi*

$$A \subset B, \tag{2.4}$$

pri čemu je moguće da je $A = B$.

Definicija 2.2. *Događaj A^C događaj suprotan događaju A koji se ostvaruje provođenjem pokusa onda i samo onda kada se događaj A ne ostvari, pa vrijedi*

$$A^C = \Omega \backslash A. \tag{2.5}$$

Zbroj vjerojatnosti dva komplementarna događaja iznosi jedan, odnosno vrijedi relacija

$$P(A) + P(A^C) = 1. \tag{2.6}$$

Definicija 2.3. *Događaj* $A \cup B$ *je unija događaja* A *i* B*, koja je ostvarena ako se ostvari barem jedan od događaja. U kontekstu skupova, događaj* $A \cup B$ *dobivamo kao skupovnu uniju skupova* A *i* B*. Analogno tome se definira unija konačno mnogo događaja* $A_1, A_2, ..., A_n$ *kao*

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k, \tag{2.7}$$

tj. unija prebrojivo mnogo događaja $A_n, n \in \boldsymbol{N}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{2.8}$$

Definicija 2.4. *Presjek događaja* A *i* B*, u oznaci* $A \cap B$ *se ostvaruje ako i samo ako se dogode oba događaja* A *i* B*. Sukladno tome definira se presjek konačno mnogo događaja* $A_1, A_2, ..., A_n$

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k \tag{2.9}$$

ili prebrojivo mnogo događaja $A_n, n \in \boldsymbol{N}$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{2.10}$$

Definicija 2.5. *Kada se događaji* A *i* B *ne mogu istovremeno dogoditi kažemo da se uzajamno isključuju ili da su disjunktni. Tada vrijedi*

$$A \cap B = \emptyset. \tag{2.11}$$

Prebrojivo mnogo događaja će se uzajamno isključivati kada vrijedi:

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \tag{2.12}$$

za $i \neq j$.

Definicija 2.6. *Razlika događaja* A *i* B*, u oznaci* $A \setminus B$*, dogodi se ako i samo ako se* A *dogodi i* B *ne dogodi. Također vrijedi*

$$A \setminus B = A \cap B^C. \tag{2.13}$$

U sljedećem primjeru bacanja igraće kockice pokazat ćemo primjenu navedenih definicija operacija s događajima.

Primjer 2.2. *U pokusu bacanja igraće kockice, za sljedeće događaje:*

A *postizanje parnog broja na kockici,*

B *postizanje broja manjeg od ili jednakog od 3,*

C *postizanje broja manjeg od 2.*

opišimo situacije kada se postižu sve prethodno navedene operacije nad skupovima:

a) $C \subset B$,

b) A^C,

c) $A \cup B$,

d) $A \cap B$,

e) $A \cap C = \emptyset$,

f) $A \setminus B$.

Pridružimo najprije navedenim događajima skupove. Očito je:

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{1, 2, 3\} \text{ i } C = \{1\}, \tag{2.14}$$

te

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \tag{2.15}$$

a) U navedenom primjeru događaj C bit će podskup događaja B budući je skup C sadržan u skupu B:

$$\{1\} \subset \{1, 2, 3\}. \tag{2.16}$$

b) Događaj suprotan događaju A, odnosno postizanju parnog broja na kockici ostvaruje se onda i samo onda kada se na kockici postiže neparan broj, odnosno:

$$A^C = \Omega \setminus A = \{1, 3, 5\}. \tag{2.17}$$

c) Unija događaja A i B je događaj koji nastupa kada bacanjem kockice uslijedi paran broj, broj manji ili jednak od 3 ili broj koji ispunjava oba uvjeta:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}. \tag{2.18}$$

d) Presjek događaja A i B je događaj koji nastaje kada zapažamo paran broj i istovremeno broj koji je manji ili jednak 3 pri bacanju kockice:

$$A \cap B = \{2\}. \tag{2.19}$$

Ovo također znači da se događaji A i B međusobno ne isključuju, odnosno da nisu disjunktni, što zapisujemo s

$$A \cap B \neq \emptyset. \tag{2.20}$$

e) *Događaj A predstavlja postizanje parnog broja na kockici, dok događaj C predstavlja dobivanje broja manjeg od 2, odnosno dobivanje broja 1. Budući ne postoji mogućnost da se bacanjem kockice postigne broj koji istovremeno zadovoljava oba uvjeta, zaključujemo da su ovi događaji disjunktni, odnosno vrijedi*

$$A \cap C = \emptyset. \tag{2.21}$$

f) *Razlika događaja $A \setminus B$ u ovome primjeru postiže se ostvarivanjem parnog broja koji je veći od 3:*

$$A \setminus B = A \cap B^C = \{4, 6\} \tag{2.22}$$

Sljedeći teorem dobio je ime prema britanskom matematičaru i logičaru Augustusu De Morganu, koji je definirao matematičku indukciju i pridonio razvoju algebre formulacijom logičkih veznika. De Morganovi zakoni značajno su doprinijeli napretku simboličke logike. (Iz izvora [13], [4].)

Teorem 2.1 (De Morganov zakon)**.** *Neka su A i B događaji definirani na prostoru elementarnih događaja Ω. Tada vrijedi.*

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C. \tag{2.23}$$

Dakle, De Morganovim zakonom se u teoriji skupova izriče da je komplement unije dva skupa jednak presjeku komplemenata tih skupova. Osim toga vrijedi i da je komplement presjeka dva skupa jednak uniji komplemenata tih skupova:

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C. \tag{2.24}$$

Osim teorije skupova De Morganovi zakoni imaju važnu primjenu i u Booleovoj algebri.

Dokaz. Dokaz se provodi u kontekstu skupovnih relacija, drugim riječima, kako bi se pokazalo skupovnu jednakost potrebno je pokazati sljedeće dvije skupovne inkluzije:

1. $(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C$,
2. $A^C \cap B^C \subseteq (A \cup B)^C$.

Kako bi se dokazalo da vrijedi: $(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C$ pretpostavlja se da je

$$x \in (A \cup B)^C. \tag{2.25}$$

To znači da

$$x \notin A \cup B, \tag{2.26}$$

odnosno

$$x \notin A \quad \wedge \quad x \notin B. \tag{2.27}$$

Iz ove relacije zaključujemo

$$x \in A^C \quad \wedge \quad x \in A^C, \tag{2.28}$$

što konačno povlači

$$x \in A^C \cap B^C. \tag{2.29}$$

Analogno se dokazuje da vrijedi $A^C \cap B^C \subset (A \cup B)^C$, pretpostavkom da je

$$x \in A^C \cap B^C. \tag{2.30}$$

Redom slijedi:

$$x \in A^C \quad \wedge \quad x \in B^C, \tag{2.31}$$

$$x \notin A \quad \wedge \quad x \notin B, \tag{2.32}$$

$$x \notin A \cup B, \tag{2.33}$$

te konačno

$$x \in (A \cup B)^C, \tag{2.34}$$

čime je dokaz završen. $\square$

3. Vjerojatnosni prostor

U poglavlju su dane definicije algebre skupova i njezina svojstva, te σ-algebre skupova. Opisani su aksiomi vjerojatnosti i vjerojatnosni prostor, uz temeljna svojstva vjerojatnosti koja proizlaze iz aksioma. Klasična definicija vjerojatnosti, spomenuta u drugom poglavlju, ovdje je definirana i potkrijepljena primjerima. Poglavlje je napisano prema literaturi [3], [4] i [5].

Kako bi vjerojatnost na prostoru elementarnih događaja Ω mogli definirati aksiomatski možemo uočiti da nije potrebno baš sve podskupove od Ω uzeti za događaje. Stoga se definira familija podskupova od Ω koja odgovara familiji događaja. Inače, svi mogući podskupovi skupa Ω čine tzv. partitivni skup od Ω koji se označava s $\mathcal{P}(\Omega)$.

Definirajmo najprije familiju događaja koja će funkcionirati u slučaju konačnog prostora elementarnih događaja. U kontekstu teorije skupova takva se struktura zove algebra događaja.

Definicija 3.1 (Algebra skupova)**.** *Algebra skupova na proizvoljnom nepraznom skupu Ω je familija podskupova $\mathcal{A}$ kada vrijedi:*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$,
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C \in \mathcal{A}$,
3. $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.

Iz same definicije algebre $\mathcal{A}$ odmah možemo zaključiti da je zatvorena za komplementiranje i konačne unije. Pokažimo još neka svojstva koja slijede iz same definicije.

Propozicija 3.1. *Neka je zadana algebra skupova $\mathcal{A}$ na nepraznom skupu Ω. Tada je*

$$\Omega \in \mathcal{A}. \tag{3.1}$$

Dokaz. Kako je prazan skup u $\mathcal{A}$, odmah zaključujemo da vrijedi

$$\Omega = \emptyset^C \in \mathcal{A}, \tag{3.2}$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Propozicija 3.2. *Algebra skupova zatvorena je na konačne presjeke.*

Dokaz. Vrijedi:

$$A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^C \right)^C \in \mathcal{A}, \tag{3.3}$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Propozicija 3.3. *Algebra skupova zatvorena je na konačne razlike.*

Dokaz. Vrijedi:

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^C \in \mathcal{A}, \tag{3.4}$$

čime je tvrdnja dokazana. □

U praksi je moguće imati i skup elementarnih događaja s beskonačno elemenata, a to znači da će se neki događaji moći prikazivati i kao prebrojiva unija manjih događaja. Stoga strukturu algebre skupova trebamo nadograditi tako da bude zatvorena i na prebrojive unije, čime dobivamo σ-algebru skupova.

Definicija 3.2 (σ-algebra skupova)**.** *σ-algebra $\mathcal{F}$ skupova na prostoru elementarnih događaja Ω je familija podskupova od $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, takva da vrijedi:*

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$,
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$,
3. $A_i \in \mathcal{F}, i \in \boldsymbol{N} \Rightarrow \bigcup_{i \in \boldsymbol{N}} A_i \in \mathcal{F}$.

Analogno kao i kod obične algebre skupova može se pokazati da je i kod σ-algebre $\Omega \in \mathcal{F}$, te je $\mathcal{F}$ zatvorena na prebrojive presjeke i skupovne razlike. Svaka σ-algebra skupova istodobno je i algebra skupova.

3.1. Aksiomi vjerojatnosti

U prethodnom dijelu definirali smo matematičku strukturu pogodnu za opisivanje događaja, a sada ćemo događajima pridružiti njihovu vjerojatnost.

Definicija 3.3 (Vjerojatnost)**.** *Neka je zadan prostor elementarnih događaja Ω na kojem je definirana σ-algebra događaja $\mathcal{F}$. Funkciju $P : \mathcal{F} \to \boldsymbol{R}$ zovemo vjerojatnost ako vrijedi:*

1. $P(A) \geq 0,\ A \in \mathcal{F}$,
2. $P(\Omega) = 1$,
3. *Neka je* $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \boldsymbol{N}$, $A_i \cap A_j = 0$, $i \neq j$. *Tada vrijedi:*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{3.5}$$

Cjelokupna se teorija vjerojatnosti temelji na navedena tri aksioma. Prvi aksiom jest svojstvo negativnosti vjerojatnosti, dok se drugi aksiom naziva svojstvom normiranosti vjerojatnosti. Posljednji aksiom opisuje svojstvo prebrojive ili σ-aditivnosti vjerojatnosti.

Definicija 3.4 (Vjerojatnosni prostor)**.** *Vjerojatnosni prostor je uređena trojka* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *gdje je* $\mathcal{F}$ σ*-algebra na prostoru elementarnih događaja* Ω *čiji su elementi događaji, a* $P(A)$ *je vjerojatnost događaja* A*.*

Upravo je vjerojatnosni prostor osnovni objekt u teoriji vjerojatnosti. Od velike je važnosti u izračunima teorije vjerojatnosti, zadatak konstrukcije prostora vjerojatnosti s obzirom na to je li Ω konačan ili prebrojiv skup ili je Ω neprebrojiv skup.

Definicija 3.5 (Klasična definicija vjerojatnosti)**.** *Neka promatrani slučajan pokus ima konačno mnogo elementarnih događaja n, te je prema prirodi uvjeta slučajnog pokusa svaki od elementarnih događaja jednako moguć; tada je vjerojatnost a priori događaja A opisana omjerom broja povoljnih elementarnih događaja* n_A *i ukupnog broja elementarnih događaja* n*:*

$$P(A) = \frac{n_A}{n} \tag{3.6}$$

Iz ove definicije slijedi:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$,
2. $n_A = 0 \rightarrow P(A) = 0$ (kada je A nemoguć događaj, njegova je vjerojatnost jednaka 0),
3. $n_A = n \rightarrow P(A) = 1$ (kada je A siguran događaj, njegova je vjerojatnost jednaka 1).

Ovime je pokazano da klasična definicija vjerojatnosti zadovoljava sve aksiome vjerojatnosti.

Kroz sljedeće primjere pokazat ćemo kako se izračunava vjerojatnost koristeći klasičnu definiciju vjerojatnosti.

Primjer 3.1. *Usmeni se ispit sastoji od 110 pitanja, a student je naučio odgovore na njih 88. Izračunajmo kolika je vjerojatnost da na usmenome ispitu, prvo nasumično odabrano pitanje bude ono na koje student ne zna odgovor.*

U promatranom slučajnom pokusu podjednaka je šansa izvlačenja svakog pitanja, a nas zanima događaj A za koji student izvlači pitanje na koje ne zna odgovor.

Ako je prostor elementarnih događaja dan pitanjima na ispitu, tada je ukupan broj elementarnih događaja (pitanja) na ispitu $n = 110$*, a skup svih pitanja na koja student ne zna dati odgovor je* $n_A = 110 - 88 = 22$*. Tada pomoću klasične definicije vjerojatnosti (3.6) možemo izračunati vjerojatnost promatranog događaja:*

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{22}{110} = 20\%. \tag{3.7}$$

Na ovaj smo način pokazali kako je za opisanu situaciju izlaska na usmeni ispit, vjerojatnost 20% *da će student pri prvom nasumičnom odabiru dobiti pitanje na koje ne zna odgovor.*

Primjer 3.2. *Promatramo pokus bacanja igraće kocke. Ako kocku bacimo jedan put, odredimo sljedeće vjerojatnosti:*

a) Dobiven je broj 6,

b) Nije dobiven broj 6,

c) Dobiven je neparan broj,

d) Dobiven je broj 1 ili 5,

e) Dobiven je broj 2 i 3.

U ovome primjeru bacanja kockice postoji 6 mogućih ishoda, odnosno elementarnih događaja koje smatramo jednako vjerojatnima, pa je prostor elementarnih događaja: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) Promatrani događaj je $A_1 = \{6\}$ *i za njega je povoljan jedan ishod:* $n_{A_1} = 1$ *od ukupno* $n = 6$ *elementarnih događaja. Stoga je prema klasičnoj definiciji vjerojatnosti (3.6):*

$$P(A_1) = \frac{n_{A_1}}{n} = \frac{1}{6}. \tag{3.8}$$

b) Ako je događaj A_1 *= [dobiven je broj 6], onda je traženi događaj njemu suprotan* A_1^C. *Uz pomoć definicije 2.6 dobivamo sljedeći izraz pogodan za daljnje rješavanje:*

$$P(A_1) + P(A_1^C) = 1 \Rightarrow P(A_1^C) = 1 - P(A_1) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}. \tag{3.9}$$

c) Definirajmo novi događaj od interesa kao A_2 *= [dobiven je neparan broj]. Za ovaj događaj imamo povoljna tri ishoda* $n_{A_2} = 3$*, pa je prema klasičnoj definiciji vjerojatnosti (3.6) vjerojatnost dobivanja neparnog broja na kockici prilikom jednog bacanja:*

$$P(A_2) = \frac{n_{A_2}}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \tag{3.10}$$

d) Sada nas zanima vjerojatnost da je dobiven broj 1 ili 5, prema čemu definiramo elementarne događaje A_3 *= [Dobiven je broj 1] i* A_4 *= [Dobiven je broj 5]. Događaji su međusobno disjunktni jer se u jednome bacanju kockice ne mogu ostvariti istovremeno, stoga je tražena vjerojatnost:*

$$P(A_3 \cup A_4) = P(A_3) + P(A_4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \tag{3.11}$$

e) Promatrani događaj dobivanja brojeva 2 i 3, prilikom jednog bacanja nije moguć i njegova je vjerojatnost zato jednaka 0.

Primjer 3.3. *U pokusu bacanja novčića s dva ponavljanja, odredimo vjerojatnost događaja A da se barem jednom pojavila glava. Traženi je događaj moguće postići kroz tri kombinacije:*

$$A = \{GG,\ GP,\ PG\}, \tag{3.12}$$

pri čemu navedene oznake imaju značenje G - glava, P - pismo).

Komplement događaja A nastupa isključivo u slučaju kada se A ne dogodi, odnosno kada se prilikom oba bacanja novčića pojavi pismo:

$$A^C = \{PP\}. \tag{3.13}$$

Tako je

$$\Omega = \{GG,\ GP,\ PG,\ PP\}, \tag{3.14}$$

budući su to jedine moguće realizacije i međusobno se isključuju.

Sada je

$$P(A^C) = \frac{1}{4}, \tag{3.15}$$

pa je

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \tag{3.16}$$

3.2. Svojstva vjerojatnosti

Kroz sljedeći niz teorema navodimo temeljna svojstva vjerojatnosti koja su direktna posljedica aksioma vjerojatnosti.

Teorem 3.1. *Ako je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor, tada vrijedi:*

$$P(\emptyset) = 0. \tag{3.17}$$

Dokaz. Prema trećem aksiomu uzima se da je $A_1 = \Omega$ i $A_i = \emptyset$ za sve $i \geq 2$. Stoga je:

$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + ..., \tag{3.18}$$

pa primjenom drugog aksioma dobivamo:

$$1 = 1 + P(\emptyset) + P(\emptyset) + ..., \tag{3.19}$$

odnosno slijedi

$$P(\emptyset) = 0, \tag{3.20}$$

čime je dokaz završen. □

Teorem 3.2 (Svojstvo konačne aditivnosti)**.** *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor, te neka su $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$ međusobno disjunktne događaji. Tada vrijedi:*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{3.21}$$

Dokaz. Tvrdnja teorema je direktna posljedica trećeg aksioma u koji se uvrštava $A_i = \emptyset$, $i > n$ uz korištenje Teorema 3.1. □

Teorem 3.3 (Svojstvo monotonosti vjerojatnosti)**.** *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor, te neka su* $A, B \in \mathcal{F}$ *takvi da je* $A \subseteq B$*. Tada vrijedi:*

$$P(A) \leq P(B) \tag{3.22}$$

Dokaz. Budući da je $A \subseteq B$, vrijedi skupovna jednakost:

$$B = A \cup (B \setminus A). \tag{3.23}$$

Prema Teoremu 3.2 slijedi:

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A), \tag{3.24}$$

odakle dobivamo tvrdnju teorema direktnom primjenom prvog aksioma. □

Teorem 3.4 (Neprekidnost vjerojatnosti u odnosu na rastući niz događaja)**.** *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor, te neka su* $A_n \in \mathcal{F}, n \in$ ***N*** *takvi da vrijedi*

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq ..., \tag{3.25}$$

te neka je

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{3.26}$$

Tada vrijedi

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} P(A_n). \tag{3.27}$$

Dokaz. Uzmimo da je:

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \setminus A_{n-1},\ n \geq 2. \tag{3.28}$$

Kako je algebra skupova zatvorena na razlike skupova, zaključujemo da je

$$B_n \in \mathcal{F},\ n \in \mathbf{N}, \tag{3.29}$$

a vrijedi i

$$B_i \cap B_j = \emptyset,\ i \neq j. \tag{3.30}$$

Također vrijede i sljedeće jednakosti:

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n. \tag{3.31}$$

Sada primjenom svojstva aditivnosti slijedi

$$P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i), \tag{3.32}$$

odnosno

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n), \tag{3.33}$$

odakle prema definicije konvergencije reda slijedi tvrdnja teorema. □

Teorem 3.5 (Neprekidnost vjerojatnosti u odnosu na padajući niz događaja)**.** *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor, te neka su* $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbf{N}$ *takvi da vrijedi*

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \tag{3.34}$$

te neka je

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{3.35}$$

Tada vrijedi

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n). \tag{3.36}$$

Dokaz. Uzmimo da je

$$C_n = A_1 \setminus A_n,\ n \in \mathbf{N}. \tag{3.37}$$

Prema tome je

$$C_n \in \mathcal{F}, \quad C_n \subset C_{n+1} \quad A_1 \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n. \tag{3.38}$$

Tada vrijedi

$$P(C_n) = P(A_1) - P(A_n), \tag{3.39}$$

te prema Teoremu 3.4 slijedi

$$P(A_1) - P(A) = P(A_1 \setminus A) = \lim_{n\to\infty} P(C_n) = P(A_1) - \lim_{n\to\infty} P(A_n), \tag{3.40}$$

odakle neposredno slijedi tvrdnja teorema. □

Teorem 3.6 (Prebrojiva ili σ-poluaditivnost)**.** *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor, te neka su* $A_n \in \mathcal{F},\ n \in \mathbf{N}$*. Tada vrijedi*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n). \tag{3.41}$$

Dokaz. Neka je

$$B_1 = A_1,\ B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k,\ n \geq 2, \tag{3.42}$$

čime smo definirali niz disjunktnih događaja $(B_n,\ n \in \mathbf{N})$, takav da je

$$B_n \subset A_n, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n. \tag{3.43}$$

Sada dobivamo

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n), \tag{3.44}$$

čime je tvrdnja teorema dokazana. □

Teorem 3.7. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor, te neka su $A, B \in \mathcal{F}$. Tada vrijedi*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{3.45}$$

Dokaz. Uočimo da vrijede sljedeće skupovne jednakosti:

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A), \tag{3.46}$$

$$(A \cap B) \cup (B \setminus A) = B. \tag{3.47}$$

Prema Teoremu 3.2 slijedi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A), \tag{3.48}$$

odnosno

$$P(A \cap B) + P(B \setminus A) = P(B), \tag{3.49}$$

čime je dokazan teorem. □

Teorem 3.8 (Vjerojatnost suprotnog događaja)**.** *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor, te neka je $A \in \mathcal{F}$. Tada vrijedi*

$$P(A^C) = 1 - P(A). \tag{3.50}$$

Dokaz. Uočimo da vrijedi sljedeća skupovna jednakost:

$$A \cup A^C = \Omega. \tag{3.51}$$

Primjenom svojstva aditivnosti direktno slijedi

$$P(A) + P(A^C) = 1, \tag{3.52}$$

čime je tvrdnja teorema dokazana. □

Direktna posljedica navedenih teoream je sljedeće svojstvo.

Teorem 3.9 (Omeđenost vjerojatnosti)**.** *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor, te neka je $A \in \mathcal{F}$. Tada vrijedi*

$$0 \leq P(A) \leq 1. \tag{3.53}$$

4. Uvjetna vjerojatnost

U ovom ćemo poglavlju definirati uvjetnu vjerojatnost, pokazati kako ona zadovoljava aksiome vjerojatnosti, te navesti njezina osnovna svojstva i razmotriti primjenu uvjetne vjerojatnosti kroz nekoliko praktičnih primjera. Poglavlje je napisano prema predavanjima iz kolegija Inženjerske statistike profesora doc. dr. sc. Ivana Dražića [1], te prema literaturi [3] i [4].

Jasno je da na realizaciju nekih događaja mogu utjecati drugi događaji. Primjerice vjerojatnost kvara nekog uređaja zasigurno ovisi o proizvođaču tog uređaja. Stoga je potrebno definirati tzv. uvjetnu vjerojatnost koja omogućava izračunavanje vjerojatnosti uz uvjet da se neki drugi događaj već realizirao.

Definicija 4.1 (Formalna definicija uvjetne vjerojatnosti). *Neka je zadan proizvoljan vjerojatnosni prostor* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i događaj* $A \in \mathcal{F}$ *takav da je* $P(A) > 0$. *Funkciju* $P_A : \mathcal{F} \to [0,1]$ *definiranu s*

$$P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},\ B \in \mathcal{F} \tag{4.1}$$

nazivamo uvjetna vjerojatnost događaja B *uz uvjet* A.

Vjerojatnost događaja B uz uvjet realizacije događaja A izračunava se određivanjem elementarnih događaja koji pripadaju događaju A, te među njima onih koji istodobno pripadaju i događaju B. Očito pri tome ulogu prostora elementarnih događaja preuzima događaj A. Ova se vjerojatnost ponekad naziva i kondicionalna vjerojatnost događaja B, ako je poznato da se događaj A realizirao.

Pokažimo sada da je uvjetna vjerojatnost dobro definirana, tj. da zadovoljava aksiome vjerojatnosti.

Propozicija 4.1. *Uvjetna vjerojatnost zadovoljava aksiome vjerojatnosti.*

Dokaz. Pokažimo da definirana uvjetna vjerojatnost zadovoljava sve aksiome.

1. Kako je uvjetna vjerojatnost jednaka kvocijentu dvaju vjerojatnosti, odnosno dva pozitivna broja, očito je $P(B|A) \geq 0$.
2. $P(\Omega|A) = \dfrac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1.$
3. Kako bi pokazali aditivnosti uzeti ćemo dva disjunktna događaja B_1 i B_2. Vrijedi:

$$\begin{aligned} P(B_1 \cup B_2|A) &= \frac{P((B_1 \cup B_2) \cap A)}{P(A)} = \frac{P((B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A))}{P(A)} \\ &= \frac{P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A)}{P(A)} = P(B_1|A) + P(B_2|A), \end{aligned} \tag{4.2}$$

čime je dokazano da je i treći aksiom zadovoljen.

□

Budući da je $P_A(B)$ vjerojatnost na $\mathcal{F}$, iz Definicije 4.1 i Teorema 3.1-3.8, proizlazi sljedeća propozicija.

Propozicija 4.2. *Neka je zadan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i događaj $A \in \mathcal{F}$ takav da $P(A) > 0$. Tada vrijedi:*

1. $P(\emptyset|A) = 0$,
2. $P(B^C|A) = 1 - P(B|A),\ B \in \mathcal{F}$,
3. $P(A_1 \cup A_2|A) = P(A_1|A) + P(A_2|A) - P(A_1 \cap A_2|A)$, $A_1, A_2, \in \mathcal{F}$
4. $P(A_1|A) \leq P(A_2|A)$, $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, $A_1 \subset A_2$,
5. $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n|A\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|A)$, $A_n \in \mathcal{F}, n \in \boldsymbol{N}$.

Pokažimo sada na nekoliko primjera kako se primjenjuje uvjetna vjerojatnost.

Primjer 4.1. *Studenti polože kolegij ako polože pismeni i usmeni dio ispita. Pismeni dio ispita položilo je 60% studenata, a kolegij je položilo 25% studenata. Izračunajmo koliki je postotak studenata koji su položili pismeni dio ispita položio kolegij.*

Ako događaj A označava sve studente koji su položili pismeni dio ispita, a događaj B sve studente koji su položili kolegij, zadane vjerojatnosti promatranih događaja su: $P(A) = 0.6$ i $P(B) = 0.25$.

Pomoću formule uvjetne vjerojatnosti iz Definicije 4.1 određujemo vjerojatnost događaja B uz uvjet da se događaj A realizirao. Presjek dvaju događaja $A \cap B$ dogodi se onda i samo onda kada se oba događaja realiziraju. Stoga, ako je za prolazak kolegija potrebno položiti pismeni i usmeni dio ispita vrijedi:

$$A \cap B = B. \tag{4.3}$$

Konačno je

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0.25}{0.6} = 41.69\%. \tag{4.4}$$

Zaključujemo da je u ovome primjeru 41.69% studenata koli su položili pismeni dio ispita, položili kolegij.

Primjer 4.2. *Odredimo vjerojatnost događaja B uz uvjet realizacije događaja A, ako je poznato da je $P(A|B) = 0.7,\ P(A) = 0.5$ i $P(B) = 0.2$.*

Iz definicije uvjetne vjerojatnosti je:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \tag{4.5}$$

odnosno

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.2 = 0.14. \tag{4.6}$$

Konačno dobivamo:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.14}{0.5} = 0.28. \tag{4.7}$$

Primjer 4.3. *U nekoj skupini ljudi* 60% *ih govori engleski jezik,* 40% *njemački jezik, a* 20% *onih koji govore engleski jezik govori i njemački jezik. Izračunajmo:*

a) Koliki postotak ljudi u toj skupini govori engleski jezik, a ne govori njemački jezik.

b) Koliki je postotak ljudi koji govore njemački jezik i govore engleski jezik.

Definirajmo događaje A *i* B *takve da događaj* A *predstavlja ljude koji govore engleski jezik, a događaj* B *ljude koji govore njemački jezik u promatranoj skupini ljudi. Tada vrijedi* $P(A) = 0.6$ *i* $P(B) = 0.4$.

Zadana je uvjetna vjerojatnost dvaju događaja, odnosno postotak ljudi koji govore njemački jezik, a uz to govore i engleski jezik, odnosno $P(B|A) = 0.2$.

a) Budući događaj B *predstavlja govornike njemačkog jezika, oni koji ne govore njemački jezik čine događaj suprotan* B*, odnosno* B^C.

Prema ranije navedenoj Propoziciji 4.2 vrijedi:

$$P(B^C|A) = 1 - P(B|A) = 1 - 0.2 = 0.8. \tag{4.8}$$

U ovom zadatku zanima nas vjerojatnost događaja $A \cap B^C$*, budući da su to ljudi koji govore engleski, a istovremeno ne govore njemački jezik.*

Iz definicije uvjetne vjerojatnosti, očito je da vrijedi:

$$P(A \cap B^C) = P(B^C|A) \cdot P(A) = 0.8 \cdot 0.6 = 48\%. \tag{4.9}$$

b) U drugome dijelu zadatka primjenom formule uvjetne vjerojatnosti određujemo koliki je postotak ljudi koji govore engleski jezik među govornicima njemačkog jezika u promatranoj skupini. Vrijedi:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{0.2 \cdot 0.6}{0.4} = 30\%. \tag{4.10}$$

4.1. Primjena uvjetne vjerojatnosti u inženjerstvu

U sljedeća dva primjera pokazat ćemo kako se uvjetna vjerojatnost može koristiti u inženjerstvu, primjeri su preuzeti iz predavanja na kolegiju Inženjerske statistike doc. dr. sc. Ivana Dražića [1].

Primjer 4.4. *Sto uzoraka metala analizirano je u odnosu na količinu premaza i grubost površine, kao što je prikazano sljedećom tablicom:*

	Količina premaza	
	visoka	*niska*
Grubost površine		
visoka	*80*	*2*
niska	*10*	*8*

Odredimo sljedeće vjerojatnosti:

a) *Ako je količina premaza visoka, kolika je vjerojatnost da je i grubost visoka?*

b) *Ako je grubost površine visoka, kolika je vjerojatnost da je i količina premaza visoka?*

c) *Ako je grubost površine niska, kolika je vjerojatnost da je niska i količina premaza?*

Promatrani događaji su:
A *- količina premaza je visoka i*
B *- grubost površine je visoka.*

Iz zadane tablice može se vidjeti da vrijedi:

$$P(A) = \frac{80+10}{100} = 0.9, \tag{4.11}$$

$$P(B) = \frac{80+2}{100} = 0.82. \tag{4.12}$$

Sada imamo:

a) $P(B|A) = \dfrac{P(B\cap A)}{P(A)} = \dfrac{0.8}{0.9} = 0.889.$

b) $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.8}{0.82} = 0.976.$

c) $P(A^C|B^C) = \dfrac{P(A^C\cap B^C)}{P(B^C)} = \dfrac{0.08}{0.18} = 0.444.$

Primjer 4.5. *U nekome skupu koji sadrži sto proizvoda, deset proizvoda nije ispravno. Kolika je vjerojatnost da ćemo u tri uzastopna pokušaja, nasumičnim odabirom odabrati tri neispravna proizvoda? Uzmimo u obzir da odabrane proizvode pri tome ne vraćamo natrag u skup.*

Definirajmo da je A_i *događaj pri odabiru neispravnog proizvoda u* i*-tom pokušaju, pri čemu je* $i = 1, 2, 3$*. Tražena vjerojatnost je tada:*

$$\begin{aligned} P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(A_3|A_1\cap A_2)\cdot P(A_1\cap A_2) = \\ P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cap A_2). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Vjerojatnost da iz prve odaberemo jedan neispravan proizvod je

$$P(A_1) = \frac{10}{100}. \tag{4.14}$$

Ako je već odabran jedan neispravan proizvod, vjerojatnost da ponovno izaberemo neispravan proizvod u drugome pokušaju iznosi

$$P(A_2|A_1) = \frac{9}{99}. \tag{4.15}$$

Vjerojatnost za odabir trećeg neispravnog proizvoda, uz prethodno odabrana dva takva bit će

$$P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{8}{98}. \tag{4.16}$$

Prema tome je tražena vjerojatnost odabira tri neispravna proizvoda prilikom tri nasumična pokušaja:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{8}{98} = 0.000742. \tag{4.17}$$

4.2. Nezavisni događaji

Uvjetna vjerojatnost pomaže nam kod definicije nezavisnosti događaja. Naime, dva su događaja nezavisna ako realizacija jednog ne utječe na realizaciju drugog, odnosno ako vrijedi:

$$P(B|A) = P(B),\ P(A|B) = P(A). \tag{4.18}$$

Direktna posljedica ovih uvjeta i definicije uvjetne vjerojatnosti je sljedeća formalna definicija nezavisnosti događaja.

Definicija 4.2 (Nezavisni događaji)**.** *Neka je zadan vjerojatnosni prostor* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *te neka su* A *i* B *dva događaja iz* $\mathcal{F}$*. Događaji* A *i* B *bit će nezavisni ako je:*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{4.19}$$

Uočimo, da prema ovoj definiciji, ako je događaj $A \in \mathcal{F}$ takav da je $P(A) = 0$, tada su za svako $B \in \mathcal{F}$, A i B nezavisni događaji.

Primjer 4.6. *Dva strijelca istovremeno gađaju u metu. Odredimo kolika je vjerojatnost da će meta biti pogođena, ako prvi strijelac gađa metu s vjerojatnošću pogotka 0.65, a drugi s vjerojatnošću pogotka 0.8.*

Ako s A označimo događaj pogotka u metu tada prema zadanim podatcima za prvog strijelca vrijedi $A_1 = 0.65$*, a za drugoga* $A_2 = 0.8$*.*

Zanima nas vjerojatnost pogotka mete, a znamo da će meta biti pogođena ukoliko ju pogodi jedan od strijelaca ili i jedan i drugi istovremeno, odnosno izračunavamo vjerojatnost unije tih dvaju događaja $A_1 \cup A_2$*:*

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \tag{4.20}$$

Znamo da su pogodci strijelaca nezavisni događaji, stoga zapisujemo:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0.65 \cdot 0.8 = 0.52 \tag{4.21}$$

Prema tome je tražena vjerojatnost:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0.65 + 0.8 - 0.52 = 93\% \tag{4.22}$$

U ovome je primjeru izračunato da vjerojatnost pogotka mete iznosi 93% u danim uvjetima.

Sada možemo definirati i familiju nezavisnih događaja generaliziranjem definicije nezavisnosti dva događaja.

Definicija 4.3 (Familija nezavisnih događaja)**.** *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor, te* $A_i \in \mathcal{F},\ i \in I$ *proizvoljna familija događaja. To je familija nezavisnih događaja ako za svaki konačan podskup različitih indeksa* $i_1, i_2, ..., i_k \in I$ *vrijedi:*

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}). \tag{4.23}$$

5. Formula potpune vjerojatnosti

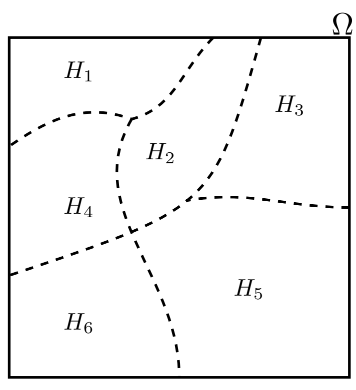
U ovome poglavlju definirani su potpun sustav događaja i zakon potpune vjerojatnosti, te je prikazana njihova primjena kroz nekoliko primjera koji opisuju problematiku nabave, pouzdanosti sigurnosne kopije i kontrole kvalitete proizvodnje. Poglavlje je napisano prema predavanjima profesora doc. dr. sc. Ivana Dražića iz kolegija Inženjerske statistike [2], odakle su preuzeti primjeri, uz literaturu [3], [4] i [5].

U mnogim izračunima s kojima se susrećemo, poznata nam je informacija o uvjetnoj vjerojatnosti. Želimo li pomoću uvjetne vjerojatnosti odrediti bezuvjetne vjerojatnosti, to nam omogućava formula potpune vjerojatnosti. Ako primjerice pratimo neki proizvodni proces gdje nekoliko strojeva proizvodi određene dijelove i za svaki od strojeva znamo koliko ispravnih dijelova može proizvesti tada pomoću formule potpune vjerojatnosti možemo odrediti kolika je vjerojatnost da je neki slučajno odabrani dio u danoj strukturi proizvodnje ispravan.

Za dobivanje formule koja će nam pomoći kod rješavanja opisanog problema najprije moramo uvesti tzv. potpun sustav događaja.

Definicija 5.1 (Potpun sustav događaja)**.** *Potpunim sustav događaja smatra se konačna ili prebrojiva familija događaja* $H_i,\ i \in I,\ I \subseteq \mathbf{N}$ *u vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ako vrijede sljedeća svojstva:*

1. $H_i \neq \emptyset,\ \forall i \in I,$
2. $H_i \cap H_j = \emptyset,\ za\ i \neq j,$
3. $\bigcup\limits_{i \in I} H_i = \Omega.$



Slika 5.1. Potpun sustav od 6 događaja $H_1,...,H_6$.

Prema navedenoj definiciji potpun sustav događaja čini konačna ili prebrojiva particija skupa Ω, što je ilustrirano na gornjoj slici.

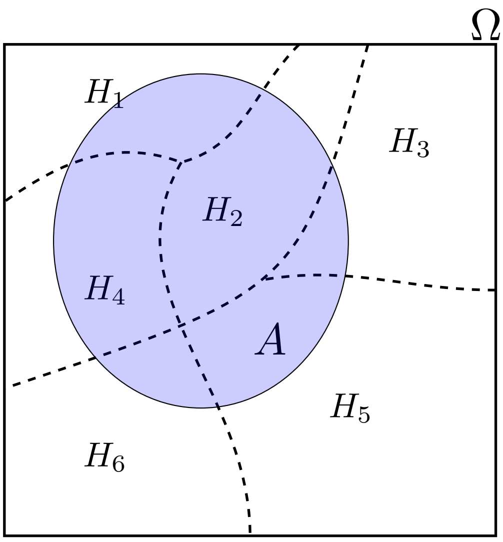
Sada možemo iskazati i dokazati formulu potpune vjerojatnosti.

Teorem 5.1 (zakon potpune vjerojatnosti)**.** *Ako je $H_i, i = 1, 2, ..., n$ potpun sustav događaja u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, za proizvoljan događaj $A \in \mathcal{F}$ vrijedi:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i). \tag{5.1}$$

Dokaz. Koristeći se ilustracijom prikazanoj na sljedećoj slici možemo uočiti da vrijedi:

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} H_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_i). \tag{5.2}$$



Slika 5.2. Potpun sustav od 6 događaja H_1,...,H_6 i događaj A.

Kako su događaji $A \cap H_i$ disjunktni, možemo iskoristiti svojstvo aditivnosti vjerojatnosti, pa dobivamo:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i), \tag{5.3}$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Formula (5.1) se često primjenjuje, te se u primjenama elemente H_i potpunog sustava događaja uobičajeno naziva hipotezama. Prema svojstvima hipoteza navedenim u Definiciji 5.1, vrijedi da se hipoteze međusobno isključuju, a točno jedna među njima mora se dogoditi.

U sljedećih nekoliko poglavlja analizirat ćemo različite probleme iz inženjerstva na koje se može primijeniti formula potpune vjerojatnosti.

5.1. Problem nabave

Analiziramo strukturu nabave tri dobavljača s obzirom na njihove udjele u nabavi i pouzdanost zamjenskih dijelova. Udio u nabavi se odnosi na količinu dijelova koji su pribavljeni od svakog dobavljača, dok pouzdanost predstavlja koncentraciju ispravnih dijelova u ukupnoj količini dijelova koji pristižu od određenog dobavljača.

a) Potrebno je odrediti kolika je vjerojatnost da je neki slučajno odabrani dio koji treba zamijeniti ispravan, ako je struktura nabave zamjenskog dijela stroja prikazana u sljedećoj tablici:

Dobavljač	Udio u nabavi	Pouzdanost
A	40%	80%
B	30%	90%
C	30%	85%

b) Razmotrimo što će se dogoditi s vjerojatnošću da je neki slučajno odabrani dio koji treba zamijeniti ispravan, za slučaj da se udio u nabavi jednoga proizvođača poveća za 20% na uštrb druga dva dobavljača (-10% svaki) a pouzdanost dobavljenih dijelova ostane nepromijenjena. Odredimo za kojeg proizvođača nam se isplati povećati udio u nabavi na ovaj način.

a) Uočavamo da struktura dobavljača čini potpun sustav događaja, jer vrijede sva svojstva navedena u Definiciji 5.1:

1. Od svakog dobavljača nabavlja se barem jedan dio,
2. Jedan konkretni dio može se nabaviti samo od jednog dobavljača,
3. Svi dobavljači u potpunosti opisuju sustav nabave predmetnog dijela.

Prema tome, imamo sljedeće hipoteze:

1. H_1 - zamjenski dio nabavljen je od dobavljača A,
2. H_2 - zamjenski dio nabavljen je od dobavljača B,
3. H_3 - zamjenski dio nabavljen je od dobavljača C.

Iz dane tablice, slijedi:

$$P(H_1) = 0.4,\ P(H_2) = 0.3,\ P(H_3) = 0.3. \tag{5.4}$$

Ako događaj A označava da je slučajno odabrani dio ispravan, pouzdanost dobavljača je vjerojatnost ispravno dobavljenih dijelova, odnosno:

$$P(A|H_1) = 0.8,\ P(A|H_2) = 0.9,\ P(A|H_3) = 0.85. \tag{5.5}$$

Preostaje izračunati traženu vjerojatnost $P(A)$, tj. odrediti kolika je vjerojatnost da je neki slučajno odabrani dio u navedenoj strukturi ispravan.

Koristeći formulu potpune vjerojatnosti (5.1), uvrštavanjem vjerojatnosti navedenih hipoteza $P(H_i)$ i uvjetnih vjerojatnosti $P(A|H_i)$, $i = 1, 2, 3$, dobivamo:

$$\begin{aligned} P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + P(A|H_3) \cdot P(H_3) = \\ 0.8 \cdot 0.4 + 0.9 \cdot 0.3 + 0.85 \cdot 0.3 = 0.845. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Vjerojatnost da je neki slučajno odabrani zamjenski dio ispravan je 84.5%.

b) Promotrimo kako se dobivena vjerojatnost mijenja povećanjem za 20% udjela u nabavi jednoga dobavljača, na uštrb druga dva (-10% svaki).

Za opisanu promjenu parametara postoje tri slučaja ovisno o tome koji udio u nabavi se poveća a koji smanji. U prvome slučaju povećat ćemo udio u nabavi prvoga dobavljača, kako je navedeno:

$$P(H_1) = 0.4 + 0.2 = 0.6; P(H_2) = 0.3 - 0.1 = 0.2; P(H_3) = 0.3 - 0.1 = 0.2. \tag{5.7}$$

Prema tome vjerojatnost da je slučajno odabrani zamjenski dio ispravan, iznosit će:

$$\begin{aligned} P(A_1) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + P(A|H_3) \cdot P(H_3) = \\ 0.8 \cdot 0.6 + 0.9 \cdot 0.2 + 0.85 \cdot 0.2 = 0.83. \end{aligned} \tag{5.8}$$

U drugome slučaju povećat ćemo udio u nabavi drugog dobavljača kako slijedi:

$$P(H_1) = 0.3; P(H_2) = 0.5; P(H_3) = 0.2. \tag{5.9}$$

Vjerojatnost za ovaj slučaj iznosi:

$$\begin{aligned} P(A_2) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + P(A|H_3) \cdot P(H_3) = \\ 0.8 \cdot 0.3 + 0.9 \cdot 0.5 + 0.85 \cdot 0.2 = 0.86. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Kada trećem dobavljaču povećamo udio u nabavi proizvoda

$$P(H_1) = 0.3; P(H_2) = 0.2; P(H_3) = 0.5, \tag{5.11}$$

Tada je promatrana vjerojatnost:

$$\begin{aligned} P(A_3) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + P(A|H_3) \cdot P(H_3) = \\ 0.8 \cdot 0.3 + 0.9 \cdot 0.2 + 0.85 \cdot 0.5 = 0.845. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Zaključujemo da povećanjem udjela u nabavi onoga proizvođača koji ima najveću pouzdanost dopremljenih dijelova, odnosno drugoga proizvođača, za opisani slučaj b), dobivamo najvišu vjerojatnost da je neki slučajno odabrani zamjenski dio ispravan.

5.2. Problem pouzdanosti sigurnosne kopije

U jednom poduzeću 25% djelatnika sigurnosnu kopiju sprema na optički medij, 55% djelatnika koristi magnetni medij, a preostali dio djelatnika služi se on-line pohranom podataka. Kod spremanja podataka na optički medij podaci se gube u 2% slučajeva, kod spremanja na magnetni medij u 4% slučajeva, a kod on-line pohrane u 0.5% slučajeva.

a) Potrebno je odrediti postotak djelatnika koji svoje podatke izgubi na sigurnosnoj kopiji.

b) Izračunajmo za koliko bi se smanjila vjerojatnost gubitka podataka na sigurnosnoj kopiji, kada bi 25% djelatnika koji pohranjuju podatke na magnetnom mediju prešli na on-line pohranu, s time da pouzdanost spremanja podataka na pojedine medije ostane nepromijenjena.

a) Uočimo najprije da hipoteze ovdje predstavljaju medij pohrane. Tako možemo označiti da je H_1 pohrana na optički medij, H_2 pohrana podataka na magnetni medij, a H_3 on-line pohrana. Događaj A koji nas zanima predstavlja gubitak podataka.

   Iz zadanih podataka zapisujemo vjerojatnosti hipoteza i pripadajuće uvjetne vjerojatnosti. Vrijedi:

$$P(H_1) = 0.25,\ P(H_2) = 0.55,\ P(H_3) = 1 - 0.25 - 0.55 = 0.2, \tag{5.13}$$

   dok uvjetne vjerojatnosti predstavljaju vjerojatnosti gubitka podataka za svaki medij, pa je:

$$P(A|H_1) = 0.02,\ P(A|H_2) = 0.04,\ P(A|H_3) = 0.005. \tag{5.14}$$

   Prema formuli potpune vjerojatnosti (5.1), računamo traženu vjerojatnost kako slijedi:

$$\begin{aligned} P(A) = P(A|H_1)\cdot P(H_1) + P(A|H_2)\cdot P(H_2) + P(A|H_3)\cdot P(H_3) = \\ 0.25\cdot 0.02 + 0.55\cdot 0.04 + 0.2\cdot 0.005 = 2.8\%. \end{aligned} \tag{5.15}$$

   U opisanom sustavu pohrane, 2.8% djelatnika izgubi svoje podatke na sigurnosnoj kopiji.

b) Za slučaju da 25% djelatnika prijeđe na on-line pohranu umjesto dosadašnje pohrane na magnetni medij, vjerojatnosti hipoteza iznosit će:

$$P(H_1) = 0.25;\ P(H_2) = 0.55 - 0.25 = 0.3;\ P(H_3) = 0.2 + 0.25 = 0.45 \tag{5.16}$$

   Zadane uvjetne vjerojatnosti ostaju nepromijenjene, stoga će vjerojatnost gubitaka podataka pri spremanju istih na sigurnosnu kopiju za ovaj slučaj iznositi:

$$\begin{aligned} P(A) = P(A|H_1)\cdot P(H_1) + P(A|H_2)\cdot P(H_2) + P(A|H_3)\cdot P(H_3) = \\ 0.25\cdot 0.02 + 0.3\cdot 0.04 + 0.45\cdot 0.005 = 1.925\% \end{aligned} \tag{5.17}$$

   Kada bi 25% djelatnika koji podatke pohranjuju na magnetnom mediju, umjesto toga svoje podatke pohranjivali na nešto sigurnijoj on-line pohrani, tada bi se vjerojatnost gubitaka podataka pri pohrani smanjila na 1.925%.

5.3. Problem kontrole kvalitete proizvodnje

Tvrtka posjeduje tri stroja B_1, B_2 i B_3 za izradu otpornika od $1\ k\Omega$. Uočeno je da 80% otpornika proizvedenih strojem B_1 su u granicama $50\ \Omega$ od nominalne vrijednosti. Stroj B_2 proizvodi 90% otpornika unutar granica $50\ \Omega$ od nominalne vrijednosti, dok stroj B_3 proizvodi 60% takvih otpornika.

Svaki sat stroj B_1 proizvede 3000 otpornika, stroj B_2 proizvede 4000, dok stroj B_3 proizvede 3000 otpornika. Svi proizvedeni otpornici pomiješani su u jedan spremnik, iz kojega se zatim spremaju za isporuku.

Potrebno je izračunati kolika je vjerojatnost da tvrtka isporuči otpornik koji je unutar granica $50\ \Omega$ oko nominalne vrijednosti.

Definirajmo događaj A da se proizvedeni otpornik nalazi u granicama $50\ \Omega$ oko nominalne vrijednosti.

Hipoteze će ovdje predstavljati stroj na kojem je otpornik proizveden, tako da hipoteze možemo označiti oznakama strojeva B_1, B_2 i B_3.

Iz poznatih informacija možemo odrediti pripadne uvjetne vjerojatnosti:

$$P(A|B_1) = 0.8,\ P(A|B_2) = 0.9,\ P(A|B_3) = 0.6. \tag{5.18}$$

U proizvodnji sva tri stroja, proizvede se ukupno

$$3000 + 4000 + 3000 = 10000 \tag{5.19}$$

otpornika u jednom satu proizvodnje, stoga su udjeli strojeva u ukupnoj proizvodnji:

$$P(B_1) = \frac{3000}{10000} = 0.3,\ P(B_2) = \frac{4000}{10000} = 0.4,\ P(B_3) = 0.3. \tag{5.20}$$

Primjenom formule potpune vjerojatnosti (5.1) možemo izraziti vjerojatnost isporuke otpornika koji je u granicama $50\ \Omega$ oko nominalne vrijednosti, kako slijedi:

$$\begin{aligned} P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3) = \\ 0.8 \cdot 0.3 + 0.9 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.3 = 0.78. \end{aligned} \tag{5.21}$$

78% otpornika koje ova tvrtka isporučuje nalazi se u traženim granicama nominalne vrijednosti.

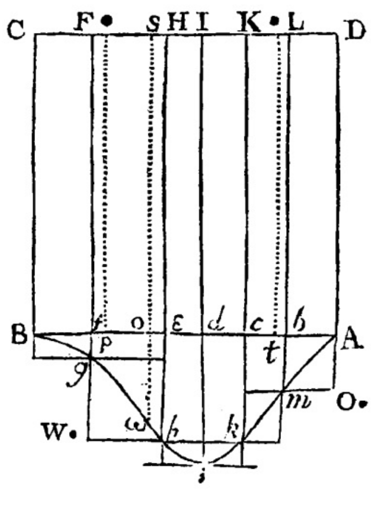
6. Bayesov teorem

U poglavlju je razrađena problematika Bayesova teorema nadovezujući se na primjere iz poglavlja o formuli potpune vjerojatnosti. Dani su i primjeri koji dočaravaju neke od najvažnijih primjena Bayesova teorema; određivanje najvjerojatnijeg uzroka kvara i ispravljanje grešaka u komunikaciji, te analiza dijagnostičkog testa. Uz to je naveden i kratki povijesni osvrt, prema izvorima [11], [12]. Poglavlje i svi primjeri napisani su prema predavanjima profesora doc. dr. sc. Ivana Dražića na kolegiju Inženjerska statistika, [2]. U pisanju je korištena i literatura [3], [4] i [5], a u potpoglavlju o analizi dijagnostičkog testa proučeni su i izvori [11] i [12].

6.1. Povijesni osvrt

Thomas Bayes (London 1701. ili 1702.- Tunbridge Wells 1761.) bio je engleski teolog i matematičar koji je dao matematičku osnovu vjerojatnosnom zaključivanju. 1720-ih školovao se na sveučilištu u Edinburghu i iz toga vremena potječu njegovi najraniji matematički radovi u kojima se bavio beskonačnim nizovima i numeričkom analizom. Mali je broj njegovih izvornih bilješki ostao sačuvan u rukopisu, kao što su pisma i bilježnica sa skicama radova, te bilješke o radu drugih matematičara koje nikada nije objavio. Jedina djela koja je osobno objavio su "Božanska dobrohotnost", "Uvod u doktrinu fluksija" te "Obrana matematičara protiv prigovora analitičara".

Slika 6.1. Thomas Bayes, iz izvor [11]



Slika 6.2. iz sačuvanih bilješki; model biljarskog stola za razmatranje vjerojatnosti, iz izvora [11]

U svojoj obrani koju je objavio anonimno, suprotstavio se kritici biskupa Georgea Berkeleyja na logičke temelje Sir Isaaca Newtona. Berkeleyjev napad Newtonove doktrine smatran je spektakularnim događajem za britansku matematiku toga vremena (prema riječima Floriana Cajoria) jer je osim Thomasa Bayesa i nekolicina drugih matematičara stala u obranu Newtonog rada.

Mnogo je pretpostavki o tome kako se Thomas Bayes počeo zanimati za teoriju vjerojatnosti. Prema nekim izvorima (Bernard Chadenet) satra se da je Bayes o matematici, a ujedno i vjerojatnosti učio od Abrahama de Moivrea, iako je prihvaćeno uvjerenje da se počeo proučavati vjerojatnosti inspiriran publikacijama Thomasa Simpsona. U pismima je ostao zabilježen Bayesov osvrt i prigovor na neki od Simpsonovih dokaza za poseban slučaj velikih brojeva.

Svoja najvažnija otkrića o vjerojatnosti Thomas Bayes je sjedinio u "Eseju o rješavanju problema u nauci o vjerojatnosti" koji je objavljen posthumno. Taj je rad postao osnova metodi statističkog zaključivanja Bayesovoj analizi.

6.2. Bayesov teorem

U proizvodnji nekog tipa komponente, koja se izrađuje pomoću nekoliko strojeva od kojih svaki proizvodi određeni broj takvih komponenti, suma njihovih udjela proizvodnje čini potpun sustav događaja. Ako za neku slučajno odabranu komponentu primijetimo da je neispravna, a uz to su nam poznate informacije o vjerojatnosti preciznosti izrade svakog od strojeva, Bayesov teorem može nam pomoći u otkrivanju koji je stroj najvjerojatnije proizveo neispravnu komponentu.

Teorem 6.1 (Bayesov teorem)**.** *Neka je $H_i, i = 1, 2, ..., n$ potpun sustav događaja u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, te neka je proizvoljan događaj $A \in \mathcal{F}$ takav da je $P(A) > 0$. Tada vrijedi:*

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j)P(A|H_j)}. \tag{6.1}$$

Dokaz. Prema izrazu za uvjetnu vjerojatnost (4.1) i formule potpune vjerojatnosti (5.1) vrijedi:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j)P(A|H_j)}, \tag{6.2}$$

čime je tvrdnja teorema dokazana. □

Bayesov teorem služi za određivanje vjerojatnosti hipoteze ako znamo da se neki događaj realizirao. Najčešće se Bayesov teorem interpretira kako je objašnjeno u nastavku.

Ako na početku provođenja nekoga pokusa imamo n hipoteza $H_1, H_2, ..., H_n$ koje opisuju pojavu koju razmatramo, hipotezama ćemo dodijeliti vjerojatnosti $P(H_i), i = 1, 2, ..., n$. Pokus ponavljamo sve dok za neki događaj B i za neko i_0 ne dobijemo $P(H_{i_0}|B) = 1$ ili $P(H_{i_0}|B) \approx 1$. Tada zaključujemo da je hipoteza H_{i_0} ispravna.

Loša strana navedenog objašnjenja je u tome što ne opisuje način kojim se određuju početne vjerojatnosti hipoteza $P(H_i)$, ali se bez obzira na to često primjenjuje u raznim slučajevima, kao primjerice u medicinskoj dijagnostici.

Bayesova formula, odnosno Bayesov teorem prirodno se naslanja na formulu potpune vjerojatnosti. Primjere o sigurnosnoj kopiji, problemu nabave i kvaliteti proizvodnje, koji su zadani u prethodnom poglavlju, u nastavku ćemo dodatno analizirati primjenom Bayesova teorema.

Primjer 6.1. *Promotrimo problem pouzdanosti sigurnosne kopije objašnjen u prethodnom poglavlju i pretpostavimo da u opisanom primjeru sa sigurnošću možemo reći da je došlo do gubitaka podataka.*

Pomoću Bayesove formule istražit ćemo koji je medij najvjerojatniji uzrok gubitka podataka, odnosno odredit ćemo vjerojatnosti da je gubitku podataka prethodila pohrana podataka na optički medij, magnetski medij ili on- line pohrana, te usporediti dobivene rezultate.

U ovome primjeru znamo da se događaj A *realizirao, te mu je prethodila neka od hipoteza* H_1, H_2 *ili* H_3. *Stoga, za svaki od tri slučaja pohrane podataka moramo odrediti vjerojatnost hipoteze pod uvjetom* A*, pri čemu ćemo koristiti Bayesovu formulu:*

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.02 \cdot 0.25}{0.028} = 17.85\%. \tag{6.3}$$

Ovime smo izračunali da vjerojatnost da je gubitku podataka, odnosno događaju A*, prethodilo spremanje na optički medij tj. hipoteza* H_1 *iznosi* 17.85%.

Sada na isti način možemo izračunati vjerojatnosti gubitka podataka kojemu prethode preostale hipoteze H_2 *ili* H_3*:*

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2) \cdot P(H_2)}{P(A)} = \frac{0.04 \cdot 0.55}{0.028} = 78.57\%, \tag{6.4}$$

$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3) \cdot P(H_3)}{P(A)} = \frac{0.005 \cdot 0.2}{0.028} = 3.57\%. \tag{6.5}$$

Usporedbom izračunatih rezultata, zaključujemo da je događaju gubitaka podataka najvjerojatnije prethodilo spremanje istih na magnetni medij, dok je najmanje vjerojatno da je gubitku podataka prethodila on-line pohrana.

U ovome je primjeru pokazana jedna od najčešćih primjena Bayesova teorema, a to je određivanje najvjerojatnijeg uzroka kvara ili neke druge pojave od interesa u danoj situaciji.

Primjer 6.2. *Analizirajmo problem nabave za koji smo u prethodnom poglavlju računali vjerojatnost da je neki slučajno odabrani dio koji treba zamijeniti, ustvari ispravan, u ovisnosti o strukturi nabave zamjenskih dijelova. Ako je u ovome slučaju početna tvrdnja da je odabrani zamjenski dio sigurno ispravan, odredimo od kojeg dobavljača je najvjerojatnije taj dio isporučen.*

Za rješavanje ovoga problema služimo se Bayesovom formulom jer smo sigurni da je promatrani događaj realiziran i da mu je prethodila neka od hipoteza, a zanima nas koja bi to hipoteza *najvjerojatnije bila, u opisanim okolnostima primjera. Dakle, vjerojatnosti da je promatranom događaju prethodila nabava od prvog, drugog ili trećeg dobavljača su:*

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.8 \cdot 0.4}{0.845} = 37.87\%. \tag{6.6}$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2) \cdot P(H_2)}{P(A)} = \frac{0.9 \cdot 0.3}{0.845} = 31.95\%. \tag{6.7}$$

$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3) \cdot P(H_3)}{P(A)} = \frac{0.85 \cdot 0.3}{0.845} = 30.18\%. \tag{6.8}$$

Prema izračunu, odabrani ispravni dio najvjerojatnije je isporučen od prvog dobavljača, a najmanje je vjerojatno da ga je isporučio treći dobavljač.

Primjer 6.3. *U primjeru o kontroli kvalitete proizvodnje odredili smo da je 78% otpornika koje tvrtka isporučuje u traženim granicama nominalne vrijednosti. Izračunajmo koji stroj je najvjerojatnije proizveo otpornik za koji znamo da je unutar granica 50 Ω oko nominalne vrijednosti.*

Primjenom Bayesove formule za promatrani događaj A, odnosno isporuku otpornika koji je traženim granicama nominalne vrijednosti, određujemo kolika je vjerojatnost da je otpornik proizveden prvim strojem (B_1). Poznato nam je da promatrani stroj ima udio u proizvodnji $P(B_1) = 0.3$ i pripadajuću uvjetnu vjerojatnost $P(A|B_1) = 0.8$.

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{0.8 \cdot 0.3}{0.78} = 30.77\%. \tag{6.9}$$

Vjerojatnost da je otpornik u granicama 50 Ω oko nominalne vrijednosti, proizveden prvim strojem je 30.77%.

Izračunat ćemo vjerojatnosti za preostale hipoteze kako bismo usporedbom rezultata odredili koji stroj je najvjerojatnije proizveo odabrani otpornik. Vjerojatnost da je otpornik u zadovoljavajućim granicama proizveden drugim strojem je:

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2) \cdot P(B_2)}{P(A)} = \frac{0.9 \cdot 0.4}{0.78} = 46.15\%, \tag{6.10}$$

dok je vjerojatnost da je riječ o posljednjem stroju:

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3) \cdot P(B_3)}{P(A)} = \frac{0.6 \cdot 0.3}{0.78} = 23.08\%. \tag{6.11}$$

Usporedbom rezultata vjerojatnosti izračunatih Bayesovom formulom, zaključujemo kako je najvjerojatnije otpornik u zadovoljavajućim granicama nominalne vrijednosti proizveden drugim strojem.

6.3. Određivanje najvjerojatnijeg uzroka kvara

U ovom ćemo poglavlju na dva primjera pokazati kako se Bayesov teorem koristi kod određivanja najvjerojatnijeg uzroka kvara.

Primjer 6.4. *U trgovini se prodaju televizori dvaju proizvođača. Prema zahtjevima tržišta, trgovina* 60% *televizora nabavlja od prvog, a* 40% *televizora od drugog proizvođača. Vjerojatnost da se televizor pokvari unutar jamstvenog roka je* 15% *za televizore prvog, a* 25% *za televizore drugog proizvođača. Odredimo sljedeće:*

a) *Kolika je vjerojatnost da se na sreću odabrani televizor pokvari unutar jamstvenog roka?*

b) *Ako se je odabrani televizor pokvario unutar jamstvenog roka, jeli vjerojatnije da se radi o proizvodu prvog ili drugog dobavljača?*

Ako se hipoteza H_1 *odnosi na televizore koji su nabavljeni od prvog, a hipoteza* H_2 *na televizore nabavljene od drugog proizvođača, pripadne vjerojatnosti zadane u primjeru su:*

$$P(H_1) = 0.6,\ P(H_2) = 0.4. \tag{6.12}$$

Promatrani događaj A *označava slučaj kada je odabrani televizor pokvaren, pa su stoga uvjetne vjerojatnosti kvara televizora unutar jamstvenog roka kod prvog i drugog proizvođača dane s:*

$$P(A|H_1) = 0.15,\ P(A|H_2) = 0.25. \tag{6.13}$$

a) *U prvome dijelu zadatka pomoću formule potpune vjerojatnosti (5.1) izračunat ćemo kolika je vjerojatnost da će se u zadanoj strukturi, slučajno odabrani televizor pokvariti unutar jamstvenog roka. Vrijedi:*

$$P(A) = P(A|H_1)\cdot P(H_1) + P(A|H_2)\cdot P(H_2) = 0.15\cdot 0.6 + 0.25\cdot 0.4 = 19\%. \tag{6.14}$$

b) *U drugome dijelu zadatka ćemo pomoću Bayesova teorema za pokvareni televizor odrediti od kojega je dobavljača vjerojatnije dospio.*

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|H_1)\cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.15\cdot 0.6}{0.19} = 47.37\%. \tag{6.15}$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|H_2)\cdot P(H_2)}{P(A)} = \frac{0.25\cdot 0.4}{0.19} = 52.63\%. \tag{6.16}$$

Primjećujemo da je prema navedenom izračunu veća vjerojatnost da je pokvareni televizor proizvod drugog dobavljača.

Primjer 6.5. *Od 20 računala u nekom uredu, 2 ih je na operacijskom sustavu Windows XP, 6 na operacijskom sustavu Windows 7, a preostala računala su na Windows 10 sustavu.*

Vjerojatnost da se računalo zarazi virusom je 2% *za računala koja koriste Windows 10,* 5% *za računala na Windowsima 7, te* 12% *za računala koja koriste operacijski sustav Windows XP.*

Ako znamo da je računalo zaraženo virusom, izračunajmo na kojem operacijskom sustavu najvjerojatnije radi.

S obzirom na tekst zadatka definiramo hipoteze:

1. H_1 - *računalo je na operacijskom sustavu Windows XP,*
2. H_2 - *računalo je na operacijskom sustavu Windows 7,*
3. H_3 - *računalo je na operacijskom sustavu Windows 10,*

i njihove vjerojatnosti:

$$P(H_1) = \frac{2}{20} = 0.1, \tag{6.17}$$

$$P(H_2) = \frac{6}{20} = 0.3, \tag{6.18}$$

$$P(H_3) = \frac{20-(6+2)}{20} = 0.6. \tag{6.19}$$

Pripadne uvjetne vjerojatnosti hipoteza u ovome primjeru predstavljaju vjerojatnost zaraze računala virusom i iznose:

$$P(A|H_1) = 0.12,\ P(A|H_2) = 0.05,\ P(A|H_3) = 0.02. \tag{6.20}$$

Ako računalo zaraženo virusom označava događaj A*, vjerojatnost da se događaj* A *ostvari računamo prema formuli potpune vjerojatnosti jednaka je:*

$$P(A) = P(A|H_1)\cdot P(H_1) + P(A|H_2)\cdot P(H_2) + P(A|H_3)\cdot P(H_3), \tag{6.21}$$

$$P(A) = 0.12\cdot 0.1 + 0.05\cdot 0.3 + 0.02\cdot 0.6 = 3.9\%. \tag{6.22}$$

Sada možemo odrediti kolika je vjerojatnost da je zaraženo računalo koje je na operacijskom sustavu Windows XP primjenom Bayesova teorema:

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)\cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.12\cdot 0.1}{0.039} = 30.77\%. \tag{6.23}$$

Na isti način određujemo vjerojatnost da je zaraženo računalo među onima s operacijskim sustavom Windows 7:

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)\cdot P(H_2)}{P(A)} = \frac{0.05\cdot 0.3}{0.039} = 38.46\%. \tag{6.24}$$

Vjerojatnost da je zaraženo računalo koje je na operacijskom sustavu Windows 10:

$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3)\cdot P(H_3)}{P(A)} = \frac{0.02\cdot 0.6}{0.039} = 30.77\%. \tag{6.25}$$

Zaključujemo da je najveća vjerojatnost da je zaraženo računalo jedno od onih koje podržava operacijski sustav Windows 7. Vjerojatnosti da je zaraženo računalo jedno od onih sa sustavom Windows XP ili Windows 10, podjednake su.

6.4. Ispravljanje grešaka u komunikaciji

U ovom ćemo poglavlju analizirati jedan komunikacijski model kod kojeg zbog šuma na odredište dolazi iskrivljeni signal, te primjenom Bayesove formule odrediti najvjerojatniji signal koji je trebao doći na odredište.

Pretpostavimo da se kroz komunikacijski kanal prenose se tri lozinke: $AAAA$, $BBBB$ i $CCCC$. Vjerojatnosti ulaska tih triju lozinki u komunikacijski kanal su 0.3, 0.5 i 0.2, respektivno.

Svako slovo lozinke prenosi se nezavisno o drugim slovima, a vjerojatnost točnog prijenosa slova je 0.6. Vjerojatnost promjene slova iz jednog u drugo iznosi 0.2.

Odredimo koja je vjerojatnost da je poslana lozinka $AAAA$ ako je primljen skup znakova $ABCA$.

Prije računanja, formaliziramo zadane podatke kako je navedeno u nastavku.

Hipoteze H_1, H_2 i H_3 određuju lozinke koje su ušle u komunikacijski kanal, te su njihove vjerojatnosti zadane:

1. H_1 - poslana je lozinka AAAA, $P(H_1) = 0.3$,
2. H_2 - poslana je lozinka BBBB, $P(H_2) = 0.5$,
3. H_3 - poslana je lozinka CCCC, $P(H_3) = 0.2$.

Kako bismo odredili traženu vjerojatnost, prvo računamo uvjetne vjerojatnosti hipoteza, pri čemu smo s "+" označili točan prijenos slova, a s "-" promjenu slova iz jednog u drugo:

$$P(A|H_1) = P(+--+) = 0.6 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.6 = 0.014, \tag{6.26}$$

$$P(A|H_2) = P(-+--) = 0.2 \cdot 0.6 \cdot 0.2 \cdot 0.2 = 0.005, \tag{6.27}$$

$$P(A|H_3) = P(--+-) = 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.6 \cdot 0.2 = 0.005. \tag{6.28}$$

Pomoću formule potpune vjerojatnosti (5.1) izračunavamo vjerojatnost događaja A, odnosno vjerojatnost da je na izlaz komunikacijskog kanala stigao skup znakova $ABCA$:

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + P(A|H_3) \cdot P(H_3), \tag{6.29}$$

$$P(A) = 0.014 \cdot 0.3 + 0.005 \cdot 0.5 + 0.005 \cdot 0.2 = 0.0077. \tag{6.30}$$

Sada možemo odrediti kolika je vjerojatnost da je događaju A prethodila hipoteza H_1 primjenom Bayesove formule (6.1):

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.014 \cdot 0.3}{0.0077} = 54.54\%. \tag{6.31}$$

Utvrdili smo da je u slučaju pristizanja lozinke $ABCA$ na izlaz komunikacijskog kanala, vjerojatnost da je poslana lozinka AAAA 54.54%.

Vjerojatnost da je događaju A prethodila hipoteza H_2 odnosno H_3 je:

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2) \cdot P(H_2)}{P(A)} = \frac{0.005 \cdot 0.5}{0.0077} = 32.47\% \tag{6.32}$$

$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.005 \cdot 0.2}{0.0077} = 12.99\%. \tag{6.33}$$

Prema izračunu je vjerojatnost da je lozinka na ulazu komunikacijskog modela bila BBBB 32.47%, a lozinka CCCC 12.99%. Primjenom Bayesove formule izračunali smo da je najvjerojatnije signal prije iskrivljenja šumom glasio AAAA, dok je najmanje vjerojatno da je poslani signal bio CCCC.

Pogledajmo još jedan primjer primjene Bayesove formule u analizi komunikacijskog kanala.

Primjer 6.6. *Informacija se prosljeđuje u digitalnom obliku kao niz nula i jedinica. Poslani znak pogrešno se zaprima u* 5% *slučajeva, a iskustveno je utvrđeno da je omjer poslanih nula i jedinica 3 : 4. Ako je zaprimljen signal 000, odredimo kolika je vjerojatnost da je takav signal i poslan.*

Prema zadanim podacima zapisujemo hipoteze i njihove vjerojatnosti kako slijedi:

1. H_1 *- poslana je jedinica,*
2. H_2 *- poslana je nula.*

Iz zadanog omjera poslanih nula i jedinica, vjerojatnosti hipoteza bit će:

$$P(H_1) = \frac{4}{7},\ P(H_2) = \frac{3}{7}. \tag{6.34}$$

Poslani znak pogrešno se zaprima u 5% *slučajeva, stoga su pripadne uvjetne vjerojatnosti:*

$$P(A|H_1) = 0.05,\ P(A|H_2) = 0.95. \tag{6.35}$$

Ako događaj A *predstavlja slučaj kada je primljena nula, tada prema* (5.1) *računamo vjerojatnost događaja* A*:*

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = 0.05 \cdot \frac{4}{7} + 0.95 \cdot \frac{3}{7} = 43.57\% \tag{6.36}$$

Pomoću Bayesove formule možemo odrediti kolika je vjerojatnost da je zaprimljena nula, kada je nula i poslana:

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2) \cdot P(H_2)}{P(A)} = \frac{0.95 \cdot \frac{3}{7}}{0.4357} = 93.4\%. \tag{6.37}$$

Sada možemo izračunati vjerojatnost da je promatrani signal, koji se sastoji od tri nule, kao takav i poslan:

$$P = [P(H_2|A)]^3 = 0.934^3 = 81.59\%. \tag{6.38}$$

6.5. Analiza dijagnostičkog alata

U ovom ćemo poglavlju analizirati jedan primjer dijagnostičkog alata u odnosu na njegovu preciznost te objasniti kako se pomoću Bayesove formule izražava kvaliteta dijagnostičkog alata.

Primjer 6.7. *Pretpostavimo da je samo jedno od 1000 računala zaraženo je rijetkim računalnim virusom za koji je razvijen dijagnostički test. Ako je računalo stvarno zaraženo virusom, test će se pokazati pozitivnim (detektirat će virus) u* 99% *slučajeva, a kod računala koje nije zaraženo virusom test će se pokazati pozitivnim (pokazat će zarazu) u* 2% *slučajeva.*

Ako je testirano nasumično odabrano računalo i rezultat testa je pozitivan, izračunajmo kolika je vjerojatnost da je to računalo stvarno zaraženo promatranim virusom?

Uzmimo da hipoteza H_1 *predstavlja slučaj kada je računalo zaraženo virusom, dok hipoteza* H_2 *slučaj kada računalo nije zaraženo virusom. U ovome primjeru samo jedno od tisuću računala zaraženo je virusom, pa su vjerojatnosti hipoteza:*

$$P(H_1) = \frac{1}{1000} = 0.001, \; P(H_2) = \frac{999}{1000} = 0.999. \tag{6.39}$$

Ako događajem A *definiramo pozitivan test, pripadne uvjetne vjerojatnosti su:*

$$P(A|H_1) = 0.99, \; P(A|H_2) = 0.02. \tag{6.40}$$

Formulom potpune vjerojatnosti računamo vjerojatnost pojave pozitivnog testa:

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = 0.99 \cdot 0.001 + 0.02 \cdot 0.999 = 2.097\%. \tag{6.41}$$

Primjenom Bayesove formule možemo odrediti kolika je vjerojatnost da je računalo stvarno zaraženo promatranim virusom, ako je rezultat testa pozitivan:

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.99 \cdot 0.001}{0.02097} = 4.72\%. \tag{6.42}$$

Dijagnostički testovi imaju široku primjenu - od utvrđivanja anamnezi u medicini do ispitivanja kvalitete proizvoda. Budući da nijedan test nije savršeno pouzdan, rezultati dijagnostičkih testova označavaju se pozitivnima pri velikoj vjerojatnosti ispitane pojave, te negativnima ako je veća vjerojatnost odsustva ispitane pojave. Valjanost dijagnostičkog testa sastoji se u njegovoj sposobnosti da ispravno klasificira ispitane pojave. U nastavaku ćemo promotriti karakteristike dijagnostičkog testa u medicini, iako se navedeni parametri dijagnostičkih testova mogu primjenjivati u ispitivanjima u drugim granama ljudske djelatnosti.

Prije nego li je Bayesov princip uveden u medicinsku dijagnostiku, liječnici su se služili tablicom učinkovitosti pretrage u postavljanju dijagnoze. Tablica prikazuje rezultate provedenoga testa u odnosu na stvarno stanje.

/	Prisustvo bolesti	Odsustvo bolesti
Pozitivan rezultat testa	TP	FP
Negativan rezultat testa	FN	TN

Oznake u navedenoj tablici imaju značenje:

- TP - engl. true positive; broj bolesnih osoba koje test ispravno prepoznaje kao takve
- FP - engl. false positive; broj zdravih osoba koje test neispravno prepoznaje kao bolesne
- FN - engl. false negative; broj bolesnih osoba koje test neispravno prepoznaje kao zdrave
- TN - engl. true negative; broj zdravih osoba koje test ispravno prepoznaje kao takve

Liječnik pri postavljanju dijagnoze odabire pretragu s odgovarajućim karakteristikama osjetljivosti i specifičnosti. Osjetljivost predstavlja učinkovitost dijagnostičkog testa da ispitanike s određenom bolešću ustanovi pozitivnima. Prema navedenoj tablici osjetljivost bismo računali omjerom stvarno pozitivnih (TP) s ukupnim brojem oboljelih (TP + FN). Osjetljivost, drugim riječima opisuje sposobnost testa da bolesne ispravno prepoznaje bolesnima. S druge strane specifičnost testa opisuje sposobnost testa da osobe bez oboljenja prepozna negativnima. Prema tablici se specifičnost testa može iskazati omjerom zdravih osoba koje test ispravno prepoznaje (TN) od ukupnog broja zdravih osoba (FP + TN). Valjanost dijagnostičkog testa mjeri se specifičnošću i osjetljivošću testa i uvijek se teži tome da testovi koje provodimo imaju što veću osjetljivost i specifičnosti. Osjetljivost i specifičnost odnosno mjere valjanosti testa liječniku služe da odabere pretragu koja će mu pomoći u dijagnosticiranju pacijenta.

Po završetku pretrage, fokus se stavlja na njezinu učinkovitost. U tu se svrhu primjenjuju prediktivne vrijednosti. Pozitivna prediktivna vrijednost pokazuje koliko je među pozitivnim osobama na testu, onih koji su zaista bolesni (proporcija TP/(FP+TP)). Negativna prediktivna vrijednost opisuje koliki je postotak onih koji nemaju bolest od svih kojima je rezultat testa negativan (proporcija TN/(TN+FN)).

Kako bismo formulom uvjetne vjerojatnosti i Bayesovim teoremom mogli računati prethodno definirane pojmove, uvedimo oznake za lakše tumačenje:

- O - prisustvo obilježja (simptoma) odnosno pozitivan rezultat testa
- O^C -odsustvo obilježja odnosno negativan rezultat testa
- B - prisustvo bolesti u ispitanika
- B^C - odsustvo bolesti tj. zdrav ispitanik

Uvjetnom vjerojatnosti možemo iskazati mjere valjanosti testa. Osjetljivost ili senzitivnost testa računamo:

$$P(O|B) = \frac{P(O \cap B)}{P(B)} \tag{6.43}$$

Drugim riječima, osjetljivost se računa kao vjerojatnost da dijagnostički test pokaže pozitivan rezultat (prisustvo obilježja), uz uvjet da je kod ispitanika prisutna bolest.

Specifičnost dijagnostičkog testa možemo iskazati:

$$P(O^C|B^C) = \frac{P(O^C \cap B^C)}{P(B^C)} \tag{6.44}$$

Ova formula iskazuje da je specifičnost dijagnostičkog testa jednaka vjerojatnosti da se test pokaže negativnim, uz uvjet da je ispitanik zdrav.

Dijagnostičke vjerojatnosti računaju se pomoću Bayesova teorema. Pozitivna prediktivna vrijednost je:

$$P(B|O) = \frac{P(O|B) \cdot P(B)}{P(O|B) \cdot P(B) + P(O|B^C) \cdot P(B^C)} \tag{6.45}$$

Ova formula iskazuje da je pozitivna prediktivna vrijednost jednaka vjerojatnosti da je ispitanik bolestan ako znamo da je rezultat dijagnostičkog testa pozitivan.

Negativna prediktivna vrijednost je:

$$P(B^C|O^C) = \frac{P(O^C|B^C) \cdot P(B^C)}{P(O^C|B) \cdot P(B) + P(O^C|B^C) \cdot P(B^C)} \tag{6.46}$$

Odnosno, negativna prediktivna vrijednost jednaka je vjerojatnosti da ispitanik ne boluje od bolesti, kada je dijagnostičkim testom utvrđen negativan rezultat.

Pokažimo sada kako se mjere valjanosti testa i dijagnostičke vjerojatnosti računaju na jednom praktičnom primjeru u medicini.

Primjer 6.8. *Analizirajmo uređaj kojim se mjeri kontaminiranost. Podaci su zadani u sljedećoj tablici:*

/	*Kontaminacija prisutna*	*Kontaminacija nije prisutna*
Test je pozitivan	*54*	*10*
Test je negativan	*6*	*30*

Odredimo specifičnost i osjetljivost testa, te pozitivnu i negativnu prediktivnu vrijednost.

U danome primjeru označit ćemo hipoteze kako je navedeno:

1. B *- kontaminacija je prisutna; osoba je bolesna*
2. B^C *- kontaminacija nije prisutna; osoba nije bolesna*
3. O *- test je pozitivan; obilježja (simptomi) su prisutni*

4. O^C - *test je negativan;odsustvo obilježja (simptoma)*

Prema zadanim podacima, ispitanika je ukupno:

$$54 + 6 + 30 + 10 = 100 \tag{6.47}$$

Vjerojatnosti zadane tablicom su:

$$P(B) = \frac{54+6}{100} = 0.6 \tag{6.48}$$

$$P(B^C) = \frac{10+30}{100} = 0.4 \tag{6.49}$$

$$P(O \cap B) = \frac{54}{100} = 0.54 \tag{6.50}$$

$$P(O^C \cap B^C) = \frac{30}{100} = 0.3 \tag{6.51}$$

Prema 6.52, osjetljivost testa bit će:

$$P(O|B) = \frac{P(O \cap B)}{P(B)} = \frac{0.54}{0.6} = 90\% \tag{6.52}$$

Prema dobivenom rezultatu zaključujemo da je osjetljivost testa visoka, što znači da će test uspješno prepoznavati prisutnost kontaminacije u 90% slučajeva. Znači da će test bolesne osobe ispravno prepoznati kao takve, u većini slučajeva od ukupnog broja onih koji su bolesni.

Specifičnost testa, prema izrazu 6.54 izračunavamo:

$$P(O^C|B^C) = \frac{P(O^C \cap B^C)}{P(B^C)} = \frac{0.3}{0.4} = 75\% \tag{6.53}$$

Specifičnost promatranog testa iznosi 75% pa test u nekim slučajevima daje lažno pozitivne rezultate.

Opisani test ima visoku osjetljivost, odnosno izrazitu sposobnost da detektira kontaminaciju, ali u određenom broju slučajeva raspoznaje kontaminaciju kada ona nije prisutna jer specifičnost testa nije visoka.

Ispitajmo što bi se dogodilo s mjerom valjanosti testa kada bi podaci bili drugačije zadani sljedećom tablicom:

/	Kontaminacija prisutna	Kontaminacija nije prisutna
Test je pozitivan	54	2
Test je negativan	6	38

U ovome slučaju specifičnost testa iznosi:

$$P(O^C|B^C) = \frac{P(O^C \cap B^C)}{P(B^C)} = \frac{0.38}{0.4} = 95\%. \tag{6.54}$$

Primjećujemo da su podaci za izračun osjetljivosti ostali isti, pa bi ovaj test uz visoku osjetljivost imao i visoku specifičnost.

Odredimo sada dijagnostičke vjerojatnosti za podatke zadane prvom tablicom primjera. Za računanje su nam potrebne sljedeće vjerojatnosti:

$$P(O \cap B^C) = \frac{10}{100} = 0.1 \tag{6.55}$$

$$P(O^C \cap B) = \frac{6}{100} = 0.06 \tag{6.56}$$

$$P(O|B^C) = \frac{P(O \cap B^C)}{P(B^C)} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25 \tag{6.57}$$

$$P(O^C|B) = \frac{P(O^C \cap B)}{P(B)} = \frac{0.06}{0.6} = 0.1 \tag{6.58}$$

Pozitivna prediktivna vrijednost je prema formuli 6.45:

$$P(B|O) = \frac{P(O|B) \cdot P(B)}{P(O|B) \cdot P(B) + P(O|B^C) \cdot P(B^C)} = \frac{0.9 \cdot 0.6}{0.9 \cdot 0.6 + 0.25 \cdot 0.4} = 84.38\%. \tag{6.59}$$

Ovime smo izračunali da je 84.37% osoba s pozitivnim nalazom testa bolesno.

Negativnu prediktivnu vrijednost računamo pomoću formule 6.46:

$$P(B^C|O^C) = \frac{P(O^C|B^C) \cdot P(B^C)}{P(O^C|B) \cdot P(B) + P(O^C|B^C) \cdot P(B^C)} = \frac{0.75 \cdot 0.4}{0.1 \cdot 0.6 + 0.75 \cdot 0.4} = 83.33\% \tag{6.60}$$

Dakle, 83.33% osoba kojima se test pokazuje negativnim, nema bolest.

Vratimo se sada na primjer 6.7. za koji smo odredili da hipoteza H_1 predstavlja slučaj zaraze računala virusom, H_2 slučaj kada računalo nije zaraženo virusom, te događaj A koji predstavlja pozitivan test. Za potrebe računanja odredit ćemo da je A^C slučaj kada test pokazuje negativan rezultat.

Odredimo specifičnost i negativnu prediktivnu vrijednost testa.

Primjećujemo da je osjetljivost testa već zadana u primjeru te ona iznosi $P(A|H_1) = 99\%$. Izračunali smo (u 6.42) da je pozitivna prediktivna vrijednost $P(H_1|A) = 4.72\%$, odnosno 4.72% računala s pozitivnim testom ima virus. Primjećujemo da je u ovome primjeru pozitivna prediktivna vrijednost izrazito niska jer je u opisanoj situaciji samo jedno od tisuću računala zaraženo virusom.

Izračunajmo specifičnost pomoću svojstva uvjetne vjerojatnosti 4.2:

$$P(A^C|H_2) = \frac{P(A^C \cap H_2)}{P(H_2)} = 1 - P(A|H_2) = 1 - 0.02 = 98\%. \tag{6.61}$$

Specifičnost ovoga testa je izrazito visoka pa u 98% test detektira ispravna računala od ukupnog broja ispravnih računala.

Negativna prediktivna vrijednost prema 6.46 iznosi:

$$P(H_2|A^C) = \frac{P(A^C|H_2)P(H_2)}{P(A^C|H_1)P(H_1) + P(A^C|H_2)P(H_2)} = \frac{0.98 \cdot 0.999}{0.01 \cdot 0.001 + 0.98 \cdot 0.999} = 99.99898\% \tag{6.62}$$

Negativna prediktivna vrijednost prema ovom izračunu pokazuje da u skoro 100% negativnih rezultata na testu, ispitana računala nisu zaražena virusom.

Prema izračunatim vrijednostima zaključujemo da promatrani test za rijedak računalni virus ima izrazitu valjanost i gotovo uvijek ispravno klasificira nezaražena računala.

7. Zaključak

Kao što smo pokazali u primjerima, Bayesov teorem pronalazi primjenu u raznim situacijama u izračunu vjerojatnosti realizacije neke hipoteze, kada nam je poznato koji je događaj kasnije ostvaren, poput određivanja najvjerojatnijeg uzroka kvara, određivanja grešaka u komunikaciji te analizi dijagnostičkog alata.

Pri određivanju najvjerojatnijeg uzroka kvara, za pokvareni proizvod smo primjenom Bayesova teorema i usporedbom izračunatih vjerojatnosti hipoteza odredili od kojeg je dobavljača proizvod najvjerojatnije pristigao. U drugoj situaciji koja opisuje uredska računala, za računalo zaraženo virusom smo pomoću Bayesova teorema, usporedbom vjerojatnosti zaraze virusa u pojedinom operacijskom sustavu, izračunali koji operacijski sustav je najvjerojatnije podržavalo zaraženo računalo.

Kroz analizu komunikacijskih modela primjenom formule za uvjetnu vjerojatnost i formule potpune vjerojatnosti, a potom i Bayesove formule zaključili smo koji je signal najvjerojatnije bio poslan, ako nam je poznat signal na izlazu komunikacijskog kanala.

Analizom dijagnostičkog alata smo kroz primjere o testu na računalni virus, te testu koji mjeri kontaminiranost, primjenjujući uvjetnu vjerojatnost pokazali kako se određuje osjetljivost i specifičnost testa, a pomoću Bayesove formule pozitivna i negativna prediktivna vrijednost.

Također smo predočili kako se Bayesov teorem može primijeniti na problem nabave, pouzdanost sigurnosne kopije i kontrolu kvalitete proizvodnje, odnosno probleme koje smo proučili u poglavlju o zakonu potpune vjerojatnosti, a na što se Bayesov teorem nadovezao u daljnjoj analizi.

Proučavanje Bayesova teorema zahtijevalo je prethodno obrazloženje teorije i formula koji podupiru njegovo razumijevanje, kroz definicije i primjere, a to su: osnovni pojmovi teorije vjerojatnosti, vjerojatnosni prostor, aksiomi i svojstva vjerojatnosti, uvjetna vjerojatnost i nezavisni događaji, te zakon potpune vjerojatnosti.

Zaključujemo da Bayesov teorem možemo primijeniti u slučajevima kada nam je poznata informacija da je promatrani događaj ostvaren i želimo izračunati kolika je vjerojatnost da je tome događaju prethodila određena hipoteza. Zasigurno postoje brojni drugi slučajevi primjene Bayesova teorema, osim onih navedenih u ovome radu, a to nam otvara prostor daljnjim istraživanjima.

Literatura

[1] Dražić, I.: predavanja iz kolegija Inženjerska matematika: "Uvjetna vjerojatnost", s interneta, https://www.youtube.com/watch?v=oQCh0kH3MFc, rujan 2022.

[2] Dražić, I.: predavanja iz kolegija Inženjerska matematika: "Formula potpune vjerojatnosti i Bayesova formula", s interneta, https://www.youtube.com/watch?v=lBb6XAvvoJc, rujan 2022.

[3] Yates, R. D.; Goodman, D. J.: "Probability and Stochastic Processes A Friendly Introduction for Electrical and Computer Engineers", Wiley, 2004.

[4] Sarapa, N.: "Teorija vjerojatnosti", Zagreb: Školska knjiga, 2002.

[5] Mendenhall, W.; Sincich, T.: "Statistics for the Engineering and Computer Sciences", Second Edition, Dellen Publishing Company, 1988.

[6] Pauše, Ž.: "Vjerojatnost : informacija, stohastički procesi : pojmovi, metode, primjene", Peto izdanje, Zagreb: Školska knjiga, 2003.

[7] Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje: "Kolmogorov, Andrej Nikolajevič", s interneta, https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=32437, rujan 2022.

[8] Wikipedia: "Andrey Kolmogorov", s interneta, https://en.wikipedia.org/wiki/Andrey_Kolmogorov, rujan 2022.

[9] Božikov, J.: "Matematička podloga kliničkog prosuđivanja", s interneta, https://www.bib.irb.hr/347142/download/347142.Bozikov_Osobitosti.pdf, rujan 2022.

[10] Raslich, M. A.; Markert, R. J.; Stutes, S. A.: "Odabrane teme iz biostatistike: Odabir i tumačenje dijagnostičkih pretraga", s interneta, https://hrcak.srce.hr/file/28227, rujan 2022.

[11] Bellhouse, D. R.: "The Reverend Thomas Bayes, FRS: A Biography to Celebrate the Tercentenary of His Birth", s interneta, https://www.biostat.jhsph.edu/courses/bio621/misc/bayesbiog.pdf, rujan 2022.

[12] Encyclopedia Britannica: "Thomas Bayes", s interneta, https://www.britannica.com/biography/Thomas-Bayes, rujan 2022.

[13] Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje: "De Morgan, Augustus", s interneta, https://enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=14531, rujan 2022.

Sažetak i ključne riječi

U završnom radu definirane su osnove vjerojatnosti koje čine temelj Bayesovu teoremu. Pojašnjene su operacije na prostoru događaja i De Morganov zakon. Definirani su aksiomi vjerojatnosti, klasična definicija vjerojatnosti te svojstva vjerojatnosti. Uvjetna vjerojatnost i nezavisni događaji objašnjeni su matematičkom definicijom i svojstvima, te je primjenom u primjerima. Pokazani su potpun sustav događaja i zakon potpune vjerojatnosti, te njihova primjena. Objašnjenje Bayesova teorema dano je matematičkom definicijom i raznim primjerima koji opisuju njegovu praktičnu primjenu.

Ključne riječi: Bayesov teorem, zakon potpune vjerojatnosti, potpun sustav događaja, uvjetna vjerojatnost, nezavisni događaji, aksiomi vjerojatnosti, elementarni događaji, klasična definicija vjerojatnosti, prostor elementarnih događaja, događaj, hipoteze

Summary and key words

In final thesis there are defined basis of probability that are foundation of Bayes' theorem. There are explained operations on sample space and De Morgan's law. Probability axioms, probability space and classical definition of probability are defined. Conditional probability and indepedent events are clarified with its mathematical definition and properties, as well as its application in examples. Sample space, and law of total probability are illustrated and applied. Explenation of Bayes' theorem is given with mathematical defiinition and various examples that describe its practical application.

Keywords: Bayes' theorem, law of total probability, sample space, conditional probability, independent events, probability axioms, simple events, classical definition of probability, event space, event, hypotheses