

# Vlastite frekvencije brodskih globalnih vertikalnih vibracija

---

**Babić-Sinjeri, Alen**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:190:812790>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-13**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Engineering](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI  
TEHNIČKI FAKULTET

Preddiplomski sveučilišni studij brodogradnje

Završni rad

**VLASTITE FREKVENCIJE BRODSKIH GLOBALNIH  
VERTIKALNIH VIBRACIJA**

U Rijeci, rujan 2023.

Alen Babić Sinjeri

0069079565

SVEUČILIŠTE U RIJECI  
TEHNIČKI FAKULTET

Preddiplomski sveučilišni studij brodogradnje

Završni rad

**VLASTITE FREKVENCIJE BRODSKIH GLOBALNIH  
VERTIKALNIH VIBRACIJA**

Mentor: izv.prof.dr.sc. Ante Skoblar

Komentor: prof. dr. sc. Roberto Žigulić

U Rijeci, rujan 2023.

Alen Babić Sinjeri

0069079565

SVEUČILIŠTE U RIJECI  
TEHNIČKI FAKULTET  
POVJERENSTVO ZA ZAVRŠNE ISPITE

Rijeka, 11. ožujka 2021.

Zavod:           Zavod za tehničku mehaniku  
Predmet:        Dinamika

## ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik:    Alen Babić-Sinjeri (0069079565)  
Studij:        Preddiplomski sveučilišni studij brodogradnje

Zadatak:       Vlastite frekvencije brodskih globalnih vertikalnih vibracija / Natural  
                  frequencies of overall vertical vibration of ships

### Opis zadatka:

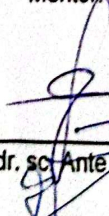
U radu je potrebno opisati teoriju brodskih globalnih vibracija i posebno obratiti pažnju na empirijske izraze koji se koriste za predviđanje vlastitih frekvencija globalnih vertikalnih vibracija pri dizajniranju broda a kako bi se izbjegle štetne rezonancije. Na temeljima postavki teorije potrebno je izraditi pojednostavljeni model koristeći računalne programe Matlab, Ansys ili slično. Za zadane dimenzije ekvivalentnog modela potrebno je izračunati vlastite frekvencije i analizirati utjecaj debljine stijenke i drugih utjecajnih parametara, po odabiru. Dobile rezultate usporediti sa rezultatima u referentnoj literaturi.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.



Zadatak uručen pristupniku: 15. ožujka 2021.

Mentor:



Doc. dr. sc. Ante Skoblar

Predsjednik povjerenstva za  
završni ispit:



Prof. dr. sc. Albert Zamarin

## **IZJAVA**

Izjavljujem da sam ovaj završni rad izradio samostalno. Tijekom pisanja i izrade koristio sam navedenu literaturu. Korištene teorije i zaključke naveo sam u literaturi prema Uputama o pisanju završnog rada dostupnih na web stranicama Fakulteta.



# SADRŽAJ

1. UVOD.....	1
2. JEDNADŽBA GIBANJA: TIMOSHENKOVA TEORIJA.....	2
2.1 Jednadžbe za gredu konstantnog poprečnog presjeka.....	9
2.2. Vlastite frekvencije vibracija.....	10
2.2.1. Jednostavno oslonjena greda.....	10
2.2.2. Greda uklještena na oba kraja.....	12
3. PRORAČUN VLASTITE FREKVENCIJE ZA GREDU KONSTANTNOG KUTIJASTOG TANKOSTIJENOG POPREČNOG PRESJEKA.....	14
3.1. Primjer.....	14
3.1.1. Rezultati.....	15
4. FORMULA ZA VLASTITE FREKVENCIJE SAVIJANJA GREDE KONSTANTNOG TANKOSTIJENOG POPREČNOG PRESJEKA.....	19
4.1. Analiza utjecaja debljine stjenke.....	21
5. FORMULA ZA IZRAČUN VLASTITIH FREKVENCIJA OKOMITIH VIBRACIJA BRODA.....	22
5.1. Primjer.....	25
5.1.1. Rezultati.....	27
6. ZAKLJUČAK.....	29
7. LITERATURA.....	30
8. POPIS VARIJABLI.....	31
9. SAŽETAK.....	34
10. PRILOZI.....	36
10.1. Kod za 3.1. Primjer {1}.....	36
10.1.1. Kod za oblike vibriranja.....	38
10.2 Kod za 5.1. Primjeri {2}.....	39

10.3 Kod za 4.1. Analiza utjecaja stjenke {3}.....	40
11. POPIS SLIKA.....	41
12. POPIS TABLICA.....	42



## 1. UVOD

Tijekom plovidbe na brod djeluju vanjske pobudne sile od glavnog motora, propelera i valova. Ti poticaji uzrokuju problem vibracije trupa, pa čak i strukturna oštećenja broda. Prekomjerne vibracije mogu dovesti do oštećenja i zamora strukture te imaju negativan utjecaj na učinkovitost plovidbe, zdravlje ljudi i vijek trajanja opreme. Dakle, predviđanje vlastitih frekvencija trupa broda u fazi projektiranja za izbjegavanje štetnih vibracija, a posebno ukupnih vertikalnih vibracije vrlo je važno. U praksi se, empirijske formule često i učinkovito koriste za predviđanje vertikalnih vibracija u fazi projektiranja trupa broda. U fazi projektiranja detalja, 1D ili 3D FEM (Finite Element Method) metoda služi za precizniju analizu vibracija.

1D FEM može predvidjeti niže vlastite frekvencije vibracija trupa lako i precizno. Za izračun viših vlastitih frekvencija primjenjuje se 3D FEM uz postizanje preciznijih rezultata. Međutim, 3D FEM metoda traži puno vremena za izradu cjelovitog modela.

U usporedbi s 1D i 3D FEM metodama, metoda empirijske formule je jednostavna i praktična. Mnogi profesionalci su proučavali empirijske formule za predviđanje ukupnih vertikalnih vibracija broda. Kumai formula [2] koju preporučuje Det Norske Veritas (DNV)[5] i sl. široko se koriste za predviđanje vlastitih frekvencija broda u brodogradnji.

Posljednjih godina fokus cjelokupnog proučavanja vibracija broda uglavnom je usredotočen na ukupnu brodsku analizu vibracija 3D FEM metodama i izračunavanje dodane mase u analizi vibracija broda. Trenutno su empirijske formule za predviđanje slobodnih vibracija broda umanjene točnosti s obzirom da su predložene i testirane na brodovima u razdoblju od šezdesetih do devedesetih godina dvadesetog stoljeća. Razvojem modernih velikih brodova, spomenute empirijske formule postale su nepraktične i nezadovoljavajuće zbog promjene dimenzija i rasporeda u unutrašnjosti novih brodova. U ovome radu prikupljeni su podaci o ispitivanjima vibracija velikih brodova (tankeri,...) iz literature [2]. Za procjenu vibracija korištena je formula izvedena u radu [2] temelju teorije Timoshenkove grede. Formula je izvedena uvođenjem koeficijenta smicanja kako bi se ispravila hipoteza jednolike raspodjele smicanja i nakon čega je primjenjena metoda statističke analize kako bi se dobile vlastite frekvencije globalnih vertikalnih vibracija brodova.

## 2. JEDNADŽBA GIBANJA: TIMOSHENKOVA TEORIJA

U radu [2] približne formule za prve tri vlastite frekvencije vertikalnih vibracija broda definirane su na temelju Timoshenkove teorije.

U ovoj se teoriji, uz učinak rotacijske inercije, razmatra i učinak posmične deformacije. Da bismo uključili učinak posmične deformacije, prvo razmotrimo gredu koja je podvrgnuta samo posmičnoj deformaciji kao što je prikazano na slici 1. Ovdje okomiti presjek (PQ), koji je okomit prije deformacije ostaje okomit i nakon deformacije, ali se pomiče za udaljenost  $w$  u smjeru  $z$ . Dakle, komponente pomaka točke u gredi dane su izrazom:

$$u=0, v=0, w=w(x,t) \quad (2.1)$$

gdje je:

$u$  komponenta pomaka

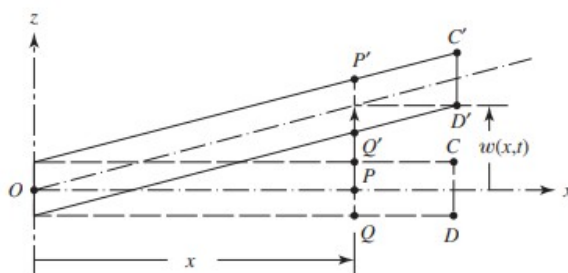
$v$  komponenta pomaka

$w$  poprečni pomak

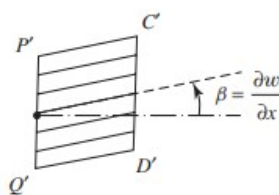
Komponente deformacija dane su izrazima:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}$$



(a)



gdje je:

Slika 1. Greda u posmičnoj deformaciji[1]

- $\varepsilon_{xx}$  normalna deformacija u smjeru x-osi
- $\varepsilon_{yy}$  normalna deformacija u smjeru y-osi
- $\varepsilon_{zz}$  normalna deformacija u smjeru z-osi
- $\varepsilon_{xy}$  smična deformacija u smjeru x i y osi
- $\varepsilon_{yz}$  smična deformacija u smjeru y i z osi
- $\varepsilon_{zx}$  smična deformacija u smjeru z i x osi

Smična deformacija  $\varepsilon_{zx}$  ista je kao rotacija  $\beta(x, t) = \partial w / \partial x(x, t)$  i događa se na svim vlaknima koja se nalaze paralelno sa središnjom crtom grede, kao što je prikazano na slici 1. Komponente naprezanja koje odgovaraju deformacijama navedenim u jednadžbi (2.2) dane su izrazima:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0, \quad \sigma_{zx} = G \varepsilon_{zx} = G \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.3)$$

gdje je:

- $\sigma_{xx}$  normalno naprezanje u smjeru x osi
- $\sigma_{yy}$  normalno naprezanje u smjeru y osi
- $\sigma_{zz}$  normalno naprezanje u smjeru z osi
- $\sigma_{xy}$  smično naprezanje u ravnini xy
- $\sigma_{yz}$  smično naprezanje u ravnini yz
- $\sigma_{zx}$  smično naprezanje u ravnini zx

U jednadžbi (2.3) definirano posmično naprezanje  $\sigma_{zx}$  je jednako (ujednačeno) u svakoj točki poprečnog presjeka grede. Budući da to u stvarnosti nije točno, Timoshenko koristi konstantu  $k$ , poznatu kao faktor korekcije smicanja, u izrazu za  $\sigma_{zx}$  kao:

$$\sigma_{zx} = kG \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.4)$$

gdje je:

- $G$  modul smicanja

$k$  koeficijent smicanja

Ukupni poprečni pomak središnje linije grede dan je izrazom (vidi sl. 2):

$$w = w_s + w_b \quad (2.5)$$

gdje je:

$w_s$  smični pomak

$w_b$  pomak savijanjem

i stoga je ukupni nagib otklonjene središnje crte grede dan izrazom:

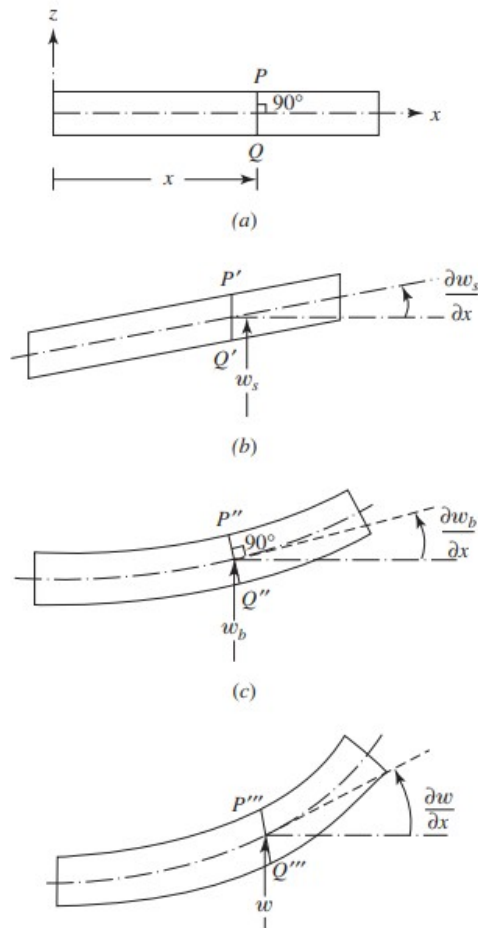
$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (2.6)$$

Budući da poprečni presjek grede prolazi kroz rotaciju samo zbog savijanja, rotacija poprečnog presjeka može se izraziti kao:

$$\phi = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w_s}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} - \beta \quad (2.7)$$

gdje je:

$\phi$  rotacija poprečnog presjeka



Slika 2. Deformacije savijanjem i smikom: (a) element bez deformacije; (b) element sa samo posmičnom deformacijom; (c) element sa samo deformacijom savijanja; (d) element s potpunom deformacijom[1]

$$\beta = \frac{\partial w_s}{\partial x}$$

gdje je:

$\beta$  posmična deformacija ili posmični kut

Element vlakna koji se nalazi na udaljenosti  $z$  od središnje crte podvrgava se aksijalnom pomaku samo zbog rotacije poprečnog presjeka (posmična deformacija ne uzrokuje nikakav aksijalni pomak), pa se stoga komponente pomaka mogu izraziti kao:

$$u = -z \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \beta \right) \equiv -z\phi(x, t)$$

$$v = 0 \quad (2.8)$$

$$w = w(x, t)$$

gdje su deformacije koje odgovaraju polju pomaka danom jednačbom (2.8):

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3.9)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\phi + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Komponente naprezanja koje odgovaraju deformacijama iz jednačbe. (2.9) definirane su izrazima:

$$\sigma_{xx} = -Ez \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\sigma_{zx} = kG \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \quad (2.10)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0$$

Energija deformiranja grede može se odrediti kao:

$$\pi = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz} + \sigma_{zx} \varepsilon_{zx}) dV$$

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^l \iint_A \left[ Ez^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + kG \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right)^2 \right] dA dx$$

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ EI \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + kG \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right)^2 \right] dx \quad (2.11)$$

gdje je:

$\pi$  energija deformiranja grede

- $E$  modul elastičnosti
- $I$  moment tromosti presjeka grede
- $A$  površina poprečnog presjeka grede
- $V$  volumen grede

Kinetička energija grede, uključujući rotacijsku inerciju, dana je s:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \rho A \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \rho I \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (2.12)$$

gdje je:

- $T$  kinetička energija grede

Rad vanjskog raspodijeljenog opterećenja  $f(x, t)$  dan je izrazom:

$$W = \int_0^l f w dx \quad (2.13)$$

- $W$  rad vanjskog raspodijeljenog opterećenja

Primjena proširenog Hamiltonovog principa [1] daje:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\pi - T - W) dt = 0$$

ili

$$\left\{ \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[ EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + kAG \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) - kAG \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \delta \phi \right] dx \right\} \\ \left\{ - \int_0^l \left[ \rho A \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \rho I \frac{\partial \phi}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \right] dx - \int_0^l f \delta w dx \right\} dt = 0 \quad (2.14)$$

gdje je:

- $\delta$  koeficijent prigušenja
- $t$  vrijeme

Integrali u jednadžbi (2.14) mogu se izračunati korištenjem integracije po dijelovima (s obzirom na  $x$  ili  $t$ ) kako slijedi.

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta w \Big|_0^l - \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \delta \phi dx \right] dt \quad (2.15)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l kAG \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ kAG \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \delta w \Big|_0^l - \int_0^l kAG \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \delta w dx \right] dt \quad (2.16)$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \rho A \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) dx dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dx dt \quad (2.17)$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \rho I \frac{\partial \phi}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dx dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \delta \phi dx dt \quad (2.18)$$

gdje je:

$\rho$  gustoća materijala

Zamjena jednadžbi (2.15)–(2.18) u jednadžbu (2.11) dovodi do:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ kAG \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \delta w \Big|_0^l + EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \phi \Big|_0^l \right\} \\ & + \int_0^l \left[ \frac{-\partial}{\partial x} \left\langle kAG \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \right\rangle + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - f \right] \delta w dx \\ & \left\{ + \int_0^l \left[ \frac{-\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - kAG \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) + \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right] \delta \phi dx \right\} dt = 0 \quad (2.19) \end{aligned}$$

Jednadžba (2.19) daje diferencijalne jednadžbe gibanja za  $w$  i  $\phi$  kao:

$$\frac{-\partial}{\partial x} \left[ kAG \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \right] + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (2.20)$$

$$\frac{-\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - kAG \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) + \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.21)$$

i rubne uvjete:

$$kAG \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \delta w \Big|_0^l = 0 \quad (2.22)$$



$$EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \phi|_0 = 0 \quad (2.23)$$

## 2.1 Jednadžbe za gredu konstantnog poprečnog presjeka

Jednadžbe (2.20) i (2.21) mogu se kombinirati u jednu jednadžbu gibanja grede konstantnog poprečnog presjeka. Za takvu gredu, jednadžbe (2.20) i (2.21) svode se na:

$$-kGA \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + kAG \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \quad (2.24)$$

ili

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\rho}{kG} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{f}{kAG} \quad (2.25)$$

iz čega slijedi jednadžba:

$$-EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} - kAG \frac{\partial w}{\partial x} + kAG \phi + \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.26)$$

koja nakon parcijalne derivacije po osi  $x$ -u postaje:

$$-EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - kAG \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + kAG \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.27)$$

Zamjena jednadžbe (2.25) u jednadžbu (2.27) daje jednadžbu u obliku:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I \left( 1 + \frac{E}{kG} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{EI}{kAG} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\rho I}{kAG} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - f = 0 \quad (2.28)$$

Za slobodne vibracije, jednadžba (2.28) se svodi na:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I \left( 1 + \frac{E}{kG} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \quad (2.29)$$

Izrazi u jednadžbi (2.29) mogu se identificirati na sljedeći način. Prva dva člana jednaka su članovima iz Euler-Bernoullijeve teorije [1]. Treći član,  $-\rho I (\partial^4 w / \partial x^2 \partial t^2)$ , označava učinak rotacijske inercije, tako da su prva tri člana jednaka članovima iz Rayleighove teorije [1].

Konačno, posljednja dva člana, koja uključuju članove sa umnoškom varijabli  $kG$  u nazivniku, predstavljaju utjecaj posmične deformacije.

Jednadžbe (2.22) i (2.23) moraju zadovoljiti rubne uvjete u slučaju uklještenog oslonca:

$$\phi=0, w=0 \quad (2.30)$$

jednostavnog oslonca:

$$EI \frac{\partial \phi}{\partial x}=0, w=0 \quad (2.31)$$

neoslonjenog ili slobodnog kraja grede:

$$EI \frac{\partial \phi}{\partial x}=0, kGA \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) = 0 \quad (2.32)$$

## 2.2. Vlastite frekvencije vibracija

Vlastite frekvencije vibracija Timoshenkovih greda konstantnog poprečnog presjeka mogu se pronaći pretpostavkom harmonijske vremenske varijacije rješenja i rješavanjem jednadžbe (2.29) uz zadovoljavanje specifičnih rubnih uvjeta grede. U nekim je slučajevima prikladnije riješiti simultane diferencijalne jednadžbe za  $\phi$  i  $w$  jedn. (2.20) i (2.21), uz zadovoljavanje posebnih rubnih uvjeta za grede. Oba ova pristupa opisana su u nastavku.

### 2.2.1. Jednostavno oslonjena greda

Dijeljenjem jednadžbe (2.29) s  $\rho A$  te definiranjem veličina  $\alpha$  i  $r$

$$\alpha^2 = \frac{EI}{\rho A} \quad (2.33)$$

$$r^2 = \frac{I}{A} \quad (2.34)$$

jednadžba (2.29) može se napisati kao:

$$\alpha^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - r^2 \left( 1 + \frac{E}{kG} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho r^2}{kG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \quad (2.35)$$

Rubni uvjeti mogu se izraziti kao:

$$w(x, t) = 0, x = 0, l \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) = 0, x = 0, l \quad (2.37)$$

Jednadžba (2.37) može se izraziti pomoću jednadžbe (2.25) uz  $f = 0$ , kao:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\rho}{kG} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad x = 0, l \quad (2.38)$$

gdje je:

$l$  duljina grede

Kada se pretpostave harmonijske vremenske varijacije za  $\phi(x, t)$  i  $w(x, t)$  s frekvencijom  $\omega_n$ , rubni uvjet jednadžbe (2.38) se reducira na:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad x = 0, l \quad (2.39)$$

s obzirom na jednadžbu (2.36). Sada se rubni uvjeti glase:

$$w(0, t) = 0, w(l, t) = 0 \quad (2.40)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2}(0, t) = 0, \frac{d^2 w}{dx^2}(l, t) = 0 \quad (2.41)$$

Rješenje jednadžbe (2.35), koje zadovoljava rubne uvjete iz jednadžbi (2.40) i (2.41), definirano je kao:

$$w(x, t) = C \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos(\omega_n t) \quad (2.42)$$

gdje je:

$C$  konstanta

$\omega_n$  n-ta vlastita kružna frekvencija .

Uvrštavanje jednadžbe (2.42) u jednadžbu (2.35) daje jednadžbu za određivanje vlastitih frekvencija:

$$\omega_n^4 \frac{\rho r^2}{kG} - \omega_n^2 \left( 1 + \frac{n^2 \pi^2 r^2}{l^2} + \frac{n^2 \pi^2 r^2}{l^2} \frac{E}{kG} \right) + \frac{\alpha^2 n^2 \pi^4}{l^4} = 0 \quad (2.43)$$

Jednadžba (2.43) je kvadratna jednadžba za  $\omega_n^2$  i daje dvije vrijednosti  $\omega_n^2$  za bilo koju vrijednost  $n$ . Manja vrijednost  $\omega_n^2$  odgovara vlastitom obliku zbog deformacije savijanjem, a veća vrijednost odgovara vlastitom obliku posmične deformacije.

### 2.2.2. Greda uklještena na oba kraja

Rubni uvjeti mogu se izraziti kao:

$$w(0,t)=0, \phi(0,t)=0 \quad (2.44)$$

$$w(l,t)=0, \phi(l,t)=0 \quad (2.45)$$

Budući da izraz  $\phi(w)$  nije poznat, jednadžbe (2.25) i (2.26) se rješavaju, uz  $f = 0$ , istovremeno. Za to se pretpostavlja da rješenje ima oblik:

$$w(x,t)=W(x)\cos(w_n t) \quad (2.46)$$

$$\phi(x,t)=\Phi(x)\cos(w_n t) \quad (2.47)$$

Uvrštavanje jednadžbi (2.46) i (2.47) u jednadžbe (2.25) i (2.26) daje (uz  $f = 0$ ):

$$-kAG \frac{d^2 W}{dx^2} + kAG \frac{d\Phi}{dx} - \rho A \omega_n^2 W = 0 \quad (2.48)$$

$$-EI \frac{d^2 \Phi}{dx^2} - kAG \frac{dW}{dx} + kAG \Phi - \rho I \omega_n^2 \Phi = 0 \quad (2.49)$$

Pretpostavlja se da su rješenja jednadžbi (2.48) i (2.49):

$$W(x) = C_1 \exp\left(\frac{ax}{l}\right) \quad (2.50)$$

$$\Phi(x) = C_2 \exp\left(\frac{ax}{l}\right) \quad (2.51)$$

gdje su:

$a, C_1$  i  $C_2$  konstante.

Uvrštavanje jednažbi (2.50) i (2.51) u jednažbe (2.48) i (2.49) dovodi do:

$$\left(-kAG \frac{a^2}{l^2} - \rho A \omega_n^2\right) C_1 + \left(kAG \frac{a}{l}\right) C_2 = 0 \quad (2.52)$$

$$\left(-kAG \frac{a}{l}\right) C_1 + \left(-EI \frac{a^2}{l^2} - kAG \frac{a}{l} + kAG - \rho I \omega_n^2\right) C_2 = 0 \quad (2.53)$$

Za netrivialno rješenje konstanti  $C_1$  i  $C_2$ , determinanta njihovih koeficijenata u jednažbama (2.52) i (2.53) postavlja se na nulu. Ovo daje jednažbu:

$$a^4 + \left[\omega_n^2 l^2 \left(\frac{\rho}{E} + \frac{\rho}{kG}\right)\right] a^2 + \left[\omega_n^2 l^4 \left(\frac{\omega_n^2 \rho^2}{kGE} - \frac{\rho A}{EI}\right)\right] = 0 \quad (2.54)$$

Riješenja jednažbe (3.54) definirana su izrazom:

$$a = \mp \left\{ \frac{-a_1}{2} \mp \left[ \left( \frac{a_1}{2} - a_2 \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (2.55)$$

gdje je:

$$a_1 = \omega_n^2 l^2 \rho \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{kG} \right) \quad (2.56)$$

$$a_2 = \omega_n^2 l^2 \rho \left( \frac{\omega_n^2 \rho}{kGE} - \frac{A}{EI} \right) \quad (2.57)$$

Četiri vrijednosti zadane jednažbom (2.55) mogu se koristiti za izražavanje  $W(x)$  i  $\Phi(x)$  u obliku trigonometrijskih i hiperboličkih funkcija.

Kada se rubni uvjeti koriste s funkcijama  $W(x)$  i  $\Phi(x)$ , može se pronaći karakteristična jednažba za pronalaženje vlastitih frekvencija vibracija,  $\omega_n$ .

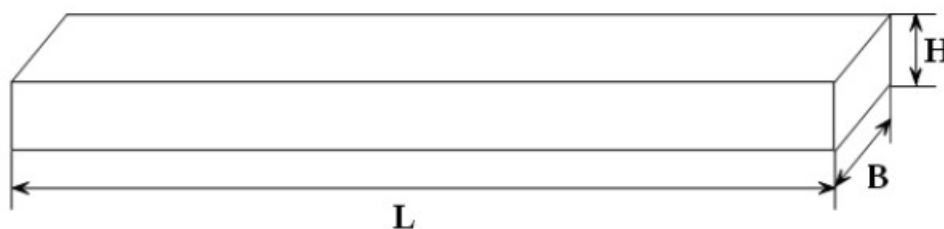
### 3. PRORAČUN VLASTITE FREKVENCIJE ZA GREDU KONSTANTNOG KUTIJASTOG TANKOSTIJENOG POPREČNOG PRESJEKA

Kako bi se provjerila točnost predložene formule za vlastitu frekvenciju savijanja vibracijske grede jednoličnog presjeka, korištene su dvije metode, Euler-Bernulli i Timoshenkova metoda.

Cilj je odrediti vlastite frekvencije vertikalnih vibracija modela grede konstatnog kutijastog tankostijenog poprečnog presjeka sa slobodnim rubnim uvjetima. Rezultati izračuna različitih metoda navedeni su u tablici 1. i tablici 2. te ih uspoređujemo s dobivenim rezultatima u literaturi[1]. Ovim se primjerom nastoji procijeniti moguća relativna odstupanja vlastitih frekvencija vibracija po Timoshenkovoj i Euler-Bernoulli teoriji

#### 3.1. Primjer

U sklopu primjera odrediti će se prve tri vlastite frekvencije vibracija pravokutne čelične grede duljine 1 m, širine 0,05 m i visine 0,15 m s jednostavno oslonjenim krajevima koristeći Euler–Bernoullijevu teoriju i Timoshenkovu teoriju. Pretpostavimo da je  $E = 207 \times 10^9$  Pa,  $G = 79,3 \times 10^9$  Pa,  $\rho = 76,5 \times 10^3$  N/m<sup>3</sup> i  $k = 5/6$ .



Slika 3. Greda konstantnog kutijastog tankostijenog poprečnog presjeka [2]

### 3.1.1. Rezultati

Po Euler-Bernoulli metodi[1] za određivanje prve tri vlastite frekvencije koriste se izrazi:

$$-\omega_n^2 + \frac{\alpha^2 n^4 \pi^4}{l^4} = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{EI}{\rho A} \quad I = \frac{BH^3}{12}$$

gdje je:

$n$  red vlastite frekvencije

U Pythonu {1} su umetnute sve potrebne varijable te su dobivena prve tri vlastite frekvencije (Tablica 1).

Tablica 1. Rezultati Euler-Bernoulli uspoređeni s rezultatima[1]

		Rezultati	Rezultati[1]
1. vl.fr.	Euler-Bernoulli:	111.88576 Hz	111.88829 Hz
2. vl.fr.	Euler-Bernoulli:	447.54322 Hz	447.55321 Hz
3. vl.fr.	Euler-Bernoulli:	1006.9722 Hz	1006.9947 Hz

Zatim je korištena Timoshenkova metoda koja se razlikuje od Euler-Bernoulli jer se koristi koeficijent smicanja  $k$  :

$$\omega_n^4 \frac{\rho r^2}{kG} - \omega_n^2 \left( 1 + \frac{n^2 \pi^2 r^2}{l^2} + \frac{n^2 \pi^2 r^2}{l^2} \frac{E}{kG} \right) + \frac{\alpha^2 \pi^4 n^4}{l^4} = 0$$

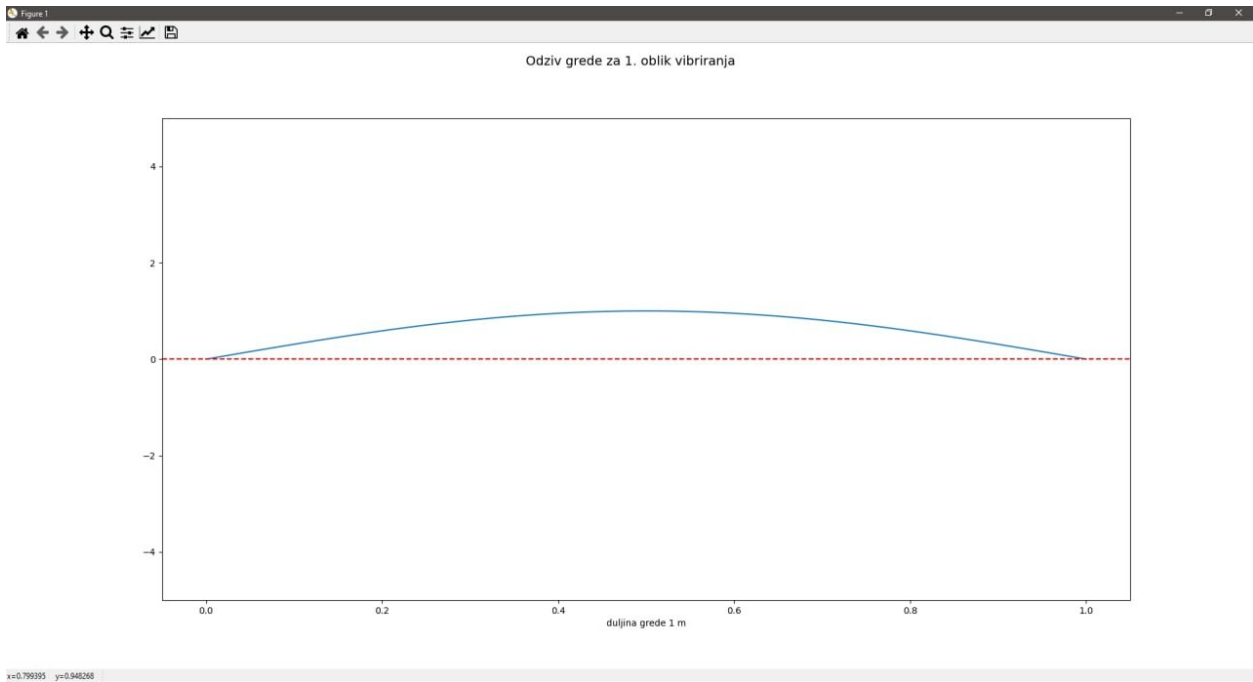
$$r^2 = \frac{I}{A} \quad \alpha^2 = \frac{EI}{\rho A}$$

*Tablica 2. Rezultati Timoshenkove metode*

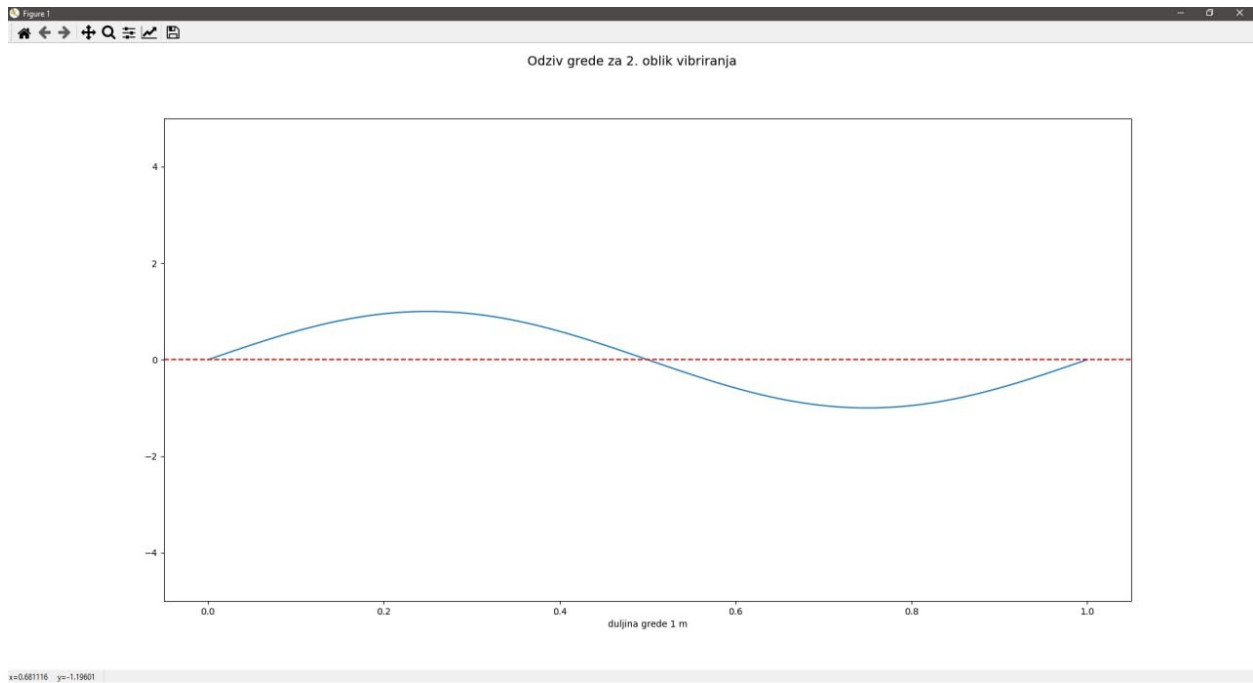
		Rezultati	Rezultati[1]
1. vl.fr.	smicanje	3542.70420 Hz	3542.64611 Hz
	savijanje	107.88843 Hz	107.88968 Hz
2. vl.fr.			
	smicanje:	3883.90614 Hz	3883.85410 Hz
	savijanje	393.64158 Hz	393.64891 Hz
3. vl.fr			
	smicanje	4368.25936 Hz	4368.21384 Hz
	savijanje	787.48783 Hz	787.49966 Hz

Ovi su rezultati gotovo identični onima iz literature [1], razlike su dovoljno malene da bi se moglo pretpostaviti da do njih dolazi zbog različitih zaokruživanja. Timoshenkova teorija je preciznija od Euler-Bernoulli teorije za analizu vibracija greda i brodskih konstrukcija jer uzima u obzir složene deformacije poprečnih presjeka. No da bismo bili sigurni usporedit ćemo vlastite oblike vibriranja (slika 4, slika 5, slika 6) koje smo dobili Pythonom sa oblikom vibriranja iz literature [1] (slika 7). Dobiveni rezultati uspoređeni su s rezultatima u radu [1] te se iz dobrog podudaranja može zaključiti da su jednadžbe za određivanje vlastite frekvencije prema slikama 4, 5 i 6 dobro postavljene.

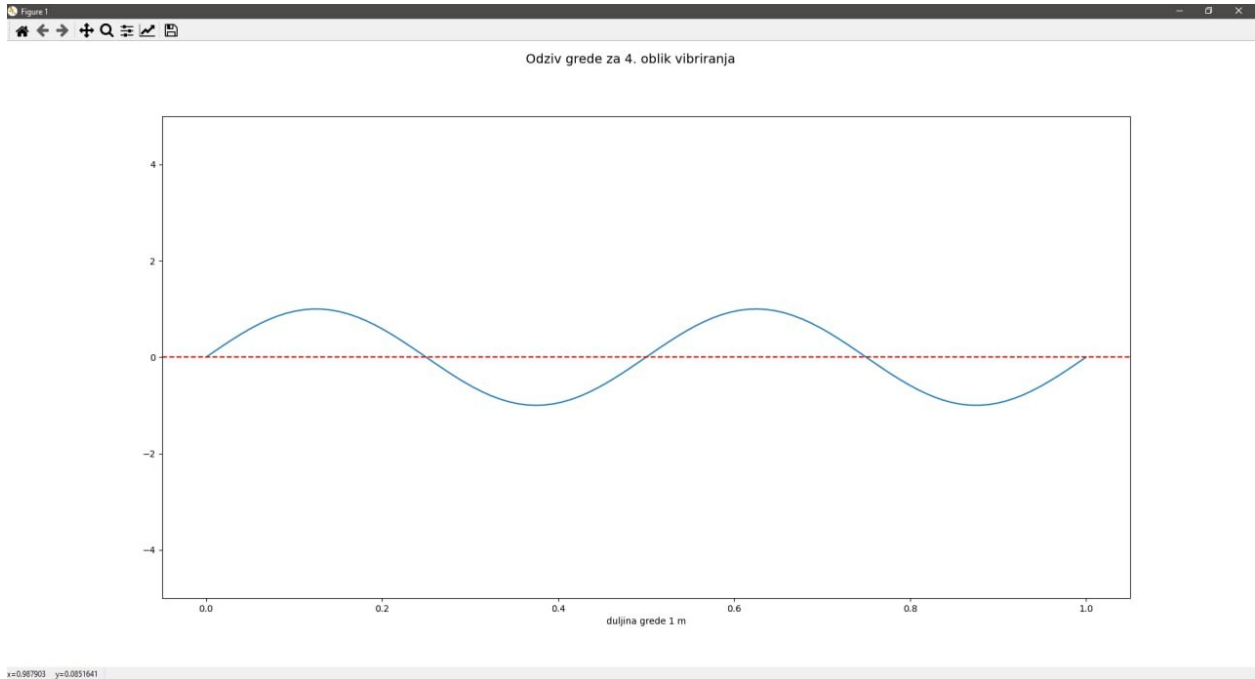




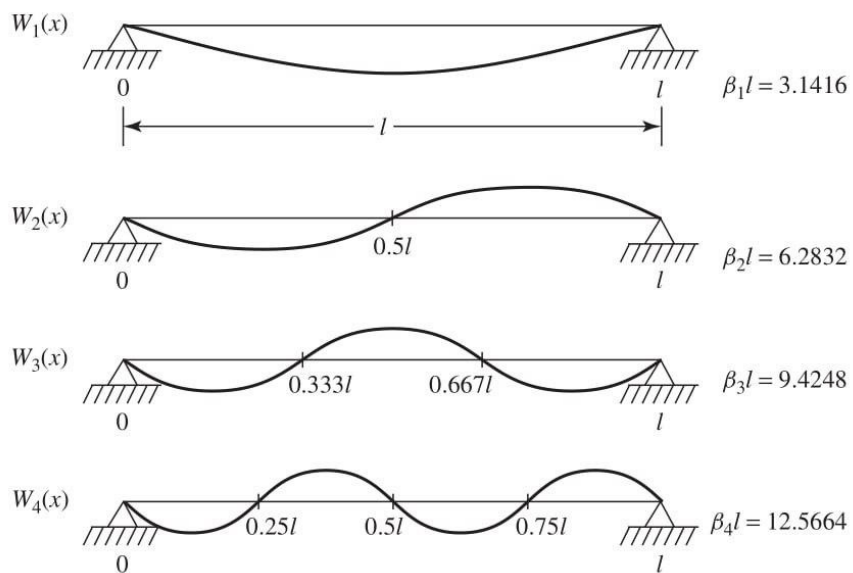
*Slika 4 Prikaz prvog vlastitog oblika vibriranja*



*Slika 5 Prikaz drugog vlastitog oblika vibriranja*



Slika 6 Prikaz trećeg vlastitog oblika vibriranja



Slika 7 Prikaz prvih četiri oblika vibriranja kod jednostavno oslonjene grede[1]

#### 4. FORMULA ZA VLASTITE FREKVENCIJE SAVIJANJA GREDE KONSTANTNOG TANKOSTIJENOG POPREČNOG PRESJEKA

Jednadžba vibracija savijanja grede konstantnog tankostijenog poprečnog presjeka s obzirom na učinak posmične deformacije i momenta tromosti je [1]:

$$EI \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + \rho A \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - \rho I \left( 1 + \frac{E}{kG} \right) \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + \frac{\rho^2 I \partial^4 w}{kG \partial t^4} = 0 \quad (4.1)$$

Po Timoshenkovoj teoriji grede pretpostavlja se da kod deformacije pri savijanju grede, poprečni presjek izvorno na srednju liniju ostaje ravnina; dakle, može se pretpostaviti jednolika raspodjela posmičnih naprezanja i posmičnih deformacija na presjeku.

Međutim, smična naprezanja i smična deformacija na presjeku nisu ravnomjerno distribuirani, pa je u radu napravljen ispravak teorije Timoshenkove grede, tj. izvedena je jednadžba koeficijenta smicanja te je dano numeričko rješenje za više presjeka grede. Među njima je formula za izračun ravnog koeficijenta smicanja kutijaste grede tankih stijenki:

$$k = \frac{10(1+\nu)(1+3m)^2}{(12+72m+150m^2+90m^3)+\nu(11+66m+135m^2+90m^3)+10n^2[(3+\nu)m+3m^2]} \quad (4.2)$$

$$m = \frac{Bt_1}{Ht}, \quad n = \frac{B}{H}$$

gdje je:

- $m$  omjer širine i visine ovisan o debljini stjenke
- $n$  omjer širine i visine
- $B$  visina grede
- $H$  širina grede
- $t_1$  debljina gornje i donje stjenke,
- $t$  debljina mreže
- $\nu$  Poissonov omjer

Za jednostavno oslonjene rubne uvjete na oba kraja, rješenje jednadžbe (4.1) je:

$$y = A_j \sin\left(\frac{j\pi x}{l}\right) \sin(\omega_j t + \varphi_j)$$

Ako se zadnji izraz uvrsti u jednažbu (4.1), jednažba ima novi oblik:

$$EI\left(\frac{j\pi}{l}\right)^4 - \rho A \omega_j^2 - \rho I \left(1 + \frac{E}{kG}\right) \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 \omega_j^2 + \frac{\rho^2 I}{kG} \omega_j^4 = 0 \quad (4.3)$$

Posljednji član je izraza opisuje interakciju posmične deformacije i momenta tromosti, koja ima zanemarivo malu veličinu pa izraz ima novi oblik:

$$EI\left(\frac{j\pi}{l}\right)^4 - \rho A \omega_j^2 - \rho I \left(1 + \frac{E}{kG}\right) \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 \omega_j^2 = 0 \quad (4.4)$$

Za jednostavno oslonjeni rubni uvjet na oba kraja grede, jednažba (4.4) ima svoje analitičko rješenje, iz kojeg slijedi formula za vlastite frekvencije vibracija savijanja jednostavno oslonjene grede [1]:

$$\omega = \frac{j^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{j^2 \pi^2 I}{L^2 A} \left(1 + \frac{E}{kG}\right)}} \quad (4.5)$$

gdje je:

$L$  duljina grede

$j$  redni broj vlastite frekvencije.

Za rubne uvjete, formula za vlastite frekvencije vibracije po Euler-Bernoulli teoriji [1] glasi:

$$\omega = \frac{j^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (4.6)$$

Za gredu neoslonjenu na oba kraja, formula za vlastite frekvencije savijanja po Euler-Bernoulli teoriji [1] glasi:

$$\omega = \frac{(j+0.5)^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (4.7)$$

Prema jednažbama (4.5)–(4.7), približna formula za vlastite frekvencije vibracija neoslonjene Timoshenkove grede uzimajući u obzir utjecaj smičnih deformacija i momenta tromosti glasi:

$$\omega = \frac{(j+0.5)^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{(j+0.5)^2 \pi^2 I}{L^2 A} \left(1 + \frac{E}{kG}\right)}} \quad (4.8)$$

#### 4.1. Analiza utjecaja debljine stijenke

Za analizu utjecaja debljine stijenke na vlastitu frekvenciju grede uzimamo slijedeće podatke grede:

$$L = 180 \text{ m}$$

$$B = 24 \text{ m}$$

$$H = 16 \text{ m}$$

$$\nu = 0.3$$

$$t_l = 1 \text{ mm}$$

$$t = 1 \text{ mm}$$

Cilj je vidjeti kako različite debljine stijenke  $t$  utječu na vlastitu frekvenciju grede.

U prijašnjem poglavlju je omjer širine i visine grede prikazan kao:  $m = Bt_l/(Ht)$ .

Uvrštavamo  $t$  i  $t_l$  u  $m$  te uvrštavanjem u jednadžbu 4.2 izlaze nam slijedeći rezultati koji su izvučeni iz priloga {3}.

Zatim se uzima za usporedbu povećanje debljine stijenke  $t = 10 \text{ mm}$ ,  $t_l = 1 \text{ mm}$  pa se ponavlja izračun kao i prije te se zapisuju rezultati u Tablicu 3.

*Tablica 3 Rezultati povećanja debljine stijenke*

t = 1 mm, t <sub>l</sub> = 1 mm	m = 1.85135
	k = 0.26064
t = 10 mm, t <sub>l</sub> = 1 mm	m = 0.18513
	k = 0.49117

Iz priloga se zaključuje da povećanjem debljine stijenke  $t$  smanjuje se omjer širine i visine  $m$  iz čega se zaključuje da se povećava koeficijent smicanja  $k$  prema jednadžbi 4.2.

Povećanjem koeficijenta smicanja povećava se i vlastita frekvencija.

## 5. FORMULA ZA IZRAČUN VLASTITIH FREKVENCIJA OKOMITIH VIBRACIJA BRODA

Općenito, konstrukcija broda smatra se gredom promjenjivog poprečnog presjeka koja slobodno pluta u vodi kod predviđanja njezinih najnižih vlastitih frekvencija vertikalnih vibracija (uobičajeno prve tri). Brodske vlastite frekvencije ovise o krutosti i masi strukture broda (uključujući dodatnu masu okolne vode).

Slijedi da na vlastite frekvencije utječu glavne dimenzije i težina broda, ali i geometrijske karakteristike paralelnih srednjih presjeka (moment tromosti i posmično područje). Gredi se zadaje promjenjiv presjek, jer su masa i moment tromosti nejednako raspoređeni po duljini broda.

Dakle, vlastita frekvencija vibracija ne može se izravno izračunati formulom (4.8). Prema karakteristikama konstrukcije broda i formuli (4.8), formula za izračun vlastite frekvencije ukupnih vibracija broda s obzirom na učinak posmične deformacije i momenta tromosti je:

$$f_n = A_n \sqrt{\frac{I_v}{\Delta_v L^3 (1 + \alpha)}} \quad (4.9)$$

gdje je:

$A_n$  koeficijent vlastitih frekvencija vertikalnih vibracija broda,

$I_v$  moment tromosti srednjeg presjeka za horizontalnu os,

$\alpha$  koeficijent utjecaja smicanja i rotacijske inercije,

$$\alpha = \frac{I}{A} \left( 1 + \frac{E}{kG} \right) \left( \frac{(j+0.5)\pi}{L} \right)^2$$

$$\Delta_v = (1 + \tau) \Delta$$

$$\tau = \left( 0.2 + \frac{B}{3D} \right)$$

gdje je:

$\Delta_V$  masa strukture broda uključujući dodanu masu,

$\tau$  koeficijent dodane mase, izračuna se koeficijent dodane mase u vertikalnoj vibraciji

$\Delta$  deplasman broda

Uzimajući u obzir da je kod velikih tankera za naftu i brodova za rasuti teret nadgrađe kratko i visoko, utjecaj nadgrađa na ukupne vertikalne vibracije je zanemariv. Na temelju podataka iz mjerenja preko 90 brodova koji su se godinama prikupljali[2], vrijednost koeficijenta  $A_n$  može se dobiti regresijom najmanjeg kvadrata. Vrijednosti koeficijenta  $A_n$  prikazane su u tablici 3.

Tablica 4. Koeficijent  $A_n$  vlastite frekvencije ukupnih okomitih vibracija broda[2]

Vrsta broda	Koeficijent 1.vl.fr.	Koeficijent 2.vl.fr.	Koeficijent 3.vl.fr.
Brod za rasuti teret	$0.667 \times 10^5$	$0.155 \times 10^6$	$0.255 \times 10^6$
Tanker	$0.690 \times 10^5$	$0.165 \times 10^6$	$0.30 \times 10^6$
Kontejnerski brod	$0.655 \times 10^5$	$0.150 \times 10^6$	$0.250 \times 10^6$

Na samom početku projektiranja broda često nedostaje moment tromosti srednjeg dijela broda. Stoga je u radu[2] predložena približna formula za izračun momenta tromosti:

$$I = cBD^2L \quad (4.10)$$

gdje je:

$D$  dubina.

Statističkom analizom preko devedeset različitih tipova brodova, koeficijent  $c$  se može uzeti kao  $c = 1.07 \times 10^{-4}$ ;

Za približno predviđanje učinka smicanja i momenta tromosti  $\sqrt{1/(1+\alpha)}$  u formuli (4.9) uzet će se približna vrijednost.

Kroz statističku analizu više od devedeset različitih vrsta brodova, učinak se može uzeti kao 0.909, 0.781 i 0.671 za prve tri vlastite frekvencije vertikalnih vibracija[2]. Stoga se formula (4.9) može transformirati u sljedeći oblik:

$$f_n = A_n \sqrt{\frac{I}{\Delta_v L^3 (1+\alpha)}} \approx A_n \times \sqrt{\frac{c B D^2 L}{\Delta_v L^3 (1+\alpha)}} = C_n \times \sqrt{\frac{B D^2}{\Delta_v L^2}}$$

Naime, pojednostavljena formula pogodna za početnu fazu projektiranja broda je sljedeća:

$$f_n = C_n \times \sqrt{\frac{B D^2}{\Delta_v L^2}} \quad (4.11)$$

gdje je:

$C_n$  koeficijent vlastite frekvencije ukupnih vertikalnih vibracija broda

Vrijednosti koeficijenta prikazane u tablici 4.

*Tablica 5. Koeficijent  $C_n$  vlastite frekvencije ukupnih vertikalnih vibracija broda[2]*

Vrsta broda	Koeficijent 1.vl.fr.	Koeficijent 2.vl.fr.	Koeficijent 3.vl.fr.
Brod za rasuti teret	620.6	1212.2	1735.6
Tanker	639.5	1373.8	2082.7



## 5.1. Primjer

Kako bi se potvrdila točnost predložene formule za izračun vlastitih frekvencija vertikalnih vibracija broda u radu [2], za primjer odabrano pet brodova uključujući dva broda za rasuti teret i tri tankera, za koje su objavljena mjerenja u radu [2], a formula (4.11) i formula DNV-a korištene su za izračun prve tri vlastite frekvencije broda. Dobiveni rezultati uspoređeni su sa vrijednostima iz navedene literature da se dokaže točnost navedenih formula.

Formula koju preporučuje DNV[5] je:

$$N_{2V} = 1.61 \times 10^6 \sqrt{\frac{I_V}{\Delta_V L^3}} \quad (4.12)$$

gdje je:

$N_{2V}$  prva vlastita frekvencija,

$$\Delta_V = \left(1.2 + \frac{B}{3D}\right) \Delta$$

u kojoj je:

$\Delta$  istisnina broda

Za više vlastite frekvencije koristi se izraz:  $N_{nV} = N_{2V} (n-1)^{\mu_V}$

gdje je:

$N_{nV}$  n-ta vlastita frekvencija

$\mu_V$  koeficijent ovisan o tipu broda

Za različite vrste brodova, vrijednosti koeficijenta  $\mu_V$  su različite, npr.  $\mu_V = 1.02$  za tankere,  $\mu_V = 1.0$  za brodove za rasuti teret [2].

Povezani parametri pet brodova prikazani su u tablici 6.

Tablica 6. Povezani parametri pet brodova[2]

Tip broda	Duljina/m	Širina/m	Dubina/m	Moment inercije/m <sup>4</sup>	Istisnina/t
Brod za rasuti teret	183.00	27.40	14.80	115.46	19900.00
Brod za rasuti teret	144.80	20.40	12.20	50.23	19720.00
Tanker	255.80	37.10	18.40	403.97	102810.00
Tanker	218.00	32.90	15.60	212.03	66289.00
Tanker	320.00	58.00	31.00	1.454.62	342506.70

### 5.1.1. Rezultati

Rezultati proračuna i izmjerene vrijednosti prikazani su u tablici 7.

*Tablica 7. Vlastite frekvencije vertikalnih vibracije broda*

Broj	Red	Vlastita frekvencija			
		DNV	Formula (4.11)	DNV[2]	Formula (4.11) [2]
1	1	1.162 Hz	1.463 Hz	0.905 Hz	1.076 Hz
	2	2.324 Hz	2.857 Hz	1.810 Hz	2.102 Hz
	3	3.486 Hz	4.09 Hz	2.715 Hz	3.010 Hz
2	1	1.112 Hz	1.345 Hz	1.045 Hz	1.192 Hz
	2	2.225 Hz	2.628 Hz	2.091 Hz	2.328 Hz
	3	3.337 Hz	3.762 Hz	3.136 Hz	3.333 Hz
3	1	0.57 Hz	0.675 Hz	0.536 Hz	0.600 Hz
	2	1.156 Hz	1.45 Hz	1.087 Hz	1.290 Hz
	3	1.748 Hz	2.198 Hz	1.644 Hz	1.955 Hz
4	1	0.648 Hz	0.78 Hz	0.610 Hz	0.695 Hz
	2	1.315 Hz	1.676 Hz	1.237 Hz	1.494 Hz
	3	1.989 Hz	2.541 Hz	1.871 Hz	2.265 Hz
5	1	0.429 Hz	0.632 Hz	0.403 Hz	0.560 Hz
	2	0.87 Hz	1.358 Hz	0.817 Hz	1.203 Hz
	3	1.316 Hz	2.059 Hz	1.235 Hz	1.824 Hz

Prema usporedbi ovih rezultata s navedenim rezultatima[2], rezultati proračuna po DNV[5] i formuli (4.11) gotovo su identični.

Slijedi da predložena formula (4.11) i formula DNV-a imaju sličnu točnost izračuna vlastitih frekvencija vertikalnih vibracija.

## 6. ZAKLJUČAK

Na temelju teorije Timoshenkove grede, formula za vlastite frekvencije vibrirajuće grede konstantnog kutijastog tankostijenog presjeka neoslonjene na rubovima izvodi se uvođenjem koeficijenta smicanja kako bi se ispravila hipoteza jednolike raspodjele smicanja. Usporedbom formule po Timoshenko-voj i Euler-Bernullijev-oj teoriji grede dobivena je formula za približan izračun vlastitih frekvencija [2] koja je korištena u ovom radu. Navedeni pristup proizlazi iz sličnosti rezultata vlastitih frekvencija u obje metode.

Na temelju velikog broja izmjerenih vrijednosti različitih tipova brodova, metodom statističke analize definira se empirijska formula za predviđanje vlastite frekvencije ukupnih vertikalnih vibracija broda[2]. U ovom radu uspoređeni su rezultati empirijske formule i formule dobivene iz Timoshenk-ove i Euler-Bernoulli-jeve teorije grede.

Analiziran je i utjecaj debljine stijenke na vlastitu frekvenciju grede i zaključeno je da se povećanjem debljine stijenke povećava se koeficijent smicanja što uzrokuje povećanje vlastite frekvencije.

S obzirom na nedostatak momenta tromosti presjeka u ranoj fazi projektiranja broda, u ovom radu je korištena približna formula za izračun momenta tromosti[2]. Nadalje, korištena je i pojednostavljena formula za izračun vlastitih frekvencija vertikalnih vibracija broda. Uzimajući za primjer pet tipova brodova, rezultati vlastitih frekvencija izračunati predloženom metodom u bliži su izmjerenim vrijednostima.

Usporedbom rezultata jednadžbe 4.11 i DNV 4.12, dokazano je da metoda predložena u radu[2] daje slične rezultate te se time dokazuje točnost tih formula te novi alat za predviđanje vlastitih frekvencija globalnih vertikalnih vibracija broda.

## 7. LITERATURA

- [1] Singiresu S. Rao: "Vibration of Continuous Systems", John Wiley & Sons, 2007
- [2] Yumei Yin: "Predicting method of natural frequency for ship's overall vertical vibration", Dalian, China, Submitted 2014
- [3] Cowper G. R.: „The shear coefficient in Timoshenko's beam theory“, Journal of Applied Mechanics, 1966.
- [4] Zhang Y.M.: „Mechanical vibration“, Tsinghua University Press, Beijing, 2007
- [5] Det Norske Veritas: Prevention of Harmful Vibration in Ships, Printed in Norway by Det Norske Veritas, Oslo, Norway, 1983.

## 8. POPIS VARIJABLI

$a$	konstanta
$A$	površina poprečnog presjeka
$A_n$	koeficijent vlastite frekvencije vertikalnih vibracija broda
$B$	širina grede/broda
$c$	koeficijent koji ovisi o momentu tromosti
$C_1, C_2$	konstante
$C_n$	koeficijent vlastite frekvencije globalnih vertikalnih vibracija broda
$D$	dubina broda
$E$	modul elastičnosti
$f_n$	vlastita frekvencija vibracije
$G$	modul smicanja
$H$	visina grede/broda
$I$	moment tromosti presjeka grede
$I_V$	moment tromosti srednjeg presjeka za horizontalnu os
$j$	redni broj vibracije
$k$	koeficijent smicanja
$l, L$	duljina grede, broda
$N_{2V}$	prirodna frekvencija vibracija prvog reda
$N_{nV}$	prirodna frekvencija vibracija visokog reda
$t$	debljina mreže/vrijeme
$t_l$	debljina gornje i donje krilne ploče

$T$	kinetička energija grede
$u$	komponenta pomaka
$v$	komponenta pomaka
$V$	volumen
$w$	poprečni pomak
$w_s$	pomak smicanjem
$w_b$	pomak savijanjem
$W$	rad vanjskog opterećenja
$\alpha$	koeficijent utjecaja smicanja i rotacijske inercije
$\beta$	posmični kut
$\Delta$	deplasman broda
$\Delta_V$	masa strukture broda + dodana masa
$\delta$	koeficijent prigušenja
$\varepsilon_{xx}$	normalna deformacija u smjeru x-osi
$\varepsilon_{yy}$	normalna deformacija u smjeru y-osi
$\varepsilon_{zz}$	normalna deformacija u smjeru z-osi
$\varepsilon_{xy}$	smična deformacija u smjeru x i y osi
$\varepsilon_{yz}$	smična deformacija u smjeru y i z osi
$\varepsilon_{zx}$	smična deformacija u smjeru z i x osi
$\mu_V$	koeficijent ovisan o tipu broda
$\nu$	Poissonov omjer
$\pi$	energija deformacije grede
$\rho$	gustoća
$\sigma_{xx}$	normalno naprezanje u smjeru x osi



$\sigma_{yy}$	normalno naprezanje u smjeru y osi
$\sigma_{zz}$	normalno naprezanje u smjeru z osi
$\sigma_{xy}$	smično naprezanje u ravnini xy
$\sigma_{yz}$	smično naprezanje u ravnini yz
$\sigma_{zx}$	smično naprezanje u ravnini zx
$\tau$	koeficijent dodane mase
$\omega$	vlastita frekvencija vibracija
$\omega_n$	n-ta vlastita frekvencija vibracija

## 9. SAŽETAK

U fazi projektiranja broda, empirijske formule općenito se koriste za predviđanje globalnih vlastitih frekvencija vertikalnih vibracija broda kako bi se izbjegle štetne rezonancije uzrokovane glavnim pobudama. U današnje vrijeme, razvojem modernih velikih brodova, postojeće empirijske formule postaju nepraktične, pa se na njih primjenjuju neke korekcije za predviđanje vertikalnih vibracija. U ovom radu izvedene su i testirane klasične i nove formule za predviđanje vlastitih frekvencija ukupnih vertikalnih vibracija broda i doneseni su zaključci.

Na temelju teorije Timoshenkove grede, u radu formula za predviđanje vlastitih frekvencija ukupnih vertikalnih vibracija broda je izvedena uvođenjem koeficijenta smicanja u hipotezu o ravnomjernoj distribuciji smika za tankostjenu kutijastu gredu sa slobodnim rubnim uvjetom. Nova formula je dobivena statističkom analizom velikog broja mjerenja vlastitih frekvencija ukupnih vertikalnih vibracija broda.

Predložena metoda predviđanja u radu[2] korištena je u ovom radu za predviđanje vlastitih frekvencija pet brodova. Predviđene vlastite frekvencije su dosljedne s objavljenim mjerenjima. Usporedba s mjerenjima pokazuje da je formula korištena u ovom radu izvodljivija za uporabu, a također nudi novu metodu za predviđanje vlastitih frekvencija ukupnih vertikalnih vibracija broda.

**Ključne riječi:** vertikalne, frekvencije, vibracije, Timoshenko, Euler-Bernulli, formula

## Summary

At the ship design stage, empirical formulas are generally used to predict the global natural frequencies of vertical ship vibrations to avoid harmful resonances caused by main excitations. Nowadays, with the development of modern large ships, the existing empirical formulas become impractical, so some corrections are applied to them to predict vertical vibrations. In this work, classic and new formulas for predicting the natural frequencies of the ship's total vertical waves were tested, and conclusions were drawn. Based on the Timoshenko beam theory, the formula derived in [2] by introducing the shear coefficient into the hypothesis of uniform shear distribution for a thin-walled box beam with a free boundary condition. This new formula was obtained by statistical analysis of large amounts of measured natural frequency and total vertical ship vibration results. The prediction method proposed in paper [2] was used in this work to predict the natural frequency of five ships. The predicted natural frequencies are consistent with measurements published in work [2]. Comparison with measurements shows that the formula proposed in article [2] is feasible to use, and also offers a new method for predicting the natural frequency of total vertical ship vibrations.

**Key words:** vertical, frequencies, vibrations, Timoshenko, Euler-Bernulli, formula

## 10. PRILOZI

### 10.1. Kod za 3.1. Primjer {1}

```
# 397/737, example 11.10, podaci za
materijal
gustoca = 76.5 * 10**3
modul_g = 79.3 * 10**9
modul_e = 207 * 10**9
# poisson = modul_g/modul_e
k = 5/6

L = 1
hGRED = 0.15
wGRED = 0.05
povrsina = hGRED * wGRED
moment_inercije = (hGRED**3) *
wGRED / 12

alpha_kv = moment_inercije * modul_e /
(gustoca * povrsina)
r_kv = moment_inercije / povrsina

n = 1

# Timoshenko
# faktori kvadratne jednadzbe (11.301), str
396/737
a = gustoca * r_kv / (k * modul_g) # faktor
uz **4
b = (-1) * (1 + (n**2 * np.pi**2 * r_kv /
L**2) + (n**2 * np.pi**2 * r_kv / L**2) *
modul_e / (k * modul_g)) # faktor uz **2
c = alpha_kv * n**4 * np.pi**4 / L**4 #
faktor uz **0

# # racunanje diskriminante
# diskriminanta = b**2 - 4*a*c

# # kvadratna jednadzba
# y1 = (-b + np.sqrt(diskriminanta)) / (2*a)
# y2 = (-b - np.sqrt(diskriminanta)) / (2*a)

# x1 = np.sqrt(y1)
# x2 = np.sqrt(y2)

# # hz1 = round(x1 / (2*np.pi), 3)
# # hz2 = round(x2 / (2*np.pi), 3)

# hz1 = round(x1, 3)
# hz2 = round(x2, 3)

# if hz1 > hz2:
#     print(f"Vlastita frekvencija smicanja iznosi: {hz1}
Hz")
#     print(f"Vlastita frekvencija savijanja iznosi: {hz2}
Hz")
# else:
#     print(f"Vlastita frekvencija smicanja iznosi: {hz2}
Hz")
#     print(f"Vlastita frekvencija savijanja iznosi: {hz1}
Hz")
```

```

# Euler-Bernoulli
duljina = np.linspace(0, L, 100)

def bL(n):
    bL = (2*n - 1) * np.pi / 2
    return bL

rjesenje = []

for i in range(len(duljina)):
    odziv_W = (np.cos(bL(n)*duljina[i]) -
np.cosh(bL(n)*duljina[i])) - \
    ((np.cos(bL(n)) +
np.cosh(bL(n)))/(np.sin(bL(n)) +
np.sinh(bL(n)))) * \
    (np.sin(bL(n)*duljina[i]) -
np.sinh(bL(n)*duljina[i]))
    # print(odziv_W)
    rjesenje.append(odziv_W)

# faktori kvadratne jednadzbe
a = -1
b = 0
# racunanje diskriminante
diskriminanta = b**2 - 4*a*c

# kvadratna jednadzba
y1 = (-b + np.sqrt(diskriminanta)) / (2*a)
y2 = (-b - np.sqrt(diskriminanta)) / (2*a)

hz1 = round(y1, 3)
hz2 = round(y2, 3)

if hz1 < 0:
    vl_frekw = hz2
else:
    vl_frekw = hz1

```

### 10.1.1. Kod za oblike vibriranja

```
L = 1
duljina = np.linspace(0, L, 100)

def bL(n):
    bL = n * np.pi
    return bL

rjesenje = []
n = 4

for i in range(len(duljina)):
    odziv_W = np.sin(n * np.pi * duljina[i] / L)
    rjesenje.append(odziv_W)

# Create a 2D plot
plt.ylim(-5, 5)
plt.plot(duljina, rjesenje, linestyle='-', markersize=5)
plt.axhline(y=0, color='red', linestyle='--', label='y = 0')

# Set labels and title
plt.xlabel('duljina grede ' + str(L) + ' m')
# plt.title('vlastita frekvencija za ' + str(n) + '. oblik vibriranja iznosi ' +
str(round(vl_frek, 2)) + ' Hz')
plt.suptitle('Odziv grede za ' + str(n) + '. oblik vibriranja', fontsize=14,
color='black')

# Show the plot
plt.show()
```

## 10.2 Kod za 5.1. Primjeri {2}

```
L = [183.0, 144.8, 255.8, 218.0, 320.0]
B = [27.4, 20.4, 37.1, 32.9, 58.0]
D = [14.8, 12.2, 18.4, 15.6, 31.0]
Iv = [115.46, 50.23, 403.97, 212.03, 1454.62]
d = [19900, 19720, 102810, 66289, 342506]

#####
0 - bulk carrier 1
1 - bulk carrier 2
2 - tanker 1
3 - tanker 2
4 - tanker 3
#####

brod = 1
n = 1

# DNV
dv = (1.2 + B[brod]/(3*D[brod])) * d[brod] *
1000
N2v = 1.61 * 10**6 * np.sqrt(Iv[brod]/(dv *
L[brod]**3))

if brod <= 1:
    mi = 1
else:
    mi = 1.02

Nnv = N2v * n**mi
N2v = round(N2v, 3)
Nnv = round(Nnv, 3)

if n > 1:
    print(f'DNV: {Nnv} Hz')
else:
    print(f'DNV: {N2v} Hz')
```

```
# podaci za materijal
gustoca = 7850
modul_e = 207 * 10**9
poisson = 0.3
modul_g = modul_e * poisson

m = B[brod] / D[brod] # m == n

brojnik = 10 * (1 + poisson) * (1 + 3*m)**2
nazivnik1 = (12 + 72*m + 150*m**2 + 90*m**3)
nazivnik2 = poisson * (11 + 66*m + 135*m**2 +
90*m**3)
nazivnik3 = 10 * m**2 * ((3 + poisson)*m +
3*m**2)
k = brojnik / (nazivnik1 + nazivnik2 + nazivnik3)

povrsina = B[brod] * D[brod]
moment_inercije = Iv[brod]

alpha_kv = moment_inercije * modul_e / (gustoca
* povrsina)
r_kv = moment_inercije / povrsina
```

### 10.3 Kod za 4.1. Analiza utjecaja stjenke {3}

```
L = 183
B = 27.4 # B
H = 14.8 # D
poisson = 0.3

t = 1
t1 = 1

m = B * t1 / (H * t)
n = B / H

brojnik = 10 * (1 + poisson) * (1 + 3*m)**2
nazivnik1 = (12 + 72*m + 150*m**2 + 90*m**3)
nazivnik2 = poisson * (11 + 66*m + 135*m**2 + 90*m**3)
nazivnik3 = 10 * n**2 * ((3+poisson)*m + 3*m**2)
k = brojnik / (nazivnik1 + nazivnik2 + nazivnik3)

print('m je sada: ' + str(m))
print('k je sada: ' + str(k))
```



## 11. POPIS SLIKA

Slika 1. Greda u posmičnoj deformaciji[1].....	2
Slika 2. Deformacije savijanjem i smikom: (a) element bez deformacije; (b) element sa samo posmičnom deformacijom; (c) element sa samo deformacijom savijanja; (d) element s potpunom deformacijom[1].....	5
Slika 3. Uniformni model grede konstantnog kutijastog tankostjenog poprečnog presjeka [2]....	14
Slika 4 Prikaz prvog vlastitog oblika vibriranja.....	17
Slika 5 Prikaz drugog vlastitog oblika vibriranja.....	17
Slika 6 Prikaz trećeg vlastitog oblika vibriranja.....	18
Slika 7 Prikaz prvih četiri oblika vibriranja kod jednostavno oslonjene grede[1].....	18

## 12. POPIS TABLICA

Tablica 1. Rezultati Euler-Bernoulli uspoređeni s rezultatima[1].....	15
Tablica 2. Rezultati Timoshenkove metode.....	16
Tablica 3 Rezultati povećanja debljine stijenke.....	21
Tablica 4. Koeficijent $A_n$ vlastite frekvencije ukupnih okomitih vibracija broda[2].....	23
Tablica 5. Koeficijent $C_n$ vlastite frekvencije ukupnih vertikalnih vibracija broda[2].....	24
Tablica 6. Povezani parametri pet brodova[2].....	26
Tablica 7. Vlastite frekvencije vertikalnih vibracije broda.....	27