

Sinusna i kosinusna transformacija

Jelovica, Jakov

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:190:670994>

Rights / Prava: [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-13**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Engineering](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

SINUSNA I KOSINUSNA TRANSFORMACIJA

Rijeka, rujan 2024.

Jakov Jelovica, 0069092422

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

SINUSNA I KOSINUSNA TRANSFORMACIJA

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Rijeka, rujan 2024.

Jakov Jelovica, 0069092422

Rijeka, 14.03.2024.

Zavod: Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike
Predmet: Inženjerska matematika ET

ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Jakov Jelovica (0069092422)**
Studij: Sveučilišni prijediplomski studij elektrotehnike (1030)

Zadatak: **Sinusna i kosinusna transformacija / Sine and cosine transformation**

Opis zadatka:

U radu je potrebno precizno definirati Fourierovu integralnu transformaciju te pomoću nje izvesti sinusnu i kosinusnu transformaciju. Sve navedene transformacije potrebno je obraditi u kontinuiranom i diskretnom slučaju. Za sinusnu i kosinusnu transformaciju potrebno je izvesti i objasniti osnovna svojstva, a potom izračunati transformacije nekih češće korištenih funkcija. U završnom dijelu rada sinusnu i kosinusnu transformaciju potrebno je staviti u kontekst primjene u inženjerstvu.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanja diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Zadatak uručen pristupniku: 20.03.2024.

Mentor:
izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Predsjednik povjerenstva za
završni ispit:
prof. dr. sc. Dubravko Franković

IZJAVA

Sukladno članku 7. stavku 1. Pravilnika o završnom radu i završetku sveučilišnih prijediplomskih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 4. travnja 2024., izjavljujem da sam samostalno izradio završni rad prema zadatku preuzetom dana 20. ožujka 2024.

Rijeka, 5. rujna 2024.



Jakov Jelovica

Prije svega se želim zahvaliti svojim roditeljima na podršci i činjenici da su uvijek vjerovali u mene, bez toga ne bi bio u ovoj poziciji. Zatim se želim zahvaliti svom mentoru, izv. prof. dr. sc. Ivanu Dražiću što je učinio pisanje ovog rada jedinstvenim i dragocjenim iskustvom. Uvijek je bio na raspolaganju te je s osmijehom pružao pomoć. Na posljetku se želim zahvaliti svojim prijateljima i kolegama koji su me također bodrili u pisanju ovog rada i potjerom za svojim snovima. Hvala svima!

Sadržaj

1. Uvod	3
2. Fourierov red i integral	4
2.1. Fourierov red	7
2.1.1. Kompleksni oblik Fourierovog reda	10
2.1.2. Spektri	12
2.1.3. Kompaktni oblik Fourierovog reda	13
2.1.4. Konvergencija Fourierova reda	14
2.2. Fourierov integral	15
3. Fourierova transformacija	17
4. Sinusna i kosinusna transformacija	22
4.1. Izračunavanje sinusne i kosinusne transformacije	24
4.2. Egzistencija i linearnost sinusne i kosinusne transformacije	25
4.3. Svojstva sinusne i kosinusne transformacije	25
5. Diskretna sinusna i kosinusna transformacija	30
6. Primjena kosinusne transformacije na rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi	31
7. Primjena kosinusne transformacije na rješavanje parcijalnih diferencijalnih jed- nadžbi	33
8. Primjena sinusne transformacije na rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi	36
9. Primjena diskretne kosinuse transformacije u kompresiji slikovnih datoteka	37
10. Zaključak	39
Bibliografija	41
Sažetak i ključne riječi	42
Summary and key words	43

1. Uvod

Ovaj rad predstavlja uvid u jedan od najznačajnijih alata koji se koristi u različitim područjima inženjerstva, Fourierovu transformaciju. Konkretno ovaj rad će se fokusirati na sinusnu i kosinusnu Fourierovu transformaciju te njihovu primjenu u mnogobrojnim znanstvenim područjima. Fourierova transformacija je matematički alat koji pretvara signal koji je definiran u vremenskoj domeni u signal koji je definiran u frekvencijskoj domeni. Ova transformacija je ključna u mnogim područjima znanosti i tehnike, uključujući obradu signala, analizu vibracija, akustiku, optiku, teoriju brojeva, kriptografiju, kvantnu fiziku, i mnoge druge discipline. Također će se spomenuti i diskretni tip sinusne i kosinusne transformacije te kako se koristi u kompresiji slika.

Prvo poglavlje objašnjava najosnovnije pojmove koji su potrebni za razumijevanje Fourierove transformacije. Dotiče se termina kao što su Fourierov red te njegovi kompleksni i kompaktni oblici, spektri, konvergencija Fourierovog reda, Gibbsov fenomen i Fourierov integral. Ti pojmovi će biti objašnjeni i primijenjeni u brojnim primjerima radi lakšeg razumijevanja. Također će se spomenuti i biografija osoba koji su najviše vezani za razvoj Fourierove transformacije.

U nastavku dolazimo do glavne teme, sinusne i kosinusne transformacije. Tu ćemo definirati njihovu formulu te njihova svojstva kroz nekoliko primjera. Zatim će se provesti transformacija nekih određenih funkcija, kao što je step funkcije i eksponencijalna funkcija. Objasniti ćemo kako se transformira derivacije neke funkcije, kako se skaliranje u x domeni reflektira u ω domeni, ekvivalent derivacije transformirane funkcije u x domeni te kako se transformira integral funkcije. Svako pravilo će se detaljno objasniti, a u većini slučajeva i dokazati.

Peto poglavlje definira diskretnu sinusnu i kosinusnu transformaciju čiju primjenu objašnjavamo u sljedećim poglavljima.

Zadnjih nekoliko poglavlja sadržava primjene definiranih transformacija u područjima kompresije slike i rješavanju diferencijalnih jednažbi. Riješiti ćemo probleme parcijalnih i običnih diferencijalnih te ćemo dodatno opisati jednodimenzionalnu i dvodimenzionalnu diskretnu transformaciju preko kojih ćemo zatim objasniti proces kompresije JPEG slika.

Dok je Fourierova transformacija široko poznata i primjenjivana za spektralnu analizu, sinusna i kosinusna transformacija pružaju dodatne prednosti u određenim situacijama, kao što su obrada signala s posebnim simetrijama ili specifičnim graničnim vrijednostima. Njihova sposobnost da razdvoje signal na parne i neparne komponente omogućava detaljnije razumijevanje strukture signala te olakšava implementaciju u brojnim tehničkim i znanstvenim primjenama. Kroz ovaj rad, cilj je produbiti razumijevanje ovih transformacija, istražiti njihove matematičke osnove i prikazati njihovu praktičnu primjenu u različitim disciplinama, čime se potvrđuje njihova važnost u suvremenoj analizi signala.

2. Fourierov red i integral

Fourierov red i Fourierov integral temeljni su pojmovi u matematičkoj analizi, od kojih svaki igra ključnu ulogu u proučavanju periodičkih i aperiodičnih funkcija. Nazvani po francuskom matematičaru Jean-Baptiste Josephu Fourieru, ovi alati rastavljaju složene signale na jednostavnije sinusne komponente, olakšavajući njihovu analizu i manipulaciju. Stvaranjem veze između vremenske i frekvencijske domene, ove metode nude snažne uvide i rješenja za široki raspon znanstvenih i inženjerskih problema. Ovo poglavlje je obrađeno prema izvorima: [4], [5], [6] i [8].

Fourierov red i integral predstavljaju ključne alate za razvoj Fourierovih transformacija, koje čine temelj ovog rada i duboko su utkane u bogatu tapiseriju matematičke i znanstvene povijesti. Koncept nalazi svoje korijene u radu Josepha Fouriera, francuskog matematičara i fizičara iz 18. stoljeća. Joseph Fourier uveo je Fourierov red 1807. godine kao sredstvo za predstavljanje periodičnih funkcija kao sume beskonačnog zbroja sinusa i kosinusa.



Slika 2.1. Jean-Baptiste Joseph Fourier. Izvor: [1]

Fourier je rođen 21. ožujka 1768. godine u Auxerreu u Francuskoj. Rano je ostao bez roditelja i odgajali su ga benediktinski redovnici, a studirao je u vojnoj školi gdje je pokazao izuzetan talent za matematiku. Godine 1798. pridružio se Napoleonu Bonaparteu u njegovoj ekspediciji u Egipat, gdje je služio kao znanstveni savjetnik. Po povratku u Francusku, Fourier je postao prefekt departmana Isere, gdje je proveo mnoga istraživanja i napisao svoje najvažnije djelo "Théorie analytique de la chaleur" (Analitička teorija topline) objavljeno 1822. godine. U ovom radu, Fourier je predstavio ideju razlaganja funkcija u redove sinusnih i kosinusnih funkcija, sada poznatih kao Fourierovi redovi.

Fourier je umro 16. svibnja 1830. godine u Parizu, ostavivši iza sebe bogato nasljeđe koje i dalje utječe na modernu znanost i tehnologiju. Fourierov integral i Fourierovu transformaciju, kao generalizaciju koncepta Fourierovih redova za analizu neperiodičkih funkcija nastavili su razvijati mnogi cijenjeni matematičari među kojima se ističu Peter Gustav Lejeune Dirichlet i Bernard Riemann.



Slika 2.2. Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Izvor: [3]

Peter Gustav Lejeune Dirichlet bio je njemački matematičar belgijskog podrijetla, značajan zbog svog doprinosa brojnim područjima matematike, uključujući teoriju brojeva, analitičku teoriju brojeva i teoriju funkcija. Rođen je 13. veljače 1805. godine u Dürenu, blizu Aachena, tada dijelu Francuske, danas Njemačke. Ime "Lejeune" je bilo njegovo majčino djevojačko prezime. Dirichlet je već u mladosti pokazivao izuzetan talent za matematiku. Studirao je na sveučilištima u Bonnu, Göttingenu i Parizu, gdje je bio pod utjecajem poznatih matematičara kao što su Carl Friedrich Gauss i Joseph Fourier. Dirichlet je 1825. godine postao poznat po rješavanju problema koji je postavio Fermat o predstavljanju cijelih brojeva kao zbroj dva kvadrata. Godine 1827. postao je profesor na Sveučilištu u Breslau, a kasnije je predavao na Sveučilištu u Berlinu, gdje je naslijedio Carl Friedrich Gausa na katedri za matematiku. Umro je 5. svibnja 1859. godine u Göttingenu. Dirichlet je ključan za razvoj Fourierove transformacije jer je formulirao uvjete za konvergenciju Fourierovih redova i osigurao matematičke temelje za njihovu primjenu u raznim znanstvenim disciplinama.

Bernhard Riemann bio je njemački matematičar koji je napravio značajne doprinose različitim granama matematike, uključujući analizu, diferencijalnu geometriju i teoriju brojeva. Rođen 17. rujna 1826. godine u Breselenu, malom selu u Kraljevini Hannover, kao sin luteranskog svećenika. Riemann je studirao na Sveučilištu u Göttingenu i kasnije na Sveučilištu u Berlinu, gdje su ga podučavali neki od najistaknutijih matematičara tog vremena, uključujući Carla Friedricha Gausa i Petera Gustava Lejeunea Dirichleta. Njegov doktorat, završen 1851. godine pod Gausovim mentorstvom, bio je iz područja složenih funkcija, a disertacija pod nazivom "Grundlagen für



Slika 2.3. Bernhard Riemann. Izvor:[2]

eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse" (Osnove opće teorije funkcija jedne kompleksne varijable) već je tada pokazivala njegovu genijalnost. Jedan od njegovih najvažnijih doprinosa matematici je rad "Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" (O hipotezama koje leže u temelju geometrije) iz 1854. godine, u kojem je uveo koncept Riemannove geometrije. Ovaj rad postavio je temelje za teoriju relativnosti koju će kasnije razviti Albert Einstein. Riemann je živio relativno kratak život, umro je od tuberkuloze 20. srpnja 1866. godine u Selascu, Italija, u dobi od 39 godina. Značajno je doprinio razvoju Fourierove transformacije kroz svoj rad na rigoroznom matematičkom utemeljenju teorije integrala, analizi konvergencije Fourierovih redova i razvoju pojma Riemannove sume, što je unaprijedilo razumijevanje i primjenu Fourierove analize u različitim znanstvenim područjima.

Pravi značaj Fourierove transformacije se tek vidio u 20. stoljeću, s pojavom teorije komunikacije, obrade signala i kvantne mehanike. Inženjeri i fizičari igrali su ključnu ulogu u primjeni Fourierove analize na polja poput telekomunikacija. Fourierova transformacija postala je bitan alat u obradi signala, omogućujući učinkovitu analizu i manipulaciju signala u različitim domenama. U području kvantne mehanike, Heisenbergovo načelo nesigurnosti koje je uveo Werner Heisenberg 1920-ih istaknulo je ograničenja u istovremenom mjerenju položaja i momenta čestice. Fourierova analiza postala je instrumentalna u razumijevanju i kvantificiranju tih nesigurnosti, pridonoseći temeljima kvantne mehanike. Razvoj numeričkih algoritama za učinkovito izračunavanje Fourierove transformacije, poput brze Fourierove transformacije (FFT), dodatno je ubrzao praktične primjene Fourierove analize. FFT je drastično smanjio računsku složenost Fourierovih transformacija, čineći ih izvedivim za obradu signala u stvarnom vremenu u različitim područjima. Fourierova transformacija predstavlja dokaz trajnog utjecaja matematičkih ideja na naše razumijevanje fizičkog svijeta.

2.1. Fourierov red

Fourierov red je reprezentacija funkcije trigonometrijskim polinomima s mogućnošću prikaza funkcija sa skokovima što je jako korisno u obradi signala. Kako su trigonometrijski polinomi bazirani na periodičnim funkcijama sinus i kosinus, Fourierov red reprezentira samo periodične funkcije. Fourierov red periodičke funkcije temeljnog perioda 2π je oblika:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad (2.1)$$

pri čemu $\cos(nx)$ i $\sin(nx)$ nazivamo n -tim harmonicima, a koeficijenti a_n i b_n su mjere utjecaja pojedinih harmonika.

Opći zapis Fourierova reda, odnosno Fourierova reda funkcije temeljnog perioda $2L$ je:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right), \quad (2.2)$$

gdje se koeficijenti a_0 , a_n i b_n računaju formulama:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad (2.3)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (2.4)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (2.5)$$

Fourierov red ovisan je o parnosti funkcije. Ako je funkcija parna red se reducira na Fourierov kosinusni red oblika:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (2.6)$$

a ako je funkcija neparna reducira se na Fourierov sinusni red oblika:

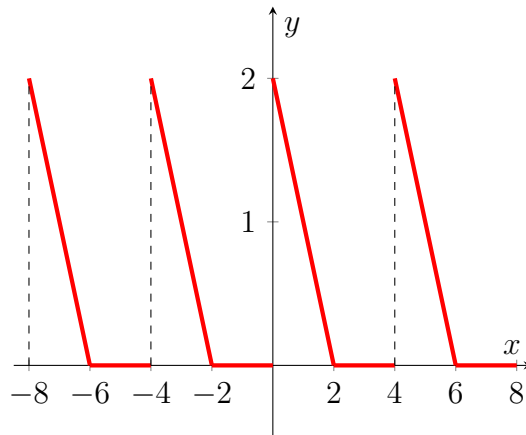
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (2.7)$$

Pokažimo sada na jednom primjeru kako se funkcija reprezentira Fourierovim redom.

Primjer 2.1. *Odredimo Fourierov red funkcije zadane s*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x \leq 0, \\ 2 - x, & 0 < x \leq 2, \end{cases} \quad (2.8)$$

pri čemu je $f(x + 4) = f(x)$. Funkcija je grafički prikazana na sljedećoj slici.



Slika 2.4. Grafički prikaz funkcije $f(x)$

Odredimo najprije koeficijent a_0 pomoću izraza (2.3).

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_0^2 (2-x) dx = \frac{1}{2} \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{2}. \quad (2.9)$$

Sada ćemo odrediti koeficijente a_n služeći se izrazom (2.4).

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^2 (2-x) \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) dx = \int_0^2 \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) dx - \frac{1}{2} \int_0^2 x \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) dx. \quad (2.10)$$

Prvi član ovog izraza je tablični integral i iznosi:

$$\int_0^2 \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) dx = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right) \Big|_0^2 = 0, \quad (2.11)$$

dok drugi član rješavamo metodom parcijalne integracije uzevši:

$$u = x, \quad du = dx, \quad dv = \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) dx, \quad v = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right). \quad (2.12)$$

Dobivamo:

$$a_n = -\frac{1}{2} \int_0^2 x \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{2x}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right) \right) \Big|_0^2 + \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{2}{n\pi} \left(\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right) \right) dx \quad (2.13)$$

$$= 0 - \left(\frac{2}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) \right) \Big|_0^2 = \frac{2}{n^2 \pi^2} (1 - (-1)^n). \quad (2.14)$$

Istim postupkom, pomoću izraza (2.5) slijedi:

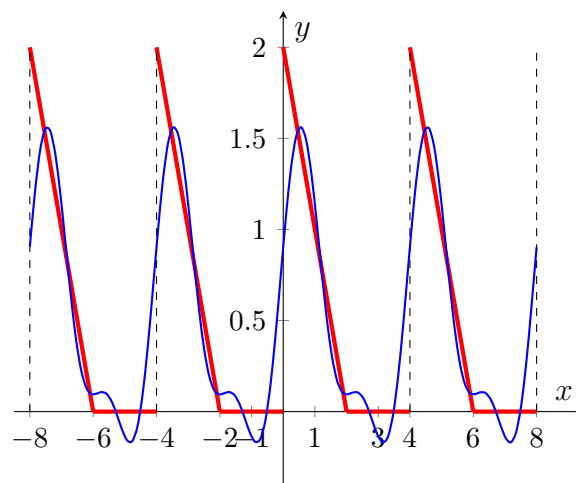
$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^2 (2-x) \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right) dx = \frac{2}{n\pi}. \quad (2.15)$$

Konačno, Fourierov red zadane funkcije je oblika:

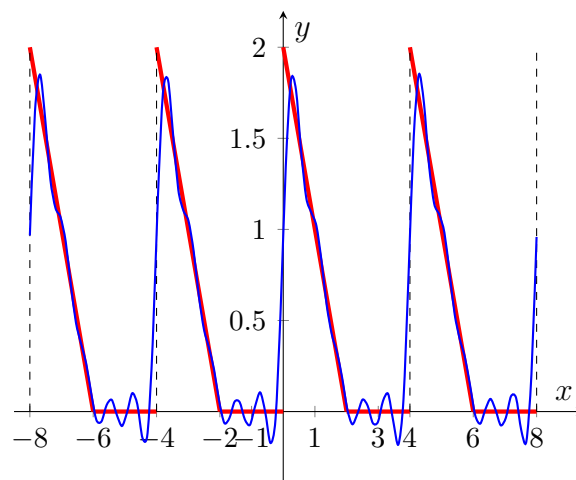
$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi} \cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right) + \frac{1}{n} \sin\left(\frac{\pi nx}{2}\right) \right). \quad (2.16)$$

Na idućih nekoliko slika prikazana je kvaliteta aproksimacije funkcije $f(x)$ Fourierovim redom s različitim brojem uključenih harmonika. Uočimo kako povećanjem reda smanjujemo pogrešku aproksimacije, ali oscilacije u okolini točke prekida ostaju. Ta se pojava naziva Gibbsov fenomen.

Gibbsov fenomen je prvi put primijetio engleski matematičar Henry Wilbraham 1848. godine. Međutim, široko je postao poznat zahvaljujući američkom fizičaru Josiahu Willardu Gibbsu¹, koji ga je detaljnije proučavao i opisao 1899. godine.

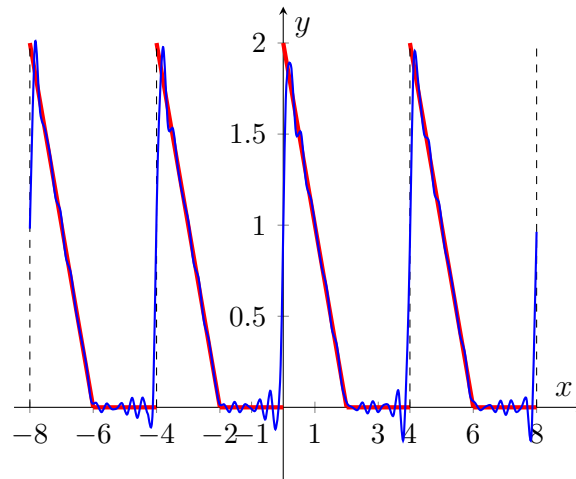


Slika 2.5. Aproksimacija funkcije $f(x)$ Fourierovim polinomom s dva harmonika



Slika 2.6. Aproksimacija funkcije $f(x)$ Fourierovim polinomom s pet harmonika

¹Josiah Willardu Gibbs rođen 11. veljače 1839. u New Havenu, Connecticut, SAD gdje je i preminuo. Cijelu svoju akademsku karijeru proveo na Sveučilištu Yale, gdje je studirao i kasnije postao profesor. Uz Gibbsov fenomen ima značajna postignuća u termodinamici, vektorskoj analizi, optici i elektromagnetizmu.



Slika 2.7. Aproximacija funkcije $f(x)$ Fourierovim polinomom s deset harmonika

2.1.1. Kompleksni oblik Fourierovog reda

Kompleksni zapis Fourierova reda pojednostavljuje matematičke manipulacije, ujedinjuje sinusne i kosinusne funkcije, poboljšava računsku efikasnost, olakšava spektralnu analizu, a samim time i primjenu u inženjerstvu i fizici.

U kompleksnom obliku Fourierovog reda se trigonometrijske funkcije zamjenjuju eksponencijalnim primjenom Eulerove² formule, koja glasi:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x). \quad (2.17)$$

Kako bi došli do kompleksnog oblika Fourierova reda moramo izraziti funkcije sinusa i kosinusa preko eksponencijalne funkcije. To ćemo postići zbrajanjem, odnosno oduzimanjem Eulerove formule s njezinim kompleksno konjugiranim oblikom koji je oblika:

$$e^{-ix} = \cos(x) - i \sin(x). \quad (2.18)$$

Zbrajanjem te dvije jednačbe dobivamo

$$e^{ix} + e^{-ix} = (\cos(x) + i \sin(x)) + (\cos(x) - i \sin(x)) = 2 \cos(x), \quad (2.19)$$

odnosno

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \quad (2.20)$$

Oduzimanjem jednačbi (2.17) i (2.18) određuje izraz za funkciju sinus:

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (2.21)$$

²Leonhard Euler švicarski je matematičar. Rođen je 15. travnja 1707. u Baselu. Nakon završetka studija na Sveučilištu u Baselu, Euler se preselio u Rusiju gdje je radio na Petrogradskom sveučilištu (danas Sankt-Peterburško državno sveučilište). Uz brojne doprinose na matematičkom području radio je i u drugim disciplinama kao što su optika, mehanika i teorija glazbe.

Uvrštavanjem izraza za sinus i kosinus u (2.4) i (2.5), dobiva se:

$$a_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left(e^{\frac{in\pi x}{L}} + e^{-\frac{in\pi x}{L}} \right) dx, \quad (2.22)$$

$$b_n = \frac{i}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left(e^{\frac{in\pi x}{L}} - e^{-\frac{in\pi x}{L}} \right) dx, \quad (2.23)$$

pa Fourierov red poprima oblik:

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(d_n e^{\frac{in\pi x}{L}} + e_n e^{-\frac{in\pi x}{L}} \right), \quad (2.24)$$

gdje je

$$d_n = a_n - ib_n, \quad (2.25)$$

$$e_n = a_n + ib_n. \quad (2.26)$$

Kako su koeficijenti d_n i e_n konjugirano kompleksni, te je $e_n = d_{-n}$, Fourierov red poprima oblik:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(d_n e^{\frac{in\pi x}{L}} \right), \quad (2.27)$$

gdje je

$$d_n = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx. \quad (2.28)$$

Istaknimo da kompleksni oblik Fourierovog reda prirodno obuhvaća pozitivne i negativne frekvencije čime se održava simetrija u frekvencijskoj domeni. Ovo je od iznimne važnosti u područjima kao što su analiza signala i komunikacije.

Primjer 2.2. *Odredimo kompleksni oblik Fourierova reda funkcije iz prošlog primjera. Dobivamo:*

$$d_n = \frac{1}{4} \int_0^2 (2-x) e^{-\frac{in\pi x}{2}} dx = \frac{12}{n^2\pi^2} - \frac{8(-1)^n}{n^4\pi^4}. \quad (2.29)$$

Sada možemo prikazati kompleksni oblik Fourierova reda funkcije $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{12}{n^2\pi^2} - \frac{8(-1)^n}{n^4\pi^4} \right) e^{in\pi x} \right). \quad (2.30)$$

2.1.2. Spektri

U kontekstu Fourierova reda, spektar (ili frekvencijski spektar) je prikaz amplituda koeficijenta Fourierove serije kao funkcija frekvencije, a razlikujemo sinusni, kosinusni, amplitudni i fazni spektar.

Sinusni spektar prikazuje amplitude sinusnih komponenata Fourierovog reda kao funkciju frekvencije. Svaki član Fourierovog reda ima sinusni dio $b_n \sin(nx)$, a sinusni spektar pokazuje vrijednosti b_n za različite frekvencije n .

Kosinusni spektar prikazuje amplitude kosinusnih komponenti signala kao funkciju frekvencije. Slično sinusnom spektru, kosinusni spektar prikazuje koliko svaka kosinusna komponenta doprinosi ukupnom signalu. Svaki član Fourierovog reda ima kosinusni dio $a_n \cos(nx)$, a kosinusni spektar pokazuje vrijednosti a_n za različite frekvencije n .

Sinusni i kosinusni spektar uključeni su u amplitudni spektar koji se definira s:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}. \quad (2.31)$$

Fazni spektar pokazuje fazne pomake³ frekvencijskih komponenti. Fazni pomak ϕ za n -tu frekvenciju računa se preko formule:

$$\phi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right). \quad (2.32)$$

Zajedno, amplitudni i fazni spektar čine Fourierov spektar signala, koji potpuno opisuje signal u frekvencijskoj domeni.

Primjer 2.3. *Odredimo spektre za funkciju iz prethodnog primjera koristeći se navedenim formulama.*

Amplitudni spektar se određuje formulom (2.31). Pošto smo već izračunali koeficijente a_n i b_n možemo ih samo uvrstiti u (2.31) te tako dobivamo izraz za amplitudni spektar u ovisnosti od n :

$$A_n = \sqrt{\left(\frac{2}{n^2\pi^2}(1 - (-1)^n)\right)^2 + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2}. \quad (2.33)$$

Analogno određujemo fazni spektar koristeći se formulom (2.32):

$$\phi_n = \arctan\left(\frac{\frac{2}{n\pi}}{\frac{2}{n^2\pi^2}(1 - (-1)^n)}\right). \quad (2.34)$$

Sinusni i kosinusni spektri definirani su izrazima za a_n i b_n . Napomenimo da u ovom slučaju kosinusni spektar obuhvaća samo neparne n -ove i nulu, dok sinusni obuhvaća sve n -ove osim nule.

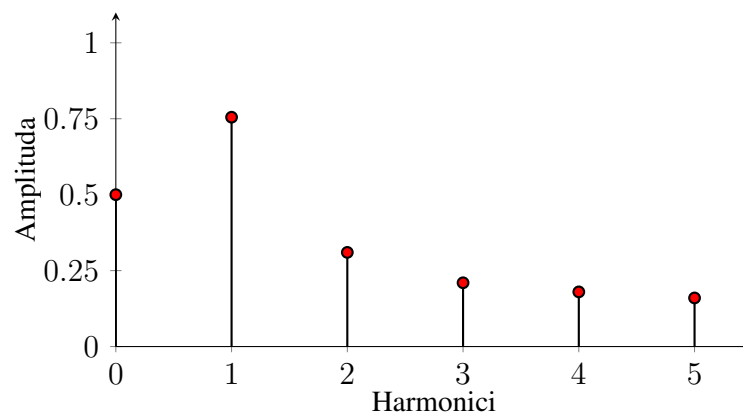
³fazni pomak je razlika u početnoj poziciji dvaju valova iste frekvencije

Pripadne vrijednosti sva četiri spektra za prvih nekoliko harmonika prikazane su u sljedećoj tablici.

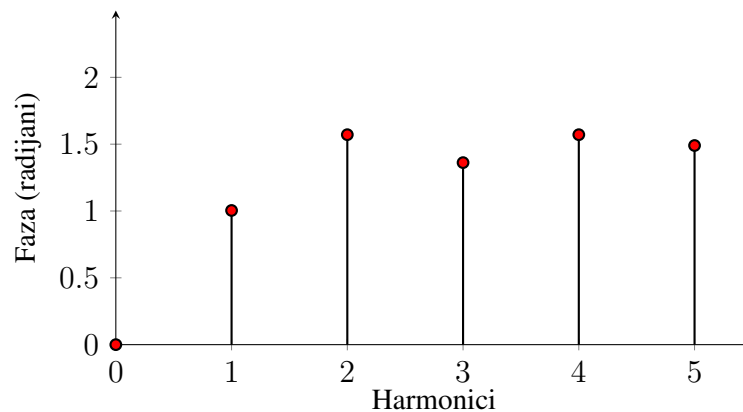
Tablica 2.1. Vrijednosti amplitudnog, faznog, sinusnog i kosinusnog spektra zadane funkcije

Harmonici	0	1	2	3	4	5
Amplitudni spektar	0.5	0.755	0.318	0.213	0.184	0.163
Fazni spektar	0	1.004	1.571	1.36	1.571	1.492
Kosinusni spektar	0.5	0.405	0	0.045	0	0.024
Sinusni spektar	0	0.637	0.318	0.212	0.179	0.167

U nastavku su amplitudni i fazni spektar prikazani grafički.



Slika 2.8. Amplitudni spektar



Slika 2.9. Fazni spektar

2.1.3. Kompaktni oblik Fourierovog reda

Kompaktni oblik trigonometrijskog Fourierovog reda odnosi se na način zapisivanja periodične funkcije isključivo preko funkcije kosinusa. Fourierov red je tada oblika:

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L} + \phi_n\right), \quad (2.35)$$

gdje je

$$C_0 = a_0, \quad (2.36)$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad (2.37)$$

$$\phi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right). \quad (2.38)$$

Prednost kompaktnog oblika Fourierova reda je jednostavnost, u smislu da iz njega možemo odmah vidjeti amplitudni i fazni spektar što daje izravan uvid u frekvencijski sadržaj signala.

2.1.4. Konvergencija Fourierova reda

Konvergencija je pojam kojim se opisuje proces približavanja nekog niza prema nekoj određenoj vrijednosti ili stanju. Fourierov red tako konvergira prema originalnoj funkciji ako se suma sinusnih i kosinusnih komponenti sve više približava vrijednosti funkcije.

U ovom poglavlju bavimo se teoremom koji govori o uvjetima konvergencije Fourierova reda. Uvjeti koji garantiraju konvergenciju zovu se Dirichletovi uvjeti i dani su u sljedećoj definiciji.

Definicija 2.1 (Dirichletovi uvjeti). *Neka je f realna funkcija definirana na intervalu $[a, b]$. Kažemo da funkcija f zadovoljava Dirichletove uvjete ako vrijedi:*

1. *Funkcija f je na intervalu $[a, b]$ po dijelovima neprekidna s konačnim brojem prekida prve vrste (skokova).*
2. *Funkcija f na intervalu $[a, b]$ je monotona ili ima najviše konačan broj ekstrema.*

Za funkciju iz prethodnih primjera možemo reći da zadovoljava Dirichletove uvjete jer ima konačan broj prekida prve vrste na određenom intervalu te ima konačan broj ekstrema na istom intervalu.

Funkcije za koje ne vrijede Dirichletovi uvjeti su primjerice funkcije koje sadrže prekide druge vrste. Primjeri tih funkcija su funkcije s vertikalnom asimptomom, kao što je funkcija

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad (2.39)$$

koja za $x = 0$ teži ka beskonačnosti.

Sada možemo i izreći teorem o konvergenciji Fourierova reda.

Teorem 2.1. *Neka je zadana periodična funkcija f s periodom $2L$ koja na intervalu $[-L, L]$ zadovoljava Dirichletove uvjete, te neka je $S(x)$ Fourierov red funkcije f . Red $S(x)$ konvergira u svakoj točki na intervalu $[-L, L]$ i vrijedi:*

1. *$S(x) = f(x)$ ako je $f(x)$ neprekidna u točki x .*

2. $S(x) = \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+))$ ako u točki x dolazi do prekida prve vrste, pri čemu $f(x^-)$ i $f(x^+)$ označavaju lijevi i desni limes funkcije f u točki x .

2.2. Fourierov integral

Dok su se Fourierovim redom reprezentirale periodičke funkcije, neperiodičke funkcije reprezentiraju se Fourierovim integralom. Fourierov integral je izraz oblika:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (A(\lambda) \cos(\lambda x) + B(\lambda) \sin(\lambda x)) d\lambda, \quad (2.40)$$

pri čemu je

$$A(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\lambda x) dx, \quad (2.41)$$

$$B(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\lambda x) dx. \quad (2.42)$$

Fourierov integral također ovisi o parnosti funkcije. Kada je funkcija neparna koeficijent $A(\lambda)$ iznosi nula, a kada je funkcija parna koeficijent $B(\lambda)$ iznosi nula.

Kao i kod Fourierova reda definirati ćemo spektre Fourierova integrala, no razlika će biti to što je sada riječ o kontinuiranim spektrima koji su ustvari funkcije dok su spektri Fourierova reda bili nizovi brojeva.

Amplitudni spektar je jednak:

$$C(\lambda) = \sqrt{[A(\lambda)]^2 + [B(\lambda)]^2}, \quad (2.43)$$

dok je fazni spektar jednak:

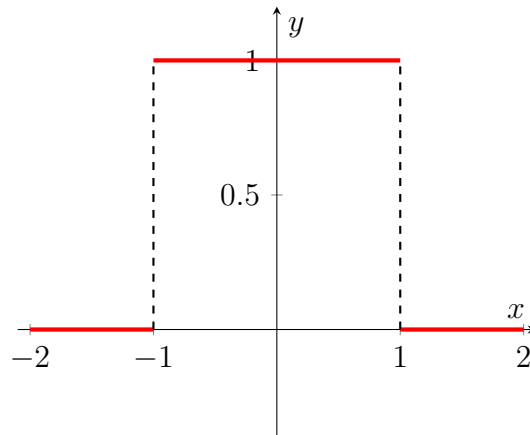
$$\phi(\lambda) = -\arctan\left(\frac{B(\lambda)}{A(\lambda)}\right). \quad (2.44)$$

Pokažimo sada na primjeru kako se neperiodička funkcija reprezentira Fourierovim integralom te kako izgledaju njezin amplitudni i fazni spektar.

Primjer 2.4. *Odredimo Fourierov integral te amplitudne i fazne spektre funkcije zadane izrazom:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases} \quad (2.45)$$

čiji je grafički prikaz dan na sljedećoj slici.



Slika 2.10. Grafički prikaz funkcije $f(x)$

Kako se radi o parnoj funkciji $B(\lambda) = 0$, te je dovoljno odrediti $A(\lambda)$:

$$A(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\lambda x) dx = \int_{-1}^1 \cos(\lambda x) dx = \frac{2}{\lambda} \sin(\lambda), \quad (2.46)$$

Fourierov integral zadane funkcije poprima oblik:

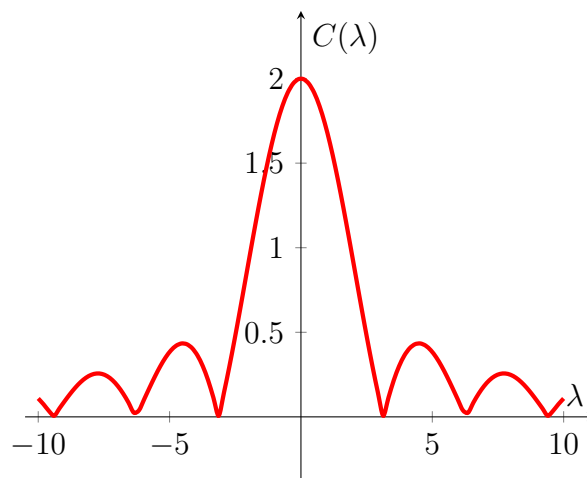
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\lambda)}{\lambda} \cos(\lambda x) d\lambda. \quad (2.47)$$

Pošto je funkcija parna amplitudni spektar je jednak apsolutnoj vrijednosti koeficijenta $A(\lambda)$:

$$C(\lambda) = |A(\lambda)| = 2 \left| \frac{\sin(\lambda)}{\lambda} \right|, \quad (2.48)$$

a grafički je prikazan na slici 2.11.

Kako je $B(\lambda) = 0$ prema (2.44) i fazni spektar je jednak nuli.



Slika 2.11. Amplitudni spektar funkcije $f(x)$

3. Fourierova transformacija

U prethodnom poglavlju pokazali smo kako se funkcije mogu reprezentirati Fourierovim redom i Fourierovim integralom čime se funkcije prikazuju u vidu superpozicije sinusnih i kosinusnih valova svih mogućih frekvencija. U tom prikazu svakoj frekvenciji pridružena je njezina amplituda, što nam omogućuje da vidimo koje frekvencije su prisutne u signalu i koliki je njihov doprinos. Upravo to nameće ideju da signal (funkciju) iz domene u kojoj je svakom vremenskom trenutku pridružena njena vrijednost prevedemo u domenu u kojoj je svakoj frekvenciji pridružena njena amplituda, a taj će se prijelaz nazivati Fourierova transformacija. To je jako korisno kod filtriranja signala gdje se korištenjem Fourierove transformacije mogu prepoznati i ukloniti frekvencijske komponente koje odgovaraju šumu, ostavljajući samo relevantne frekvencije. Ovo poglavlje je obrađeno prema izvorima: [4], [7] i [9].

Kako bi definirali Fourierovu transformaciju koristiti ćemo se Fourierovim integralom, to jest izrazit ćemo njegov kompleksni oblik. U formulu za Fourierov integral (2.40) uvrstiti ćemo koeficijente $A(\lambda)$ i $B(\lambda)$, odnosno izraze (2.41) i (2.42). Dobivamo:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(\lambda t) \cos(\lambda x) + \sin(\lambda t) \sin(\lambda x)] dt d\lambda. \quad (3.1)$$

Primjenom adicijske formule za kosinus¹ ovaj izraz prelazi u:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(\lambda t - \lambda x)] dt \right] d\lambda, \quad (3.2)$$

odnosno zbog parnosti funkcije kosinus u:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(\lambda x - \lambda t)] dt \right] d\lambda. \quad (3.3)$$

Integral u zagradi je parna funkcija varijable λ , pa vrijedi sljedeće:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(\lambda x - \lambda t)] dt \right] d\lambda. \quad (3.4)$$

Uočimo da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\sin(\lambda x - \lambda t)] dt \quad (3.5)$$

¹ $\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y)$

neparna funkcija varijable λ pa je

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\sin(\lambda x - \lambda t)] dt \right] d\lambda = 0. \quad (3.6)$$

Prema navedenom je

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(\lambda x - \lambda t) + i \sin(\lambda x - \lambda t)] dt \right] d\lambda, \quad (3.7)$$

pa primjenom Eulerove formule (2.17) dolazimo do traženog kompleksnog oblika Fourierova integrala:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt d\lambda, \quad (3.8)$$

odnosno:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right] e^{i\lambda x} d\lambda. \quad (3.9)$$

Usporedivši ovaj izraz s eksponencijalnim zapisom Fourierova reda možemo uočiti da se izraz u zagradi odnosi na amplitude frekvencija, odnosno da je to funkcija koja frekvenciji λ pridružuje amplitudu signala $f(x)$ što je tražena Fourierova transformacija.

Tako dolazimo do sljedeće definicije.

Definicija 3.1. Neka je $f(t)$ funkcija definirana na skupu realnih brojeva. Fourierova transformacija funkcije $f(t)$ je funkcija $F(\lambda)$ definirana kao:

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt. \quad (3.10)$$

Uvrstivši (3.10) u (3.9) dobivamo takozvanu inverznu Fourierovu transformaciju:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda. \quad (3.11)$$

Pokažimo sada na nekoliko primjera kako se određuju Fourierove transformacije nekih češće korištenih funkcija.

Primjer 3.1. Odredimo Fourierovu transformaciju funkcije zadane s:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a, \end{cases} \quad (3.12)$$

gdje je a realni parametar.

Funkciju $f(x)$ uvrštavamo u izraz (3.10) te prilagođavamo granice integracije s obzirom na uvjete funkcije:

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx = \int_0^a e^{-i\lambda x} dx. \quad (3.13)$$

Integriramo funkciju $e^{-i\lambda x}$ te dobivamo sljedeće:

$$F(\lambda) = \frac{e^{-i\lambda x}}{-i\lambda} \Big|_0^a. \quad (3.14)$$

Na kraju uvrštavamo granice integracije umjesto varijable x i dobivamo Fourierovu transformaciju funkcije $f(x)$:

$$F(\lambda) = \frac{e^{-i\lambda a} - 1}{-i\lambda}. \quad (3.15)$$

Za rješavanje sljedećeg primjera potreban nam je tzv. Gaussov integral koji je izračunat u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 3.1. Vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad (3.16)$$

gdje je a pozitivna konstanta.

Dokaz. Kako bi dokazali jednakost (3.16) prvo uvodimo supstituciju:

$$z = \sqrt{\frac{1}{a}}u, \quad dz = \sqrt{\frac{1}{a}}du. \quad (3.17)$$

Gaussov integral je sada oblika:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(\sqrt{\frac{1}{a}}u)^2} \sqrt{\frac{1}{a}}du = \sqrt{\frac{1}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du. \quad (3.18)$$

Također vrijedi:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2+w^2)} dudw. \quad (3.19)$$

Kako bi pojednostavili ovaj dvodimenzionalni integral prelazimo na polarne koordinate gdje je

$$u = r \cos \theta, \quad w = r \sin \theta, \quad u^2 + w^2 = r^2, \quad dudw = r dr d\theta. \quad (3.20)$$

Kod polarnih koordinata r predstavlja udaljenost neke točke od ishodišta, a θ predstavlja kut između pozitivne x -osi i pravca koji spaja ishodište s nekom točkom. Granice integracije za r idu od 0 do ∞ , a za θ od 0 do 2π . Integral je sada oblika:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta. \quad (3.21)$$

Unutarnji integral rješavamo koristeći supstituciju:

$$u = r^2, \quad du = 2r dr. \quad (3.22)$$

Dobiva se:

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-u} du = -\frac{1}{2} e^{-u} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}. \quad (3.23)$$

Sada je

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{2} = \pi. \quad (3.24)$$

Ovo rješenje uvrstimo u izraz (3.18) te time dokazujemo da izraz (3.16) vrijedi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad (3.25)$$

što je i trebalo pokazati. □

Primjer 3.2. *Odredimo Fourierovu transformaciju funkcije zadane s:*

$$f(x) = e^{-ax^2}, \quad (3.26)$$

pri čemu je $a > 0$ realan parametar.

Funkciju $f(x)$ uvrštavamo u izraz (3.10):

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - i\lambda x} dx. \quad (3.27)$$

Primjetimo da vrijedi:

$$-ax^2 - i\lambda x = -a \left(x^2 + \frac{i\lambda}{a} x \right) = -a \left(x^2 + \frac{i\lambda}{a} x + \left(\frac{\lambda i}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\lambda i}{2a} \right)^2 \right), \quad (3.28)$$

odnosno

$$-ax^2 - i\lambda x = -a \left(x + \frac{i\lambda}{2a} \right)^2 - \frac{\lambda^2}{4a}. \quad (3.29)$$

Iz izraza (3.29) slijedi :

$$e^{-ax^2-i\lambda x} = e^{-a\left(x+\frac{i\lambda}{2a}\right)^2} e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}. \quad (3.30)$$

Uvrstivši izraz (3.30) u (3.27) možemo izlučiti konstantu te sada Fourierova transformacija funkcije $f(x)$ izgleda :

$$F(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x+\frac{i\lambda}{2a}\right)^2} dx. \quad (3.31)$$

Radi jednostavnosti se uvodi supstitucija:

$$z = x + \frac{i\lambda}{2a}, \quad dz = dx, \quad (3.32)$$

pa je

$$F(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2} dz. \quad (3.33)$$

Primjenom prethodne propozicije na (3.33) slijedi Fourierova transformacija funkcije $f(x)$:

$$F(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad (3.34)$$

4. Sinusna i kosinusna transformacija

Sinusna i kosinusna transformacija su specijalni oblici Fourierove transformacije, koje se koriste za analizu periodičnih i neperiodičnih signala. Sinusna transformacija koristi samo sinusne funkcije za prikazivanje signala, dok kosinusna transformacija koristi samo kosinusne funkcije. Ove transformacije često se primjenjuju u području obrade signala, kompresije podataka i rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednačbi. Ovo poglavlje je obrađeno prema izvorima: [9] i [13].

Definicija 4.1. Neka je $f(x)$ funkcija definirana na skupu realnih brojeva. Fourierova kosinusna transformacija F_c funkcije $f(x)$ je funkcija $f_c(\omega)$ definirana s

$$F_c[f(x)] = f_c(\omega) = \int_0^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx, \quad (4.1)$$

dok je inverzna Fourierova kosinusna transformacija definirana s

$$F_c^{-1}[f_c(\omega)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_c(\omega) \cos(\omega x) d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx \right] \cos(\omega x) d\omega. \quad (4.2)$$

Dovoljni uvjeti za postojanje inverzne Fourierove transformacije su da funkcija $f(x)$ bude apsolutno integrabilna na intervalu $[0, \infty)$ i da prva derivacija te funkcije $f'(x)$ bude kontinuirana u svakom ograničenom podintervalu od $[0, \infty)$.

Pošto je kosinusna funkcija jednaka realnom dijelu eksponencijalne funkcije imaginarnog argumenta (izraz (2.20)) lako je utvrditi vezu između Fourierove transformacije i kosinusne transformacije. Kako bi vidjeli tu vezu odredimo Fourierovu transformaciju parne funkcije $f(x)$. Slijedi.

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-i\lambda x} dx + \int_0^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx. \quad (4.3)$$

U prvom integralu napravimo supstituciju

$$-x = u, \quad -dx = du, \quad (4.4)$$

pa dobivamo

$$F(\lambda) = - \int_{\infty}^0 f(-u) e^{i\lambda u} du + \int_0^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx. \quad (4.5)$$

Kako je zbog parnosti $f(-u) = f(u)$, zamijenivši oznaku u s oznakom x i zamjene granica integracije, slijedi

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx + \int_0^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos(\lambda x) dx. \quad (4.6)$$

Zaključujemo da kod parnih funkcija vrijedi

$$F(\lambda) = 2F_c[f(x)]. \quad (4.7)$$

Definirajmo sada Fourierovu sinusnu transformaciju.

Definicija 4.2. Neka je $f(x)$ funkcija definirana na skupu realnih brojeva. Fourierova sinusna transformacija F_s funkcije $f(x)$ je funkcija $f_s(\omega)$ definirana s

$$F_s[f(x)] = f_s(\omega) = \int_0^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx, \quad (4.8)$$

dok je inverzna Fourierova sinusna transformacija definirana s

$$F_s^{-1}[f_s(\omega)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_s(\omega) \sin(\omega x) d\omega. \quad (4.9)$$

Uvjeti za egzistenciju inverzne sinusne transformacije su isti kao kod kosinusne.

Kao i kod kosinusne transformacije postoji veza između Fourierove transformacije i sinusne transformacije. Za uspostavljanje te veze promatramo neparnu funkciju $f(x)$. Slijedi.

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-i\lambda x} dx + \int_0^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx. \quad (4.10)$$

U prvom integralu napravimo supstituciju

$$-x = u, \quad -dx = du, \quad (4.11)$$

pa dobivamo

$$F(\lambda) = - \int_{\infty}^0 f(-u) e^{i\lambda u} du + \int_0^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx. \quad (4.12)$$

Kako je zbog neparnosti $f(-u) = -f(u)$, zamijenivši oznaku u s oznakom x i zamjene granica integracije, slijedi

$$F(\lambda) = - \int_0^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx + \int_0^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = -2i \int_0^{\infty} f(x) \sin(\lambda x) dx. \quad (4.13)$$

Zaključujemo da kod neparnih funkcija vrijedi

$$F(\lambda) = -2iF_s[f(x)]. \quad (4.14)$$

4.1. Izračunavanje sinusne i kosinusne transformacije

U ovom ćemo dijelu pokazati kako se izračunavaju sinusne i kosinusne transformacije nekih funkcija.

Primjer 4.1. *Odredimo kosinusnu Fourierovu transformaciju funkcije zadane s:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a, \end{cases} \quad (4.15)$$

Funkciju $f(x)$ ćemo uvrstiti u izraz (4.1) te ćemo granice integracije prilagoditi domeni zadane funkcije. Dobivamo:

$$F_c[f(x)] = f_c(\omega) = \int_0^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx = \int_0^a \cos(\omega x) dx = \frac{\sin(\omega a)}{\omega}. \quad (4.16)$$

Konačno, Fourierova kosinusna transformacija funkcije $f(x)$ je:

$$F_c[f(x)] = \frac{\sin(\omega a)}{\omega}. \quad (4.17)$$

Primjer 4.2. *Odredimo sinusnu Fourierovu transformaciju funkcije $f(x)$ iz prošlog primjera.*

Isto kao i kod kosinusne transformacije, funkciju $f(x)$ ćemo uvrstiti u izraz za Fourierovu sinusnu transformaciju (4.8). Slijedi:

$$F_s[f(x)] = f_s(\omega) = \int_0^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx = \int_0^a \sin(\omega x) dx = \frac{1 - \cos(\omega a)}{\omega}. \quad (4.18)$$

Prema tome je

$$F_s[f(x)] = \frac{1 - \cos(\omega a)}{\omega}. \quad (4.19)$$

Primjer 4.3. *Odredimo kosinusnu i sinusnu Fourierovu transformaciju funkcije:*

$$f(x) = e^{-ax}. \quad (4.20)$$

Funkciju $f(x)$ ćemo uvrstiti u izraz (4.1). Dobivamo:

$$F_c[f(x)] = \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(\omega x) dx, \quad (4.21)$$

što je ekvivalentno Laplaceovoj transformaciji funkcije kosinus, pa vrijedi:

$$F_c[f(x)] = \frac{a}{a^2 + \omega^2}. \quad (4.22)$$

Sinusnu transformaciju dobivamo uvrštavanjem funkcije $f(x)$ u izraz (4.8):

$$F_s[f(x)] = \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin(\omega x) dx. \quad (4.23)$$

Isto kao i kod kosinusne transformacije Fourierova sinusna transformacija funkcije (4.20) jednaka je Laplaceovoj transformaciji funkcije sinus, pa dobivamo:

$$F_s[f(x)] = \frac{\omega}{a^2 + \omega^2}. \quad (4.24)$$

4.2. Egzistencija i linearnost sinusne i kosinusne transformacije

U ovom ćemo dijelu navesti temeljna svojstva sinusne i kosinusne transformacije koja direktno slijede iz njihovih definicija.

Počnimo s teoremom o egzistenciji sinusne i kosinusne transformacije

Teorem 4.1. *Fourierova sinusna $f_s(w)$ i kosinusna transformacija $f_c(w)$ funkcije $f(x)$ postoje ako je funkcija $f(x)$ apsolutno integrabilna na intervalu $[0, \infty)$ i po dijelovima neprekidna na svakom konačnom intervalu.*

Teorem o egzistenciji nećemo dokazivati zbog kompleksnosti matematičkih koncepata potrebnih za dokaz. Napomenimo samo da je funkcija $f(x)$ apsolutno integrabilna ako je integrabilna funkcija $|f(x)|$.

Kako su i sinusna i kosinusna transformacija integralne transformacije, temeljna svojstva integrala ostaju sačuvana. Tako zbog linearnosti integrala vrijedi teorem o linearnosti sinusne i kosinusne transformacije.

Teorem 4.2. *Neka su a i b proizvoljne konstante, a f i g funkcije za koje su definirane sinusna i kosinusna transformacija. Vrijedi:*

$$F_c[af(x) + bg(x)] = aF_c[f(x)] + bF_c[g(x)] = af_c(\omega) + bg_c(\omega), \quad (4.25)$$

$$F_s[af(x) + bg(x)] = aF_s[f(x)] + bF_s[g(x)] = af_s(\omega) + bg_s(\omega). \quad (4.26)$$

4.3. Svojstva sinusne i kosinusne transformacije

U ovom poglavlju navodimo svojstva sinusne i kosinusne transformacije koja se često koriste u primjenama.

Teorem 4.3 (Teorem o skaliranju). *Neka je $f(x)$ funkcija za koju postoje sinusna i kosinusna transformacija te neka je $a > 0$ zadana konstanta. Vrijedi*

$$F_c[f(ax)] = \frac{1}{a} f_c\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad (4.27)$$

$$F_s[f(ax)] = \frac{1}{a} f_s\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (4.28)$$

Dokaz. Direktnim uvrštavanjem dobivamo

$$F_c[f(ax)] = \int_0^{\infty} f(ax) \cos(\omega x) dx. \quad (4.29)$$

Uvođenjem supstitucije $\tau = ax$, odnosno $d\tau = adx$ dobivamo

$$F_c[f(ax)] = \int_0^{\infty} f(ax) \cos(\omega x) dx = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(\tau) \cos\left(\frac{\omega\tau}{a}\right) d\tau = \frac{1}{a} f_c\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (4.30)$$

Analogno se dokazuje tvrdnja za sinusnu transformaciju. \square

Teorem 4.4 (Teorem o slici derivacije). *Neka je $f(x)$ dovoljno glatka funkcija tako da za nju postoje sinusna i kosinusna transformacija, te neka je*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0. \quad (4.31)$$

Tada vrijedi

$$F_s[f'(x)] = -\omega F_c[f(x)], \quad (4.32)$$

$$F_c[f'(x)] = \omega F_s[f(x)] - f(0). \quad (4.33)$$

Dokaz. Direktnim uvrštavanjem dobivamo:

$$F_s[f'(x)] = \int_0^{\infty} f'(x) \sin(\omega x) dx. \quad (4.34)$$

Primijenimo na ovaj izraz formulu parcijalne integracije uzevši da je

$$u = \sin(\omega x), \quad du = \omega \cos(\omega x), \quad dv = f'(x) dx, \quad v = f(x). \quad (4.35)$$

Slijedi

$$F_s[f'(x)] = f(x) \sin(\omega x) \Big|_0^{\infty} - \omega \int_0^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx = -\omega F_c[f(x)]. \quad (4.36)$$

Druga jednakost u teoremu dokazuje se analogno. \square

Ako u ovaj teorem umjesto funkcije $f(x)$ uvrstimo njenu derivaciju, dobivamo:

$$F_s[f''(x)] = -\omega^2 F_s[f'(x)] + f'(0), \quad (4.37)$$

$$F_c[f''(x)] = -\omega^2 F_c[f'(x)] - f'(0). \quad (4.38)$$

Teorem o slici derivacije može se prilagoditi i za funkcije koje sadrže prekide prve vrste, odnosno skokove. Ako funkcija ima skoka u točki x_0 veličine d , a njena derivacija skok veličine d' , vrijedi

$$F_c[f'(x)] = \omega f_s(\omega) - f(0) - d \cos(\omega x_0), \quad (4.39)$$

$$F_c[f''(x)] = -\omega^2 f_c(\omega) - f'(0) - \omega d \sin(\omega x_0) - d' \cos(\omega x_0). \quad (4.40)$$

Slični se izrazi mogu izvesti i za sinusnu transformaciju.

Pokažimo sada kako se koriste navedena svojstva.

Primjer 4.4. *Odredimo Fourierovu kosinusnu transformaciju prve derivacije funkcije zadane s*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a, \\ 0, & x \geq a. \end{cases} \quad (4.41)$$

Primijetimo da se ovdje radi o funkciji iz primjera 4.1 pa je

$$F_s[f(x)] = \frac{1 - \cos(\omega a)}{\omega}. \quad (4.42)$$

Također je $f(a) = 1$ i $d = 1$, dok je skok u $x_0 = a$. Prema (4.39) slijedi

$$F_c[f'(x)] = 1 - \cos(\omega a) - 1 - \cos(\omega a). \quad (4.43)$$

Primjer 4.5. *Odredimo Fourierovu kosinusnu transformaciju druge derivacije funkcije*

$$f(x) = e^{-ax}. \quad (4.44)$$

Prema izrazu (4.38) vidimo da nam je potrebna kosinusna transformacija funkcije $f(x)$ i vrijednost njene prve derivacije za $x = 0$.

Primijetimo da se ovdje radi o funkciji iz primjera 4.3 pa je

$$f_c(\omega) = \frac{a}{a^2 + \omega^2}. \quad (4.45)$$

Nadalje, kako je

$$f'(x) = -ae^{-ax}, \quad (4.46)$$

to je

$$f'(0) = -a. \quad (4.47)$$

Stoga, Fourierova kosinusna transformacija druge derivacije funkcije $f(x)$ je:

$$F_c[f''(x)] = \frac{-\omega^2 a}{a^2 + \omega^2} + a = \frac{a^3}{a^2 + \omega^2}. \quad (4.48)$$

Pokažimo sada teorem o derivaciji slike.

Teorem 4.5. *Neka je zadana funkcija $f(x)$ za koju postoje sinusna i kosinusna transformacija. Vrijedi:*

$$f_c^{(2n)}(\omega) = F_c[(-1)^n x^{2n} f(x)], \quad (4.49)$$

$$f_c^{(2n+1)}(\omega) = F_c[(-1)^{n+1} x^{2n+1} f(x)], \quad (4.50)$$

$$f_s^{(2n)}(\omega) = F_s[(-1)^n x^{2n} f(x)], \quad (4.51)$$

$$f_s^{(2n+1)}(\omega) = F_c[(-1)^n x^{2n+1} f(x)]. \quad (4.52)$$

Dokaz. Pokažimo tvrdnju za $n = 1$.

$$f_c^{(2)}(\omega) = \frac{d^2}{d\omega^2} \int_0^\infty f(x) \cos(\omega x) dx = \int_0^\infty f(x) \frac{d^2}{d\omega^2} \cos(\omega x) dx, \quad (4.53)$$

$$f_c^{(2)}(\omega) = \int_0^\infty f(x) (-1)x^2 \cos(\omega x) dx = F_c[(-1)t^2 f(x)]. \quad (4.54)$$

Ostale tvrdnje dokazuju se analogno. □

Sada ćemo na jednom primjeru pokazati primjenu ovog teorema.

Primjer 4.6. *Odredimo Fourierovu kosinusnu transformaciju funkcije:*

$$g(x) = x^2 e^{-ax}. \quad (4.55)$$

Prema (4.49) je

$$F_c[g(x)] = F_c[x^2 f(x)] = -F_c[-x^2 f(x)] = -f_c''(\omega). \quad (4.56)$$

Koristeći rezultat dobiven u primjeru 4.3 dobivamo:

$$f_c''(\omega) = \frac{d^2}{d\omega^2} \left(\frac{a}{a^2 + \omega^2} \right) = -2a \frac{a^2 - 3\omega^2}{(a^2 + \omega^2)^3}. \quad (4.57)$$

Konačno dobivamo:

$$g_c(\omega) = 2a \frac{a^2 - 3\omega^2}{(a^2 + \omega^2)^3}. \quad (4.58)$$

Pokažimo sada teorem o slici integrala.

Teorem 4.6. *Neka je zadana funkcija $f(x)$ za koju postoje sinusna i kosinusna transformacija. Vrijedi:*

$$F_c \left[\int_x^\infty f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{\omega} F_s[f(\tau)] = \frac{1}{\omega} f_s(\omega), \quad (4.59)$$

$$F_s \left[\int_x^\infty f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{\omega} F_c[f(\tau)] = \frac{1}{\omega} f_c(\omega). \quad (4.60)$$

Dokaz. Direktnim uvrštavanjem slijedi:

$$F_c \left[\int_x^\infty f(\tau) d\tau \right] = \int_0^\infty \int_x^\infty f(\tau) d\tau \cos(\omega x) dx = \int_0^\infty \left[\int_0^x \cos(\omega x) dx \right] f(\tau) d\tau. \quad (4.61)$$

Kako je

$$\int_0^x \cos(\omega x) dx = \frac{1}{\omega} \sin(\omega x) \Big|_0^x = \frac{\sin(\omega x)}{\omega}, \quad (4.62)$$

što znači da će unutarnji integral rezultirati sinusnom funkcijom, što je zapravo jezgra za Fourierovu sinusnu transformaciju, čime je tvrdnja dokazana.

Druga jednakost dokazuje se analogno. □

5. Diskretna sinusna i kosinusna transformacija

U praktičnim primjenama izračuni Fourierove sinusne i kosinusne transformacije rade se s uzorkovanim podacima konačnog trajanja. Zbog konačnog trajanja i diskretne prirode podataka, mnogo se može postići u jednostavnosti računanja formuliranjem diskretne sinusne i kosinusne transformacije (DST i DCT). Postoji četiri tipa diskretnih transformacija, ali u ovom radu ćemo se fokusirati samo na tip I koji se definira diskretizirajući Fourierovu sinusnu i kosinusnu transformaciju, i to prema izvorima: [11], [12] i [13]. Diskretizacija se može promatrati kao dijeljenje nekog konačnog vremenskog trajanja na N intervala gdje svaki traje Δt .

Uzimamo u obzir da je jezgra Fourierove kosinusne transformacije:

$$K_c(\omega, t) = \cos(\omega t). \quad (5.1)$$

Definirati ćemo ω_m i t_n , koji predstavljaju uzorkovanu kutnu brzinu i vrijeme:

$$\omega_m = 2\pi m \Delta f, \quad t_n = n \Delta t. \quad (5.2)$$

Simboli Δf i Δt su uzorkovani intervali za frekvenciju i vrijeme, dok su simboli m i n pozitivni brojevi. Sada izraz (5.1) možemo zapisati kao:

$$K_c(m, n) = K_c(\omega_m, t_n) = \cos(2\pi mn \Delta f \Delta t). \quad (5.3)$$

Ako dodatno supstituiramo $\Delta f \Delta t$ sa $1/2N$, gdje je N pozitivan broj, onda vrijedi:

$$K_c(m, n) = \cos\left(\pi \frac{mn}{N}\right). \quad (5.4)$$

Dobivena jezgra transformacije je jezgra za diskretnu kosinusnu transformaciju tipa I. Ona predstavlja mn -ti element u $(N + 1) \times (N + 1)$ matrici koja predstavlja definiciju za matricu diskretne kosinusne transformacije $[C]$:

$$[C]_{mn} = \sqrt{\frac{2}{N}} k_m k_n \cos\left(\frac{\pi mn}{N}\right), \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (5.5)$$

Na isti način se definira jezgra za diskretnu sinusnu transformaciju, s obzirom na to da je matrica diskretne sinusne transformacije $[S]$ dimenzija $(N - 1) \times (N - 1)$:

$$[S]_{mn} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(\frac{\pi mn}{N}\right), \quad m, n = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (5.6)$$

6. Primjena kosinusne transformacije na rješavanje običnih diferencijalnih jednačbi

Integralne transformacije, pa tako i sinusna i kosinusna integralna transformacija imaju brojne primjene kako u matematici tako i u raznim područjima inženjerstva. U sljedećih nekoliko poglavlja, koja su obrađena prema izvorima: [4], [7], [9], [10] i [13], prikazati ćemo primjenu ovih transformacija s naglaskom na rješavanje običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačbi, a u ovom poglavlju počinjemo s primjenom na obične diferencijalne jednačbe.

Diferencijalne jednačbe su jednačbe koje povezuju funkciju s njenim derivacijama. Drugim riječima, one izražavaju matematički odnos između nepoznate funkcije i njenih promjena (derivacija) u odnosu na jednu ili više varijabli.

Diferencijalne jednačbe koriste se za modeliranje različitih fenomena u prirodnim i tehničkim znanostima, poput kretanja, topline, električnih krugova, dinamike fluida i mnogih drugih.

Postoje obične diferencijalne jednačbe koje uključuju funkcije koje ovise o jednoj nezavisnoj varijabli, poput vremena, ali i parcijalne diferencijalne jednačbe kod kojih funkcije ovise o dvije ili više nezavisnih varijabli. U ovom se poglavlju bavimo primjenom na obične diferencijalne jednačbe.

Neka je zadana diferencijalna jednačba drugog reda oblika

$$y''(x) - h^2y(x) = F(x), \quad x > 0, \quad (6.1)$$

gdje je

$$F(x) = \begin{cases} A, & 0 < x < b, \\ 0, & x > b, \end{cases} \quad (6.2)$$

pri čemu su h , A i b konstante. Također ćemo nametnuti sljedeće rubne uvjete:

$$y'(0) = 0, \quad y(\infty) = 0. \quad (6.3)$$

Kako je ovdje zadana diferencijalna jednačba i ponašanje na rubovima domene, kažemo da je zadan rubni problem.

Zadani rubni problem riješit ćemo transformiranjem problema u apstraktnu ω domenu putem kosinusne transformacije.

Koristeći teorem o slici druge derivacije opisan u prethodnom poglavlju izrazom (4.38) te rezultatom opisanim u primjeru 4.1 dobivamo:

$$-\omega^2 Y_c - y'(0) - h^2 Y_c = \frac{A}{\omega} \sin(\omega b), \quad (6.4)$$

gdje je $Y_c(\omega) = F_c[f(x)]$.

Uvrštavanjem rubnog uvjeta $y'(0) = 0$ te sređivanjem izraza, dobivamo:

$$Y_c = -\frac{A}{h^2} \left(\frac{\sin(\omega b)}{\omega} - \frac{\omega \sin(\omega b)}{\omega^2 + h^2} \right). \quad (6.5)$$

Primjenom inverzne Fourierove kosinusne transformacije na izraz (6.5) dobijemo konačno rješenje problema:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{A}{h^2} (e^{-hb} \cosh(hx) - 1), & x < b, \\ -\frac{A}{h^2} e^{-hx} \sinh(hb), & x > b. \end{cases} \quad (6.6)$$

Ovo konačno rješenje dobili smo korištenjem tablice kosinusnih transformacija iz literature.

Napomenimo da dani rubni problem modelira sustav s prisilnim prigušenim oscilacijama pod utjecajem vanjske sile $F(x)$ ili difuziju s unutarnjim izvorom topline ili tvari $F(x)$, ovisno o kontekstu u kojem se koristi. Uvjet $y'(0) = 0$ može predstavljati simetriju ili stanje mirovanja u točki $x = 0$. Drugi rubni uvjet odgovara stabilizaciji sustava.

7. Primjena kosinusne transformacije na rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačini

U ovom ćemo se poglavlju baviti primjenom kosinusne transformacije na rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačini.

Neka je zadana parcijalna diferencijalna jednačini oblika

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -h(x), \quad (7.1)$$

gdje je $h(x)$ funkcija za koju vrijedi

$$\int_0^{\infty} h(x) dx = 0. \quad (7.2)$$

Također ćemo nametnuti sljedeće rubne uvjete:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad u(x, 0) = f(x). \quad (7.3)$$

Kako bi se pojednostavio postupak rješavanja definirati ćemo funkciju $p(x)$ na sljedeći način:

$$p(x) = \int_x^{\infty} \left[\int_0^r h(t) dt \right] dr, \quad (7.4)$$

uz pretpostavku da funkcije $p(x)$ i $h(x)$ imaju Fourierovu kosinusnu transformaciju.

Iz izraza (7.4) i uvjeta (7.2) slijedi:

$$p''(x) = h(x), \quad p'(0) = 0, \quad (7.5)$$

pa prema teoremu o slici druge derivacije za kosinusnu transformaciju vrijedi:

$$\omega^2 P_c(\omega) = H_c(\omega), \quad (7.6)$$

gdje su $P_c(\omega)$ i $H_c(\omega)$ kosinusne transformacije funkcija $p(x)$ i $h(x)$.

Sada možemo provesti kosinusnu transformaciju izraza (7.3). Dobivamo:

$$-\omega^2 U_c(\omega, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} U_c(\omega, y) = -\omega^2 P_c(\omega), \quad (7.7)$$

gdje je

$$F_c[u(x, y)] = U_c(\omega, y). \quad (7.8)$$

Jednačini (7.7) obićna je diferencijalna jednačini s konstantnim koeficijentima oblika

$$y''(x) - \omega^2 y(x) = -\omega^2 P_c(\omega), \quad (7.9)$$

čije je opće rješenje oblika

$$y(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x} + P_c(\omega). \quad (7.10)$$

Napomenimo da ova diferencijalna jednačba spada u klasu jednostavnih diferencijalnih jednačbi koje se jednostavno rješavaju, zbog čega detaljan postupak rješavanja ovdje izostavljamo.

Ako pretpostavimo da je U_c ograničena funkcija za $y > 0$, tada konstanta C_1 mora biti jednaka nula, pa dobivamo rješenje jednačbe (7.7) u obliku:

$$U_c(\omega, y) = C e^{-\omega y} + P_c(\omega), \quad (7.11)$$

gdje je C proizvoljna konstanta koju određujemo iz uvjeta $u(x, 0) = f(x)$, koji u transformiranom obliku glasi:

$$U_c(\omega, 0) = F_c(\omega). \quad (7.12)$$

Stoga vrijedi:

$$U_c(\omega, y) = [F_c(\omega) - P_c(\omega)] e^{-\omega y} + P_c(\omega). \quad (7.13)$$

Primjenom inverzne kosinusne transformacije na ovaj izraz nalazimo rješenje u (x, y) domeni:

$$u(x, y) = p(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(t) - p(t)] \left[\frac{y}{(x+t)^2 + y^2} + \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} \right] dt. \quad (7.14)$$

Ovaj rubni problem modelira raspodjelu neke veličine (npr. temperature ili potencijala) u dvodimenzionalnom području pod utjecajem izvora $h(x)$, uz rubne uvjete koji kontroliraju ponašanje funkcije na rubovima tog područja.

Promotrimo još jedan problem koji uključuje parcijalne diferencijalne jednačbe, a modelira raspodjelu topline u u beskonačnom dugom štapu.

Neka je zadana parcijalna diferencijalna jednačba oblika

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (7.15)$$

gdje $u(x, t)$ fizikalno predstavlja temperaturu u točki x u trenutku t . Nametnut ćemo sljedeće dodatne uvjete:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = -k, \quad u(x, 0) = 0. \quad (7.16)$$

Prvi uvjet definira ponašanje na prostornom rubu, a drugi na vremenskom rubu. Stoga se drugi uvjet naziva početni, a ne rubni uvjet.

Kosinusna transformacija jednačbe (7.15), pri čemu transformiramo prostornu varijablu x glasi

$$\frac{d}{dt} u_c(\omega, t) = -2 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=0} - 2\omega^2 u_c(\omega, t), \quad (7.17)$$

$$\frac{d}{dt} u_c(\omega, t) = 2k - 2\omega^2 u_c(\omega, t), \quad (7.18)$$

$$\frac{du_c}{dt} + 2\omega^2 u_c = 2k. \quad (7.19)$$

Dobiven izraz je linearna diferencijalna jednačba prvog reda čije rješavanje ovdje nećemo detaljno opisivati. Njenim rješavanjem slijedi

$$u_c(\omega, t) = \frac{k}{\omega^2} + Ae^{-2\omega^2 t}. \quad (7.20)$$

Iz početnog uvjeta slijedi

$$u_c(\omega, 0) = \int_0^{\infty} u(x, 0) \cos(\omega x) dx, \quad (7.21)$$

$$u_c(\omega, 0) = 0, \quad (7.22)$$

$$A = -\frac{k}{\omega^2}. \quad (7.23)$$

Konačan rješenje je:

$$u_c(\omega, t) = \frac{k}{\omega^2}(1 - e^{-2\omega^2 t}), \quad (7.24)$$

što u t -domeni poprima oblik:

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-2\omega^2 t}}{\omega^2} \cos(\omega x) d\omega. \quad (7.25)$$

8. Primjena sinusne transformacije na rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi

U ovom ćemo poglavlju pokazati da se kod rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednačbi na isti način može koristiti i sinusna transformacija.

Neka je zadana parcijalna diferencijalna jednačba oblika

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h(x, t), \quad (8.1)$$

uz početni uvjet $u(x, 0) = f(x)$ i rubni uvjet $u(0, t) = g(t)$ Ako primijenimo Fourierovu sinusnu transformaciju na izraz (8.1) dobivamo:

$$\frac{\partial U_s}{\partial t} + \omega^2 U_s = \omega g(t) + H_s(\omega, t), \quad (8.2)$$

što je linearna diferencijalna jednačba prvog reda, kao što je to bio slučaj u prethodnom primjeru. Konačno rješenje problema dobivamo istim postupkom kao i u prethodnom poglavlju.

Iz navedenog možemo zaključiti da se kosinusna transformacija koristi se za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi kad se funkcije ili rubni uvjeti ponašaju parno u odnosu na neku varijablu, odnosno ako je problem simetričan u odnosu na neku os. Sinusna transformacija koristi se kada rubni uvjeti ukazuju na neparnu simetriju, tj. kada postoji promjena znaka funkcije ili derivacije funkcije u odnosu na osi. Primjena ovih transformacija je posebno korisna za jednačbe u polubeskonačnim domenama.

9. Primjena diskretne kosinuse transformacije u kompresiji slikovnih datoteka

JPEG (Joint Photographic Experts Group) je jedan od najčešće korištenih formata za digitalne slike, posebno za fotografije. Razvijen je 1992. godine i postao je standard za kompresiju slikovnih datoteka zbog svoje sposobnosti da značajno smanji veličinu datoteke uz zadržavanje visoke kvalitete slike. Ovo poglavlje je obrađeno prema izvorima: [12] i [13].

JPEG koristi kompresiju s gubitkom podataka, što znači da se prilikom spremanja slike gube određene informacije. Ovaj proces smanjuje veličinu datoteke, ali može utjecati na kvalitetu slike, posebno ako se slika više puta otvara, uređuje i ponovno sprema. Korisnici mogu birati razinu kompresije prilikom spremanja JPEG slike. Viša razina kompresije rezultira manjom veličinom datoteke, ali i većim gubitkom kvalitete. Manja kompresija zadržava više detalja, ali povećava veličinu datoteke.

Temelj procesa kompresije JPEG slika je matematička transformacija zvana diskretna kosinusna transformacija (DCT). Svrha ove operacije je transformacija signala. U ovom je slučaju slika dvodimenzionalni signal koju će DCT transformirati u numeričke podatke i tako omogućiti slici da obuhvati kvantitativni oblik koji se može kompresirati. Signal slike se smatra trodimenzionalnim signalom. x -os i y -os predstavljaju dimenzije slike dok z -os označava vrijednost piksela na određenoj koordinati.

Prvi korak u JPEG kompresiji je podjela slike na male blokove, najčešće 8x8 blokove piksela. Svaki blok se tretira neovisno. Razlog za korištenje malih blokova je taj što je lakše komprimirati i efikasno obrađivati manje dijelove slike nego cijelu sliku odjednom.

Nakon podjele slike, na svaki blok piksela primjenjuje se 2D diskretna kosinusna transformacija (DCT). To znači da se pikseli u bloku transformiraju iz prostorne domene (gdje su prikazani kao razine svjetline ili boje) u frekvencijsku domenu. Niski frekvencijski koeficijenti (gornji lijevi dio) predstavljaju velike varijacije u slici, dok visoki frekvencijski koeficijenti (donji desni dio) predstavljaju sitne detalje i šum.

Nakon što se blok piksela transformira u frekvencijsku domenu pomoću DCT-a, slijedi kvantizacija koeficijenata. Kvantizacija smanjuje preciznost koeficijenata kako bi se eliminirali manje značajni visoko-frekvencijski koeficijenti (koji nose manje vizualno bitne informacije). Koeficijenti koji odgovaraju visokim frekvencijama (mali detalji) često postaju 0 tijekom kvantizacije, jer ljudsko oko nije osjetljivo na male promjene u visokim frekvencijama.

DCT omogućava da se velika količina podataka (blokovi piksela) sažme u manji broj značajnih koeficijenata, čime se smanjuje veličina datoteke. JPEG algoritam s DCT-om uklanja informacije koje ljudsko oko teško primjećuje (visoke frekvencije), čime se postiže značajna ušteda u veli-

čini bez primjetnog gubitka kvalitete slike. Visokofrekvencijski šum u slikama (sitni detalji ili nepravilnosti) može se smanjiti, što često rezultira estetski ugodnijim slikama.

Diskretna kosinusna transformacija (DCT) se koristi u JPEG kompresiji iz nekoliko razloga koji je čine dominantnom u odnosu na Fourierova ili sinusnu transformaciju. Ti se razlozi odnose na efikasnost kompresije, ponašanje funkcija i sposobnost ljudskog oka da percipira različite frekvencije.

Jedna od glavnih prednosti DCT-a nad Fourierovom transformacijom je ta što je DCT realna transformacija. Fourierova transformacija, s druge strane, uključuje kompleksne brojeve. U JPEG kompresiji, svi podaci su realni brojevi (vrijednosti piksela), pa bi Fourierova transformacija, koja proizvodi kompleksne brojeve, zahtijevala dodatno procesiranje kako bi se radilo s realnim podacima. Koristeći DCT, JPEG koristi samo realne kosinusne komponente, što smanjuje složenost i čini proces kompresije jednostavnijim.

DCT se pokazala kao bolja za kompresiju slike jer je kosinusna funkcija bolje prilagođena prirodi većine slika. Razlog je što su slike često parne u svojoj strukturi – tj. imaju simetriju koja je bolje opisana kosinusnim funkcijama nego sinusnim ili eksponencijalnim funkcijama. Slike, posebno prirodne, često imaju blage prijelaze i simetrije, što kosinusne funkcije mogu bolje modelirati, jer prirodni prizori rijetko sadrže oštre promjene koje bi odgovarale neparnim funkcijama. Stoga, DCT može efikasnije razložiti takve slike na niske frekvencijske komponente, što omogućava bolju kompresiju.

10. Zaključak

U ovom radu je opisana sinusna i kosinusna Fourierova transformacija, kao matematički alati koji igraju ključnu ulogu u analizi signala, osobito u domeni obrade signala i drugih srodnih područja. Njihova važnost proizlazi iz sposobnosti da efikasno razlože složene funkcije na osnovne frekvencijske komponente, omogućujući preciznu analizu, obradu i rekonstrukciju signala.

U drugom poglavlju, Fourierov red i Fourierov integral predstavljani su kao osnovni alati za razlaganje signala na njihove frekvencijske komponente. Fourierov red omogućuje razlaganje periodičnih signala u beskonačne zbrojeve sinusnih i kosinusnih funkcija, dok Fourierov integral proširuje ovu ideju na neperiodične signale, omogućujući analizu signala u kontinuiranoj frekvencijskoj domeni. Ova dva koncepta postavljaju temelj za dublje razumijevanje frekvencijske analize i naglašavaju važnost razlaganja signala na osnovne harmonične komponente, što je ključna ideja koja se provlači kroz cijeli rad.

Treće poglavlje fokusira se na Fourierovu transformaciju, koja omogućuje razlaganje bilo kojeg signala, bez obzira na njegovu periodičnost, u kontinuirani spektar frekvencija. Ova transformacija je ključna za razumijevanje mnogih fizikalnih procesa i signala, omogućujući inženjerima i znanstvenicima da efikasno analiziraju, obrađuju i rekonstruiraju signale u različitim područjima primjene.

U četvrtom poglavlju sinusna i kosinusna transformacija detaljno su razmotrene kao specifični slučajevi Fourierove transformacije. Ove transformacije omogućuju dodatnu fleksibilnost u analizi signala, posebno kada su signali simetrični ili kada se analiziraju rubni uvjeti. Sinusna transformacija koristi se za analizu neparnih funkcija, dok kosinusna transformacija analizira parne funkcije, čime se omogućava preciznija analiza signala koji posjeduju specifične simetrije. Njihova primjena je ključna u različitim tehničkim i znanstvenim disciplinama, uključujući obradu slike, zvuka i signalnih sustava.

Zadnja poglavlja se bave diskretnom transformacijom, koja je od vitalnog značaja u digitalnoj obradi signala te praktičnim primjenama ovih transformacija u rješavanju diferencijalnih jednadžbi i kompresiji slika. Diskretna transformacija omogućuje praktičnu primjenu Fourierovih tehnika u digitalnom svijetu, otvarajući vrata širokoj primjeni u tehnologijama kao što su digitalna obrada slike, zvuka, i komunikacijski sustavi.

Zaključno, ovaj rad pruža cjelovit pregled sinusne i kosinusne transformacije u kontekstu Fourierovih tehnika, naglašavajući njihovu univerzalnost i važnost u analizi signala. Od temelja u Fourierovom redu i integralu, preko opće Fourierove transformacije, pa sve do specifičnih sinusnih i kosinusnih transformacija te njihove diskretne verzije, ovi alati predstavljaju ključne elemente u modernoj matematičkoj analizi i obradi signala. Njihova primjena u rješavanju diferencijalnih jednadžbi i kompresiji slika naglašava njihovu široku korisnost i neizostavnost u mnogim granama

znanosti i tehnologije. Kroz ovaj rad pokazano je kako ove transformacije omogućuju napredak u analizi i obradi signala, olakšavajući razvoj novih tehnologija i inovacija u različitim područjima.

Posebno treba istaknuti da smo pokazali kako su sinusna i kosinusna transformacija optimalne za Fourierovu analizu signala kod kojih je izražena simetrija parnog ili neparnog tipa, te signala kod kojih je optimalno izbjeći kompleksnu aritmetiku.

Bibliografija

- [1] "Joseph Fourier", s Interneta, <https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph-Fourier>, 17. srpnja 2024.
- [2] "Bernhard Riemann", s Interneta, <https://geniuses.club/genius/bernhard-riemann>, 17. srpnja 2024.
- [3] Oduenyi, V.: "Peter Lejeune Dirichlet", s Interneta, <https://www.sapaviva.com/peter-lejeune-dirichlet/>, 17. srpnja 2024.
- [4] Kreyszig, E.; "Advanced engineering mathematics", Laurie Rosatone, Sjedinjene Američke Države, 2011.
- [5] Sučić, V.: "Fourierova analiza periodičnih signala", prezentacija, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Rijeka, 22.05.2022.
- [6] Sučić, V.: "Fourierova analiza neperiodičnih signala", prezentacija, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Rijeka, 22.05.2022.
- [7] Bracewell, R.; "The Fourier Transform and Its Applications", McGraw-Hill Book Co., Sjedinjene Američke Države, New York, 2000.
- [8] Dym, H.; McKean, H.: "Fourier Series and Integrals", Academic Press, Inc., Sjedinjene Američke Države, New York, 1972.
- [9] Kammler, D.: "A First Course in Fourier Analysis", Cambridge University Press, Ujedinjeno Kraljevstvo, Cambridge, 2007.
- [10] Olson, T.: "Applied Fourier Analysis", Birkhäuser, Sjedinjene Američke Države, Boston, 2017.
- [11] Pratt, W.: "Introduction to the Discrete Cosine Transform", Academic Press, Inc., Sjedinjene Američke Države, San Diego, 1991.
- [12] Rao, K.; Yip, P.: "The Discrete Cosine Transform: Theory and Application", Academic Press, Inc., Sjedinjene Američke Države, New York, 1990.
- [13] Yip, P.: "Sine and Cosine Transforms", Academic Press, Inc., Sjedinjene Američke Države, San Diego, 1989.

Sažetak i ključne riječi

Ovaj rad opisuje Fourierovu sinusnu i kosinusnu transformaciju. Prvih nekoliko poglavlja opisuje najosnovnije pojmove potrebne za razumijevanje opće Fourierove transformacije. Nadalje, se rad fokusira na sinusnu i kosinusnu Fourierovu transformaciju te njihova svojstva. Zadnjih nekoliko poglavlja opisuje primjene kosinusne i sinusne transformacije u rješavanju diferencijalnih jednažbi i kompresiji JPEG slika.

Ključne riječi: Fourierova transformacija, spektri, diskretna transformacija, sinus, kosinus, diferencijalna jednažba, JPEG slike, Eulerova jednažba, frekvencijska domena

Summary and key words

This paper describes the Fourier sine and cosine transform. The first few chapters describe the most basic concepts needed to understand the general Fourier transform. Furthermore, the paper focuses on sine and cosine Fourier transforms and their properties. The last few chapters describe the application of cosine and sine transformations in solving differential equations and compression of JPEG images.

Keywords: Fourier transformation, spectra, discrete transformation, sine, cosine, differential equation, JPEG images, Euler's equation, frequency domain