

# KOMPARATIVNA ANALIZA TEHNIKA VIZUALIZACIJE I METODA TRANSFORMACIJE RASPRŠENIH VIŠEDIMENZIJSKIH EKSPERIMENTALNIH PODATAKA

---

Cvijović, Luka

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:190:978517>

Rights / Prava: [Attribution 4.0 International](#) / [Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-12**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Engineering](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Sveučilišni diplomski studij strojarstva

Diplomski rad

**KOMPARATIVNA ANALIZA TEHNIKA VIZUALIZACIJE  
I METODA TRANSFORMACIJE RASPRŠENIH  
VIŠEDIMENZIJSKIH EKSPERIMENTALNIH PODATAKA**

Rijeka, rujan 2024.

Luka Cvijović

0069083806

SVEUČILIŠTE U RIJECI  
TEHNIČKI FAKULTET  
Sveučilišni diplomski studij strojarstva

Diplomski rad

**KOMPARATIVNA ANALIZA TEHNIKA VIZUALIZACIJE  
I METODA TRANSFORMACIJE RASPRŠENIH  
VIŠEDIMENZIJSKIH EKSPERIMENTALNIH PODATAKA**

Mentor: izv. prof. dr. sc. Kristina Marković

Komentor: doc. dr. sc. Marko Perčić

Rijeka, rujan 2024.

Luka Cvijović

0069083806

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

POVJERENSTVO ZA DIPLOMSKE ISPITE

Rijeka, 14. ožujka 2024.

Zavod: **Zavod za konstruiranje**  
Predmet: **Inženjerska vizualizacija**  
Grana: **2.16.02 mikro i nanotehnologije**

## ZADATAK ZA DIPLOMSKI RAD

Pristupnik: **Luka Cvijović (0069083806)**  
Studij: Sveučilišni diplomski studij strojarstva  
Modul: Konstruiranje i mehatronika

Zadatak: **Komparativna analiza tehnika vizualizacije i metoda transformacije raspršenih višedimenzijskih eksperimentalnih podataka**

Opis zadatka:

Na temelju dostupne literature istražiti i opisati vizualizacijske tehnike primjenjive za višedimenzijske podatke. Detaljno opisati i primijeniti metode transformacije raspršenih višedimenzijskih podataka dobivenih eksperimentalnim putem, kratko se osvrnuti i na eksperimentalnu metodologiju kojom su dobiveni korišteni podaci. Izvršiti statističku komparativnu analizu pojedinih metoda transformacije raspršenih podataka. Primijeniti višedimenzijske metode vizualizacije na transformiranim podacima i detaljno opisati njihovu implementaciju, te prednosti i nedostatke pojedine tehnike.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Zadatak uručen pristupniku: 20. ožujka 2024.

Mentor:

Predsjednik povjerenstva za  
diplomski ispit:

---

Izv. prof. dr. sc. Kristina Marković

---

Izv. prof. dr. sc. Igor Bonefačić

---

Dr. sc. Marko Perčić (komentor)



## **IZJAVA**

Izjavljujem da sam prema članku 8. Pravilnika o diplomskom radu, diplomskom ispitu i završetku studija diplomskog sveučilišnog studija Tehničkog fakulteta u Rijeci, samostalno izradio diplomski rad naslova „Komparativna analiza tehnika vizualizacije i metoda transformacije raspršenih višedimenzijskih eksperimentalnih podataka“ pod vodstvom izv. prof. dr. sc. Kristine Marković i doc. dr. sc. Marka Perčića..

## **ZAHVALA**

Zahvaljujem se mentorici izv. prof. dr. sc. Kristini Marković na mentorstvu i vodstvu kroz zadaće vezane za izradu ovog diplomskog rada. Također se zahvaljujem doc. dr. sc. Marku Perčiću na ukazanoj pomoći kada god mi je ona bila potrebna. Zahvaljujem se svojoj obitelji na motivaciji i potpori kroz cijelokupno školovanje.

## SAŽETAK

Za diplomski rad „Komparativna analiza tehnika vizualizacije i metoda transformacije raspršenih višedimenzijskih eksperimentalnih podataka“ obrada eksperimentalnih podataka je izvršena u programu Matlab. Eksperimentalni podaci su dobiveni LFM metodom na Sveučilišnim odjelima u Rijeci. Obrada podataka je izvršena u aplikacijama spomenutog programa '*Curve fitter*' i '*Regression learner*', presjecima podataka te interpolacijskim metodama, Kriging i prirodna susjedna interpolacija, u samom programu. U radu su izloženi dobiveni grafički i analitički rezultati spomenutih aplikacija i interpolacijskih metoda.

**Ključne riječi:** eksperimentalni podaci, Matlab, LFM metoda, obrada podataka, interpolacijske metode

## **ABSTRACT**

For the masters thesis "Comparative analysis of visualization techniques and methods of transformation of scattered multidimensional experimental data", processing of experimental data was performed in the Matlab program. Experimental data were obtained using the LFM method at the University Departments in Rijeka. Data processing was performed in the applications of the mentioned program 'Curve fitter' and 'Regression learner', cross-sections of data and interpolation methods, Kriging and natural neighbor interpolation, in the program itself. The work presents the obtained graphical and analytical results of the mentioned applications and interpolation methods.

**Keywords:** experimental data, Matlab, LFM method, data processing, interpolation methods

# SADRŽAJ

1	UVOD .....	1
2	METODE OBRADJE PODATAKA ZA VIZUALIZACIJU.....	3
2.1	Podaci dobiveni eksperimentalnim mjerenjem .....	3
2.1.1	LFM metoda .....	5
3	STATISTIČKA KARAKTERIZACIJA PODATAKA .....	9
3.1	Deskriptivna statistika.....	9
3.2	Metrike procjene .....	10
3.2.1	Srednja kvadratna pogreška (MSE).....	11
3.2.2	Korijen srednje kvadratne pogreške (RMSE).....	11
3.2.3	Srednja apsolutna pogreška (MAE).....	12
3.2.4	Koeficijent determinacije ( $R^2$ ).....	13
4	INTERPOLACIJSKE METODE .....	14
4.1	Linearna interpolacija.....	14
4.2	Kubična interpolacija .....	15
4.3	Interpolacija najbližeg susjeda .....	16
4.4	Kriging .....	17
4.5	Prirodna susjedna interpolacija .....	19
5	OBRADA PODATAKA ZA VIZUALIZACIJU .....	20
6	REZULTATI OBRADJE PODATAKA I VIZUALIZACIJA .....	24
6.1	Prikaz sirovih podataka .....	25
6.2	Curve fitting .....	27
6.2.1	Linearna interpolacija.....	27
6.2.2	Kubična interpolacija .....	39
6.2.3	Interpolacija najbližeg susjeda .....	52
6.3	Linearno regresijsko učenje .....	64
6.3.1	Linearno regresijski model.....	64
6.3.2	Linearno interakcijski regresijski model .....	71
6.3.3	Robusno linearni regresijski model.....	78
6.3.4	Stepenasto linearni regresijski model.....	86
6.4	Presjeci podataka u 4D.....	93
6.5	Kriging metoda.....	98

6.6	Prirodna susjedna interpolacija (Voronoi dijagram) .....	101
7	STATISTIČKA ANALIZA OBRAĐENIH PODATAKA .....	103
7.1	Rezultati metričkih procjena za Krigingovou metodu .....	103
7.2	Statističke karakterizacije predviđenih podataka .....	104
8	ZAKLJUČAK .....	107
9	DODATAK .....	110
9.1	Matlab kod za presjeke podataka .....	110
9.2	Matlab kod za Kriging metodu .....	114
9.3	Matlab kod za Voronoi.....	117
	LITERATURA .....	121
	POPIS SLIKA .....	123
	POPIS TABLICA.....	125

# 1 UVOD

Vizualizacija ili „Vizualizirati“ znači oblikovati mentalnu viziju, predodžbu, ili sliku (nečega što nije vidljivo ili nazočno vidu, neke apstrakcije) to jest učiniti vidljivom umu ili mašti. [1]

Nova definicija vizualizacije koja obuhvaća alat ili metodu za interpretaciju podataka predodžbe pohranjene u računalu i alata za stvaranje predodžbi iz složenih višedimenzijskih cjelina podataka. [2]

U radu će se obraditi raspršeni podaci dobiveni eksperimentalnim mjerenjem pomoću programa Matlab. Raspršeni podaci su podatkovne točke koje nisu ravnomjerno raspoređene ili usklađene prema jasnom obrascu. To se može dogoditi u različitim kontekstima, kao što su znanstveni eksperimenti, ankete ili mjerenja u stvarnom svijetu, gdje se podatkovne točke mogu nepravilno rasporediti po različitim vrijednostima varijable.

Raspršeni uzorci podataka susreću se u mnogim područjima poslovanja, znanosti i inženjerstva. Tehnika vizualizacije se koristi za kreiranje i rukovanje grafičkim prikazom iz seta podataka. Neke će tehnike biti pogodne samo za specifične primjene, dok su druge izvornije i mogu se koristiti za mnogo primjena. Treba uvijek imati na umu da cilj vizualizacije nije razumijevanje podataka nego razumijevanje fenomena koji oni predstavljaju. [3]

Dostupne su mnoge metode interpolacije za konstruiranje empirijskog modela iz raspršenih skupova podataka. Karakteristike podataka koje se vizualiziraju važne su razmatranje pri odabiru interpolanta za konstrukciju empirijskog modela. Postoji niz karakteristika podataka koje treba istražiti kao što su prostorna distribucija (1D, 2D, 3D), vrsta podataka (skalar, vektor itd.), distribucija podataka (raspršeni ili uređeni podaci), koordinatni sustav, mjerilo, kontinuitet itd. Potrebno je to sve istražiti kako bi se dobio odgovarajući model i uvid u fizikalno ponašanje promatranog sustava.

Osim navedenih značajki, naša vizualizacija ne smije biti kontradiktorna s poznatim karakteristikama podataka, inače vizualizacija neće biti pouzdana. Problem vizualizacije na temelju inherentnih karakteristika podataka postoji u mnogim domenama primjene. Primjeri nekoliko takvih značajki su pozitivnost, monotonost, konveksnost i granice koje se susreću u raznim znanstvenim i inženjerskim domenama.

Postoje nekoliko ciljeva vizualizacije, jedan od njih je fokusiranje korisnika na određenu interesnu domenu dok se izvodi značenje iz vizualne predodžbe se zove cilj (zadatak) vizualizacije. Također vizualizacija i dostupni alati moraju odgovarati korisnikovom zadatku.

Kod znanstvene vizualizacije ciljevi su istraživanje/iskorištavanje podataka i informacija, poboljšanje razumijevanja koncepata i procesa, dobivanje novih (neočekivanih, dubokih) uvida, učiniti nevidljivo vidljivim, efektni prikaz važnih značajki, kontrola kakvoće simulacija, mjerenje, povećanje znanstvene produktivnosti i sredstvo komuniciranja/suradnje.

Motivacija vizualizacije je sažimanje mnogo podataka u jednu sliku, otkrivanje korelacija između raznih veličina i u prostoru i u vremenu, opremanje novih struktura osim onih koje su već poznate iz prethodnih proračuna i otvaranje mogućnosti za vidjeti podatke selektivno i interaktivno u „stvarnom vremenu“ („stvarno vrijeme“ znači da će izabrani vremenski korak biti vizualiziran čim je proračunat).

Uspjeh vizualizacije ne ovisi samo o rezultatima, nego također ovisi i o okruženju u kojem se odvija. To okruženje određuje dostupna strojna oprema, kao grafičke radne stanice, prostor na disku, tiskači u boji, video strojna oprema i programska oprema za vizualizaciju. Pri tome se moraju uzeti u obzir mnogi različiti problemi vezani uz programsku opremu za vizualizaciju: korisničko sučelje, model programiranja, ulaz i izlaz podataka te lakoća rukovanja podacima. Način opskrbljenosti tim pojedinostima određuje pogodnost i efektivnost korištenja opreme. [2]



## **2 METODE OBRADE PODATAKA ZA VIZUALIZACIJU**

Analiza podataka je proces provjere, čišćenja, transformacije i modeliranja podataka s ciljem otkrivanja korisnih informacija, informiranja zaključaka i potpore donošenju odluka. Ima višestruke aspekte i pristupe, obuhvaćajući različite tehnike pod raznim nazivima, a koristi se u različitim domenama poslovanja, znanosti i društvenih znanosti. U današnjem poslovnom svijetu, analiza podataka igra ulogu u donošenju znanstvenih odluka i pomaže tvrtkama da djeluju učinkovitije.

Analiza podataka je proces dobivanja neobrađenih podataka i njihovog naknadnog pretvaranja u informacije korisne za donošenje odluka od strane korisnika. Podaci se prikupljaju i analiziraju kako bi se odgovorilo na pitanja, testirale hipoteze ili opovrgle teorije. [4]

Postoje razna mjerenja te metode kojima se obrađuju podaci. U ovome poglavlju dotaknuti će se teme vezane za tribološka mjerenja i LFM metodu.

Nakon će se obraditi eksperimentalni podaci dobiveni LFM metodom. Kod mjerenja stroj je koristio varijable temperature, sile i brzine te se kao rezultanta dobila sila trenja za uzorke materijala nehrđajućeg čelika i alumijevog oksida. Ti rezultati će se u budućim poglavljima detaljno obraditi.

### **2.1 Podaci dobiveni eksperimentalnim mjerenjem**

Prethodno spomenuta mjerenja su iz područja tribologije, tj. nanotribologije. Tribologija je interdisciplinarna tema koja uključuje različite grane znanosti i tehnologije, poput strojarstva, znanosti o materijalima, fizike, kemije, biologije i znanosti o hrani. Njena svrha je proučavanje međusobno povezanih površina u pokretu i mjerenje svojstava kao što su trenje, trošenje i abrazija. Pri projektiranju uređaja na nanomjeri razmatranje tribologije je posebno važno jer visok omjer površine povećava probleme s trenjem i trošenjem.

Razumijevanje površinskih promjena triboloških svojstava na nanomjernoj razini omogućiti će ili povećano ili smanjeno trenje u većem opsegu nego što to trenutno omogućuje makroskopsko podmazivanje i adhezija. Za procjenu triboloških svojstava na nanoskali se koristi mikroskop atomske sile koja je tehnike mikroskopije skenirajuće sonde. Vrh mikroskopa atomske sile omogućuje kontakt s čvrstom ili podmazanom površinom kako bi se proučavala svojstva kao što

su adhezija, trenje i trošenje. Pružene informacije mogu se koristiti za daljnje razumijevanje nanotribologije i predviđanje kako to utječe na površinske interakcije nanomaterijala. Trenutne nanotehnološke primjene tribologije dovode do razvoja novih tehnika isporuke lijekova, biosenzora, sustava za snimanje podataka i mikroprojektor.

Nanotehnološke primjene tribologije nalazimo kod biosenzora i isporuke lijekova, za pohranu podataka te za mikroprojekte.

Tribosustav se sastoji od spojnih površina i maziva (ako postoji). Suhi tribosustavi, kao što ime sugerira, su oni koji nemaju mazivo između spojnih površina, kao što su:

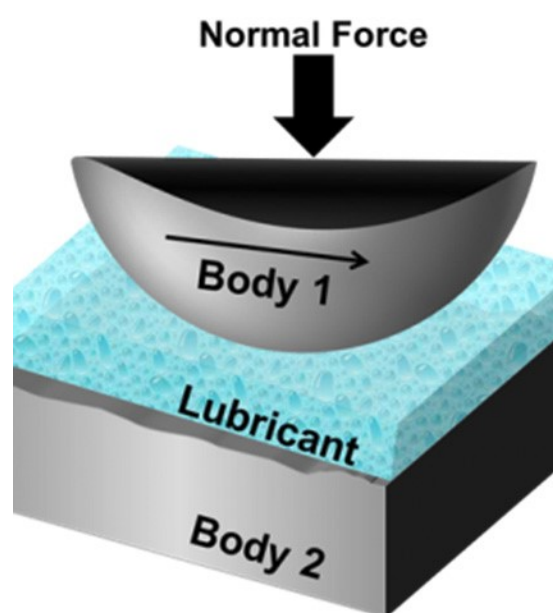
- guma i cesta
- prst i pametni telefon
- potplat cipele i pod

Sustavi s podmazivanjem, s druge strane, sastoje se od dvije spojene površine s mazivom između.

Primjeri podmazanih tribosustava su:

- sustavi koji se sastoje od pera, tinte i papira,
- hrskavica, sinovijalna tekućina i hrskavica,
- kapak, suzni film i rožnica,
- bok zupčanika, ulje mjenjača i bok mjenjača. [5]

Primjer jednog tribosustava je prikazan na slici 2.1.



Slika 2.1 Tribo-sustav [6]

Na izvedbu tribosustava utječu mnogi čimbenici kao što su temperatura, hrapavost i površinsko stanje spojenih površina, vlažnost, kontaktni tlak, relativna brzina i vrsta gibanja. Na tribometru je moguće simulirati ponašanje tribosustava. [5]

U sljedećem potpoglavlju biti će opisana metoda kojom su prikupljeni eksperimentalni podaci.

### 2.1.1 LFM metoda

U ovome poglavlju će se detaljno teorijski objasniti metoda kojom su prikupljeni eksperimentalni podaci.

Mikroskopija lateralne sile (LFM) je derivat mikroskopije atomske sile (AFM). Kod LFM-a vrh se održava u kontaktu s površinom uzorka i 'uvijanje konzole' se mjeri uz vertikalni otklon (tj. pristup koji je uobičajeniji za AFM).

Eksperimentalno analizirani uzorci u ovom radu pažljivo su odabrani kako bi bili reprezentativni specifičnih karakterističnih svojstava široko korištenih tankih flimova i čine: aluminijev oksid (aluminij ili  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) i X39CrMo17-1 nehrđajući čelik (u daljnjem tekstu, radi sažetosti, označen kao SS). Uzorci tankog filma iznimno su tanki slojevi materijala, često debljine od samo nekoliko nanometara do nekoliko mikrometara, nanoseni na supstrat (čvrsta površina) radi proučavanja njihovih svojstava ili za korištenje u raznim primjenama. Ovi filmovi mogu biti sastavljeni od metala, poluvodiča, izolatora ili drugih materijala i obično se koriste u istraživanju i tehnologiji.

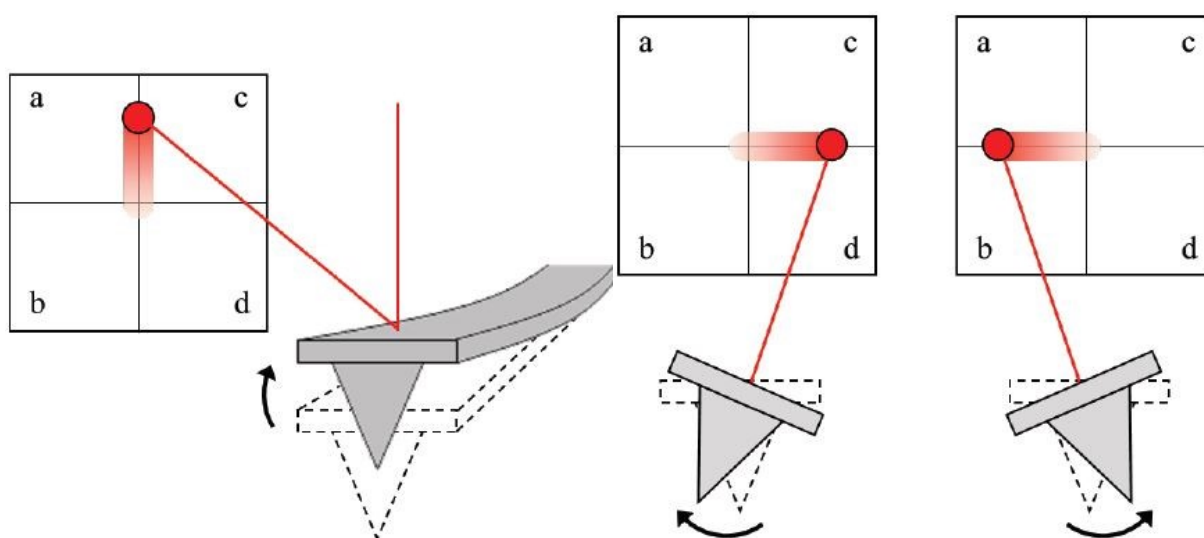
Zapravo,  $\text{Al}_2\text{O}_3$  nije samo dobra mehanička svojstva (osobito tvrdoću i čvrstoću), zbog čega se široko koristi u MEMS tehnologiji (npr. u pakiranju MEMS uređaja), kao i u integriranom krugu (IC) tehnologiju, ali se također koristi u obliku tankog filma za premaze u implantatima, za izolaciju primjene i kada trošenje treba svesti na minimum. SS je izabran kao najrašireniji inženjerski materijal opće namjene. [7]

Granice fizikalnih komponenti temperature, normalne sile i brzine su bile sljedeće, temperatura je bila od 20 do 80 °C, normalna sila od 10 do 150 nN te brzina od 5 do 500 nm/s.

Metode mikroskopije atomske sile (AFM) su dostupni za karakterizaciju mehaničkih svojstava na velikom broju uzoraka, uključujući fazno oslikavanje putem načina dodirivanja, nanomehaničkog načina PinPoint, spektroskopije udaljenosti sile (FD), mikroskopije modulacije sile i nanoindentacije. Osim ovih načina koji koriste otklon konzole izvan ravnine za karakterizaciju materijala, otkrivanje sila trenja u ravnini može razriješiti mehanička svojstva uzorka specifična

za materijal. U AFM-u, svojstva trenja mogu se istražiti pomoću mikroskopije lateralne sile (LFM). LFM se može koristiti za proučavanje razlika u sastavu materijala na slojevima premaza, svojstvima maziva, čvrstoći prijanjanja na strukturama s uzorkom i tako dalje.

Princip rada LFM-a temelji se na kontaktnom AFM-u. Međutim, dok u kontaktnom načinu rada mjerimo savijanje konzole u okomitom smjeru za prikupljanje topografskih informacija, LFM prati okomiti otklon za topografske informacije i torziju konzole u bočnom smjeru za podatke o trenju. Stoga je detektirano kretanje AFM vrha u LFM okomito na duljinu konzole. Bočna torzija konzole rezultat je sile trenja koja djeluje na konzolu dok skenira po površini uzorka. Veličina ove torzije određena je koeficijentom trenja između AFM vrha i uzorka, topografijom površine, smjerom skeniranja i konstantom bočne opruge konzole. LFM je posebno koristan za proučavanje sastava heterogenih uzoraka. Ovdje LFM prikazuje distribuciju materijala u stvarnom prostoru s rezolucijom u nanoskali. Shematski crtež je prikazan na slici 2.2. [8]



Slika 2.2 Shematski crtež položaja točke zrake na PSPD-u zbog (a) okomitog otklona konzole za topografsko snimanje i (b) bočne torzije konzole za LFM snimanje. [8]

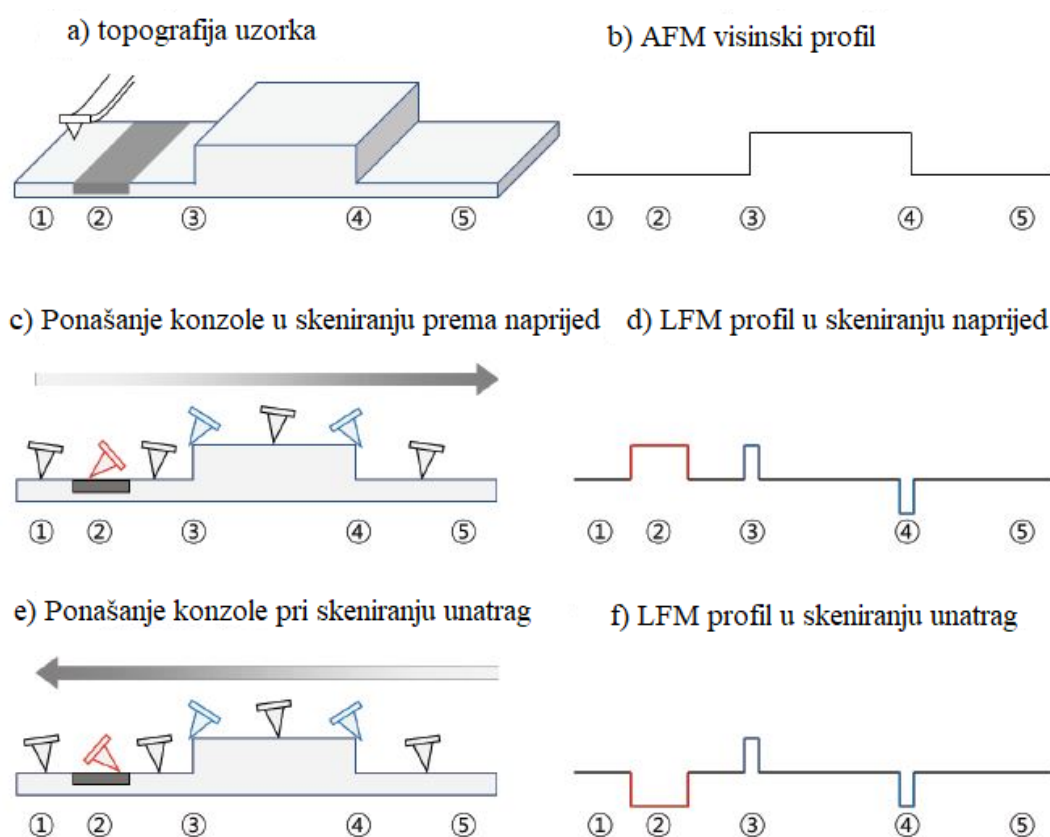
Budući da LFM mjeri pomak konzole u bočnom i okomitom smjeru za istovremeno trenje i topografsko snimanje, koristi se fotodetektor osjetljiv na položaj (PSPD) s četiri domene (četveroćelijski), kao što je prikazano na slici 1. Općenito, u AFM-u, topografija površine uzorka mjeri se preko "bi-cell" signala četveroćelijskog PSPD-a, koji se obično naziva vertikalni signal (A-B). Ovaj signal potječe iz razlike između gornjih ćelija (a+c) i donjih ćelija (b+d) PSPD-a s četiri ćelije, kao što je prikazano na slici 2.2.

Informacije o topografiji =  $(a + c) - (b + d)$

LFM signal, koji se izravno odnosi na promjenu površinskog trenja, odgovara bočnoj torziji konzole i dan je kao razlika između lijevih ćelija ( $a+b$ ) i desnih ćelija ( $c+d$ ).

Podaci o sili trenja =  $(a + b) - (c + d)$

U LFM, rubovi topografskih značajki na površini uzorka, kao i različiti materijali u heterogenom uzorku mogu uvesti kontrast, kao što je prikazano na slici 2. Budući da na LFM signal utječu i koeficijent trenja materijala i topografske značajke, razumijevanje njihovih doprinosa za LFM podatke je važno. Slika 2.3 prikazuje kako se pomak konzole mijenja zbog trenja materijala i topografije. [8]



Slika 2.3 Prikaz pomaka konzole i LFM signala uzrokovanog topografskim značajkama i kontrastom materijala. [8]

Struktura površine uzorka a) i odgovarajući topografski profil iz vertikalnog otklona konzole (b). Sivo osjenčano područje u a) predstavlja drugačiji sastav materijala s kontrastom trenja. Bočna

torzija konzole tijekom skeniranja prema naprijed c) i odgovarajući LFM signal d). Bočna torzija konzole tijekom skeniranja unatrag e) i odgovarajući LFM signal f). d) i f): LFM signal uzrokovan topografskom značajkom prikazan je plavom bojom, LFM signal uzrokovan kontrastom materijala prikazan je crvenom bojom.

Slika 2 a) prikazuje ravni uzorak s kutnom izbočinom kao jedinom topografskom značajkom na inače glatkoj površini. Rubovi značajki označeni su kao regija (3) i (4). Sivo osjenčano područje označeno brojem (2) predstavlja drugačiji sastav materijala s relativno visokim koeficijentom trenja. Visinski profil AFM koji odgovara vertikalnom otklonu konzole prikazan je na b). Slike 2 c) i e) prikazuju ponašanje konzole dok nailazi na topografsku značajku, kao i područje s različitim skeniranjem slijeva na desno (naprijed) odnosno zdesna nalijevo (natrag). Profili LFM signala u smjeru skeniranja naprijed i natrag prikazani su u d) odnosno f). Promjene u bočnoj torziji konzole zbog kontrasta u sili trenja između AFM vrha i uzorka označene su crvenom bojom u području (2). Ovo područje (2) ne razlikuje se od područja (1) u signalu visine. Međutim, postoji jasan kontrast u LFM signalu. Prilikom skeniranja prema naprijed, povećanje relativnog koeficijenta trenja uzrokovat će nagnjanje konzole na desnu stranu, čime će se povećati LFM signal. Nasuprot tome, kada je smjer skeniranja obrnut, konzola će se nagnuti na lijevu stranu, što dovodi do smanjenja LFM signala u ovom području.

Područja (3) i (4) na slici 2 označavaju rubove topografske značajke, koja utječe na LFM signal zbog promjene visine površine uzorka. Tijekom skeniranja, izbočina sa strmim rubom će uvrnuti konzolu. Ovo uvijanje rezultira povećanjem bočnog signala kao što se vidi u točki (3) na slici 2 (d) i (f). Slično, LFM signal se smanjuje kada sonda naiđe na silazni korak kao što je prikazano u točki (4). Međutim, treba napomenuti da LFM signal induciran topografijom u područjima (3) i (4), označenim plavom bojom, održava isti smjer nagiba konzole bez obzira na smjer skeniranja. Stoga je moguće razlikovati LFM signal uzrokovan značajkama topografije i LFM signal uzrokovan razlikom u signalu trenja zbog materijalnih heterogenosti usporedbom LFM skeniranja naprijed i nazad. Štoviše, učinak topografije može se minimizirati oduzimanjem LFM signala naprijed od LFM signala unatrag ili obrnuto. [8]

### 3 Statistička karakterizacija podataka

U ovom poglavlju će se izvršiti statistička karakterizacija podataka kako bi se bolje razumjela teorija iza obrade podataka te na koji način se ti podaci mogu karakterizirati raznim oblicima statistike.

Statistika je znanstvena disciplina koja se bavi skupljanjem, razvrstavanjem, uređivanjem podataka, donošenjem određenih zaključaka o podacima te predviđanjem na osnovi dobivenih zaključaka. Statistika se često, iako ne mora, prikazuje u obliku tablice, grafikona ili grafa.

Statistika igra ključnu ulogu u vizualizaciji podataka pružajući analitičku osnovu za tumačenje i komuniciranje obrazaca, trendova i uvida u podatke. Statistika i vizualizacija podataka se presijecaju na različite načine koji će biti detaljnije objašnjeni u sljedećim poglavljima. [9]

U sljedećim potpoglavljima će se opisati deskriptivna statistika, diskretna i kontinuirana distribucija vjerojatnosi, ključni koncepti i svojstva te metrike procjene.

#### 3.1 Deskriptivna statistika

Deskriptivna statistika se bavi razvrstavanjem, uređivanjem i određivanjem numeričkih pokazatelja u statističkom skupu. Odnosi se na skup metoda koje se koriste za sažimanje i opisivanje glavnih značajki skupa podataka, kao što su njegova središnja tendencija, varijabilnost i distribucija. Ove metode pružaju pregled podataka i pomažu identificirati obrasce i odnose.

Mjere središnje tendencije su statističke mjere koje opisuju središte ili prosjek skupa podataka. Oni daju jednu vrijednost koja predstavlja tipičnu ili središnju vrijednost oko koje se podatkovne točke grupiraju. Mjere središnje tendencije su sljedeće:

1. Srednja vrijednost (prosjek): aritmetički prosjek skupa vrijednosti, izračunava se kao zbroj svih vrijednosti podijeljen s brojem vrijednosti i osjetljiva je na ekstremne vrijednosti.
2. Medijan: srednja vrijednost u skupu podataka kada je poredan, manje pod utjecajem ekstremnih vrijednosti u usporedbi s prosjekom te je prikladan za iskrivljene distribucije.
3. Mod: vrijednost koja se najčešće pojavljuje, distribucija može biti unimodalna (jedan mod), bimodalna (dva moda) ili multimodalna (više od dva moda).

Mjere varijabilnosti, također poznate kao mjere širenja ili disperzije pružaju informacije o tome koliko su raspoređene vrijednosti u skupu podataka. Ključne mjere varijabilnosti u deskriptivnoj statistici su:

1. Raspon: razlika između maksimalne i minimalne vrijednosti, osjetljiv je na ekstremne vrijednosti.
2. Varijanca: prosjek kvadrata razlika od srednje vrijednosti, daje mjeru koliko su vrijednosti raspoređene te je osjetljivo na ekstremne vrijednosti.
3. Standardna devijacija: kvadratni korijen varijance, mjeri prosječnu udaljenost od srednje vrijednosti.

Regresijska analiza: predviđa vrijednost jedne varijable na temelju vrijednosti druge. Jednostavna linearna regresija uključuje jednu prediktorsku varijablu, višestruka linearna regresija uključuje više prediktora. [10]

### **3.2 Metrike procjene**

U ovome potpoglavlju biti će objašnjeni sljedeći pojmovi, srednja kvadratna pogreška (MSE), korijen srednje kvadratne pogreške (RMSE), srednje apsolutne pogreške (MAE) i koeficijent determinacije ( $R^2$ ). Ovi pojmovi će se koristiti kasnije u statističkoj analizi obrađenih podataka.

Metrike procjene ključni su u strojnom učenju, statistici i modeliranju jer pružaju kvantitativni način mjerenja i usporedbe izvedbe različitih modela. Ove metrike omogućuju nam objektivnu procjenu koliko dobro model predviđa ili odgovara podacima, što nas vodi u odabiru optimalnog modela koji uravnotežuje točnost i složenost. Oni također pomažu identificirati i ublažiti probleme kao što su pretjerano ili nedovoljno uklapanje, osiguravajući da se model dobro generalizira na nove, neviđene podatke. Nudeći uvid u ponašanje modela, metrika procjene omogućuje kontinuirano poboljšanje i fino podešavanje, čineći predviđanja pouzdanijima. Štoviše, oni služe kao standardizirani način komuniciranja performansi modela dionicima, osiguravajući da modeli nisu samo teoretski ispravni, već i praktično učinkoviti u stvarnim aplikacijama. Bez ovih mjernih podataka bilo bi teško mjeriti učinkovitost modela ili pratiti njegovo poboljšanje tijekom vremena. [11]



### 3.2.1 Srednja kvadratna pogreška (MSE)

Srednja kvadratna pogreška (MSE) prosječna je kvadratna razlika između vrijednosti promatrane u statističkoj studiji i vrijednosti predviđenih modelom. Kada se promatranja uspoređuju s predviđenim vrijednostima, potrebno je kvadrirati razlike jer će neke vrijednosti podataka biti veće od predviđanja (pa će njihove razlike biti pozitivne), a druge će biti manje (pa će njihove razlike biti negativne). S obzirom na to da je vjerojatnost da će opažanja biti veća od predviđenih vrijednosti kao i manja, razlike bi se povećale na nulu. Kvadriranje ovih razlika eliminira ovu situaciju. Formula za srednju kvadratnu grešku je:

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n \sum (y_i - p_i)^2}{n} \quad (3.8)$$

Gdje je:

- $y_i$  - i-ta opažena vrijednost,
- $p_i$  - odgovarajuća predviđena vrijednost za  $y_i$ ,
- $n$  - broj opažanja. [11]

Model s manjom srednjom kvadratnom pogreškom točnije predviđa ovisne vrijednosti za vrijednosti neovisne varijable. [11]

### 3.2.2 Korijen srednje kvadratne pogreške (RMSE)

Korijen srednje kvadratne pogreške ili korijen srednje kvadratne devijacije jedna je od najčešće korištenih mjera za procjenu kvalitete predviđanja. Pokazuje koliko daleko predviđanja odstupaju od izmjerenih stvarnih vrijednosti koristeći euklidsku udaljenost.

Za izračunati RMSE potrebno je izračunati rezidual (razlika između predviđanja i istine) za svaku podatkovnu točku. RMSE se obično koristi u aplikacijama za nadzirano učenje, jer RMSE koristi i treba stvarna mjerenja na svakoj predviđenoj podatkovnoj točki. Korijen srednje kvadratne pogreške može se izraziti kao:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \|y_i - \hat{y}_i\|^2}{n}} \quad (3.9)$$

Gdje je:

- $n$  - broj podatkovnih točaka,
- $y_i$  -  $i$ -to mjerenje,
- $\hat{y}_i$  - njegovo odgovarajuće predviđanje. [11]

Korijen srednje kvadratne pogreške se koristi za procjenu količine pogreške u regresiji ili drugom statističkom modelu. Vrijednost nula znači da predviđene vrijednosti savršeno odgovaraju stvarnim vrijednostima, ali to nikada nećete vidjeti u praksi. Niske RMSE vrijednosti pokazuju da model dobro odgovara podacima i ima preciznija predviđanja. Suprotno tome, više vrijednosti sugeriraju više pogrešaka i manje precizna predviđanja. [11]

### 3.2.3 Srednja apsolutna pogreška (MAE)

Srednja apsolutna pogreška (MAE) mjera je prosječne veličine pogrešaka u zbirci predviđanja, ne uzimajući u obzir njihov smjer. Mjeri se kao prosječna apsolutna razlika između predviđenih vrijednosti i stvarnih vrijednosti i koristi se za procjenu učinkovitosti regresijskog modela.

Formula za srednju apsolutnu pogrešku je sljedeća:

$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|}{n} \quad (3.10)$$

Gdje je:

- $n$  - broj opažanja u skupu podataka,
- $y_i$  - prava vrijednost,
- $\hat{y}_i$  - predviđena vrijednost. [11]

Srednja apsolutna pogreška je manje osjetljiv na stršće vrijednosti od MSE i RMSE te daje izravnu intepretaciju kao prosječna pogreška. Niske MAE vrijednosti pokazuju da model dobro odgovara podacima i ima preciznija predviđanja. Suprotno tome, više vrijednosti sugeriraju više pogrešaka i manje precizna predviđanja. [11]

### 3.2.4 Koeficijent determinacije ( $R^2$ )

Koeficijent determinacije je statistička mjera koja ispituje kako se razlike u jednoj varijabli mogu objasniti razlikom u drugoj varijabli kada se predviđa ishod određenog događaja. Ovaj koeficijent je poznatiji kao R-kvadrat (ili  $R^2$ ). Procjenjuje koliko je jak linearni odnos između dviju varijabli i na njega se ulagači uvelike oslanjaju kada provode analizu trendova. Formula za koeficijent determinacije je sljedeća:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (3.11)$$

Gdje je:

- $y_i$  - stvarne vrijednosti,
- $\hat{y}_i$  - predviđene vrijednosti,
- $\bar{y}$  - srednje vrijednosti stvarnih vrijednosti,
- $n$  - broj opažanja. [11]

Ako koeficijent determinacije ima vrijednost 0 model ne objašnjava nikakvu varijabilnost podataka o odgovoru oko njegove srednje vrijednosti.

Ako koeficijent determinacije ima vrijednost između 0 i 1 model objašnjava neke varijabilnosti u podacima. Što je koeficijent bliže 1, to bolje model objašnjava podatke.

Ako koeficijent determinacije ima vrijednost 1 model savršeno objašnjava varijabilnost podataka o odgovoru. To ukazuje na izvrsno pristajanje. [11]

## 4 INTERPOLACIJSKE METODE

U ovom poglavlju biti će opisane interpolacijske metode korištene u ovom radu s ciljem dobivanja modela i detaljnih uvida u ponašanje promatranog fenomena iz eksperimentalnih mjerenja.

Interpolacija je tehnika u matematici i statistici koja se koristi za procjenu vrijednosti koje se nalaze između poznatih vrijednosti. Uključuje konstruiranje funkcije koja prolazi kroz dane podatkovne točke kako bi se napravila predviđanja ili aproksimacije unutar raspona promatranih podataka. Postoje različite metode interpolacije, a izbor metode ovisi o prirodi podataka i željenoj točnosti. [12]

U sljedećim potpoglavljima biti će objašnjene linearna, kubična, prirodna susjedna interpolacija, interpolacija najbližeg susjeda i Kriging.

### 4.1 Linearna interpolacija

Linearna interpolacija je jednostavna metoda koja se koristi za procjenu vrijednosti između dvije poznate podatkovne točke. Pretpostavlja linearni odnos između podatkovnih točaka i često se koristi kada se očekuje da će se podaci mijenjati konstantnom brzinom između poznatih točaka.

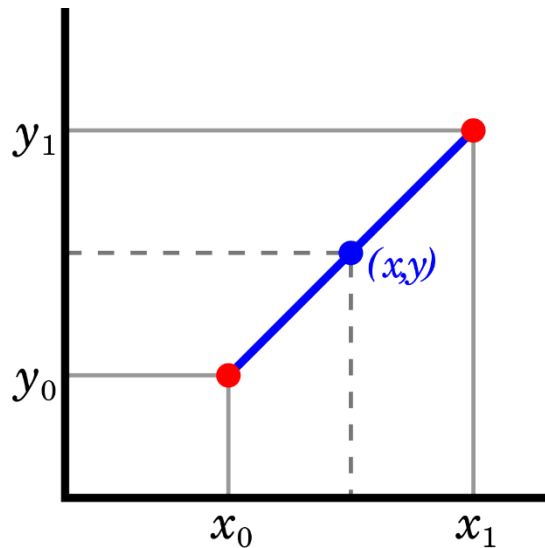
Ako su dvije poznate točke zadane koordinatama  $(x_0, y_0)$  i  $(x_1, y_1)$ , linearni interpolant je pravac između tih točaka. Za vrijednost  $x$  u intervalu  $(x_0, x_1)$  vrijednost  $y$  duž ravne crte dana je iz jednadžbe nagiba: [13]

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \quad (4.1)$$

Sređivanjem formule dobije se vrijednost  $y$ :

$$y = y_0 + (x - x_0) \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad (4.2)$$

Na slici 4.1 je prikazan primjer linearne interpolacije.



Slika 4.1 Linearna interpolacija [13]

Kako je linearna interpolacija najjednostavnija interpolacijska metoda tako se pojavljuju i neka ograničenja. Linearna interpolacija pretpostavlja da je odnos između podatkovnih točaka linearan, što ne mora uvijek biti slučaj. Također navedena interpolacija ne bi se trebala koristiti za ekstrapolaciju, odnosno procjenu vrijednosti izvan raspona poznatih točaka podataka, jer može dovesti do netočnih rezultata. Uz navedeno može dati netočne rezultate ako podatkovne točke nisu reprezentativne za temeljni trend te možda neće biti prikladna za skupove podataka s rijetkim ili nepravilno raspoređenim točkama.

Linearna interpolacija može se implementirati pomoću jednostavnih matematičkih operacija u programskim jezicima kao što su Python, MATLAB te mnoge druge softvere. [13]

## 4.2 Kubična interpolacija

Kubična interpolacija je matematička tehnika koja se koristi za procjenu vrijednosti funkcije između dvije poznate vrijednosti. Ova je metoda točnija od linearne interpolacije i često se koristi kada podatkovne točke nisu linearne, ali pokazuju određenu zakrivljenost.

U kubičnoj interpolaciji, interpolant je kubni polinom, koji je polinom trećeg stupnja. Ovaj polinom je definiran na takav način da prolazi kroz zadane podatkovne točke.

Za zadani skup podatkovnih točaka  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ , kubična interpolacija traži kubični polinom  $P(x)$  oblika:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (4.3)$$

Gdje su  $a, b, c, d$  koeficijenti koji se određuju na temelju zadanih podatkovnih točaka.

Prednost kubične interpolacije je što pruža dobru ravnotežu između točnosti i računalne učinkovitosti. Glatkija je od linearne interpolacije jer uzima u obzir zakrivljenost podataka.

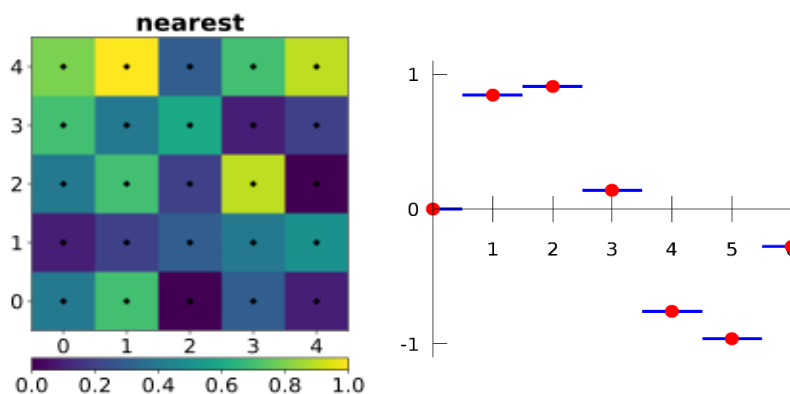
Primjenu nalazi u računalnoj grafici (za glatke krivulje), numeričkoj analizi, prilagođavanju podataka i inženjerskim problemima gdje je potrebno glatko uklapanje krivulje.

Uobičajena vrsta kubične interpolacije je kubična splajn interpolacija. Kubična splajn interpolacija je način pronalaženja krivulje koja povezuje podatkovne točke sa stupnjem tri ili manje. Splajnovi su polinomi koji su glatki i kontinuirani preko danog dijagrama te također kontinuirane prve i druge derivacije gdje se spajaju. [14]

### 4.3 Interpolacija najbližeg susjeda

Interpolacija najbližeg susjeda najjednostavniji je pristup interpolaciji. Algoritam je vrlo jednostavan za implementaciju i obično se koristi (obično zajedno s preslikavanjem) u 3D renderiranju u stvarnom vremenu za odabir vrijednosti boja za teksturiranu površinu.

Interpolacija je problem približavanja vrijednosti funkcije za neku ne zadanu, nepostojeću točku u nekom prostoru kada je dana vrijednost te funkcije u točkama oko (susjednih) te točke. Algoritam najbližeg susjeda odabire vrijednost najbliže točke te u potpunosti ne uzima u obzir vrijednosti susjednih točaka, stoga daje konstantan interpolant. [15]



Slika 4.2 Interpolacija najbližeg susjeda [15]

Lijeva slika predstavlja 2D interpolaciju podataka sa mrežom. Crne točke predstavljaju izmjerene raspršene podatke. Svaka rešetka mreže u kojoj se nalaze podatci ispunjene su sa vrijednošću navedenih podataka.

#### 4.4 Kriging

Kriging je metoda prostorne interpolacije koja je nastala u području rudarske geologije kako je nazvana po južnoafričkom rudarskom inženjeru Danieju Krigeu. Kriging ili Gaussova procesna regresija predstavlja metodu interpolacije gdje su interpolirane vrijednosti modelirane pomoću Gaussovog procesa. U optimalnim uvjetima, Kriging pruža najbolje linearno predviđanje srednjih vrijednosti. Interpolacijske metode koje se oslanjaju na druge kriterije, poput glatkoće, možda nisu prikladne za procjenu srednjih vrijednosti. Ova tehnika je široko korištena u prostornoj analizi i računalnim eksperimentima, poznata i kao Wiener-Kolmogorov predviđanje, nazvana prema Norbertu Wieneru i Andreyu Kolmogorovu.

Kriging je jedna od nekoliko metoda koje koriste ograničen skup uzorkovanih podatkovnih točaka za procjenu vrijednosti varijable u kontinuiranom prostornom polju. Razlikuje se od jednostavnijih metoda, kao što je inverzna udaljenost ponderirana interpolacija, linearna regresija ili Gaussov pad po tome što koristi prostornu korelaciju između uzorkovanih točaka za interpolaciju vrijednosti u prostornom polju: interpolacija se temelji na prostornom rasporedu empirijskih opažanja, a ne na pretpostavljenom modelu prostorne distribucije. Kriging također generira procjene nesigurnosti oko svake interpolirane vrijednosti.

U općenitom smislu, težine kriginga izračunavaju se tako da točke u blizini lokacije od interesa imaju veću težinu od onih koje su dalje. Grupiranje točaka također se uzima u obzir, tako da klasteri točaka imaju manju težinu. To pomaže smanjiti pristranost u predviđanjima.

Kriging prediktor je "optimalni linearni prediktor" i točan interpolator, što znači da se svaka interpolirana vrijednost izračunava kako bi se smanjila pogreška predviđanja za tu točku. Vrijednost koja se generira iz procesa kriginga za bilo koju stvarno uzorkovanu lokaciju bit će jednaka opaženoj vrijednosti u ovoj točki, a sve interpolirane vrijednosti bit će najbolji linearni nepristrani prediktori (BLUP).

Za razumijeti Kriging potrebno je poznavati pojam variogram. Variogram (ponekad se naziva "semivariogram") vizualni je prikaz kovarijance prikazane između svakog para točaka u uzorkovanim podacima. Za svaki par točaka u uzorkovanim podacima, gama-vrijednost ili "polu-

varijanca" (mjera polusrednje kvadratne razlike između njihovih vrijednosti) iscrtava se u odnosu na udaljenost ili "zaostatak" između njih. "Eksperimentalni" variogram je dijagram opaženih vrijednosti, dok je "teorijski" ili "modelski" variogram distribucijski model koji najbolje odgovara podacima. Modeli variograma izvlače se iz ograničenog broja "ovlaštenih" funkcija, uključujući linearne, sferne, eksponencijalne i modele snage.

Kriging predstavlja napredni geostatistički pristup koji generira procijenjenu površinu na temelju raspršenog skupa točaka s pripadajućim z-vrijednostima. Za razliku od drugih metoda interpolacije koje su dostupne u skupu alata za interpolaciju, primjena Kriginga uključuje interaktivno istraživanje prostornog ponašanja fenomena prije nego što se odabere optimalna metoda procjene za generiranje izlazne površine.

Kriging uzima u obzir okolne izmjerene vrijednosti kako bi se dobilo predviđanje za neizmjereno mjesto. Opća formula za oba interpolatora se konstruira kao zbroj podataka: [16]

$$Z(s_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot Z(s_i) \quad (4.4)$$

Gdje je:

- $Z(s_i)$  - izmjerena vrijednost na i-toj poziciji,
- $\lambda_i$  - nepoznata vrijednost za izmjerenu i-tu poziciju,
- $s_0$  - predviđena lokacija nove točke,
- $N$  - broj izmjerenih podataka. [16]

Osim običnih Kriging predikcija nas zanima Kriging predikcija varijance. Varijanca predviđanja Kriginga kvantificira nesigurnost povezanu s predviđanjem Kriginga na određenoj lokaciji. Omogućuje mjerenje pouzdanosti ili preciznosti Kriging predviđanja. Krigingova varijanca  $\sigma^2(x_0)$  na lokaciji  $x_0$  dana je sa formulom:

$$\sigma^2(x_0) = \gamma(x_0, x_0) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(x_i, x_0) - \mu \quad (4.5)$$

Gdje su:

$\sigma^2(x_0)$  - Krigingova varijanca predviđanja na lokaciji,

$\gamma(x_0, x_0)$  - vrijednost variograma na lokaciji  $x_0$  sa sobom (često nula za jednostavan Kriging),

$\gamma(x_i, x_0)$  - vrijednost variograma između mjesta uzorkovanja  $x_i$  i neuzorkovanu lokaciju  $x_0$ ,

$\lambda_i$  - težine određene Krigingovim sustavom jednačbi,

$\mu$  - Lagrangeov multiplikator koji se koristi u Krigingovom sustavu. [13]



## 4.5 Prirodna susjedna interpolacija

Prirodna susjedna interpolacija predstavlja prostornu interpolacijsku metodu koju je razvio Robin Sibson. Ova metoda se temelji na Voronoijevom teselaciji diskretnog skupa prostornih točaka.

Prirodna susjedna interpolacija ima prednosti u odnosu na jednostavnije metode interpolacije, poput interpolacije najbližeg susjeda, jer pruža glatku aproksimaciju osnovne "prave" funkcije.

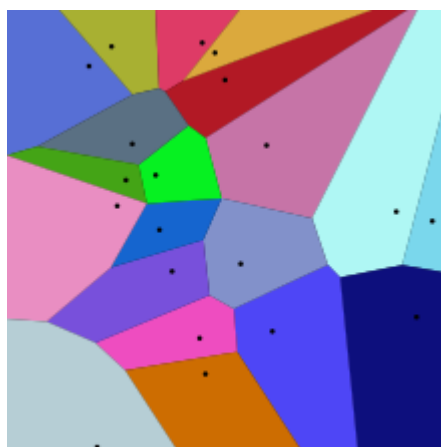
U matematičkom kontekstu, Voronoijev dijagram predstavlja podjelu ravnine na područja koja su bliska svakom zadatom skupu objekata. U najjednostavnijem slučaju, ti objekti su konačan broj točaka u ravnini. Svaka točka ima odgovarajuće područje koje obuhvaća sve točke u ravnini koje su bliže toj točki nego bilo kojoj drugoj. Ta područja nazivaju se Voronoijeve stanice. Važno je napomenuti da je Voronoijev dijagram skup točaka dvostruk u odnosu na Delaunayevu triangulaciju. [17]

Osnovna jednadžba ove interpolacije je:

$$G(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) \cdot f(x_i) \quad (4.6)$$

Gdje je:

- $G(x)$  je procjena u  $x$ ,
- $\omega_i(x)$  su vrijednosti,
- $f(x_i)$  je poznata vrijednost u  $x_i$ . [17]



Slika 4.3 Voronoi dijagram [17]

## 5 OBRADA PODATAKA ZA VIZUALIZACIJU

Široko priznati uzrok kvara mikro- i nano-elektromehaničkih uređaja (MEMS i NEMS), koji podrazumijeva relativno kretanje sastavnih elemenata, je trenje. U stvarnosti, minijaturizacija podrazumijeva rast omjera površine i volumena, što implicira povećanje važnosti sila trenja i prijanjanja. Oslanjajući se na staromodne modele trenja, koji rezultiraju nedovoljnom preciznošću za mikronske ili sub-mikronske uređaje, gdje su mehanizmi koji utječu na trenje različiti su od onih na makroskali. Nano-tribologija je dakle od primarne važnosti za uspostavljanje osnovnog razumijevanja fenomena u uređajima MEMS i NEMS, kao i u računalnim uređajima za pohranu i druge aplikacije. [5]

Dati podatci su rezultati nano-triboloških mjerenja na tankome filmu aluminijevog oksida i nehrđajućem čeliku. Set podataka sadrži 50 mjerenja tj. točaka u kojoj su vrijednosti izmjerenih atomskih sila trenja ( $Ft$ ) u nano-njutonima date u ovisnosti o brzini kretanja u kontaktu u nanometrima po sekundi, nominalnoj sili u kontaktu u nano-njutonima i temperaturi kontakta u stupnjevima celzijusevim.

Cilj je dobiti prikaze (2D i 3D) sa različitim metodama interpolacije koje nam daju uvid ponašanja atomske sile trenja u ovisnosti o brzini kretanja u kontaktu, nominalnoj sili kontakta i temperaturi kontakta.

Interpolacijske metode koje su se koristile u ovoj obradi podataka za vizualizaciju su Kriging metoda i prirodna susjedna interpolacija (VORONOI).

Kod Krigingove metode koristila se funkcija *scatteredInterpolant*. Ona se upotrebljava za raspodjelu 2D ili 3D raspršenih podataka. *scatteredInterpolant* vraća interpolant  $F$  za dati skup podataka. Može se procijeniti  $F$  na skupu upitnih točaka, poput  $(xq, yq)$  u 2D, za dobivanje interpoliranih vrijednosti  $vq = F(xq, yq)$ . *griddedInterpolant* upotrebljava se da bi se izvršila interpolacija s mrežnim podacima. [18]

Sintaksa:

```
F = scatteredInterpolant
F = scatteredInterpolant(x,y,v)
F = scatteredInterpolant(x,y,z,v)
F = scatteredInterpolant(P,v)
F = scatteredInterpolant(__,Method)
```

$F = \text{scatteredInterpolant}(\_, \text{Method}, \text{ExtrapolationMethod})$

Gdje je:

$F = \text{scatteredInterpolant}$  stvara prazan interpolantni objekt raspršenih podataka.

$F = \text{scatteredInterpolant}(x, y, v)$  stvara interpolant koji odgovara površini oblika  $v = F(x, y)$ . Vektori  $x$  i  $y$  određuju  $(x, y)$  koordinate točkama uzorka.  $v$  sadrži uzorke vrijednosti pridružene točkama  $(x, y)$ .

$F = \text{scatteredInterpolant}(x, y, z, v)$  stvara 3-D interpolant oblika  $v = F(x, y, z)$ .

$F = \text{scatteredInterpolant}(P, v)$  navodi koordinate točkama uzorka kao niz. Redovi matrice  $P$  sadrže  $(x, y)$  ili  $(x, y, z)$  koordinate za vrijednosti u  $v$ .

$F = \text{scatteredInterpolant}(\_, \text{Method})$  navodi metodu interpolacije 'linear', 'nearest' ili 'natural' kao posljednji ulazni argument u bilo kojoj od prve tri sintakse. Metoda 'linear' predstavlja linearnu interpolaciju, 'nearest' predstavlja interpolaciju najbližeg susjeda, dok 'natural' predstavlja interpolaciju prirodnog susjeda.

$F = \text{scatteredInterpolant}(\_, \text{Method}, \text{ExtrapolationMethod})$  specificira metode interpolacije i ekstrapolacije. Metode ekstrapolacije su 'linear', 'nearest', 'boundary' i 'none'. Linearna ekstrapolacija temeljena je na graničnim gradijentima, koristi se kada je interpolacijska metoda 'linear' ili 'natural'. Ekstrapolacija najbližeg susjeda procjenjuje vrijednost najbližeg susjeda, koristi se kada je interpolacijska metoda 'nearest'. Metoda 'boundary' proširuje vrijednosti na granici interpolacije u domenu ekstrapolacije. Kod metode 'none' svi upiti izvan konveksne ljuske točkama vraćaju NaN. [18]

Upotreba:

Za kreiranje interpolanta koristi se *scatteredInterpolant*,  $F$ . Tada se može procijeniti  $F$  u određenim točkama koristeći bilo koju od sljedećih sintaksa:

$$\begin{aligned}Vq &= F(Pq) \\Vq &= F(Xq, Yq) \\Vq &= F(Xq, Yq, Zq) \\Vq &= F(\{xq, yq\}) \\Vq &= F(\{xq, yq, zq\})\end{aligned}$$

Gdje je:

$Vq = F(Pq)$  određuje upitne točke u matrici  $Pq$ . Svaki red u  $Pq$  sadrži koordinate upitne točke.

$Vq = F(Xq, Yq)$  i  $Vq = F(Xq, Yq, Zq)$  navode točke upita kao dvije ili tri matrice jednake veličine.

$Vq = F(\{xq, yq\})$  i  $Vq = F(\{xq, yq, zq\})$  određuju točke upita kao vektore mreže. Pomoću ove sintakse se sačuva memorija kada se želi upitati veliku mrežu točaka. [18]

Druga funkcija koja se koristila za ovu metodu u Matlabu je *fitrgp*. Ona se upotrebljava za prilagoditi model regresije Gaussovog procesa (GPR).

Sintaksa:

```
gprMdl = fitrgp(Tbl,ResponseVarName)
gprMdl = fitrgp(Tbl,formula)
gprMdl = fitrgp(Tbl,y)
gprMdl = fitrgp(X,y)
gprMdl = fitrgp(__,Name,Value)
```

Gdje je:

`gprMdl = fitrgp(Tbl,ResponseVarName)` vraća model regresije Gaussovog procesa (GPR) obučen korištenjem uzorka podataka u `Tbl`, gdje je `ResponseVarName` naziv varijable odgovora u `Tbl`.

`gprMdl = fitrgp(Tbl,formula)` vraća model regresije Gaussovog procesa (GPR), obučen korištenjem uzorka podataka u `Tbl`, za varijable prediktora i varijable odgovora identificirane formulom.

`gprMdl = fitrgp(Tbl,y)` vraća GPR model za prediktore u tablici `Tbl` i kontinuirani vektor odgovora `y`.

`gprMdl = fitrgp(X,y)` vraća GPR model za prediktore `X` i kontinuirani vektor odgovora `y`.

`gprMdl = fitrgp(__,Name,Value)` vraća GPR model za bilo koji od ulaznih argumenata u prethodnim sintaksama, s dodatnim opcijama navedenim jednim ili više argumenata u paru 'Name', 'Value'. [19]

Kod prirodne susjedne interpolacije koristila se funkcija *delaunayTriangulation*. *delaunayTriangulation* se koristi za stvaranje 2-D ili 3-D Delaunayeve triangulacije iz skupa točaka. Za 2-D podatke je također moguće odrediti rubna ograničenja.

Moguće je izvesti različite topološke i geometrijske upite na odloženoj triangulaciji, uključujući bilo koji triangulacijski upit. Na primjer, lociranje fasete koja sadrži određenu točku, pronaći vrhove konveksne ljuske ili izračunati Voronoijev dijagram. [20]

Sintaksa:

```
DT = delaunayTriangulation(P)
DT = delaunayTriangulation(P,C)
DT = delaunayTriangulation(x,y)
DT = delaunayTriangulation(x,y,C)
DT = delaunayTriangulation(x,y,z)
DT = delaunayTriangulation()
```

Gdje je:

`DT = delaunayTriangulation(P)` stvara Delaunayevu triangulaciju iz točaka u  $P$ . Matrica  $P$  ima 2 ili 3 stupca, ovisno o tome jesu li vaše točke u 2-D ili 3-D prostoru.

`DT = delaunayTriangulation(P,C)` specificira rubna ograničenja u matrici  $C$  za 2-D točke u  $P$ . Svaki redak  $C$  definira početni i krajnji ID vrha ograničenog ruba. ID-ovi vrhova su brojevi redaka odgovarajućih vrhova u svojstvu `DT.Points`.

`DT = delaunayTriangulation(x,y)` stvara 2-D Delaunayevu triangulaciju iz koordinata točke u vektorima stupaca  $x$  i  $y$ .

`DT = delaunayTriangulation(x,y,C)` specificira rubna ograničenja u matrici  $C$ .

`DT = delaunayTriangulation(x,y,z)` stvara 3-D Delaunayjevu triangulaciju iz koordinata točke u vektorima stupaca  $x$ ,  $y$  i  $z$ .

`DT = delaunayTriangulation()` stvara praznu Delaunayevu triangulaciju. [20]

## 6 REZULTATI OBRADE PODATAKA I VIZUALIZACIJA

Podaci su uz pomoć programa Matlab prikazani u 3D prostoru, gdje apcisa poprima vrijednosti temperature, ordinata vrijednosti normalne sile, aplikata vrijednosti brzine te sila trenja koja je dobivena kao rezultanta ostalih tri vrijednosti pomoću LFM metode, ona je prikazana kao spektar boja. Kasnije su isti podaci obrađeni u Matlab aplikacijama '*Curve fitting*' u kojoj se provela linearna, kubična i interpolacija najbližeg susjeda i '*Regression learner*' gdje se provelo linearno regresijsko učenje za linearni, linearno interakcijski, robusno linearni i stepenasto linearni model., zatim su prikazani presjeci podataka te obrađeni Kriging metodom i prirodnom susjednom interpolacijom.

U ovome radu podaci se preslikavaju na geometrijske primitive (npr. točke, crte) i njihove attribute (npr. boju, položaj, veličinu). Dobar izbor vizualnih atributa je najvažnije pitanje za proces vizualizacije.

Boja je moždana interpretacija osjetila očnog živca na različite duljine svjetlosti. Promatrajući odnos između fizikalnih osobina svjetlosti i psihološkog odgovora na njih (psihofizikalni proces), jasno je da postoje tri temeljne psihološke dimenzije svjetla koje pokazuju podudarnost s fizikalnim karakteristikama svjetla: ton, obojenost, pojam vezan za ime boje, zasićenost ovisi o čistoći boje i svjetlina, subjektivna percepcija boje koja ovisi o intenzitetu zračenja.

U znanstvenoj vizualizaciji boja predstavlja kvantitativnu informaciju za izmjenjive entitete (naprezanja, temperature, pritiske, brzine). Boja tako djeluje kao dodatni stupanj slobode, obično korišten kada su tri prostorne dimenzije koje možemo odmah opaziti već dodijeljene podacima.

Izbor dobrih boja za vizualizaciju uključuje razumjevanje njihovih svojstava i percepcijskih osobina čovjekovog vida. Također je važno razumjeti kako računalna programska oprema dodjeljuje boje i različita strojna oprema interpretira tu dodijelu. [21]

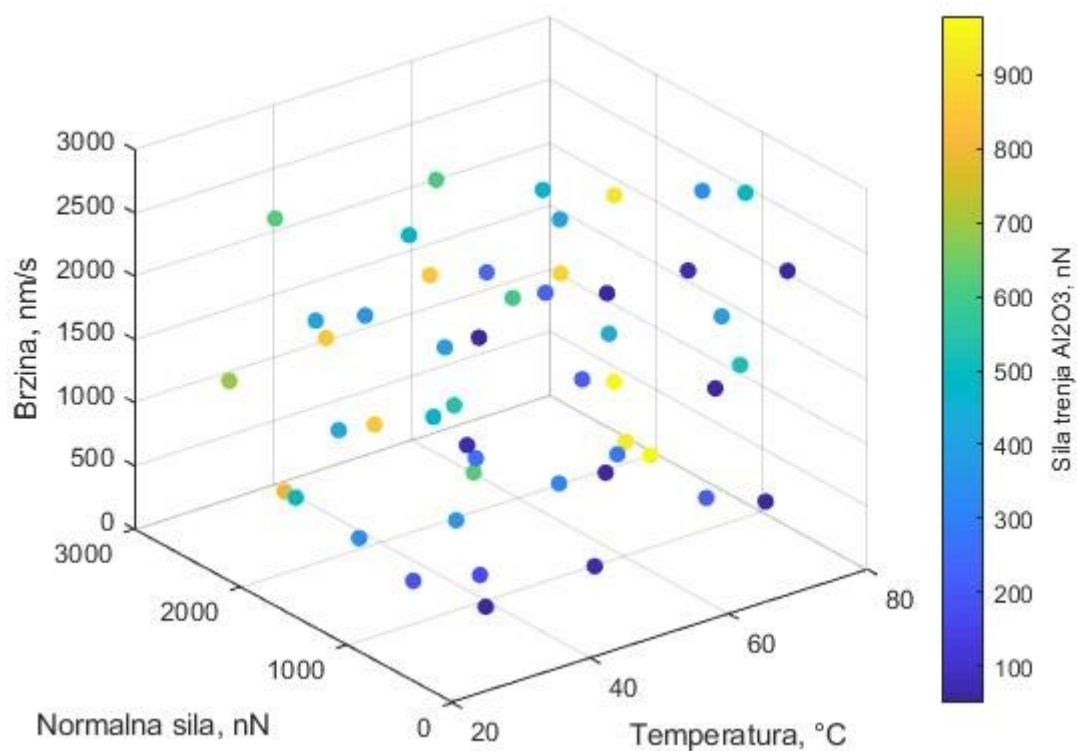
Također bitno u vizualizaciji podataka su glifovi. Glifovi su vizualni simboli koji predstavljaju znakove, zvukove ili pojmove u sustavima pisanja, tipografiji i raznim oblicima digitalne komunikacije. U tipografiji, glif se odnosi na specifični dizajn znaka unutar određenog fonta. Na primjer, slovo "A" u jednom fontu može izgledati drugačije od "A" u drugom fontu, ali oba se smatraju glifovima koji predstavljaju isti znak. U širem kontekstu, glifovi mogu uključivati simbole, ikone ili slike koje se koriste za prenošenje informacija, kao što su ikone koje se koriste u korisničkim sučeljima. Glifovi igraju ključnu ulogu u vizualnoj komunikaciji, omogućujući brzo

i učinkovito prenošenje složenih ideja i informacija kroz jednostavne, prepoznatljive oblike i forme. [22]

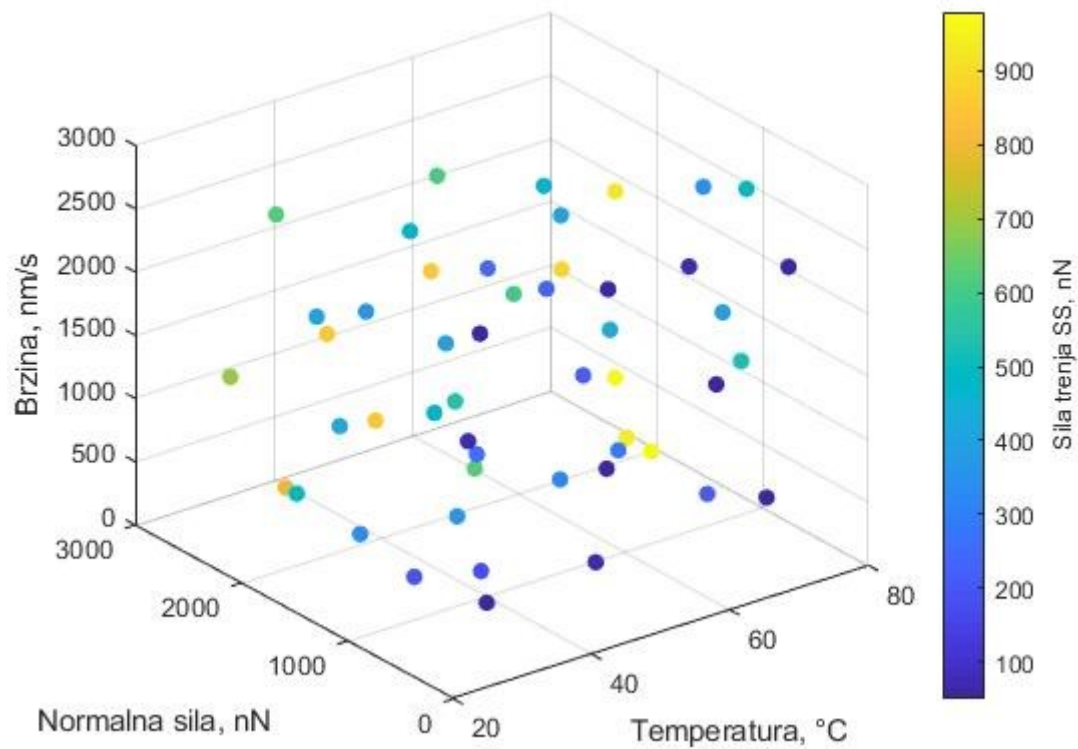
## 6.1 Prikaz sirovih podataka

Za prikaz sirovih podataka potrebno implementirati podatke iz excela u generirani kod u Matlabu. Pokretanjem koda su dobiveni grafovi prikazani na slikama 6.1 i 6.2 koje prikazuju raspodjelu sirovih podataka u 3D prostoru za oba testirana materijala.

Vizualizacija sirovih podataka je vršena na način da su vrijednosti točaka mjerenja, koje su u 4D prostoru, prikazane mapom boja prikazanoj na skali uz graf, tj. boja označava silu trenja u 3D prostoru promjenjivih parametara.



Slika 6.1 Raspodjela sirovih podataka u 3D prostoru za  $\text{Al}_2\text{O}_3$



Slika 6.2 Raspodjela sirovih podataka u 3D prostoru za SS

Na grafovima apcisa poprima vrijednosti temperature, ordinata vrijednosti normalne sile, aplikata vrijednosti brzine te sila trenja koja je dobivena kao rezultanta ostalih tri vrijednosti pomoću LFM metode, ona je prikazana kao spektar boja.



## 6.2 Curve fitting

U ovome poglavlju proći će se kroz aplikaciju 'Curve fitting' koja je instalirana u Matlabu. S njome će se interpolacijama prikazati grafovi F-t, v-t i F-v kod kojih je sila trenja treća dimenzija te izračunati njihov koeficijent determinacije,  $R^2$ . Interpolacije koje će se koristiti su linearna, kubična, biharmonijska i interpolacija najbližeg susjeda te će se prikazati na glavnom, rezidualnom i konturnom grafu.

Reziduali u statističkom modelu ili modelu strojnog učenja su razlike između promatranih i predviđenih vrijednosti podataka. Oni su dijagnostička mjera koja se koristi pri procjeni kvalitete modela. Također su poznate kao pogreške.

Reziduali su važni pri određivanju kvalitete modela. Reziduali se mogu ispitati u smislu njihove veličine i/ili formiraju li obrazac.

Tamo gdje su svi reziduali 0, model savršeno predviđa. Što su reziduali dalje od 0, to je model manje točan. U slučaju linearne regresije, što je veći zbroj kvadrata reziduala, manja je statistika  $R^2$ , ako je sve ostalo jednako. Tamo gdje prosječni rezidual nije 0, to implicira da je model sustavno pristran (tj. dosljedno previše ili premalo predviđa).

Tamo gdje reziduali sadrže uzorke, to implicira da je model kvalitativno pogrešan, budući da ne uspijeva objasniti neka svojstva podataka. Postojanje obrazaca poništava većinu statističkih testova. [23]

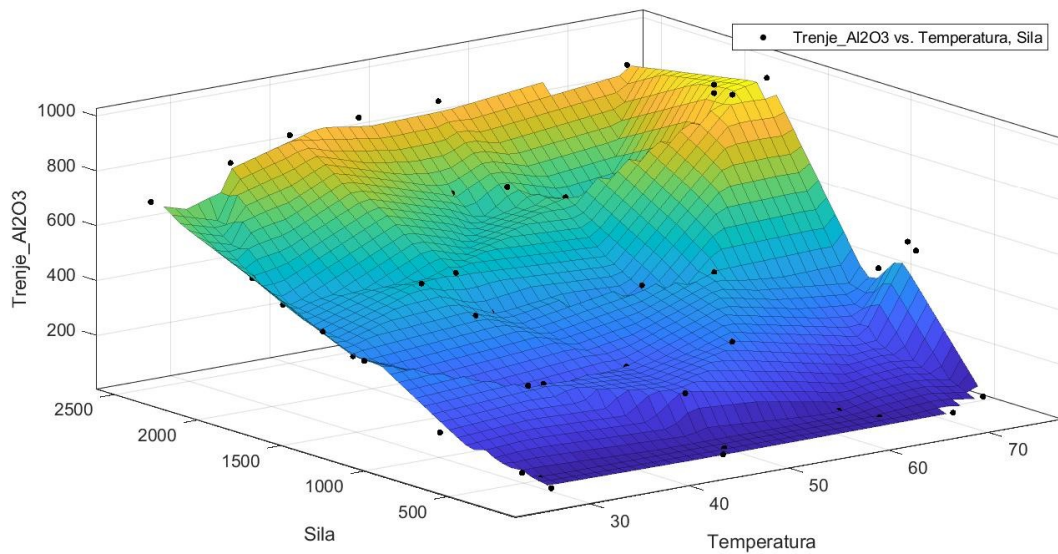
Konturni crtež je grafička tehnika za predstavljanje 3-dimenzionalne površine iscrtavanjem konstantnih z rezova, zvanih konture, na 2-dimenzionalnom formatu. To jest, s obzirom na vrijednost za z, crtaju se linije za povezivanje (x,y) koordinata gdje se pojavljuje ta z vrijednost. [24]

### 6.2.1 Linearna interpolacija

U ovome potpoglavlju će se prikazati linearna interpolacija eksperimentalnih podataka dobivena pomoću aplikacije 'Curve fitting' unutar Matlab programa.

Prva ovisnost je sile i temperature za materijal  $Al_2O_3$  je prikazana na slici 6.3, a njen koeficijent determinacije ima sljedeću vrijednost:

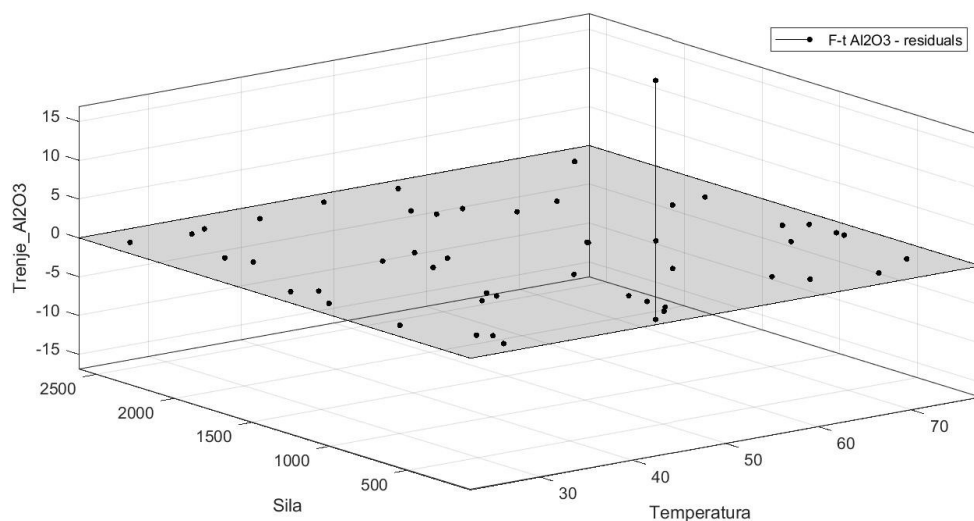
$$R^2_{F,t(Al_2O_3)} = 0,9999$$



Slika 6.3 F-t graf za linearnu interpolaciju za  $Al_2O_3$

Bojom je prikazan intenzitet sile trenja, plava boja označava male vrijednosti, povećanjem vrijednosti po ordinati i po aplikati boja se mijenja, iz tamno plave u svijetlo plavu u zelenu u naračastu te konačno u žutu, odnosno tim redosljedom mijenjanja boja se povećava vrijednost sile trenja.

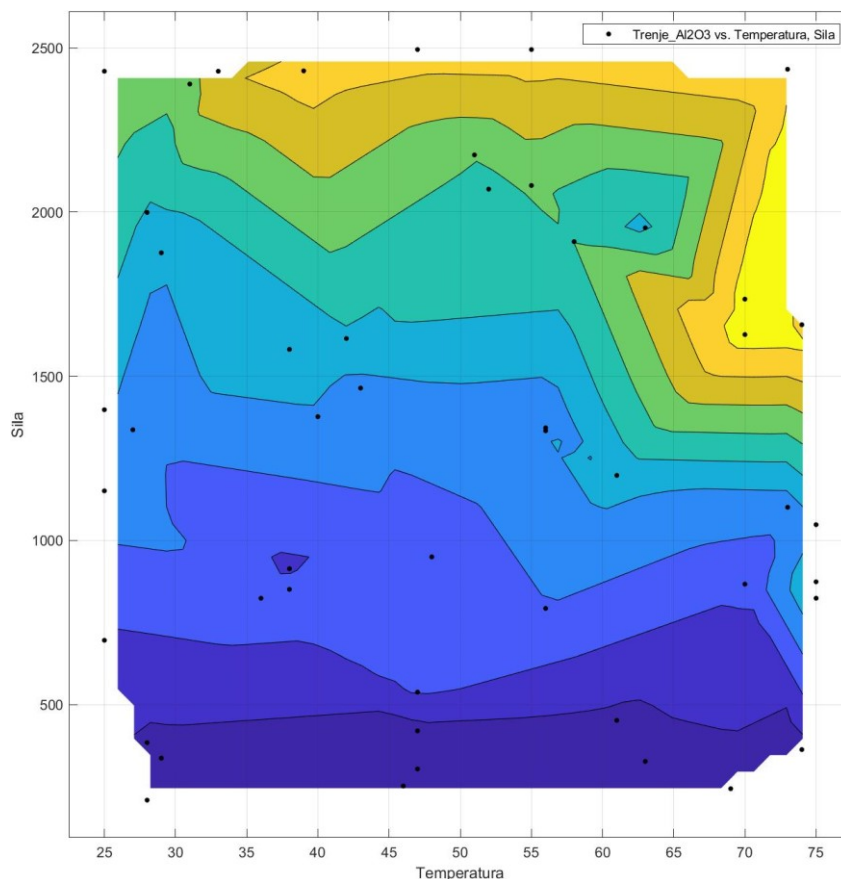
Grafički prikaz reziduala kod ovisnosti sile i temperature za materijal  $Al_2O_3$  je prikazan na slici 6.4.



Slika 6.4 F-t graf reziduala za linearnu interpolaciju za  $Al_2O_3$

Tamo gdje su svi reziduali 0, model savršeno predviđa. Što su reziduali dalje od 0, to je model manje točan.

Grafički prikaz kontura kod ovisnosti sile i temperature za materijal  $\text{Al}_2\text{O}_3$  je prikazan na slici 6.5.

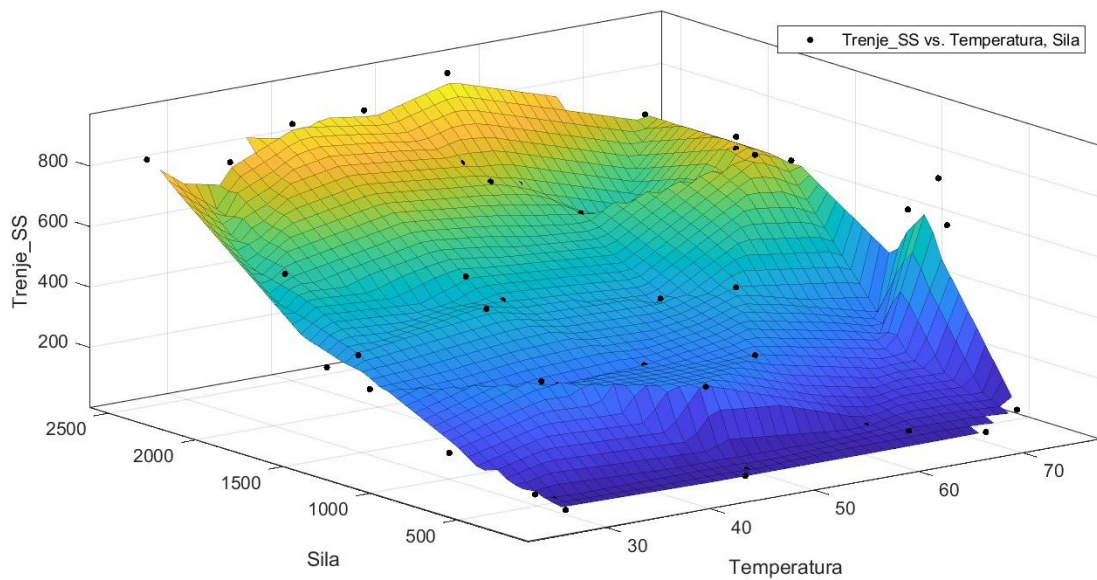


Slika 6.5 F-t konturni graf za linearnu interpolaciju za  $\text{Al}_2\text{O}_3$

Grafičkim prikazom kontura se može otprilike ustanoviti gdje je najveća vrijednost sile trenja. Prethodno je ustanovljeno da žuta boja predstavlja najveće vrijednosti, iz toga se može zaključiti da je najveća vrijednost sile trenja između 1600 i 2300 nN te 68 i 73 °C.

Sljedeća na redu je ovisnost sile i temperature za materijal SS koja je prikazana na slici 6.6, a njen koeficijent determinacije ima sljedeću vrijednost:

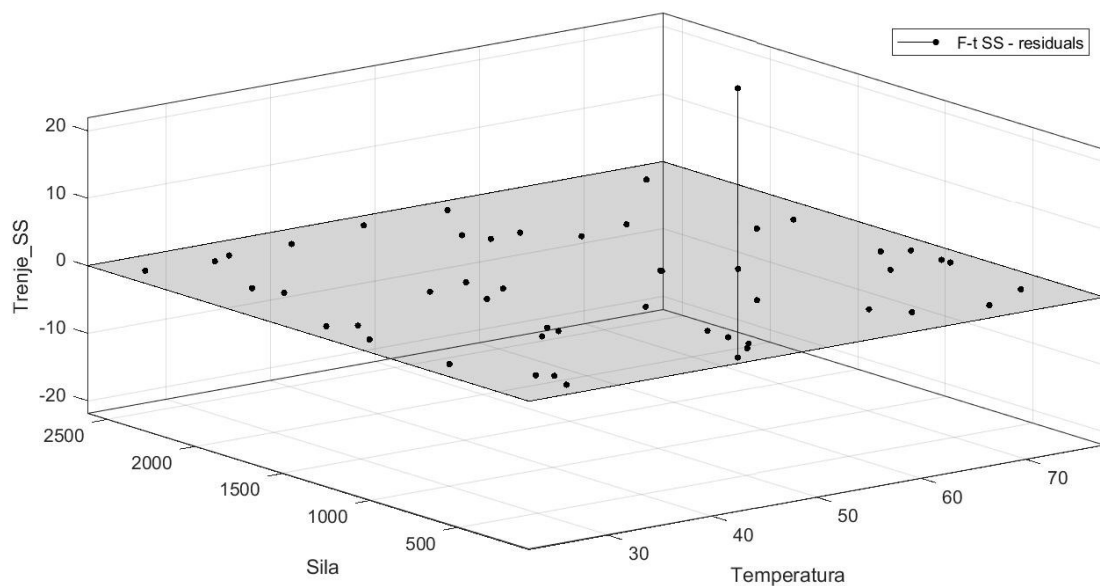
$$R^2_{F,t(SS)} = 0,9998$$



Slika 6.6 F-t graf za linearnu interpolaciju za SS

Bojom je prikazan intenzitet sile trenja, plava boja označava male vrijednosti, povećanjem vrijednosti po ordinati i po aplikati boja se mijenja, iz tamno plave u svijetlo plavu u zelenu u naračastu te konačno u žutu, odnosno tim redosljedom mijenjanja boja se povećava vrijednost sile trenja.

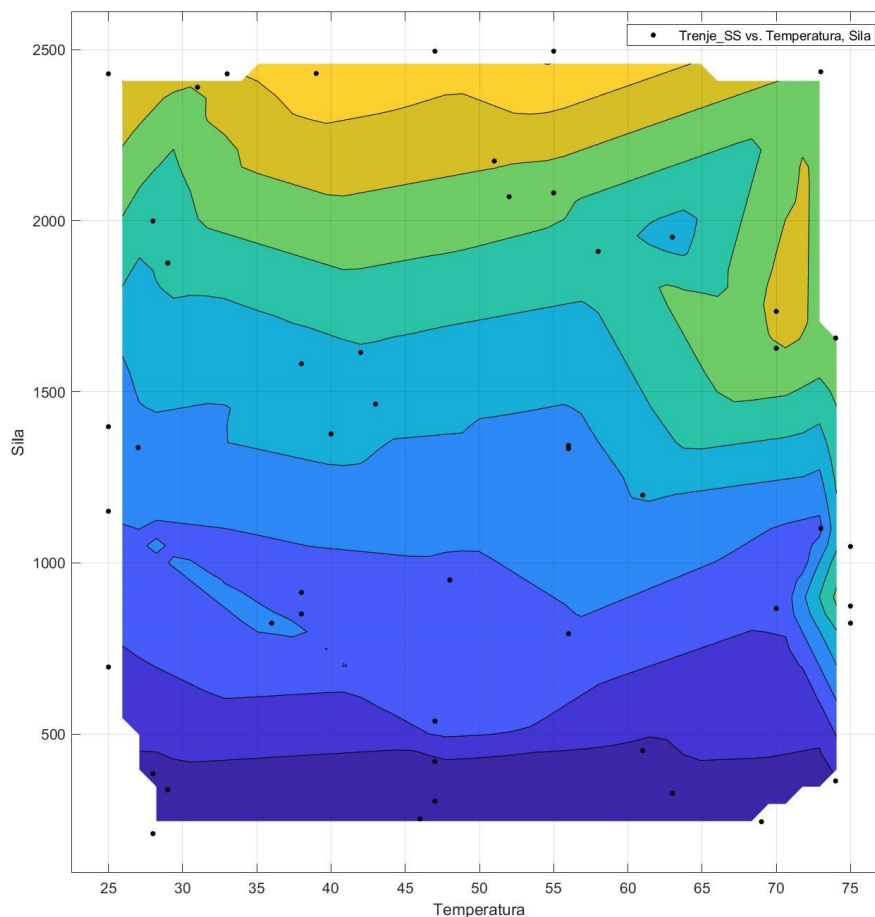
Grafički prikaz reziduala kod ovisnosti sile i temperature za materijal SS je prikazan na slici 6.7.



Slika 6.7 F-t graf reziduala za linearnu interpolaciju za SS

Tamo gdje su svi reziduali 0, model savršeno predviđa. Što su reziduali dalje od 0, to je model manje točan.

Grafički prikaz kontura kod ovisnosti sile i temperature za materijal SS je prikazan na slici 6.8.



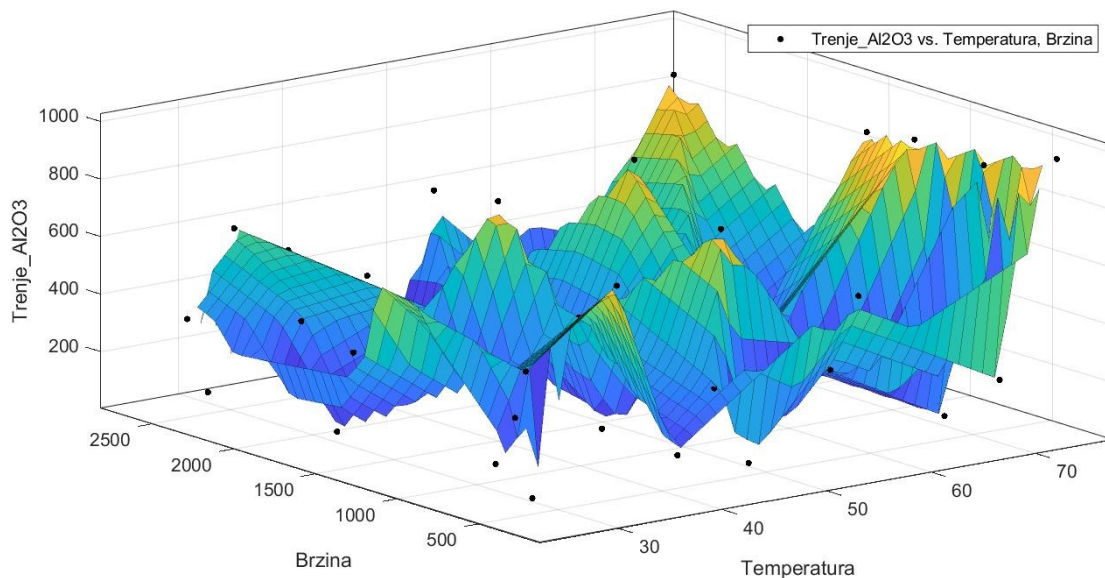
Slika 6.8 F-t konturni graf za linearnu interpolaciju za SS

Grafičkim prikazom kontura se može otprilike ustanoviti gdje je najveća vrijednost sile trenja. Prethodno je ustanovljeno da žuta boja predstavlja najveće vrijednosti, iz toga se može zaključiti da je najveća vrijednost sile trenja između 2300 i 2450 nN te 35 i 63 °C.

Nakon F-t potrebno je prikazati grafički linearnu ovisnost v-t na isti način.

Druga ovisnost je brzine i temperature za materijal  $\text{Al}_2\text{O}_3$  te je prikazana na slici 6.9, a njen koeficijent determinacije ima sljedeću vrijednost:

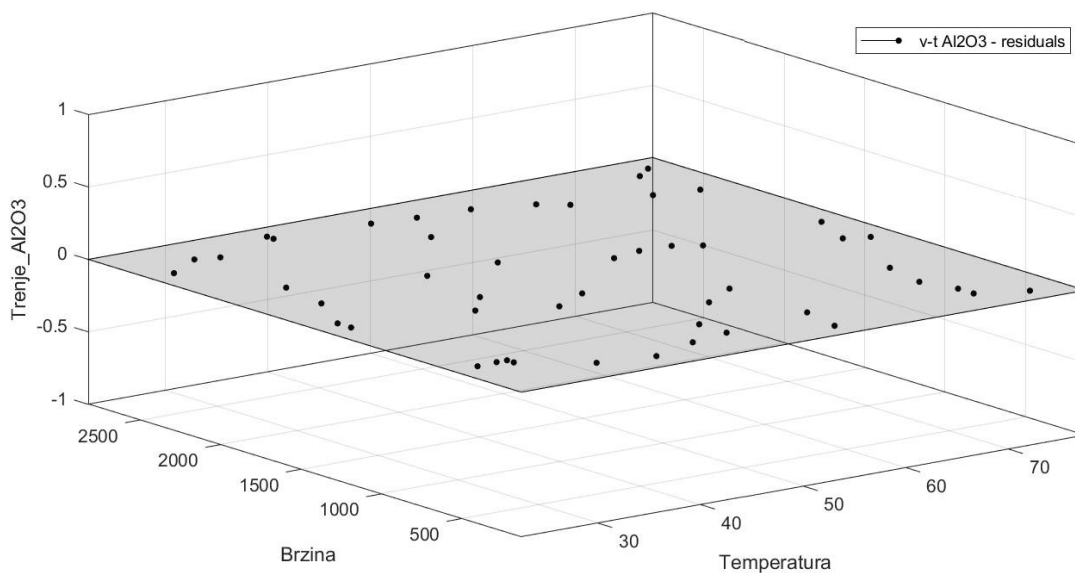
$$R^2_{v,t(\text{Al}_2\text{O}_3)} = 1$$



Slika 6.9 v-t graf za linearnu interpolaciju za Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>

Bojom je prikazan intenzitet sile trenja, plava boja označava male vrijednosti, povećanjem vrijednosti po aplikati boja se mijenja, iz tamno plave u svijetlo plavu u zelenu u naračastu te konačno u žutu, odnosno tim redosljedom mijenjanja boja se povećava vrijednost sile trenja.

Grafički prikaz reziduala kod ovisnosti brzine i temperature za materijal Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> je prikazan na slici 6.10.

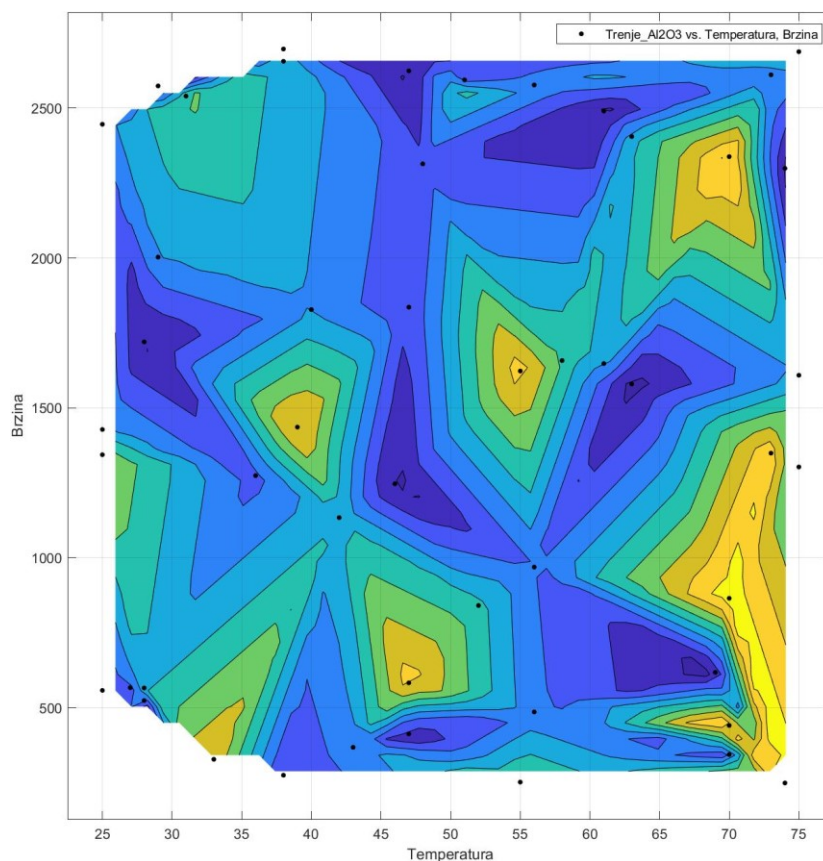


Slika 6.10 v-t graf reziduala za linearnu interpolaciju za Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>



Tamo gdje su svi reziduali 0, model savršeno predviđa. Što su reziduali dalje od 0, to je model manje točan.

Grafički prikaz kontura kod ovisnosti brzine i temperature za materijal  $\text{Al}_2\text{O}_3$  je prikazan na slici 6.11.

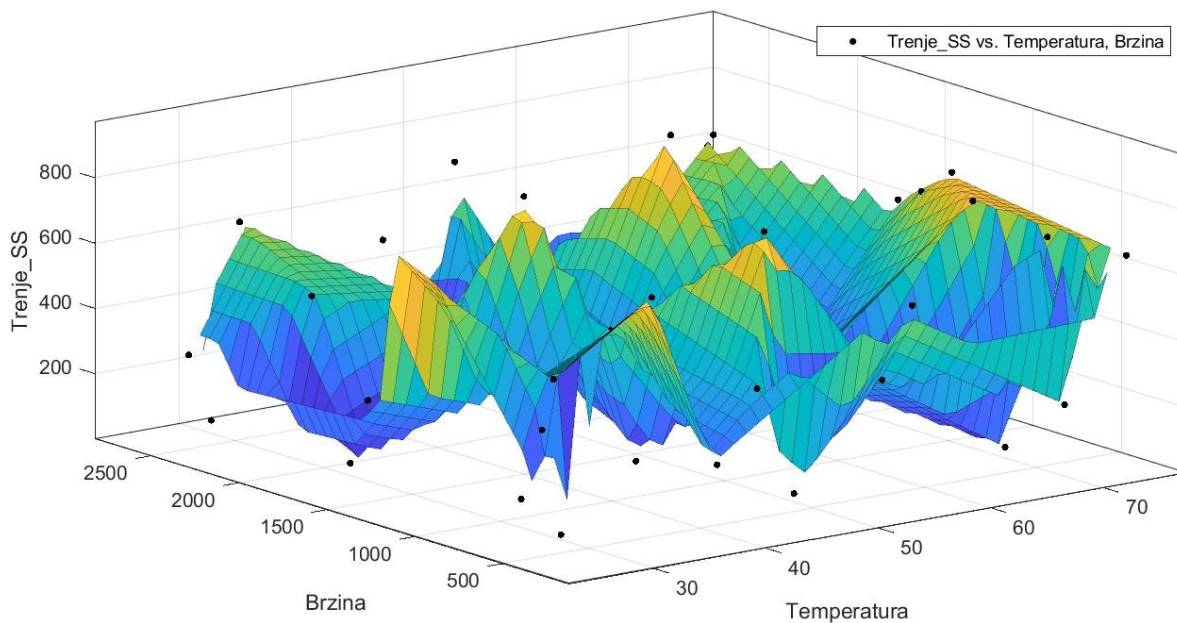


Slika 6.11 v-t konturni graf za linearnu interpolaciju za  $\text{Al}_2\text{O}_3$

Grafičkim prikazom kontura se može vidjeti da postoje par ekstrema sile trenja, samim time teško je ustanoviti u kojem rasponu brzine i temperature je njena najveća vrijednost.

Sljedeća na redu je ovisnost brzine i temperature za materijal SS koja je prikazana na slici 6.12, a njen koeficijent determinacije ima sljedeću vrijednost:

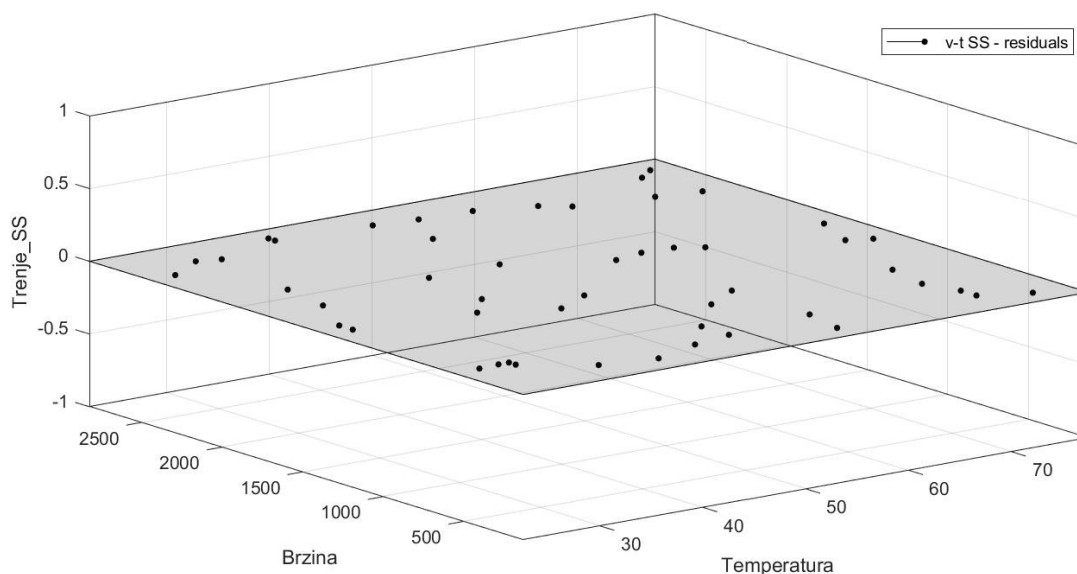
$$R^2_{v,t(SS)} = 1$$



Slika 6.12 F-v graf za linearnu interpolaciju za SS

Bojom je prikazan intenzitet sile trenja, plava boja označava male vrijednosti, povećanjem vrijednosti po aplikati boja se mijenja, iz tamno plave u svijetlo plavu u zelenu u naračastu te konačno u žutu, odnosno tim redosljedom mijenjanja boja se povećava vrijednost sile trenja.

Grafički prikaz reziduala kod ovisnosti brzine i temperature za materijal SS je prikazan na slici 6.13.

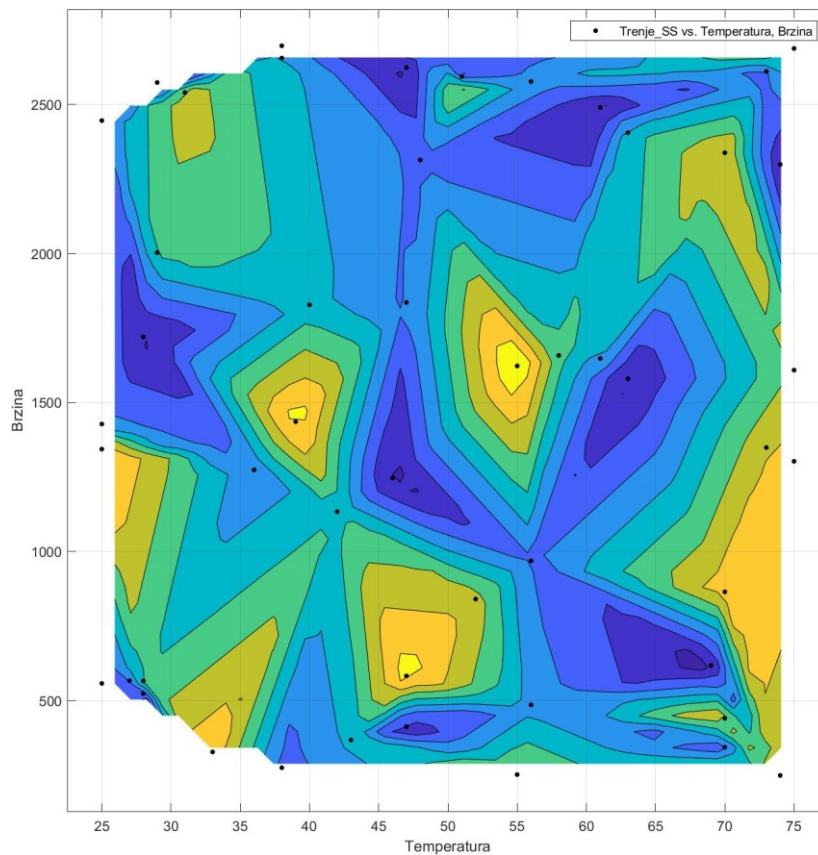


Slika 6.13 v-t graf reziduala za linearnu interpolaciju za SS



Tamo gdje su svi reziduali 0, model savršeno predviđa. Što su reziduali dalje od 0, to je model manje točan.

Grafički prikaz kontura kod ovisnosti brzine i temperature za materijal SS je prikazan na slici 6.14.



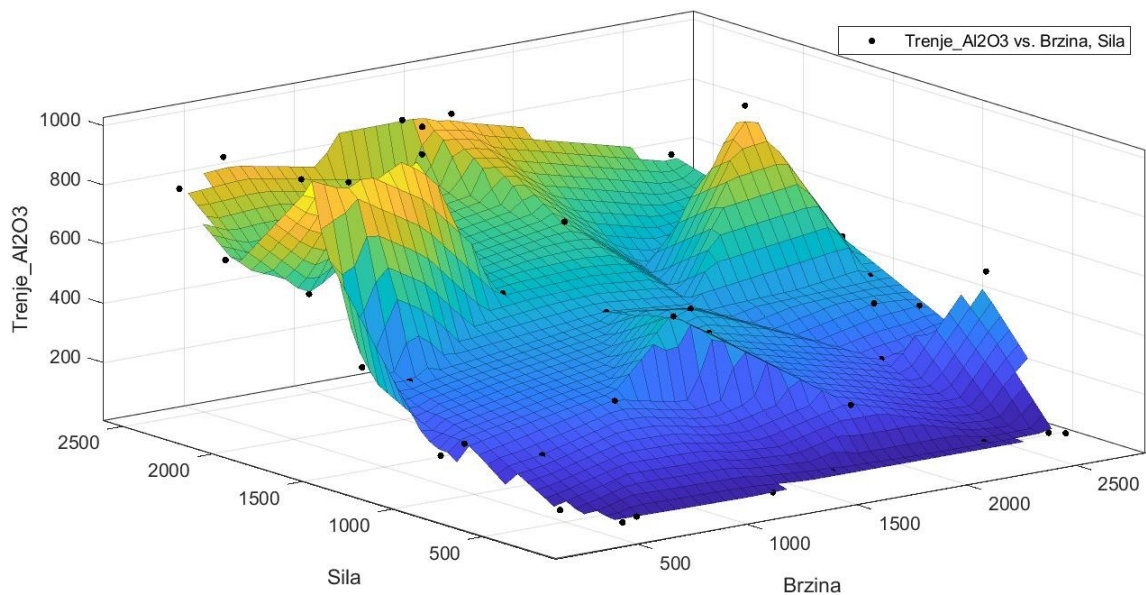
Slika 6.14 v-t konturni graf za linearnu interpolaciju za SS

Grafičkim prikazom kontura se može vidjeti da postoje par ekstrema sile trenja, samim time teško je ustanoviti u kojem rasponu brzine i temperature je njena najveća vrijednost.

Zadnje za linearnu interpolaciju je potrebno grafički prikazati ovisnost F-v.

Treća ovisnost je sile i brzine za materijal  $Al_2O_3$  te je prikazana na slici 6.15, a njen koeficijent determinacije ima sljedeću vrijednost:

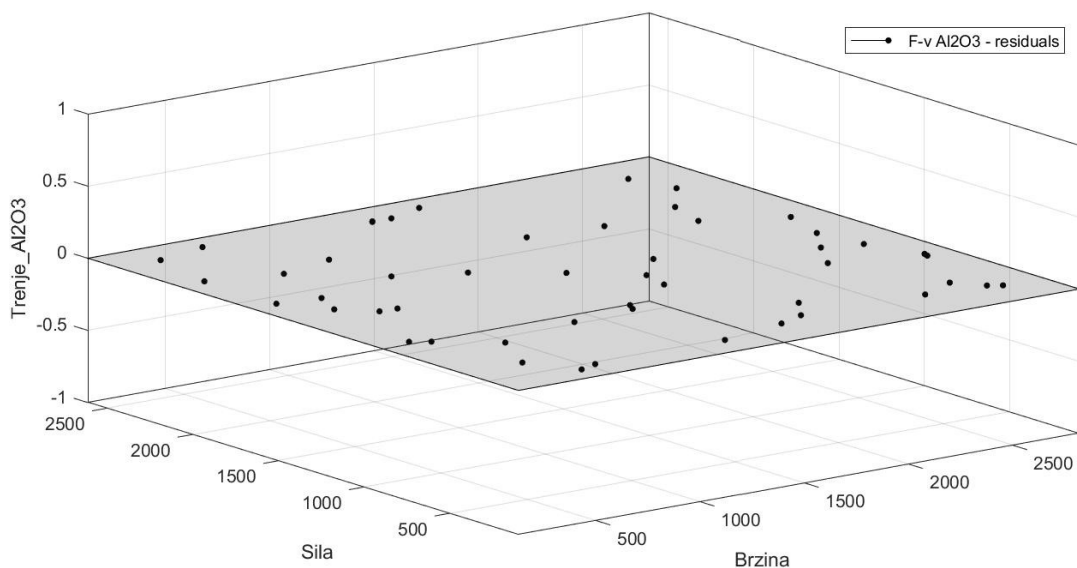
$$R^2_{F,v(Al_2O_3)} = 1$$



Slika 6.15 F-v graf za linearnu interpolaciju za  $\text{Al}_2\text{O}_3$

Bojom je prikazan intenzitet sile trenja, plava boja označava male vrijednosti, povećanjem vrijednosti po ordinati i po aplikati boja se mijenja, iz tamno plave u svijetlo plavu u zelenu u naračastu te konačno u žutu, odnosno tim redosljedom mijenjanja boja se povećava vrijednost sile trenja.

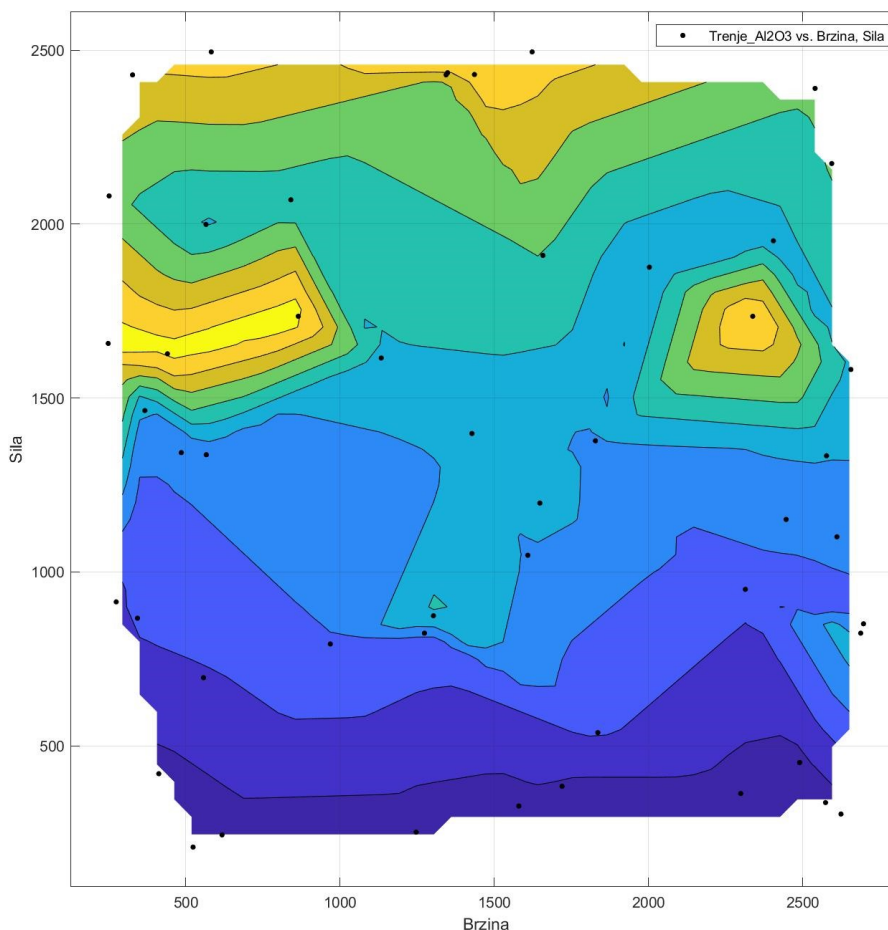
Grafički prikaz reziduala kod ovisnosti sile i brzine za materijal  $\text{Al}_2\text{O}_3$  je prikazan na slici 6.16.



Slika 6.16 F-v graf reziduala za linearnu interpolaciju za  $\text{Al}_2\text{O}_3$

Tamo gdje su svi reziduali 0, model savršeno predviđa. Što su reziduali dalje od 0, to je model manje točan.

Grafički prikaz kontura kod ovisnosti sile i brzine za materijal  $\text{Al}_2\text{O}_3$  je prikazan na slici 6.17.

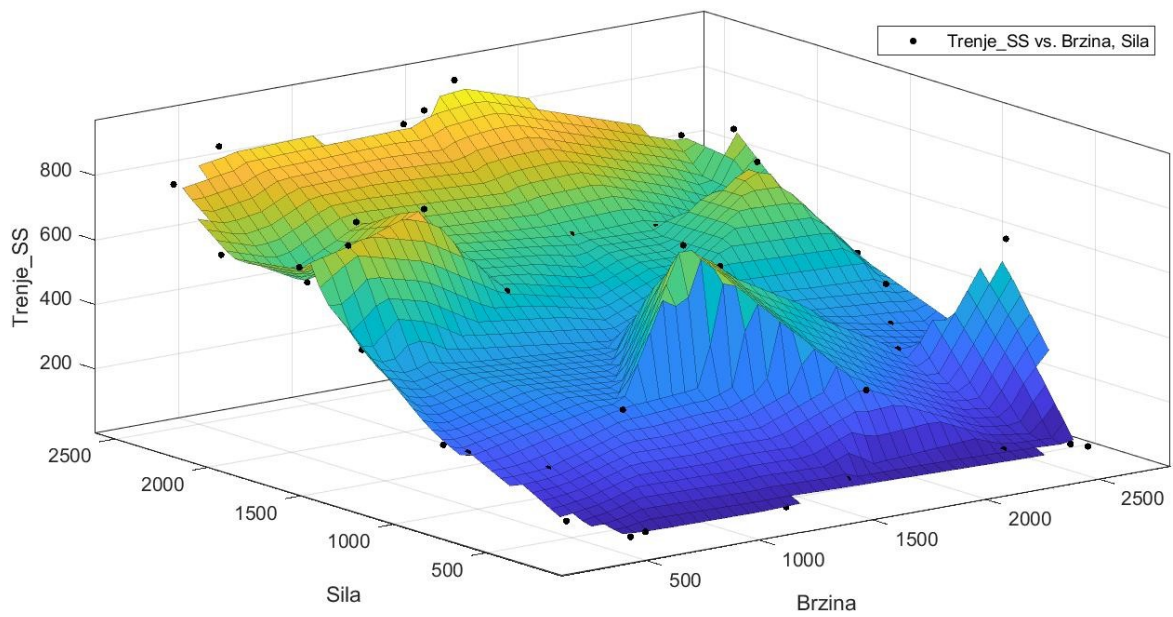


Slika 6.17 F-v konturni graf za linearnu interpolaciju za  $\text{Al}_2\text{O}_3$

Grafičkim prikazom kontura se može otprilike ustanoviti gdje je najveća vrijednost sile trenja. Prethodno je ustanovljeno da žuta boja predstavlja najveće vrijednosti, iz toga se može zaključiti da je najveća vrijednost sile trenja između 1600 i 1750 nN te 250 i 800 nm/s.

Također je potrebno prikazati ovisnost sile i brzine za materijal SS, ta ovisnost je prikazana na slici 6.18, a njen koeficijent determinacije ima sljedeću vrijednost:

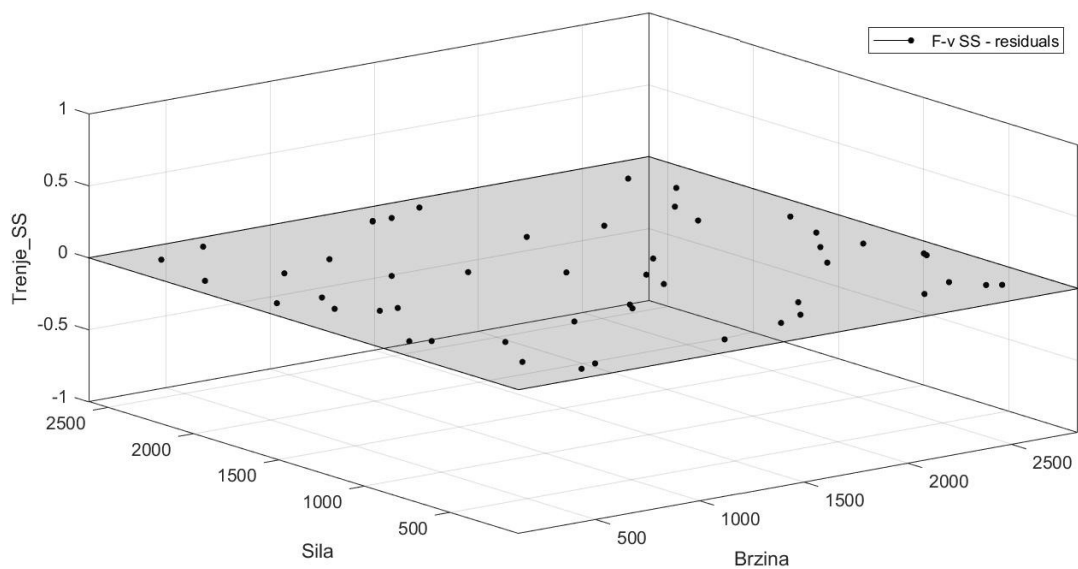
$$R^2_{F,v(SS)} = 1$$



Slika 6.18 F-v graf za linearnu interpolaciju za SS

Bojom je prikazan intenzitet sile trenja, plava boja označava male vrijednosti, povećanjem vrijednosti po ordinati i po aplikati boja se mijenja, iz tamno plave u svijetlo plavu u zelenu u naračastu te konačno u žutu, odnosno tim redosljedom mijenjanja boja se povećava vrijednost sile trenja.

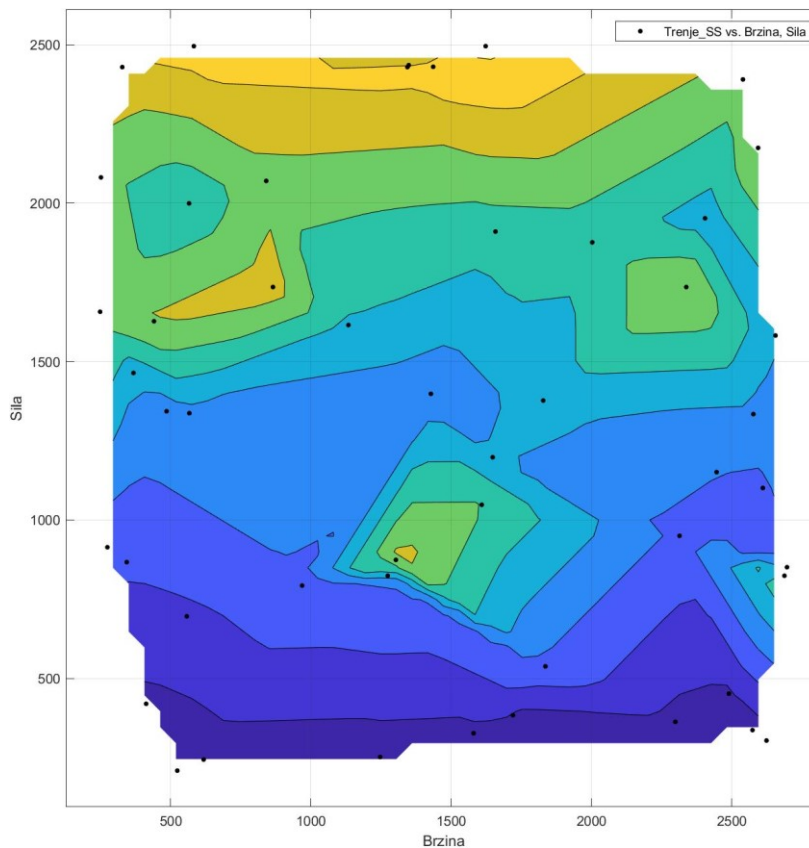
Grafički prikaz reziduala kod ovisnosti sile i brzine za materijal SS je prikazan na slici 6.19.



Slika 6.19 F-v graf reziduala za linearnu interpolaciju za SS

Tamo gdje su svi reziduali 0, model savršeno predviđa. Što su reziduali dalje od 0, to je model manje točan.

Grafički prikaz kontura kod ovisnosti sile i brzine za materijal SS je prikazan na slici 6.20.



Slika 6.20 F-v konturni graf za linearnu interpolaciju za SS

Grafičkim prikazom kontura se može otprilike ustanoviti gdje je najveća vrijednost sile trenja. Prethodno je ustanovljeno da žuta boja predstavlja najveće vrijednosti, iz toga se može zaključiti da je najveća vrijednost sile trenja između 2300 i 2450 nN te 450 i 1900 nm/s.

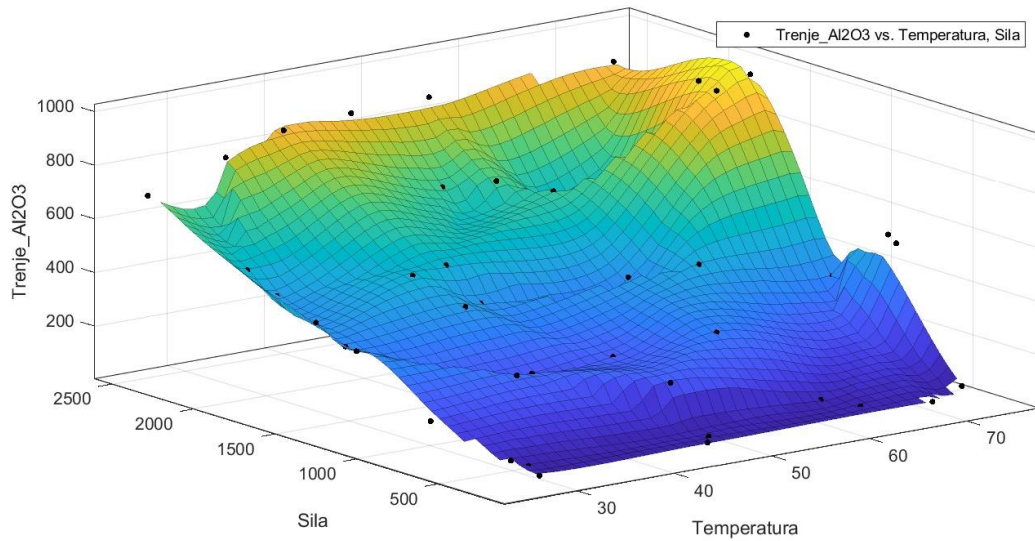
### 6.2.2 Kubična interpolacija

U ovome potpoglavlju provest će se isti postupak kao za linearnu interpolaciju, odnosno prikazati će se kubična interpolacija eksperimentalnih podataka dobivena pomoću aplikacije 'Curve fitting' unutar Matlab programa.

Prva ovisnost je sile i temperature za materijal  $\text{Al}_2\text{O}_3$  koja je prikazna na slici 6.21, a njen koeficijent determinacije ima sljedeću vrijednost:



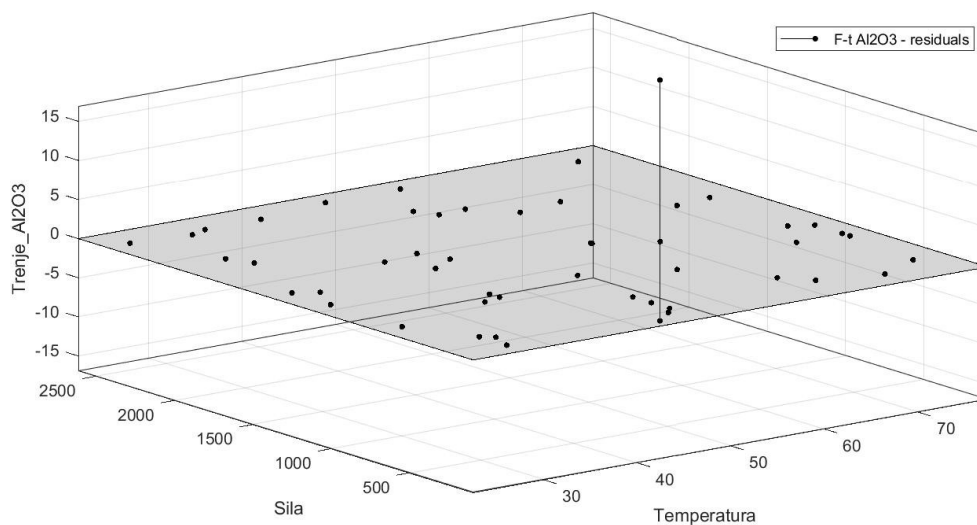
$$R^2_{F,t(Al_2O_3)} = 0,9999$$



Slika 6.21 F-t graf za kubičnu interpolaciju za  $Al_2O_3$

Bojom je prikazan intenzitet sile trenja, plava boja označava male vrijednosti, povećanjem vrijednosti po ordinati i po aplikati boja se mijenja, iz tamno plave u svijetlo plavu u zelenu u naračastu te konačno u žutu, odnosno tim redosljedom mijenjanja boja se povećava vrijednost sile trenja.

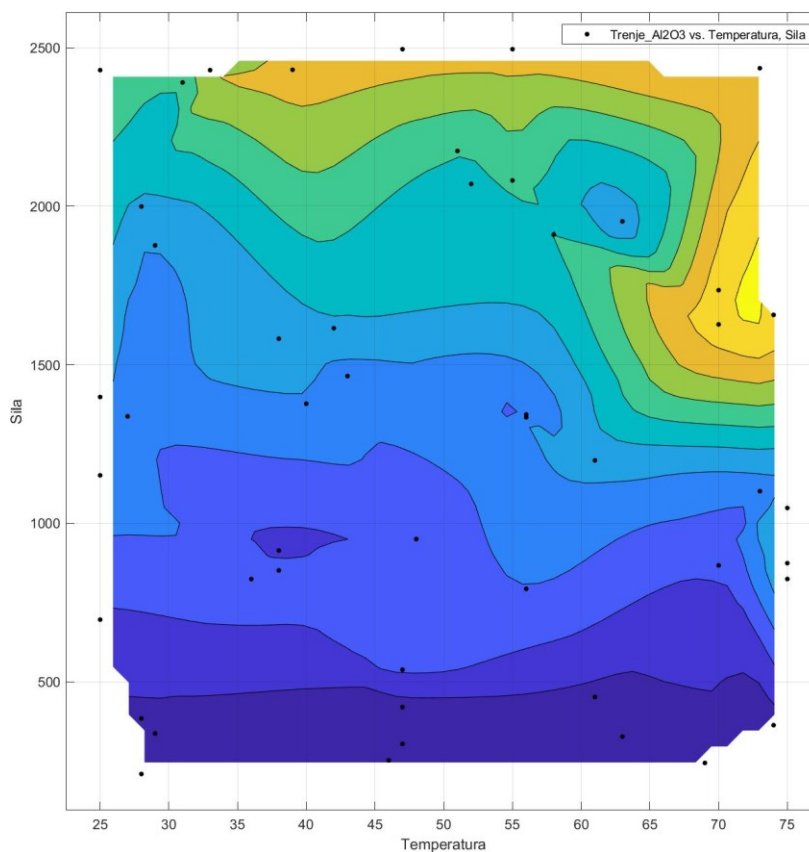
Grafički prikaz reziduala kod ovisnosti sile i temperature za materijal  $Al_2O_3$  je prikazan na slici 6.22.



Slika 6.22 F-t graf reziduala za kubičnu interpolaciju za  $Al_2O_3$

Tamo gdje su svi reziduali 0, model savršeno predviđa. Što su reziduali dalje od 0, to je model manje točan.

Grafički prikaz kontura kod ovisnosti sile i temperature za materijal  $\text{Al}_2\text{O}_3$  je prikazan na slici 6.23.

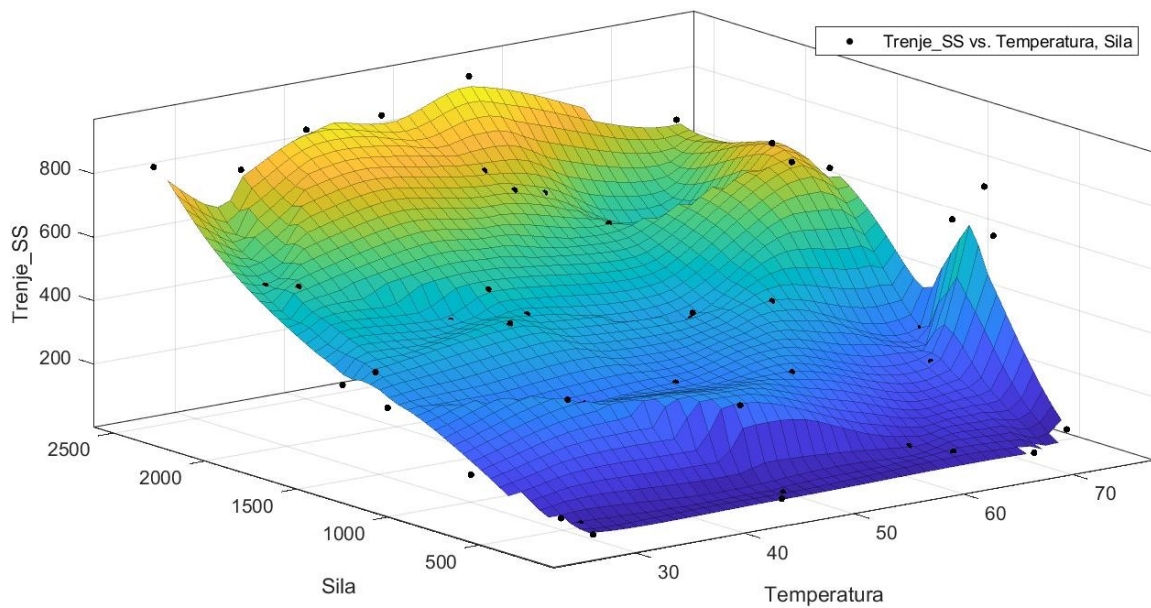


Slika 6.23 F-t konturni graf za kubičnu interpolaciju za  $\text{Al}_2\text{O}_3$

Grafičkim prikazom kontura se može otprilike ustanoviti gdje je najveća vrijednost sile trenja. Prethodno je ustanovljeno da žuta boja predstavlja najveće vrijednosti, iz toga se može zaključiti da je najveća vrijednost sile trenja između 1700 i 1850 nN te 71 i 73 °C.

Sljedeća na redu je ovisnost sile i temperature za materijal SS koja je prikazana na slici 6.24, a njen koeficijent determinacije ima sljedeću vrijednost:

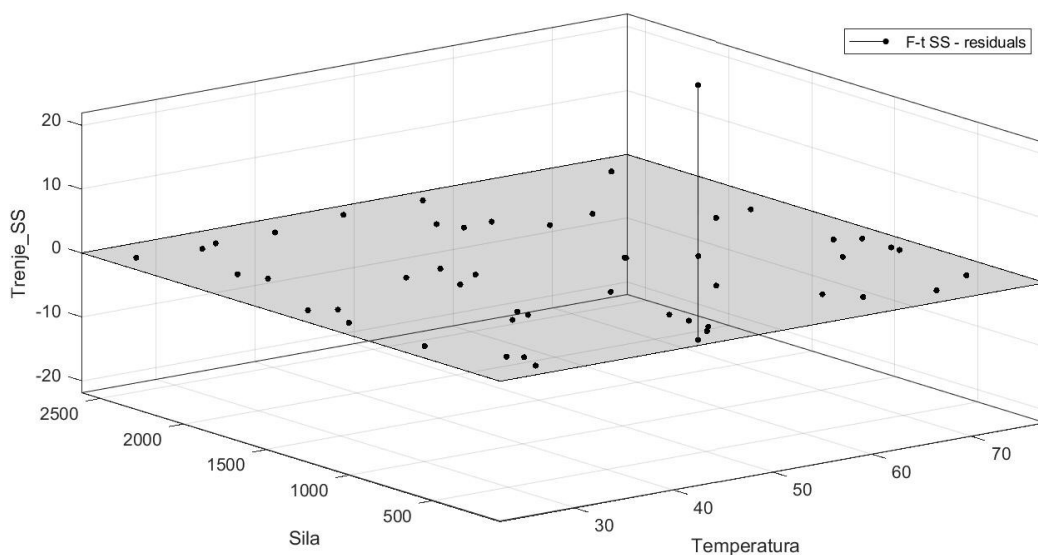
$$R^2_{F,t(SS)} = 0,9998$$



Slika 6.24 F-t graf za kubičnu interpolaciju za SS

Bojom je prikazan intenzitet sile trenja, plava boja označava male vrijednosti, povećanjem vrijednosti po ordinati i po aplikati boja se mijenja, iz tamno plave u svijetlo plavu u zelenu u naračastu te konačno u žutu, odnosno tim redosljedom mijenjanja boja se povećava vrijednost sile trenja.

Grafički prikaz reziduala kod ovisnosti sile i temperature za materijal SS je prikazan na slici 6.25.

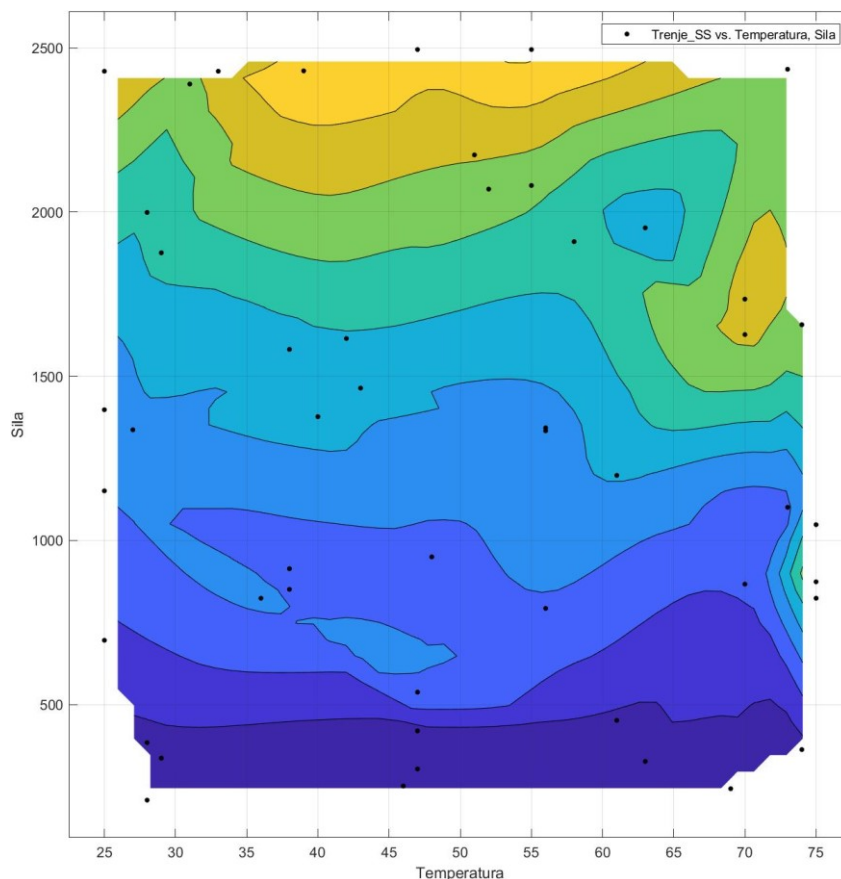


Slika 6.25 F-t graf reziduala za kubičnu interpolaciju za SS



Tamo gdje su svi reziduali 0, model savršeno predviđa. Što su reziduali dalje od 0, to je model manje točan.

Grafički prikaz kontura kod ovisnosti sile i temperature za materijal SS je prikazan na slici 6.26.



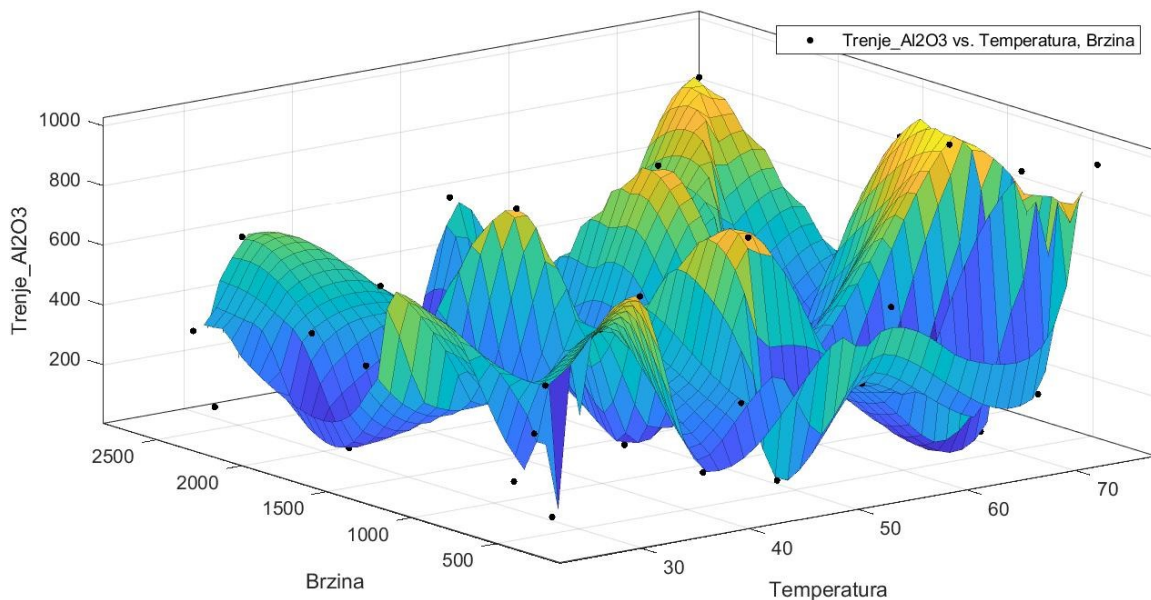
Slika 6.26 F-t konturni graf za kubičnu interpolaciju za SS

Grafičkim prikazom kontura se može otprilike ustanoviti gdje je najveća vrijednost sile trenja. Prethodno je ustanovljeno da žuta boja predstavlja najveće vrijednosti, iz toga se može zaključiti da je najveća vrijednost sile trenja između 2300 i 2450 nN te 35 i 62 °C.

Kao i kod linearne interpolacije nakon F-t potrebno je prikazat grafički linearnu ovisnost v-t na isti način.

Druga ovisnost je brzine i temperature za materijal  $Al_2O_3$  je prikazana na slici 6.27, a njen koeficijent determinacije ima sljedeću vrijednost:

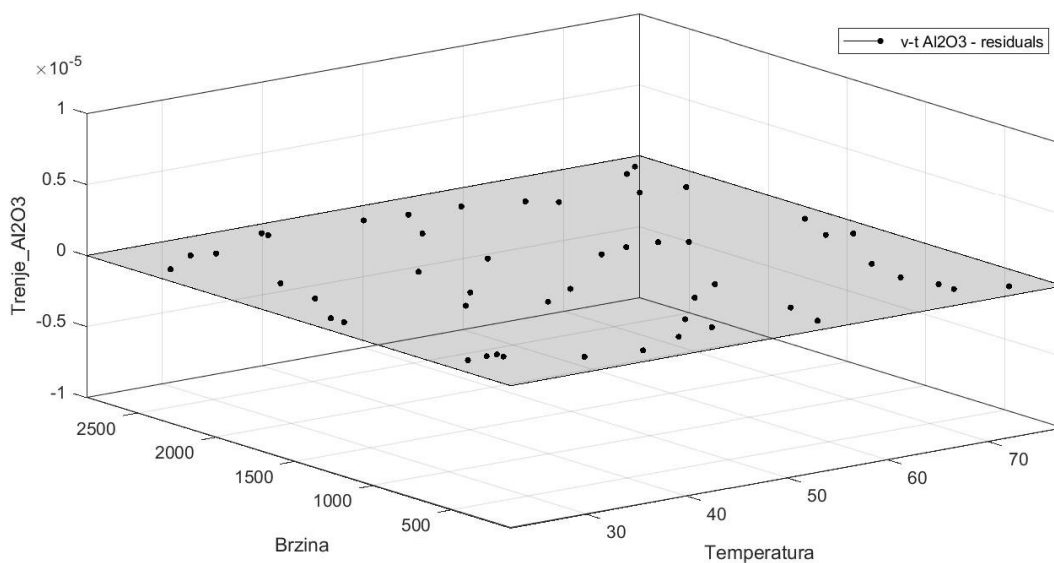
$$R^2_{v,t(Al_2O_3)} = 1$$



Slika 6.27 v-t graf za kubičnu interpolaciju za Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>

Bojom je prikazan intenzitet sile trenja, plava boja označava male vrijednosti, povećanjem vrijednosti po aplikati boja se mijenja, iz tamno plave u svijetlo plavu u zelenu u naračastu te konačno u žutu, odnosno tim redosljedom mijenjanja boja se povećava vrijednost sile trenja.

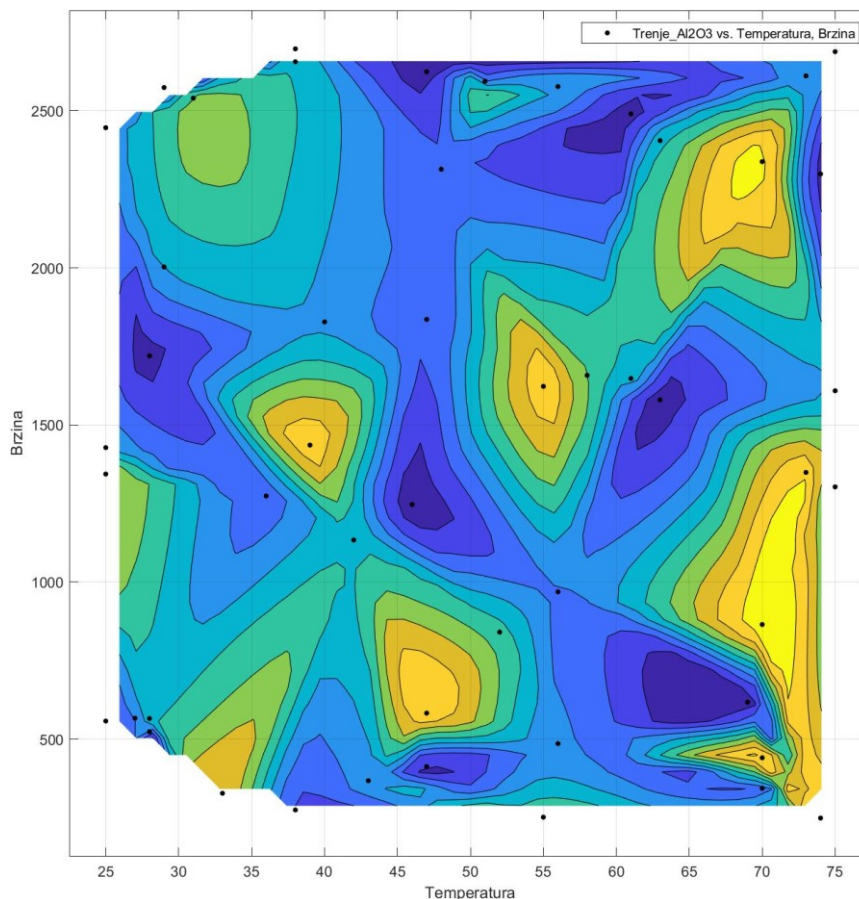
Grafički prikaz reziduala kod ovisnosti brzine i temperature za materijal Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> je prikazan na slici 6.28.



Slika 6.28 v-t graf reziduala za kubičnu interpolaciju za Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>

Tamo gdje su svi reziduali 0, model savršeno predviđa. Što su reziduali dalje od 0, to je model manje točan.

Grafički prikaz kontura kod ovisnosti brzine i temperature za materijal  $\text{Al}_2\text{O}_3$  je prikazan na slici 6.29.

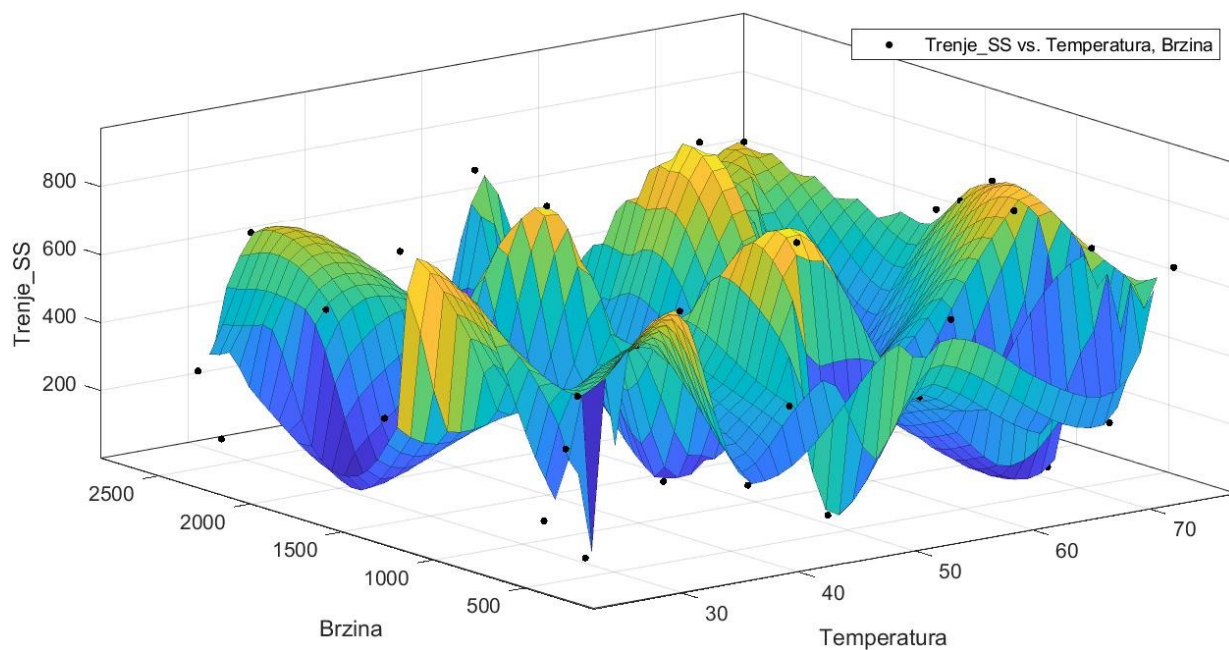


Slika 6.29 v-t konturni graf za kubičnu interpolaciju za  $\text{Al}_2\text{O}_3$

Grafičkim prikazom kontura se može vidjeti da postoje par ekstrema sile trenja, samim time teško je ustanoviti u kojem rasponu brzine i temperature je njena najveća vrijednost.

Sljedeća na redu je ovisnost brzine i temperature za materijal SS koja je prikazana na slici 6.30, a njen koeficijent determinacije ima sljedeću vrijednost:

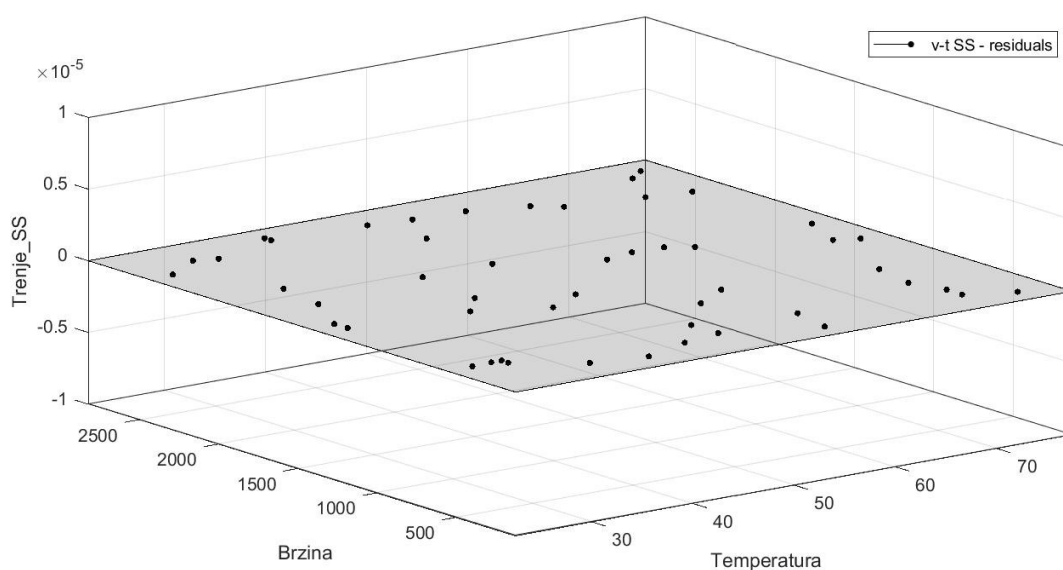
$$R^2_{v,t(SS)} = 1$$



Slika 6.30 v-t graf za kubičnu interpolaciju za SS

Bojom je prikazan intenzitet sile trenja, plava boja označava male vrijednosti, povećanjem vrijednosti po aplikati boja se mijenja, iz tamno plave u svijetlo plavu u zelenu u naračastu te konačno u žutu, odnosno tim redosljedom mijenjanja boja se povećava vrijednost sile trenja.

Grafički prikaz reziduala kod ovisnosti brzine i temperature za materijal SS je prikazan na slici 6.31.

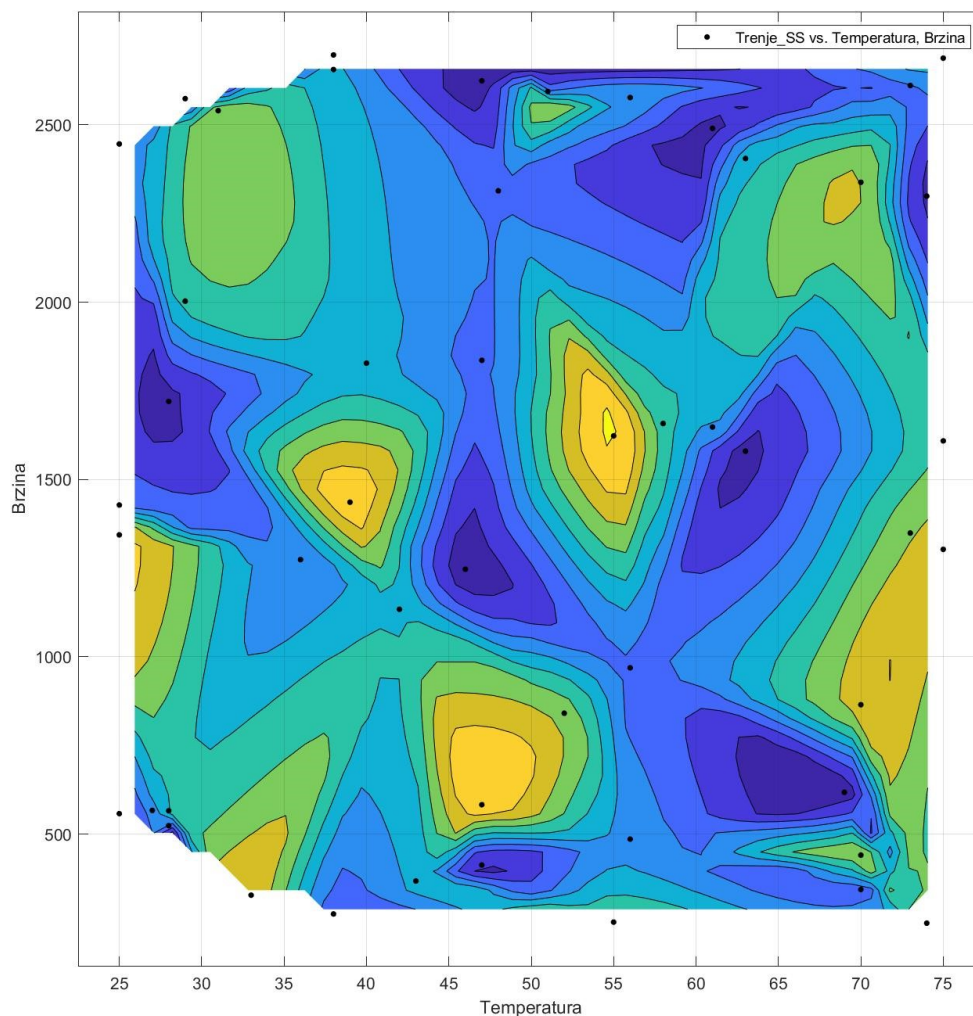


Slika 6.31 v-t graf reziduala za kubičnu interpolaciju za SS



Tamo gdje su svi reziduali 0, model savršeno predviđa. Što su reziduali dalje od 0, to je model manje točan.

Grafički prikaz kontura kod ovisnosti brzine i temperature za materijal SS je prikazan na slici 6.32.



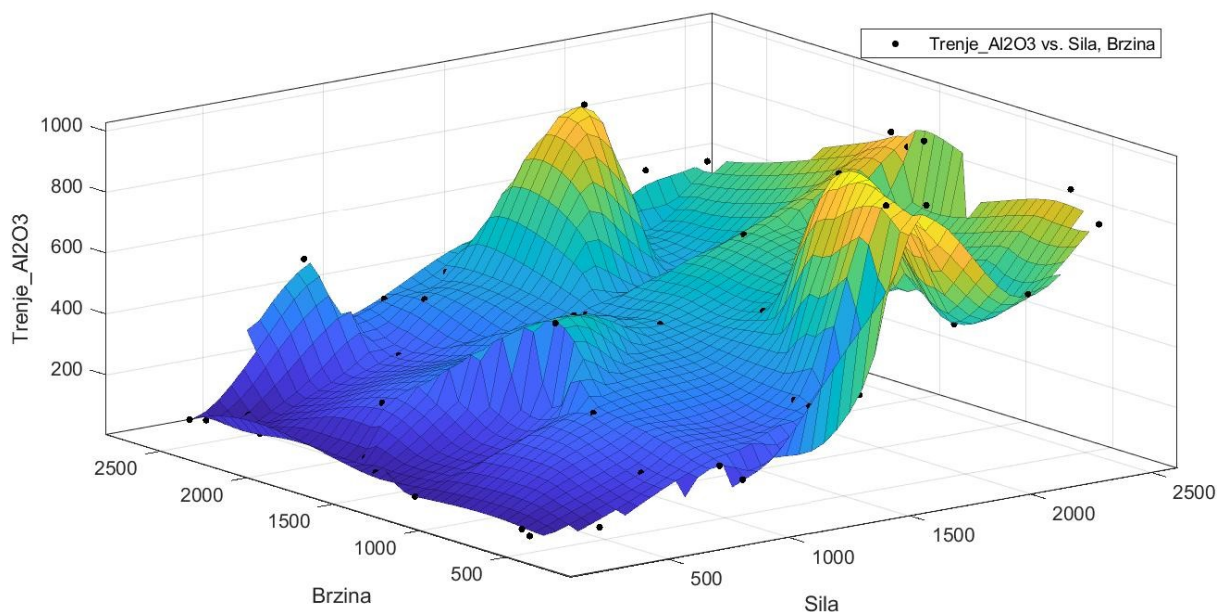
Slika 6.32 v-t konturni graf za kubičnu interpolaciju za SS

Grafičkim prikazom kontura se može vidjeti da postoje par ekstrema sile trenja, samim time teško je ustanoviti u kojem rasponu brzine i temperature je njena najveća vrijednost.

Zadnje za kubičnu interpolaciju je potrebno grafički prikazati ovisnost F-v.

Treća ovisnost je sile i brzine za materijal  $Al_2O_3$  koja je prikazana na slici 6.33, a njen koeficijent determinacije ima sljedeću vrijednost:

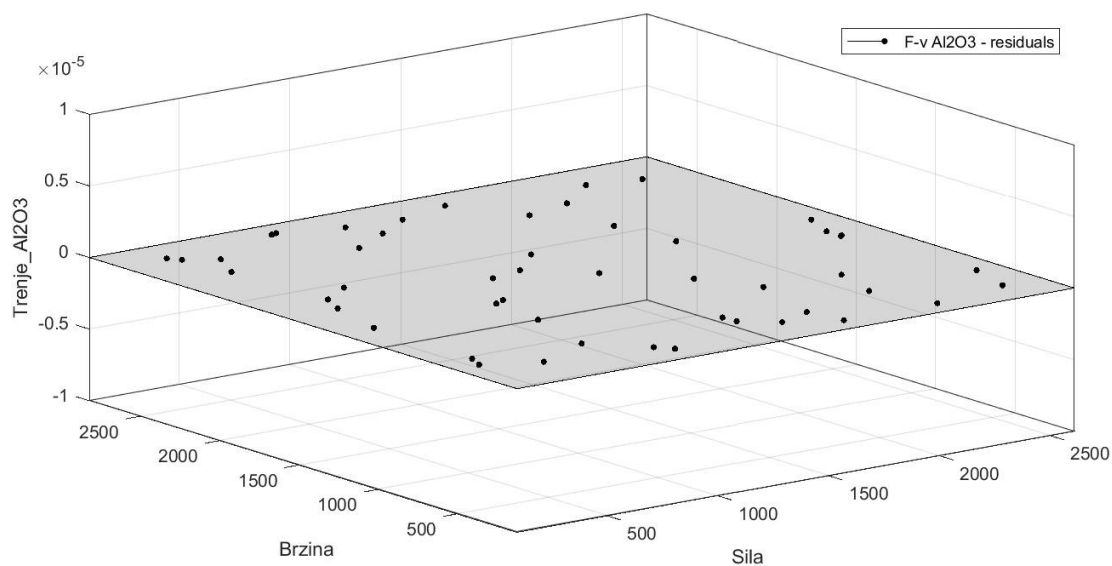
$$R^2_{F,v(Al_2O_3)} = 1$$



Slika 6.33 F-v graf za kubičnu interpolaciju za  $\text{Al}_2\text{O}_3$

Bojom je prikazan intenzitet sile trenja, plava boja označava male vrijednosti, povećanjem vrijednosti po apcisi i po aplikati boja se mijenja, iz tamno plave u svijetlo plavu u zelenu u naračastu te konačno u žutu, odnosno tim redosljedom mijenjanja boja se povećava vrijednost sile trenja.

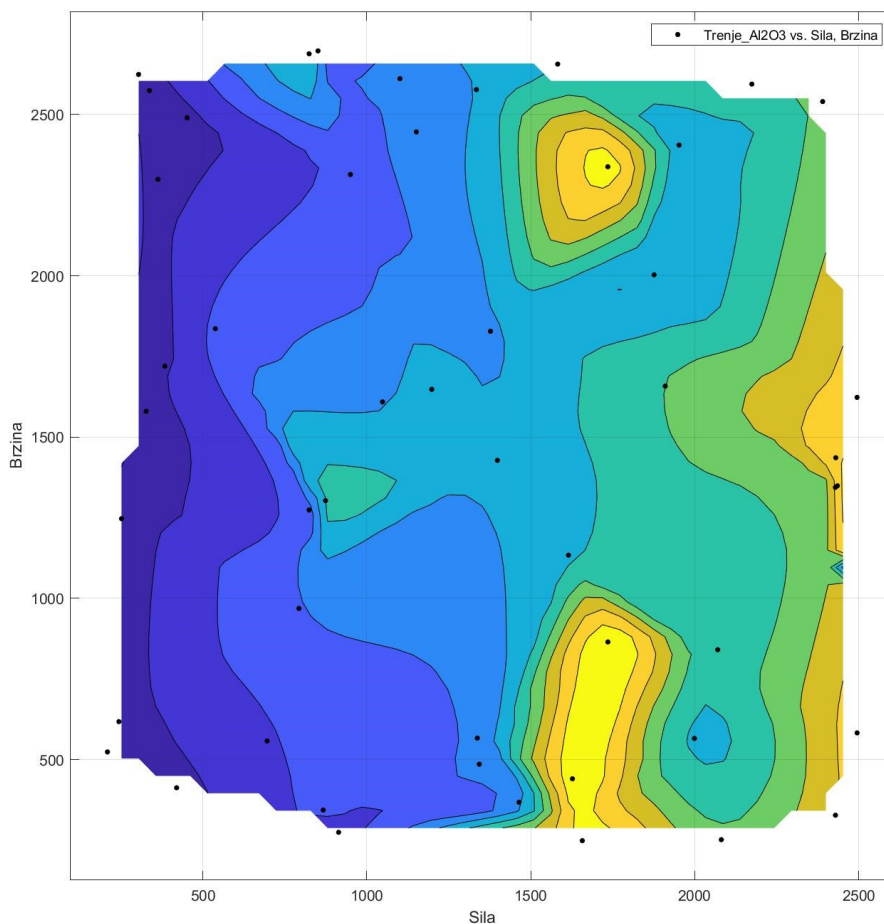
Grafički prikaz reziduala kod ovisnosti sile i brzine za materijal  $\text{Al}_2\text{O}_3$  je prikazan na slici 6.34.



Slika 6.34 F-v graf reziduala za kubičnu interpolaciju za  $\text{Al}_2\text{O}_3$

Tamo gdje su svi reziduali 0, model savršeno predviđa. Što su reziduali dalje od 0, to je model manje točan.

Grafički prikaz kontura kod ovisnosti sile i brzine za materijal  $\text{Al}_2\text{O}_3$  je prikazan na slici 6.35.

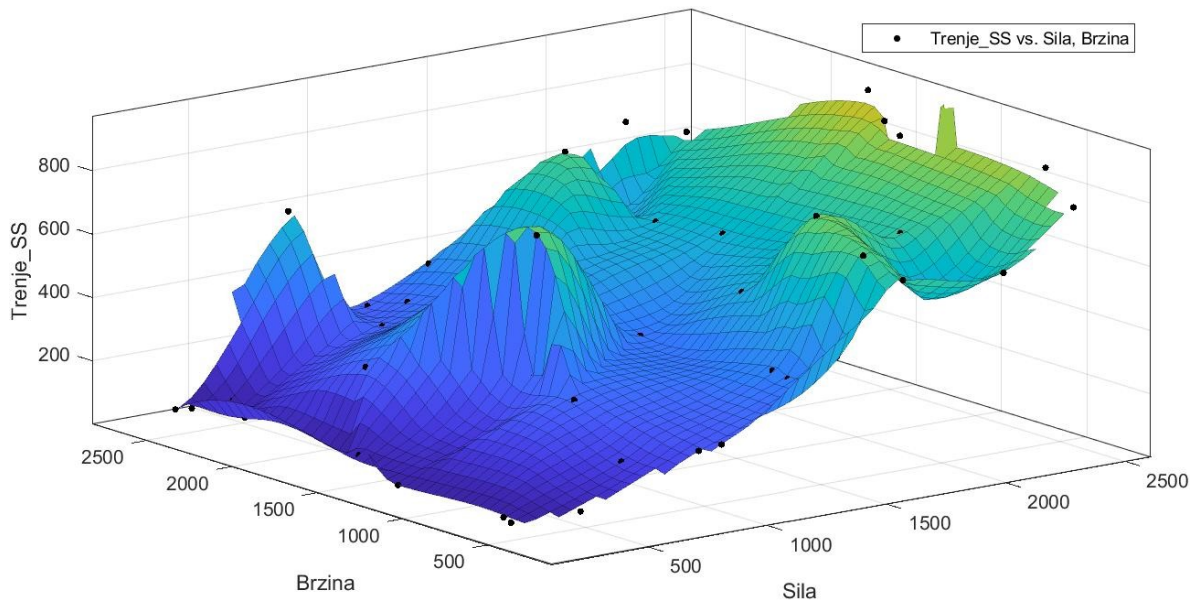


Slika 6.35 F-v konturni graf za kubičnu interpolaciju za  $\text{Al}_2\text{O}_3$

Grafičkim prikazom kontura se može otprilike ustanoviti gdje je najveća vrijednost sile trenja. Prethodno je ustanovljeno da žuta boja predstavlja najveće vrijednosti, iz toga se može zaključiti da je najveća vrijednost sile trenja između 2300 i 2400 nm/s te 1700 i 1800 nN.

Također je potrebno prikazati ovisnost sile i brzine za materijal SS koja je prikazana na slici 6.36, a njen koeficijent determinacije ima sljedeću vrijednost:

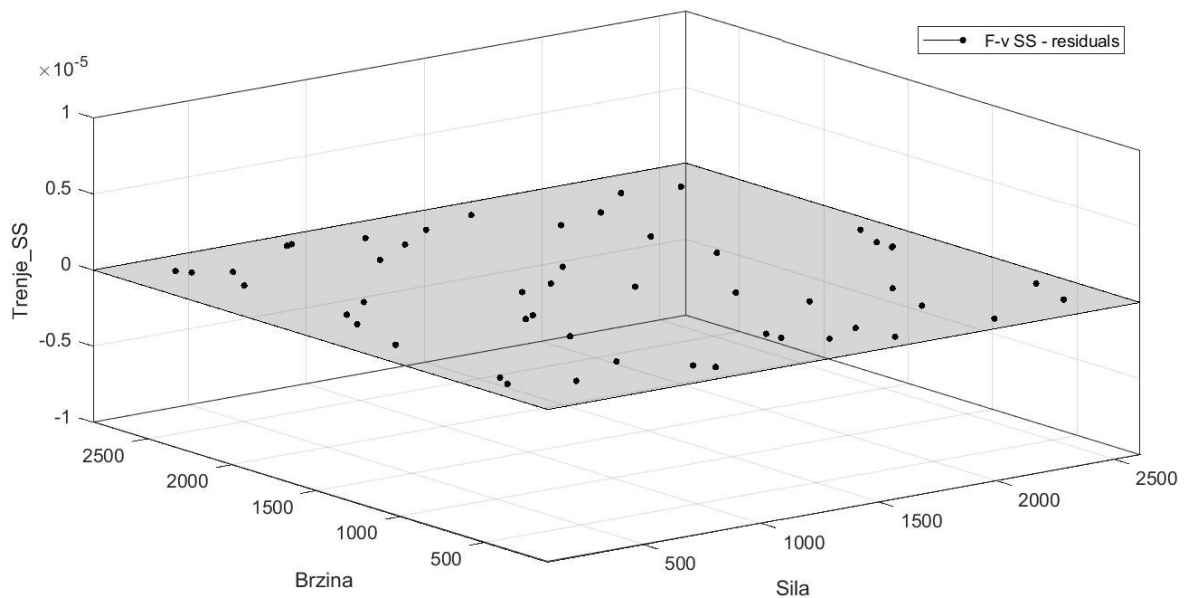
$$R^2_{F,v(SS)} = 1$$



Slika 6.36 F-v graf za kubičnu interpolaciju za SS

Bojom je prikazan intenzitet sile trenja, plava boja označava male vrijednosti, povećanjem vrijednosti po apcisi i po aplikati boja se mijenja, iz tamno plave u svijetlo plavu u zelenu te konačno u naračastu, odnosno tim redosljedom mijenjanja boja se povećava vrijednost sile trenja.

Grafički prikaz reziduala kod ovisnosti sile i brzine za materijal SS je prikazan na slici 6.37.

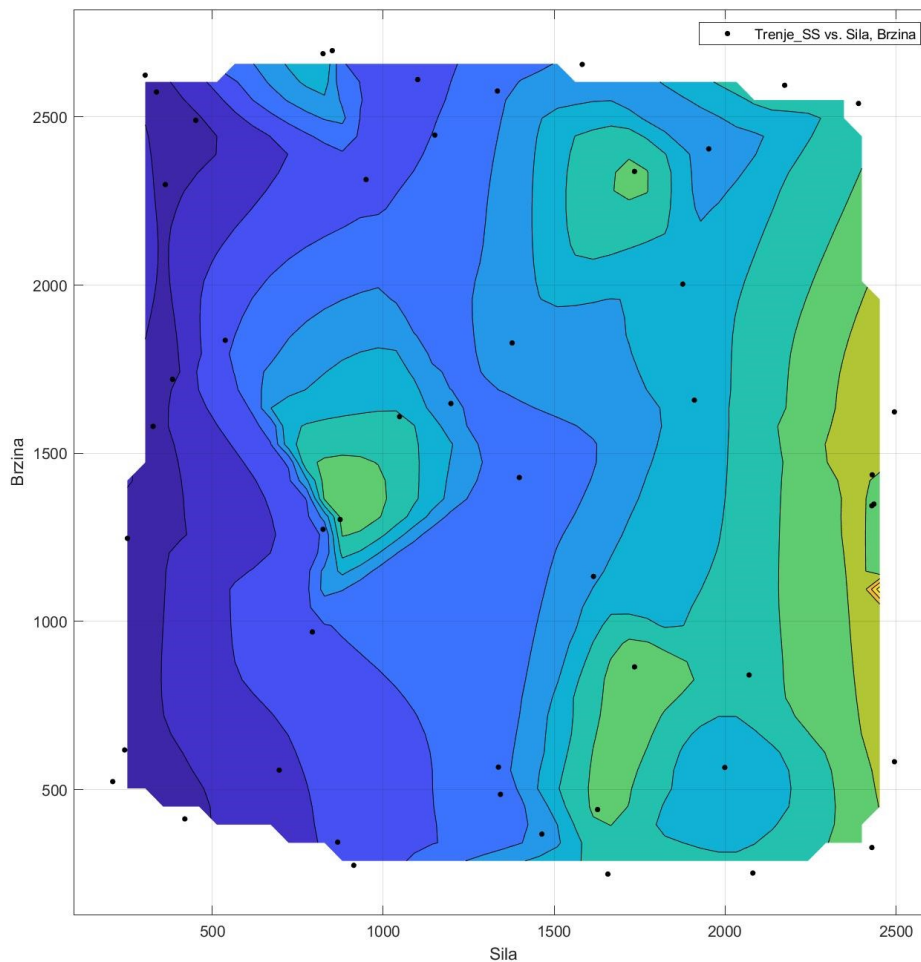


Slika 6.37 F-v graf reziduala za kubičnu interpolaciju za SS



Tamo gdje su svi reziduali 0, model savršeno predviđa. Što su reziduali dalje od 0, to je model manje točan.

Grafički prikaz kontura kod ovisnosti sile i brzine za materijal SS je prikazan na slici 6.38.



Slika 6.38 F-v konturni graf za kubičnu interpolaciju za SS

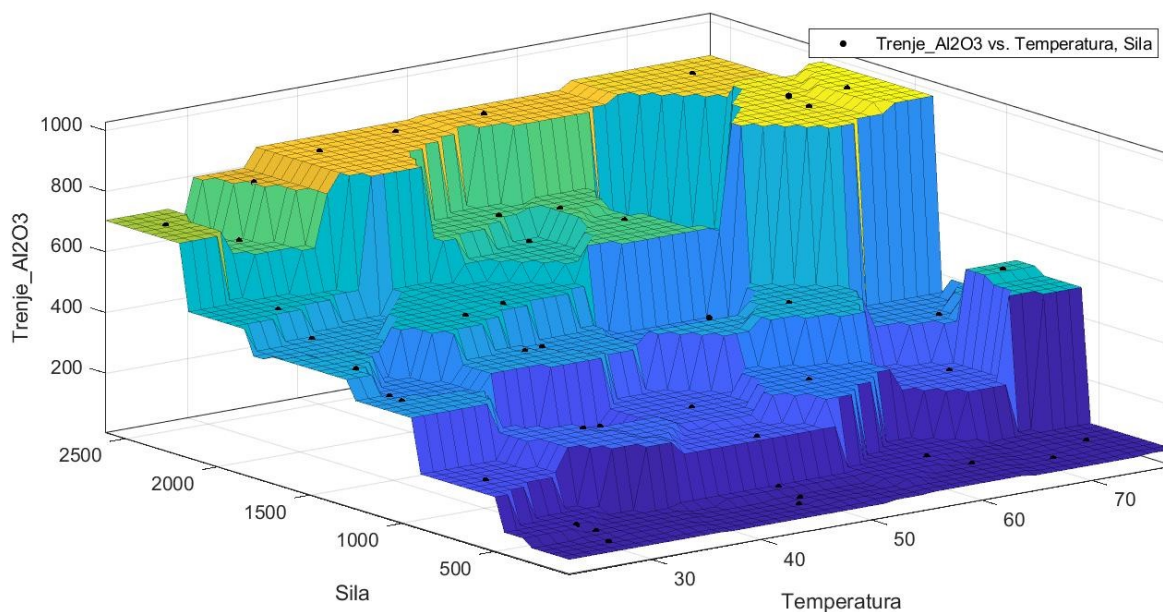
Grafičkim prikazom kontura se može otprilike ustanoviti gdje je najveća vrijednost sile trenja. Prethodno je ustanovljeno da narančasta boja predstavlja najveće vrijednosti, iz toga se može zaključiti da je najveća vrijednost sile trenja između 1100 i 1150 nm/s te 2400 i 2450 nN.

### 6.2.3 Interpolacija najbližeg susjeda

Ponavljamo postupak prikaza interpolacija na isti način kao i za linearnu i kubičnu.

Prva ovisnost je sile i temperature za materijal  $\text{Al}_2\text{O}_3$  koja je prikazna na slici 6.39, a njen koeficijent determinacije ima sljedeću vrijednost:

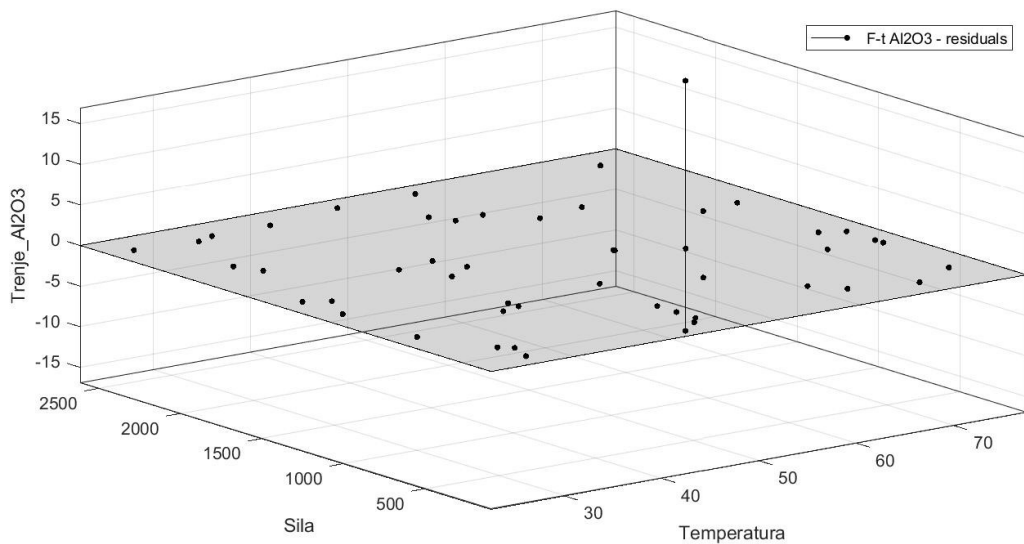
$$R^2_{F,t(\text{Al}_2\text{O}_3)} = 0,9999$$



Slika 6.39 F-t graf za interpolaciju najbližeg susjeda za  $\text{Al}_2\text{O}_3$

Bojom je prikazan intenzitet sile trenja, plava boja označava male vrijednosti, povećanjem vrijednosti po ordinati i po aplikati boja se mijenja, iz tamno plave u svijetlo plavu u zelenu u naračastu te konačno u žutu, odnosno tim redosljedom mijenjanja boja se povećava vrijednost sile trenja.

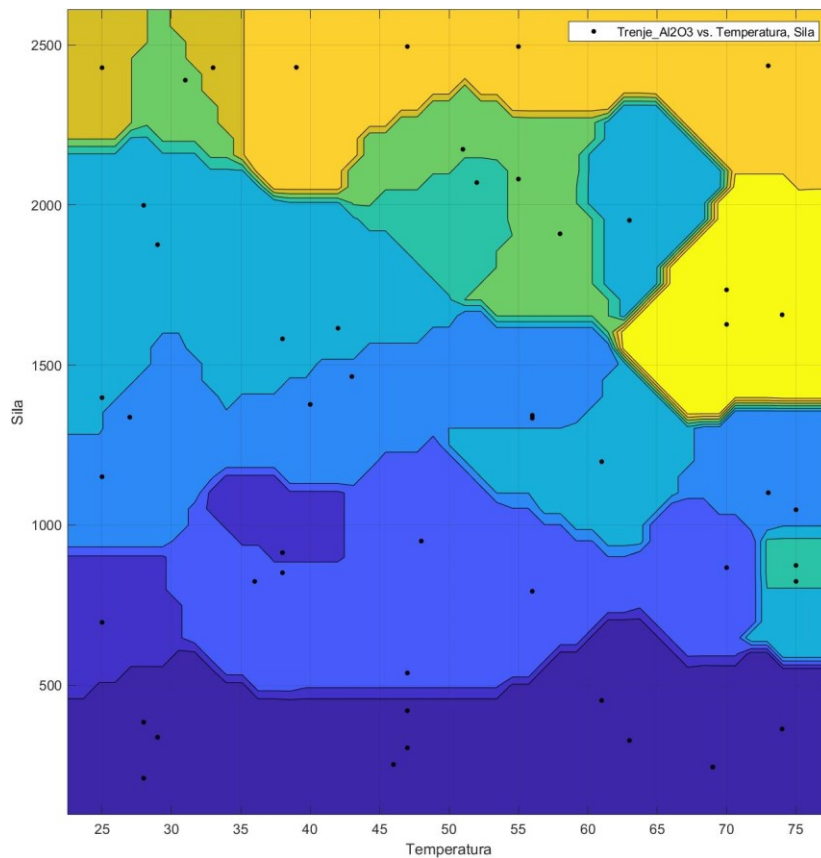
Grafički prikaz reziduala kod ovisnosti sile i temperature za materijal  $\text{Al}_2\text{O}_3$  je prikazan na slici 6.40.



Slika 6.40 F-t graf reziduala za interpolaciju najbližeg susjeda za Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>

Tamo gdje su svi reziduali 0, model savršeno predviđa. Što su reziduali dalje od 0, to je model manje točan.

Grafički prikaz kontura kod ovisnosti sile i temperature za materijal Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> je prikazan na slici 6.41.

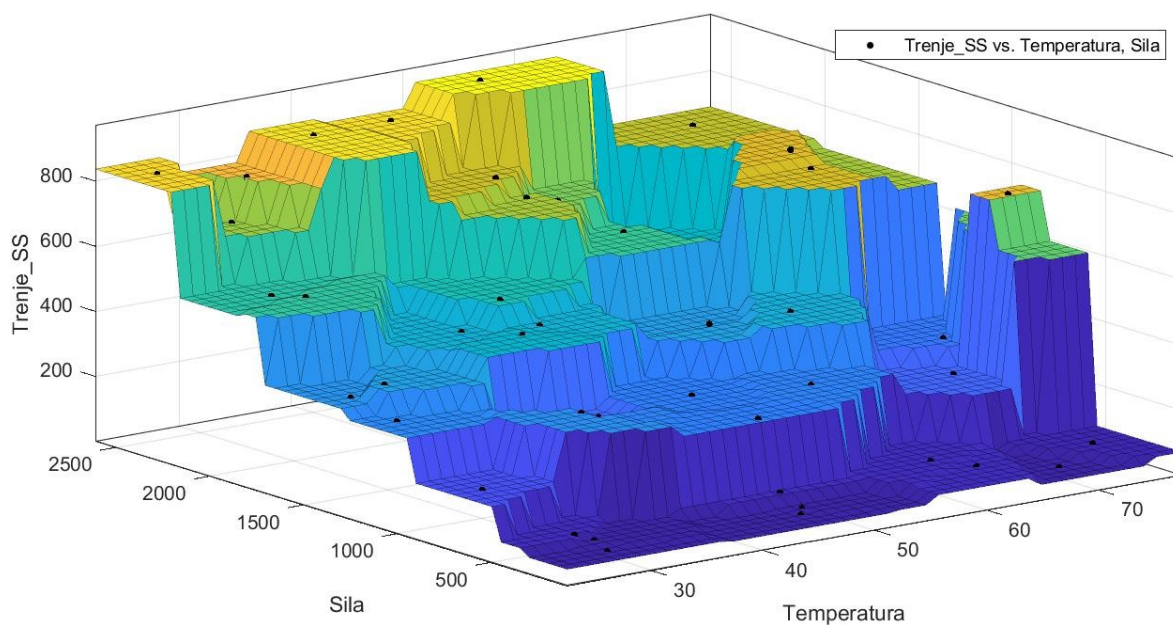


Slika 6.41 F-t konturni graf za interpolaciju najbližeg susjeda za Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>

Grafičkim prikazom kontura se može otprilike ustanoviti gdje je najveća vrijednost sile trenja. Prethodno je ustanovljeno da žuta boja predstavlja najveće vrijednosti, iz toga se može zaključiti da je najveća vrijednost sile trenja između 1350 i 2100 nN te 62 i 77 °C.

Sljedeća na redu je ovisnost sile i temperature za materijal SS koja je prikazana na slici 6.41, a njen koeficijent determinacije ima sljedeću vrijednost:

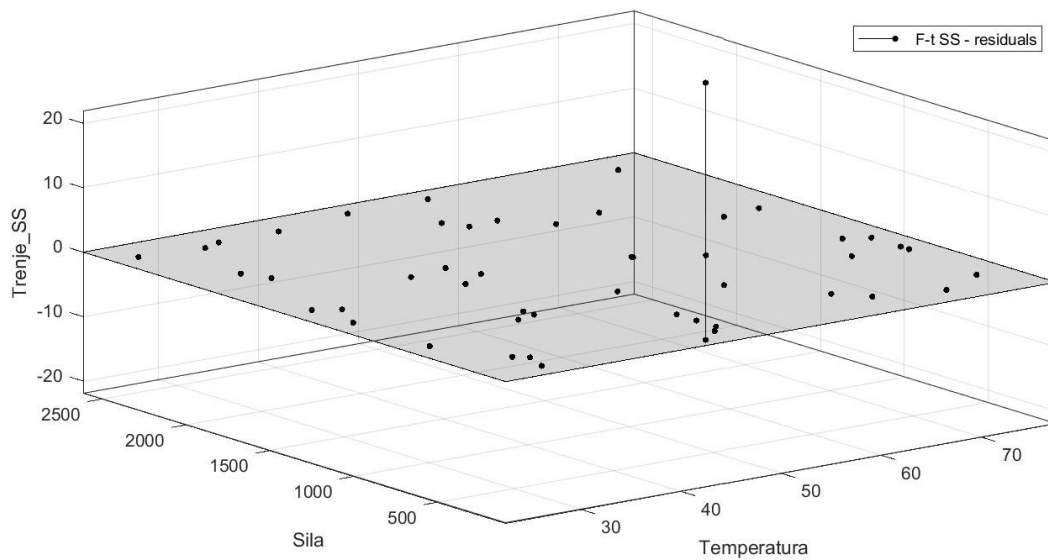
$$R^2_{F,t(SS)} = 0,9998$$



Slika 6.42 F-t graf za interpolaciju najbližeg susjeda za SS

Bojom je prikazan intenzitet sile trenja, plava boja označava male vrijednosti, povećanjem vrijednosti po ordinati i po aplikati boja se mijenja, iz tamno plave u svijetlo plavu u zelenu u naračastu te konačno u žutu, odnosno tim redosljedom mijenjanja boja se povećava vrijednost sile trenja.

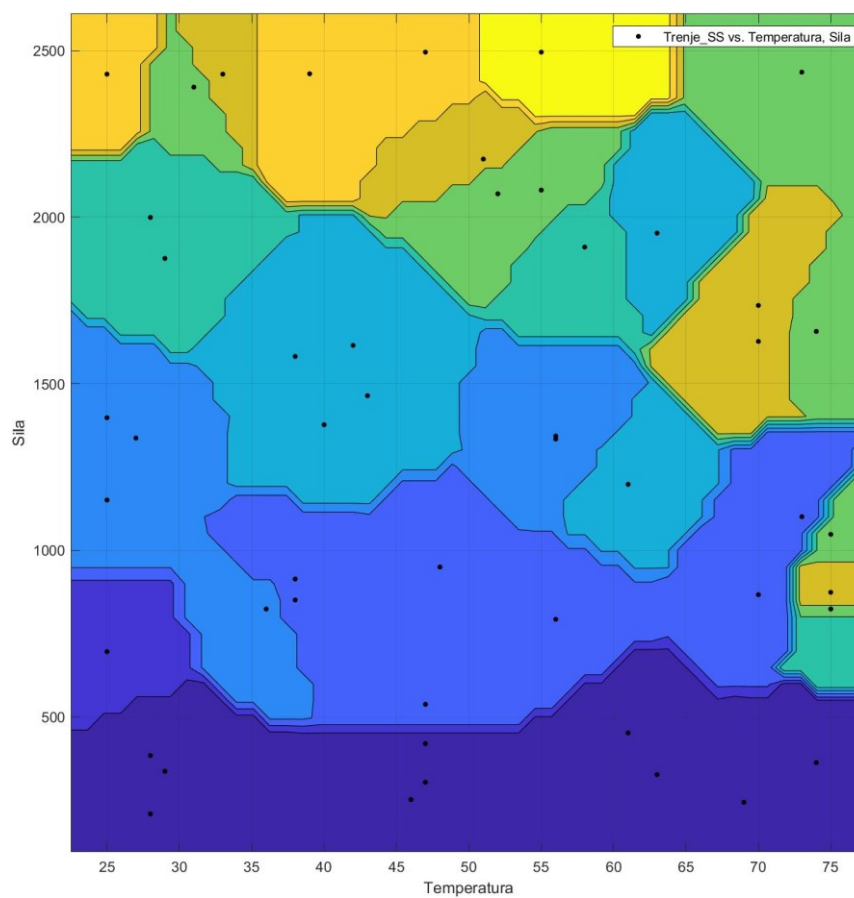
Grafički prikaz reziduala kod ovisnosti sile i temperature za materijal SS je prikazan na slici 6.43.



Slika 6.43 F-t graf reziduala za interpolaciju najbližeg susjeda za SS

Tamo gdje su svi reziduali 0, model savršeno predviđa. Što su reziduali dalje od 0, to je model manje točan.

Grafički prikaz kontura kod ovisnosti sile i temperature za materijal SS je prikazan na slici 6.44.



Slika 6.44 F-t konturni graf za interpolaciju najbližeg susjeda za SS

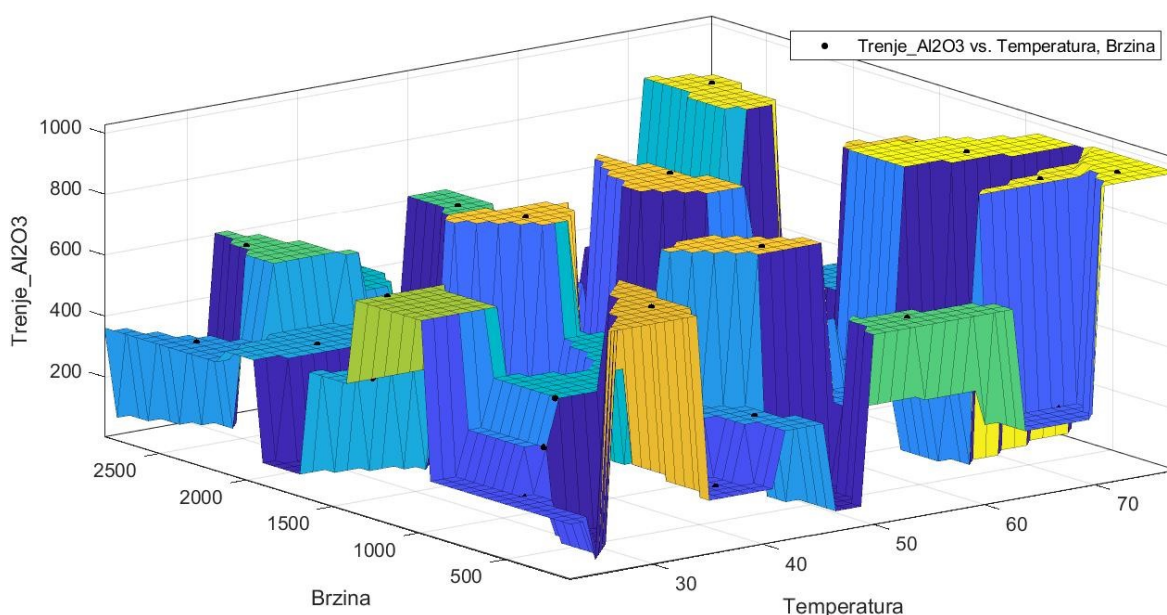


Grafičkim prikazom kontura se može otprilike ustanoviti gdje je najveća vrijednost sile trenja. Prethodno je ustanovljeno da žuta boja predstavlja najveće vrijednosti, iz toga se može zaključiti da je najveća vrijednost sile trenja između 2300 i 2600 nN te 51 i 64 °C.

Kao i kod linearne interpolacije nakon F-t potrebno je prikazat grafički linearnu ovisnost v-t na isti način.

Druga ovisnost je brzine i temperature za materijal Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> je prikazana na slici 6.45, a njen koeficijent determinacije ima sljedeću vrijednost:

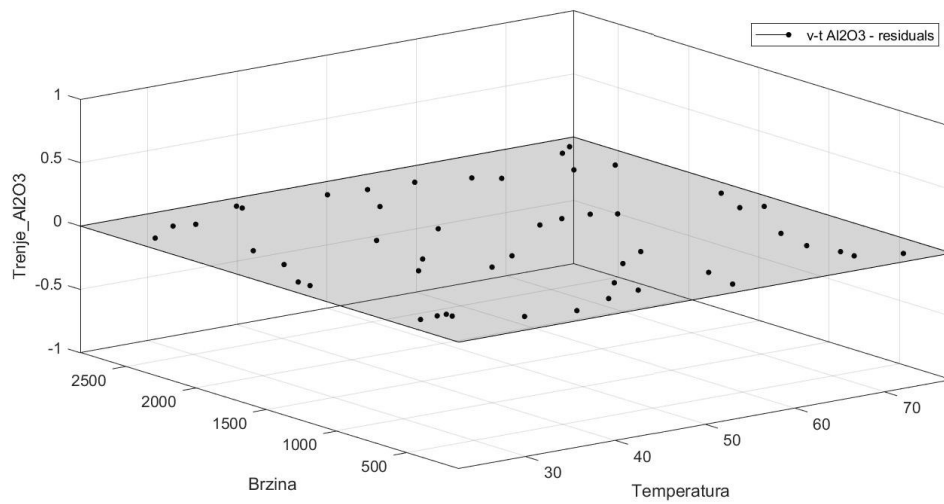
$$R^2_{v,t(Al_2O_3)} = 1$$



Slika 6.45 v-t graf za interpolaciju najbližeg susjeda za Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>

Bojom je prikazan intenzitet sile trenja, plava boja označava male vrijednosti, povećanjem vrijednosti po aplikati boja se mijenja, iz tamno plave u svijetlo plavu u zelenu u naračastu te konačno u žutu, odnosno tim redosljedom mijenjanja boja se povećava vrijednost sile trenja.

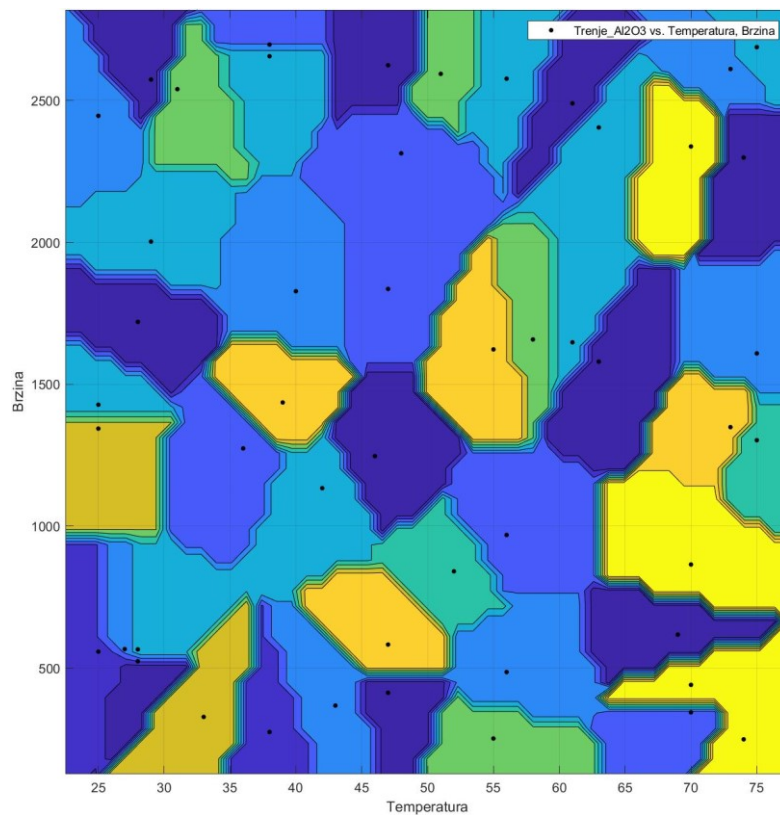
Grafički prikaz reziduala kod ovisnosti brzine i temperature za materijal Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> je prikazan na slici 6.46.



Slika 6.46 v-t graf reziduala za interpolaciju najbližeg susjeda za  $\text{Al}_2\text{O}_3$

Tamo gdje su svi reziduali 0, model savršeno predviđa. Što su reziduali dalje od 0, to je model manje točan.

Grafički prikaz kontura kod ovisnosti brzine i temperature za materijal  $\text{Al}_2\text{O}_3$  je prikazan na slici 6.47.

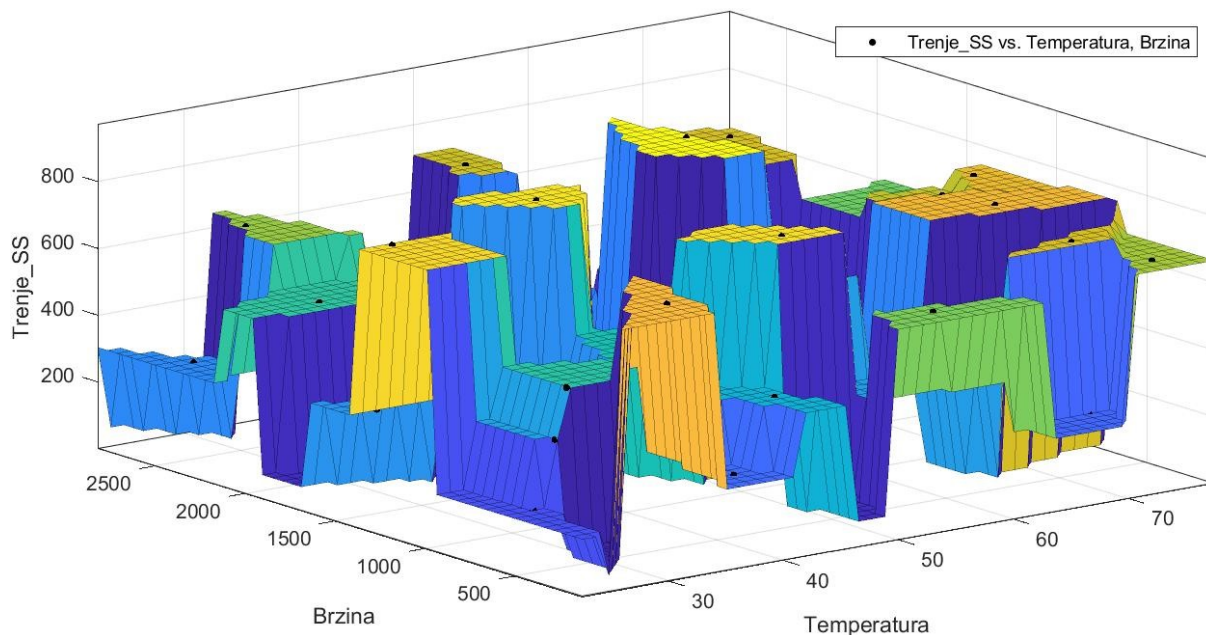


Slika 6.47 v-t konturni graf za interpolaciju najbližeg susjeda za  $\text{Al}_2\text{O}_3$

Grafičkim prikazom kontura se može vidjeti da postoje par ekstrema sile trenja, samim time teško je ustanoviti u kojem rasponu brzine i temperature je njena najveća vrijednost.

Sljedeća na redu je ovisnost brzine i temperature za materijal SS koja je prikazana na slici 6.48, a njen koeficijent determinacije ima sljedeću vrijednost:

$$R^2_{v,t(SS)} = 1$$

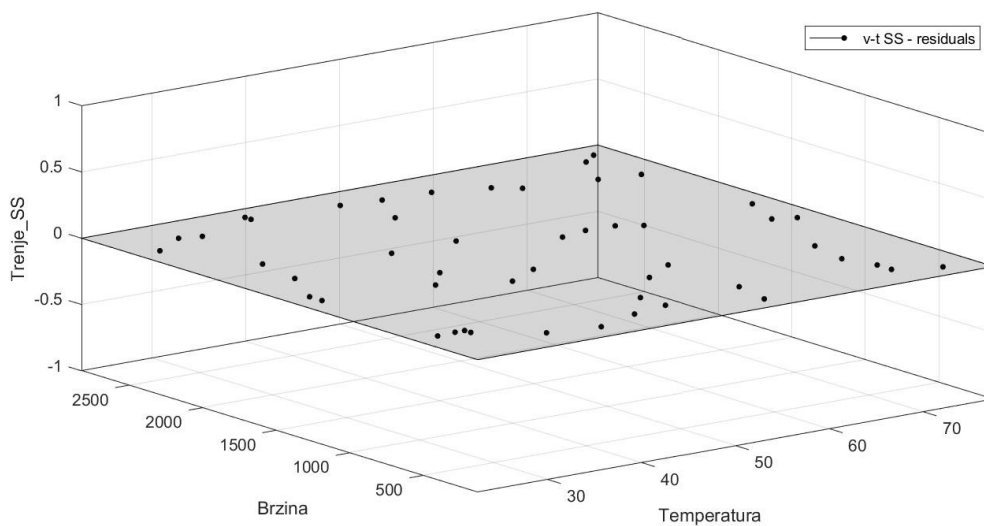


Slika 6.48 v-t graf za interpolaciju najbližeg susjeda za SS

Bojom je prikazan intenzitet sile trenja, plava boja označava male vrijednosti, povećanjem vrijednosti po aplikati boja se mijenja, iz tamno plave u svijetlo plavu u zelenu u naračastu te konačno u žutu, odnosno tim redosljedom mijenjanja boja se povećava vrijednost sile trenja.

Grafički prikaz reziduala kod ovisnosti brzine i temperature za materijal SS je prikazan na slici 6.49.

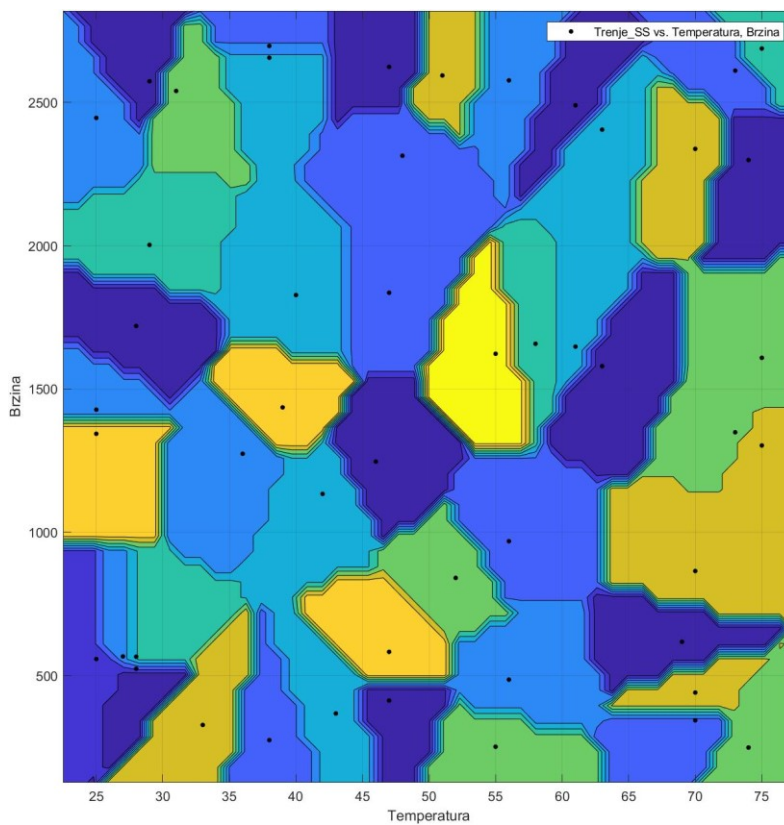




Slika 6.49 v-t graf reziduala za interpolaciju najbližeg susjeda za SS

Tamo gdje su svi reziduali 0, model savršeno predviđa. Što su reziduali dalje od 0, to je model manje točan.

Grafički prikaz kontura kod ovisnosti brzine i temperature za materijal SS je prikazan na slici 6.50.



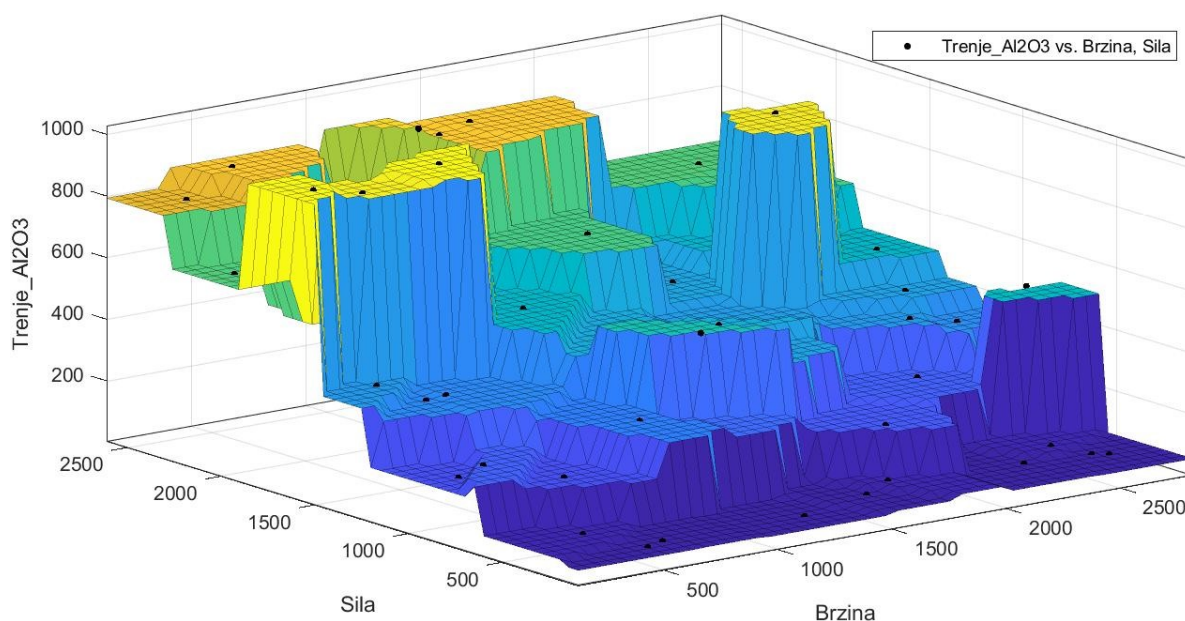
Slika 6.50 v-t konturni graf za interpolaciju najbližeg susjeda za SS

Grafičkim prikazom kontura se može vidjeti da postoje par ekstrema sile trenja, samim time teško je ustanoviti u kojem rasponu brzine i temperature je njena najveća vrijednost.

Zadnje za interpolaciju najbližeg susjeda je potrebno grafički prikazati ovisnost F-v.

Treća ovisnost je sile i brzine za materijal  $\text{Al}_2\text{O}_3$  koja je prikazana na slici 6.51, a njen koeficijent determinacije ima sljedeću vrijednost:

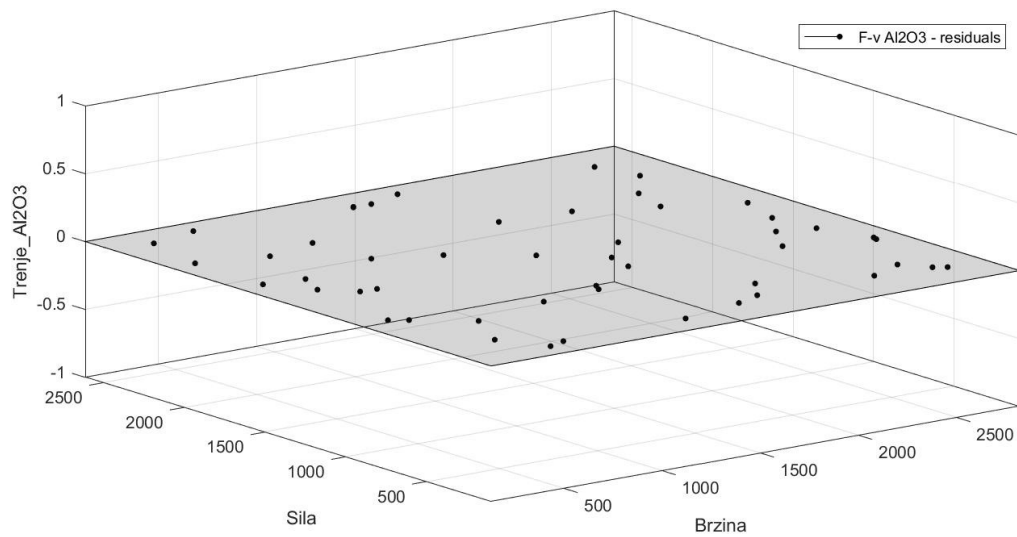
$$R^2_{F,v(\text{Al}_2\text{O}_3)} = 1$$



Slika 6.51 F-v graf za interpolaciju najbližeg susjeda za  $\text{Al}_2\text{O}_3$

Bojom je prikazan intenzitet sile trenja, plava boja označava male vrijednosti, povećanjem vrijednosti po ordinati i po aplikati boja se mijenja, iz tamno plave u svijetlo plavu u zelenu u naračastu te konačno u žutu, odnosno tim redosljedom mijenjanja boja se povećava vrijednost sile trenja.

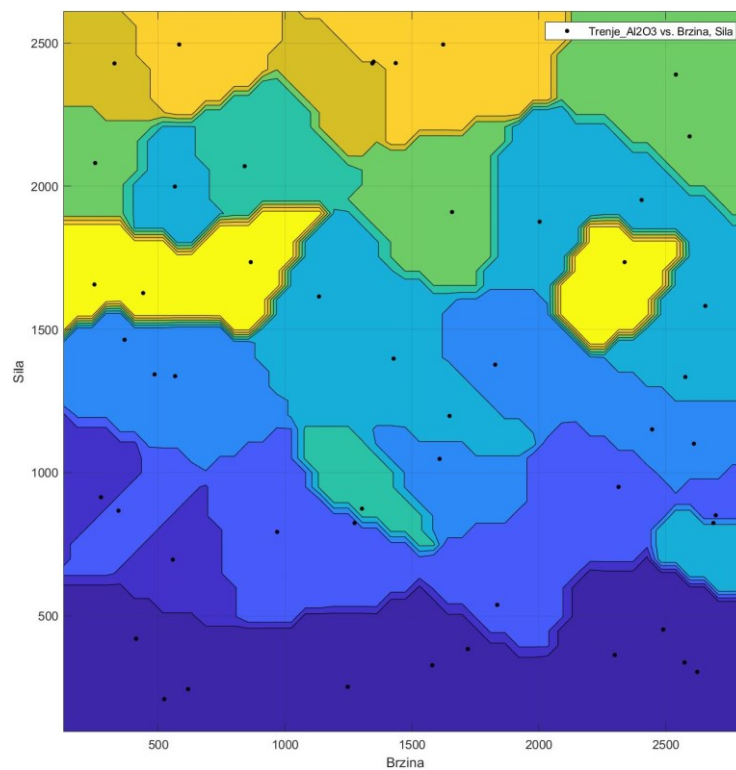
Grafički prikaz reziduala kod ovisnosti sile i brzine za materijal  $\text{Al}_2\text{O}_3$  je prikazan na slici 6.52.



Slika 6.52 F-v graf reziduala za interpolaciju najbližeg susjeda za  $\text{Al}_2\text{O}_3$

Tamo gdje su svi reziduali 0, model savršeno predviđa. Što su reziduali dalje od 0, to je model manje točan.

Grafički prikaz kontura kod ovisnosti sile i brzine za materijal  $\text{Al}_2\text{O}_3$  je prikazan na slici 6.53.

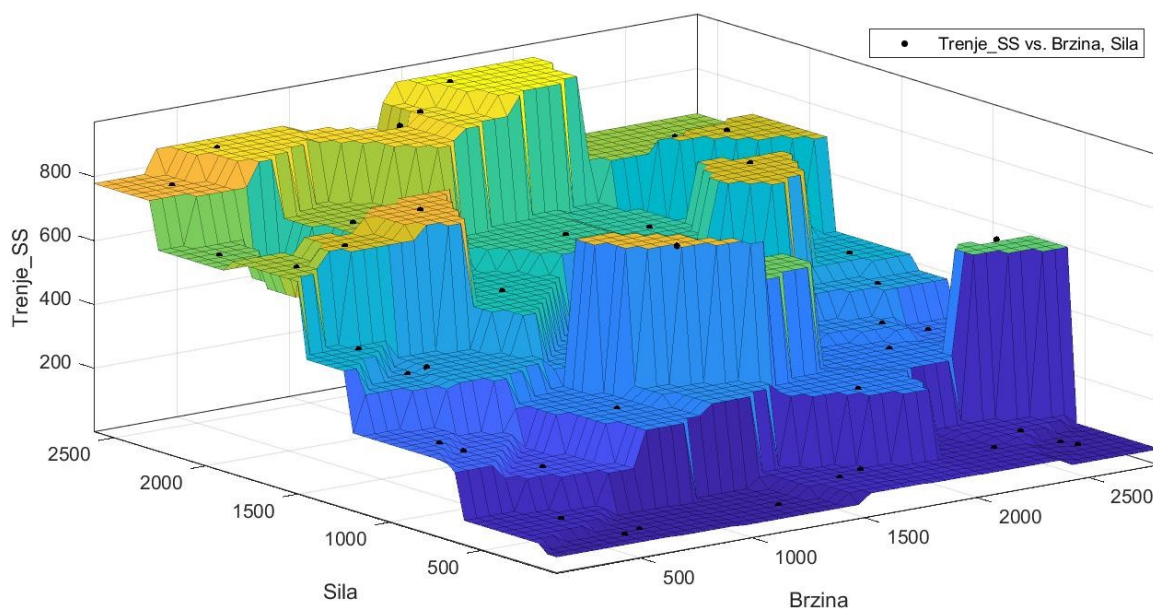


Slika 6.53 F-v konturni graf za interpolaciju najbližeg susjeda za  $\text{Al}_2\text{O}_3$

Grafičkim prikazom kontura se može otprilike ustanoviti gdje je najveća vrijednost sile trenja. Prethodno je ustanovljeno da žuta boja predstavlja najveće vrijednosti, iz toga se može zaključiti da je najveća vrijednost sile trenja između 2100 i 2550 nm/s te 1500 i 1450 i 1850 nN.

Također je potrebno prikazati ovisnost sile i brzine za materijal SS koja je prikazana na slici 6.54, a njen koeficijent determinacije ima sljedeću vrijednost:

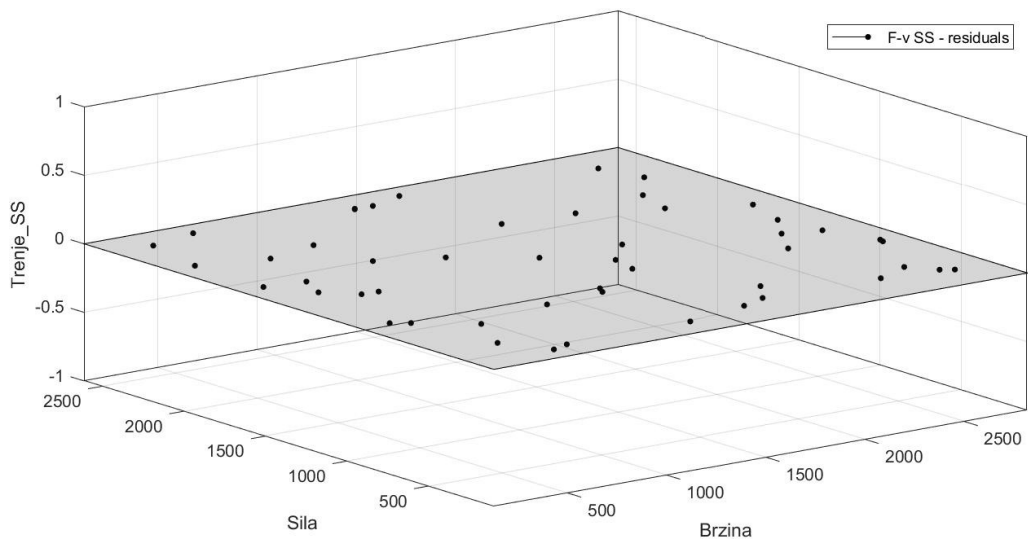
$$R^2_{F,v(SS)} = 1$$



Slika 6.54 F-v graf za interpolaciju najbližeg susjeda za SS

Bojom je prikazan intenzitet sile trenja, plava boja označava male vrijednosti, povećanjem vrijednosti po ordinati i po aplikati boja se mijenja, iz tamno plave u svijetlo plavu u zelenu u naračastu te konačno u žutu, odnosno tim redosljedom mijenjanja boja se povećava vrijednost sile trenja.

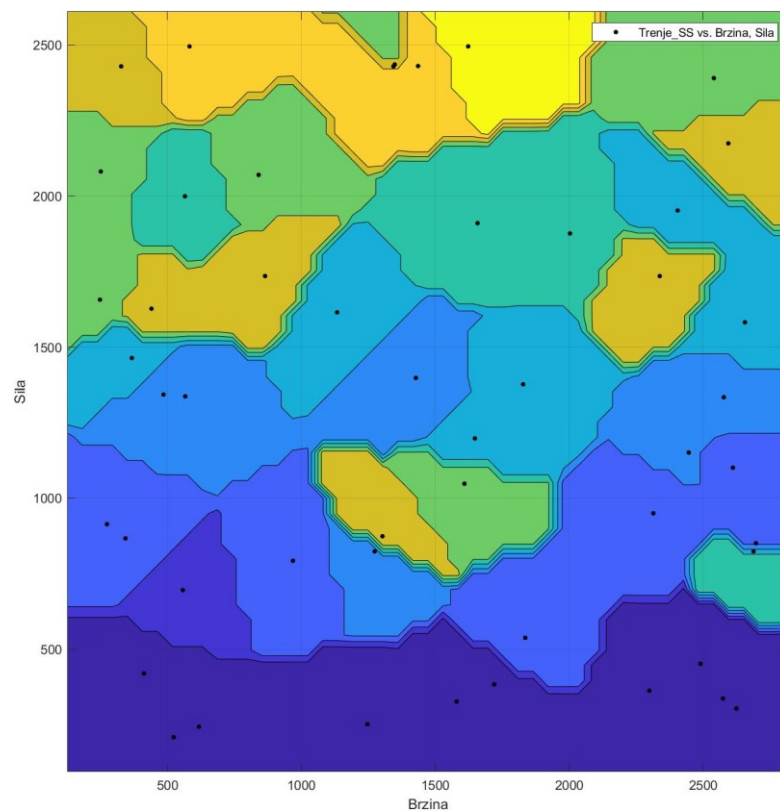
Grafički prikaz reziduala kod ovisnosti sile i brzine za materijal SS je prikazan na slici 6.55.



Slika 6.55 F-v graf reziduala za interpolaciju najbližeg susjeda za SS

Tamo gdje su svi reziduali 0, model savršeno predviđa. Što su reziduali dalje od 0, to je model manje točan.

Grafički prikaz kontura kod ovisnosti sile i brzine za materijal SS je prikazan na slici 6.56.



Slika 6.56 F-v konturni graf za interpolaciju najbližeg susjeda za SS

Grafičkim prikazom kontura se može otprilike ustanoviti gdje je najveća vrijednost sile trenja. Prethodno je ustanovljeno da žuta boja predstavlja najveće vrijednosti, iz toga se može zaključiti da je najveća vrijednost sile trenja između 1500 i 2100 nm/s te 2250 i 2600 nN.

### 6.3 Linearno regresijsko učenje

Linearna regresijska analiza koristi se za predviđanje vrijednosti varijable na temelju vrijednosti druge varijable. Varijabla koju želite predvidjeti naziva se zavisna varijabla. Varijabla koju koristite za predviđanje vrijednosti druge varijable naziva se nezavisna varijabla.

Ovaj oblik analize procjenjuje koeficijente linearne jednadžbe, uključujući jednu ili više neovisnih varijabli koje najbolje predviđaju vrijednost zavisne varijable. Linearna regresija odgovara ravnoj liniji ili površini koja smanjuje odstupanja između predviđenih i stvarnih izlaznih vrijednosti. Postoje jednostavni kalkulatori linearne regresije koji koriste metodu "najmanjih kvadrata" za otkrivanje linije koja najbolje odgovara skupu uparenih podataka. Zatim procjenjujete vrijednost X (ovisne varijable) iz Y (neovisne varijable). [25]

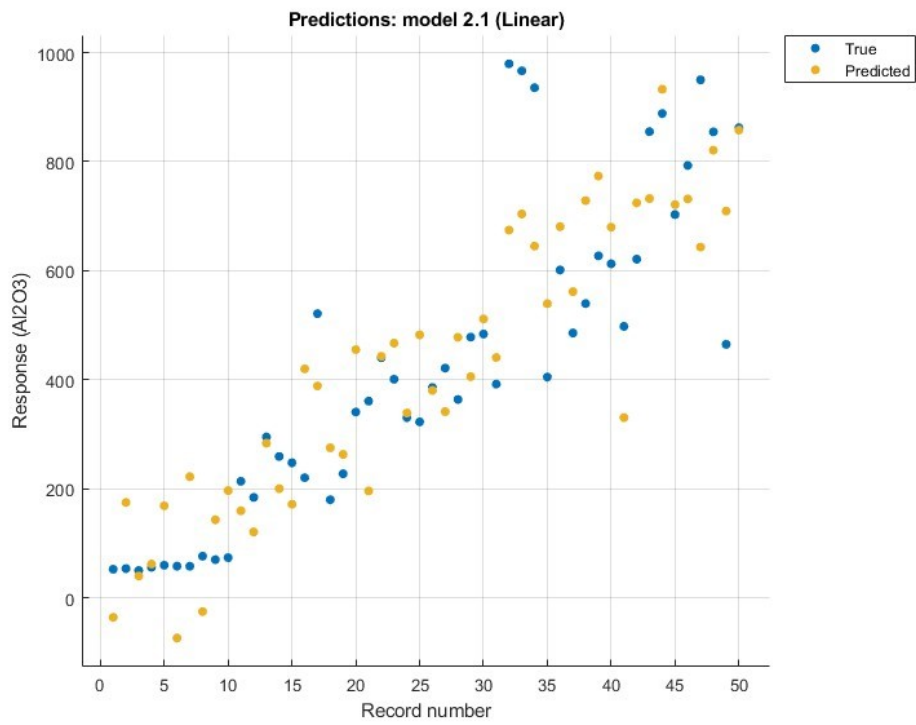
U ovom poglavlju će se prolaziti kroz podatke pomoću aplikacije Matlaba '*Regression learner*'. Koristiti će se linearni, linearno interakcijski, robusno linearni i stepenasto linearni model. Cilj ove obrade podataka je saznati koji model linearnog regresijskog učenja podataka je najbolji za dobivene eksperimentalne podatke. Taj cilj će se ostvariti usporedbom metrika procjene svih modela.

Grafovi koji će se prikazati su odzivni graf, graf validacije predviđenih u odnosu sa stvarnim odzivima te grafove validacije reziduala za stvarne i predviđene odzive.

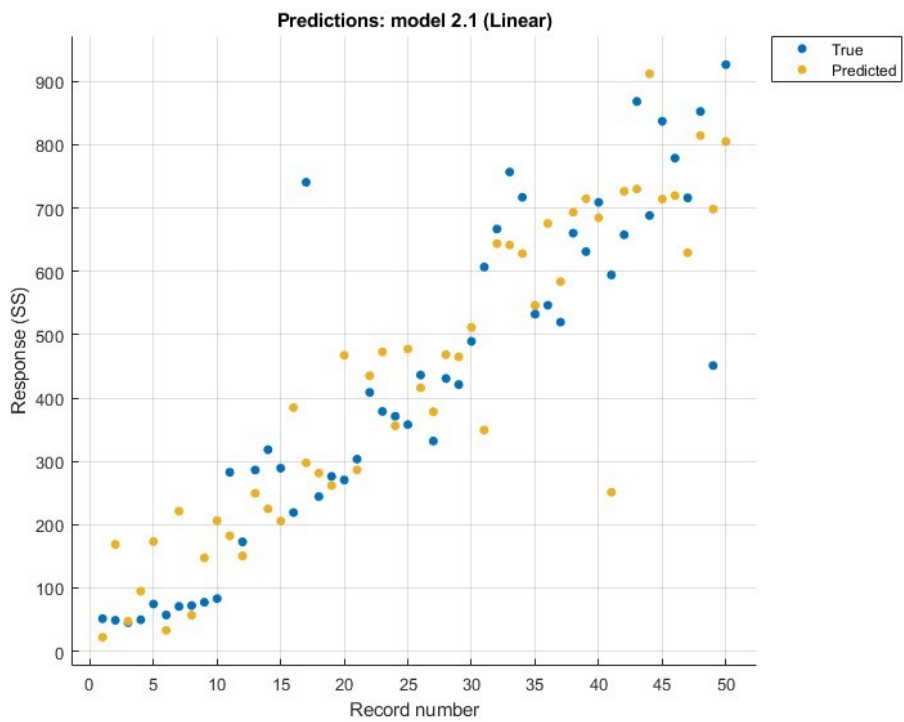
#### 6.3.1 Linearno regresijski model

Prvi model kojem će se prikazati rezultati dobiveni u Matlabu je linearni regresijski model. Nakon grafičkog prikaza, prikazati će se analitika regresijskog učenja, odnosno rezultati metričkih procjena modela.

Na slikama 6.57 i 6.58 su prikazani odzivni grafovi za aluminijski oksid ( $Al_2O_3$ ) i nehrđajući čelik (SS). Na njima su prikazani sa plavim točkama stvarni odzivi, dok su sa žutim točkama prikazani predviđeni odzivi.



Slika 6.57 Odzivni graf za linearno regresijski model za Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>

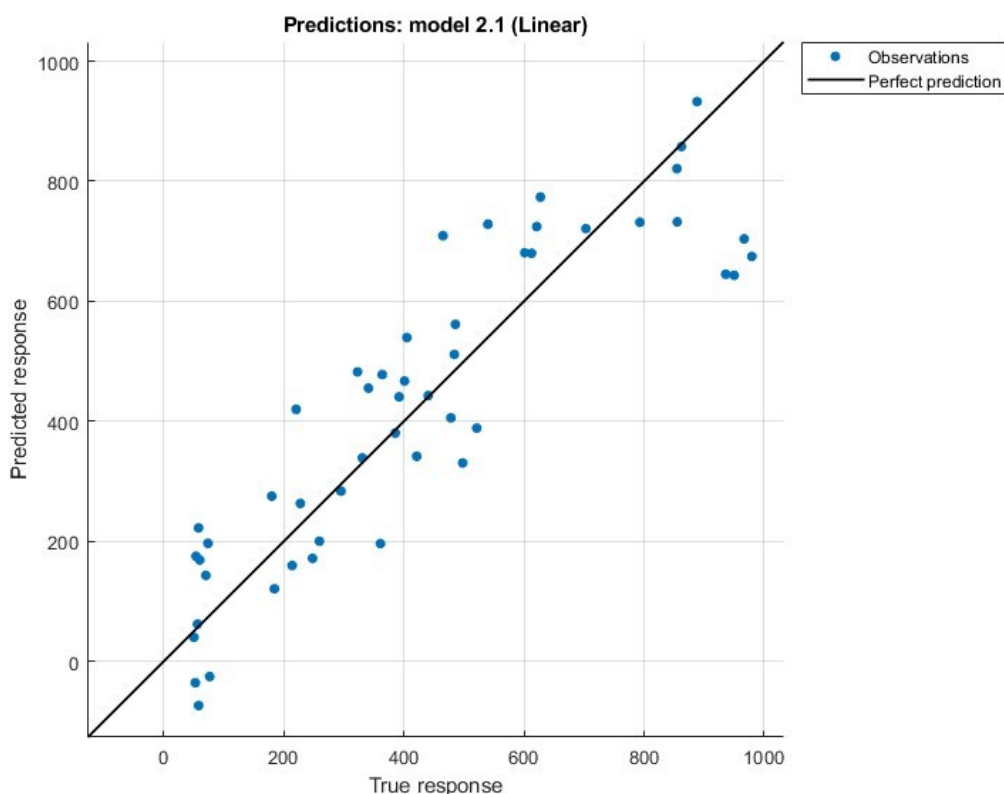


Slika 6.58 Odzivni graf za linearno regresijski model za SS



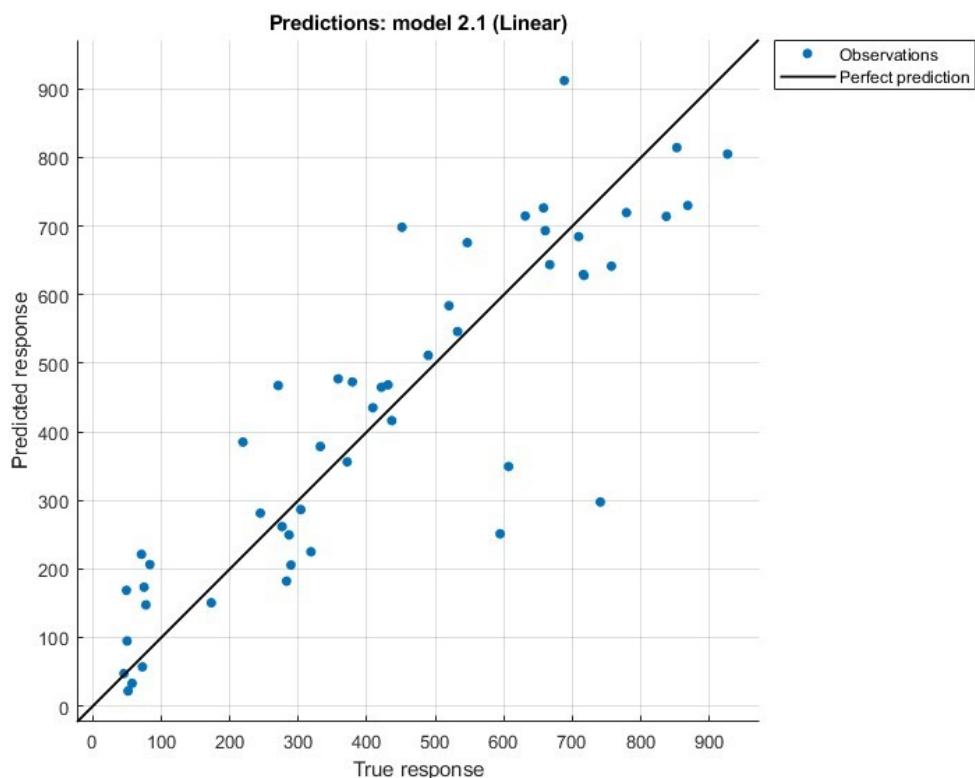
Na odzivnim grafovima se po ordinati vide odstupanja između stvarnih i predviđenih odziva, po tome možemo zaključiti da eksperimentalni podaci nisu idealni, odnosno spajanjem linijama ne formiraju linearni te da će se javiti greške koje će se kasnije izračunati.

Sljedeći grafovi su grafovi validacije predviđenih u odnosu sa stvarnim odzivima prikazani na slikama 6.59 i 6.60. Na apcisi su stvarni odzivi, a na ordinati predviđeni odzivi. Također na njima su plavim točkama prikazana zapažanja, dok je crnom linearnom linijom prikazano kako bi izgledalo savršeno predviđanje.



Slika 6.59 Graf validacije predviđenih u odnosu sa stvarnim odzivima za linearno regresijski model za  $\text{Al}_2\text{O}_3$

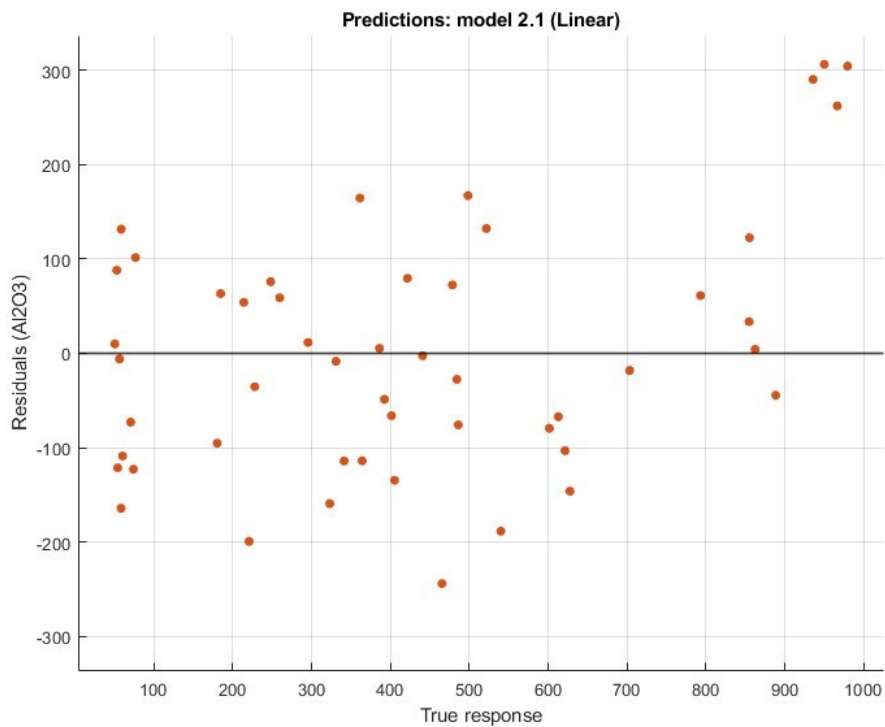




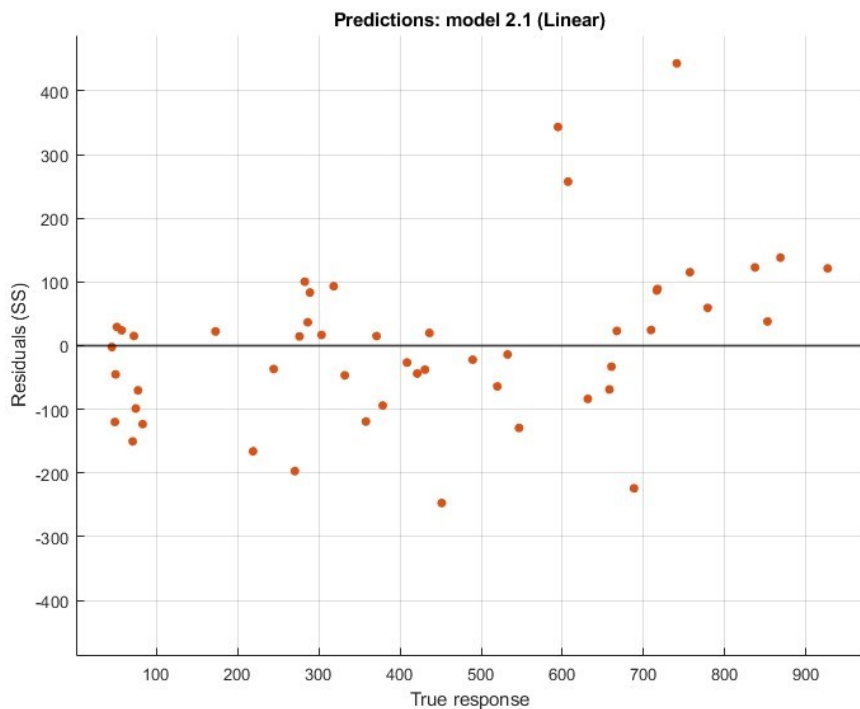
Slika 6.60 Graf validacije predviđenih u odnosu sa stvarnim odzivima za linearno regresijski model za SS

Na ova dva grafa validacije predviđenih u odnosu sa stvarnim odzivima je također lako uočiti da zapažanja odstupaju od savršenog predviđanja. Povodom toga javit će se greške koje će se u kasnijem dijelu analitički prikazati.

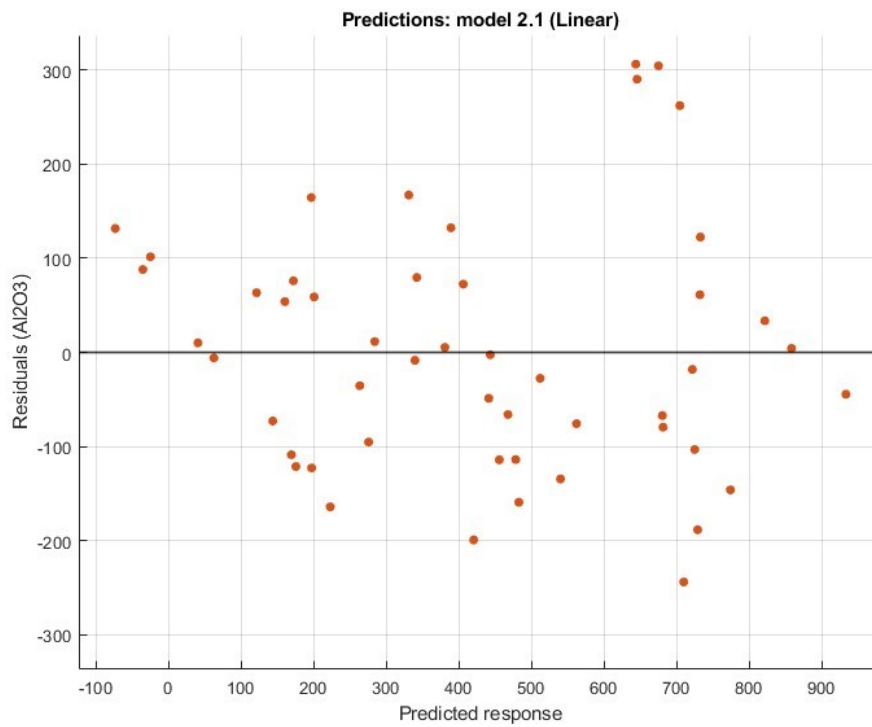
Sljedeća dva para grafova su grafovi validacije reziduala za stvarne, slike 6.61 i 6.62, te za predviđene odzive, slike 6.63 i 6.64. Crvenim točkama su prikazani reziduali.



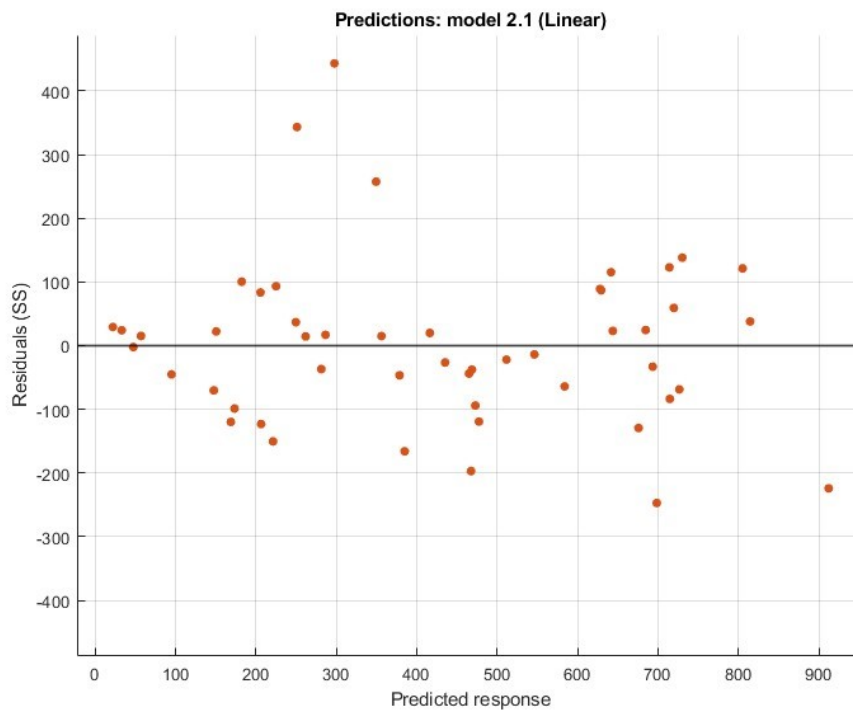
Slika 6.61 Grafovi validacije reziduala za stvarne odzive za linearno regresijski model za Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>



Slika 6.62 Grafovi validacije reziduala za stvarne odzive za linearno regresijski model za SS



Slika 6.63 Grafovi validacije reziduala za predviđene odzive za linearno regresijski model za  $Al_2O_3$



Slika 6.64 Grafovi validacije reziduala za predviđene odzive za linearno regresijski model za SS

Reziduali su razlike između promatranih i predviđenih vrijednosti podataka, odnosno dijagnostička mjera koja se koristi pri procjeni kvalitete modela. Također su poznate kao pogreške.

Reziduali su važni pri određivanju kvalitete modela. Reziduali se mogu ispitati u smislu njihove veličine i/ili formiraju li obrazac.

Tamo gdje su svi reziduali 0, model savršeno predviđa. Što su reziduali dalje od 0, to je model manje točan. U slučaju linearne regresije, što je veći zbroj kvadrata reziduala, manja je statistika  $R^2$ , ako je sve ostalo jednako. Tamo gdje prosječni rezidual nije 0, to implicira da je model sustavno pristran (tj. dosljedno previše ili premalo predviđa).

Na grafovima validacije reziduala za stvarne odzive pojavljuju se reziduali, a kako te vrijednosti variraju uvelike od 0 zaključak je da model nije točan, odnosno ima pogrešaka. Isto vrijedi za grafove validacije reziduala za predviđene odzive.

Sljedeći korak je dobiti vrijednosti metričkih procjena, a to su srednja kvadratna pogreška (MSE), korijen srednje kvadratne pogreške (RMSE), srednje apsolutne pogreške (MAE) i koeficijent determinacije ( $R^2$ ).

Rezultati za srednju kvadratnu pogrešku za aluminijski oksid i nehrđajući čelik su sljedeći:

$$MSE_{Al_2O_3} = 16876$$

$$MSE_{SS} = 16123$$

Sljedeći su rezultati za korijen srednje kvadratne pogreške za aluminijski oksid i nehrđajući čelik:

$$RMSE_{Al_2O_3} = 121,91$$

$$RMSE_{SS} = 126,98$$

U ovome radu rezultati za srednju apsolutnu pogrešku za aluminijski oksid i nehrđajući čelik su sljedeći:

$$MAE_{Al_2O_3} = 103,48$$

$$MAE_{SS} = 91,927$$

U ovome radu rezultati za koeficijent determinacije za aluminijski oksid i nehrđajući čelik su sljedeći:

$$R^2_{Al_2O_3} = 0,8$$

$$R^2_{SS} = 0,77$$

Vrijednosti srednje kvadratne pogreške, korijena srednje kvadratne pogreške i srednje apsolutne pogreške same po sebi nemaju neko značenje, potrebno je uzeti u obzir raspon vrijednosti eksperimentalnih podataka, tada se može zaključiti da su sve tri vrijednosti za oba materijala niske do srednje vrijednosti.

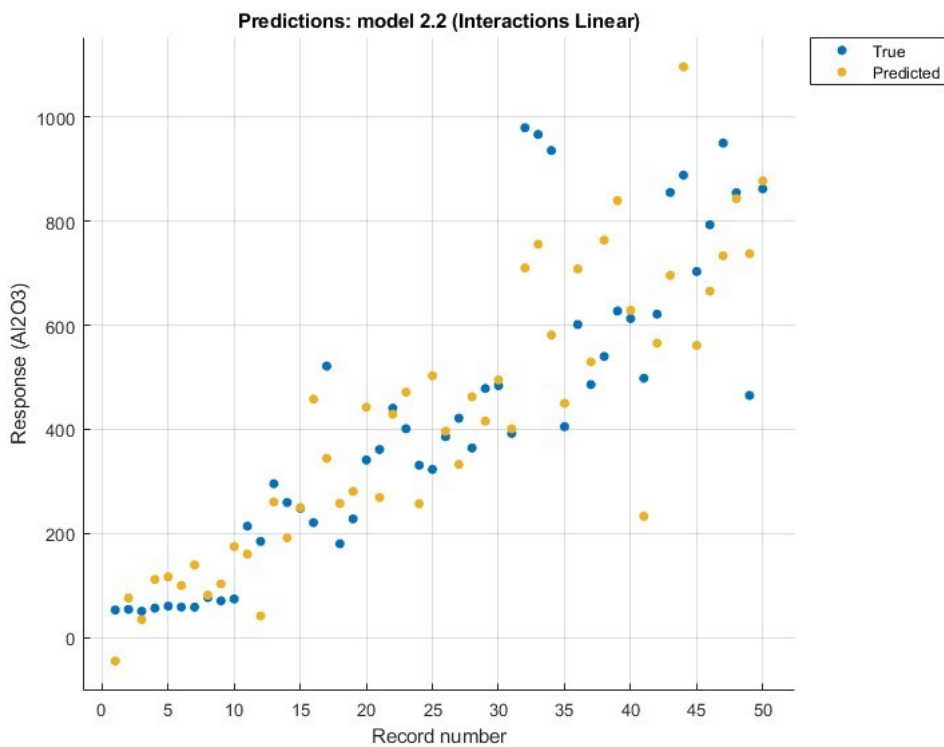
Nizak MSE ukazuje na bolje performanse modela, nizak RMSE ukazuje da su predviđanja modela blizu stvarnih vrijednosti, nizak MAE ukazuje na točnija predviđanja modela.

Koeficijent determinacije je blizu vrijednosti 1, što ukazuje na to da model objašnjava veliki dio varijance u ciljnoj varijabli. Da je blizu vrijednosti 0 sugeriralo bi da model ne objašnjava velik dio varijance. Dok negativne vrijednosti mogu se pojaviti ako je model lošiji od jednostavnog predviđanja srednje vrijednosti ciljne varijable.

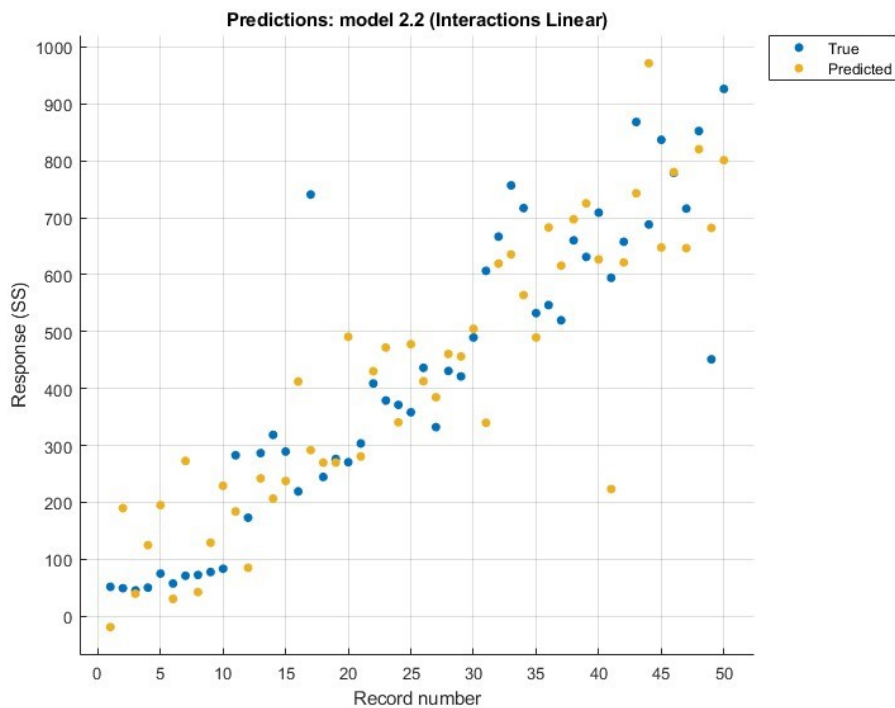
### 6.3.2 Linearno interakcijski regresijski model

Drugi model kojem će se prikazati rezultati dobiveni u Matlabu je linearno interakcijski regresijski model. Nakon grafičkog prikaza, prikazati će se analitika regresijskog učenja ovog modela, odnosno rezultati metričkih procjena modela.

Na slikama 6.65 i 6.66 su prikazani odzivni grafovi za aluminijski oksid ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) i nehrđajući čelik (SS). Na njima su prikazani sa plavim točkama stvarni odzivi, dok su sa žutim točkama prikazani predviđeni odzivi.



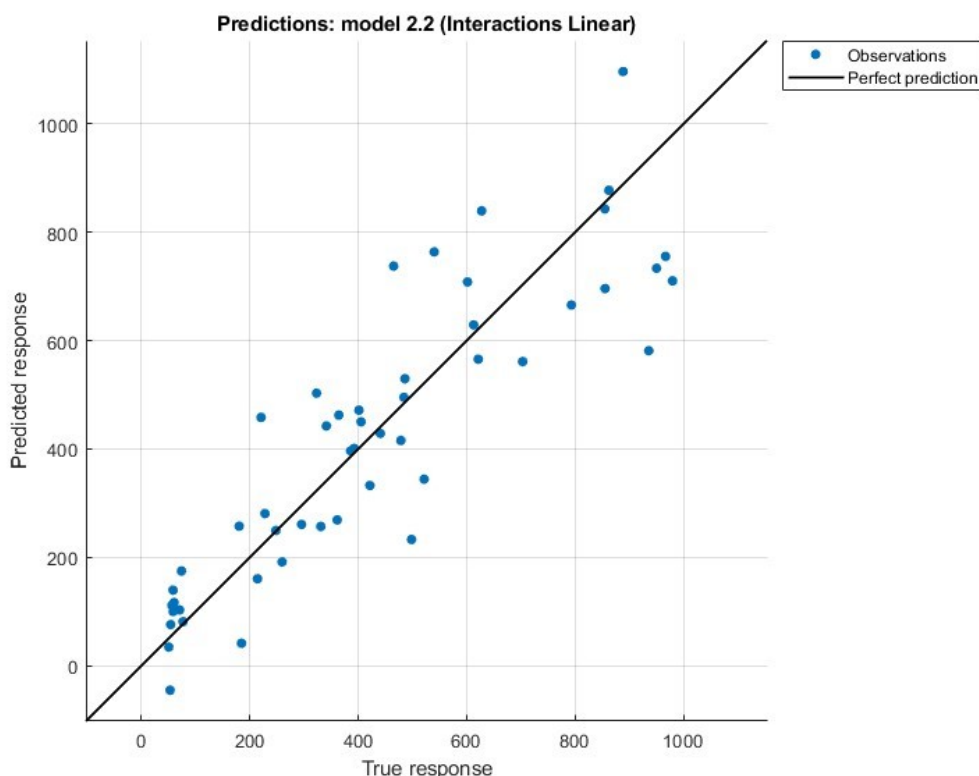
Slika 6.65 Odzivni graf za linearno interakcijski regresijski model za Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>



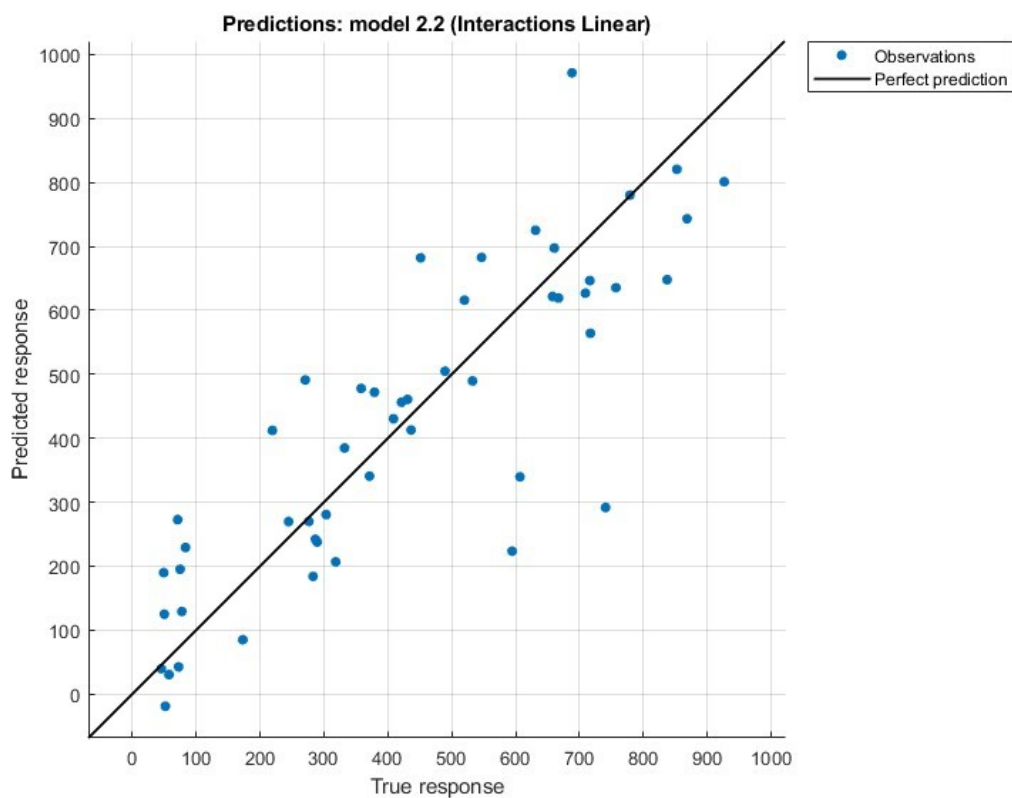
Slika 6.66 Odzivni graf za linearno interakcijski regresijski model za SS

Na odzivnim grafovima se po ordinati vide odstupanja između stvarnih i predviđenih odziva, po tome možemo zaključiti da eksperimentalni podaci nisu idealni, odnosno spajanjem linijama ne formiraju linearni te da će se javiti greške koje će se kasnije izračunati.

Sljedeći grafovi su grafovi validacije predviđenih u odnosu sa stvarnim odzivima prikazani na slikama 6.67 i 6.68 Na apcisi su stvarni odzivi, a na ordinati predviđeni odzivi. Također na njima su plavim točkama prikazana zapažanja, dok je crnom linearnom linijom prikazano kako bi izgledalo savršeno predviđanje.



Slika 6.67 Graf validacije predviđenih u odnosu sa stvarnim odzivima za linearno interakcijski regresijski model za  $Al_2O_3$

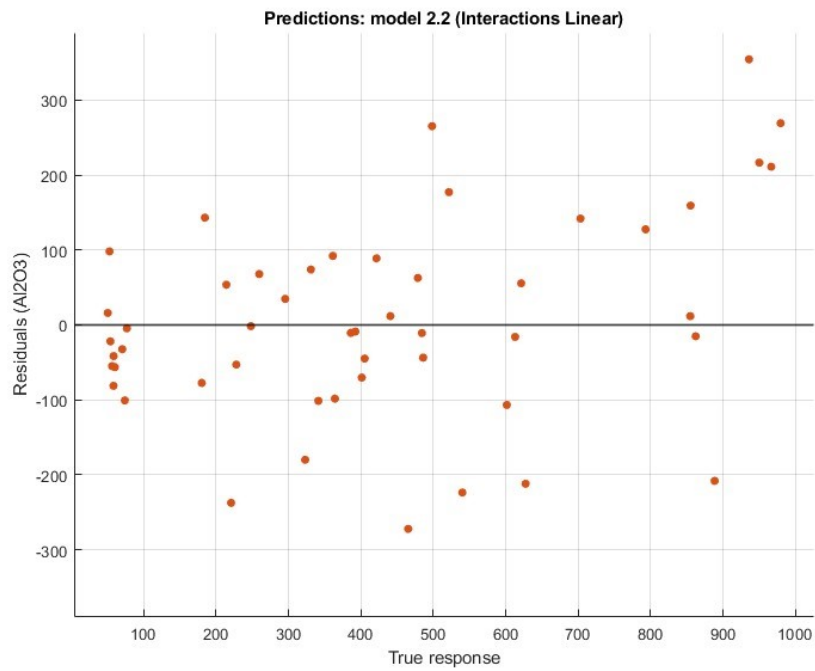


Slika 6.68 Graf validacije predviđenih u odnosu sa stvarnim odzivima za linearno interakcijski regresijski model za SS

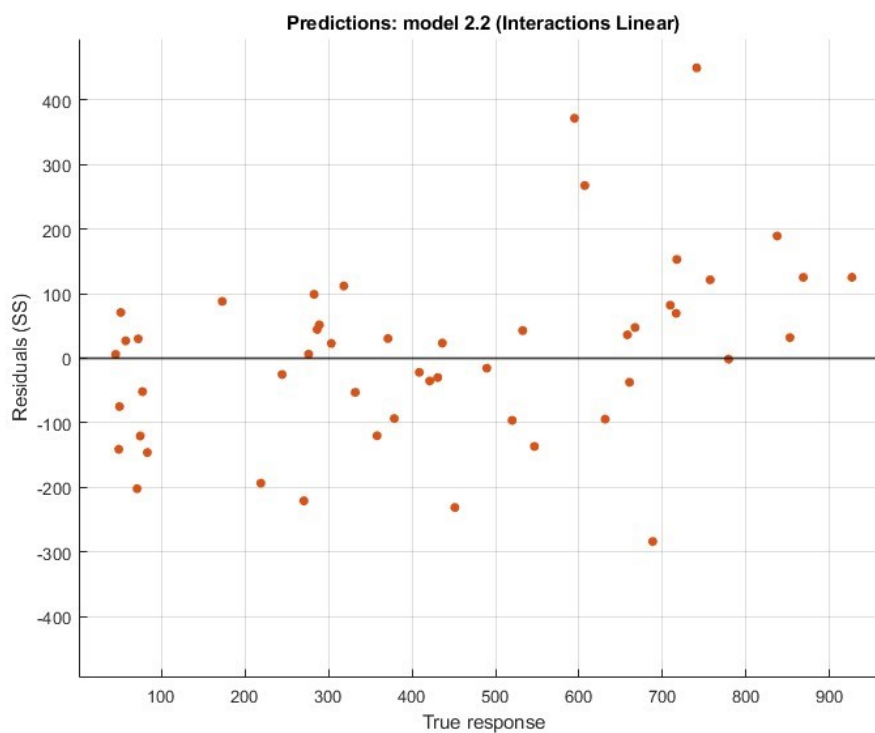
Na ova dva grafa validacije predviđenih u odnosu sa stvarnim odzivima je također lako uočiti da zapažanja odstupaju od savršenog predviđanja. Povodom toga javit će se greške koje će se u kasnijem dijelu analitički prikazati.

Sljedeća dva para grafova su grafovi validacije reziduala za stvarne, slika 6.69 i 6.70, te za predviđene odzive, slika 6.71 i 6.72. Crvenim točkama su prikazani reziduali.

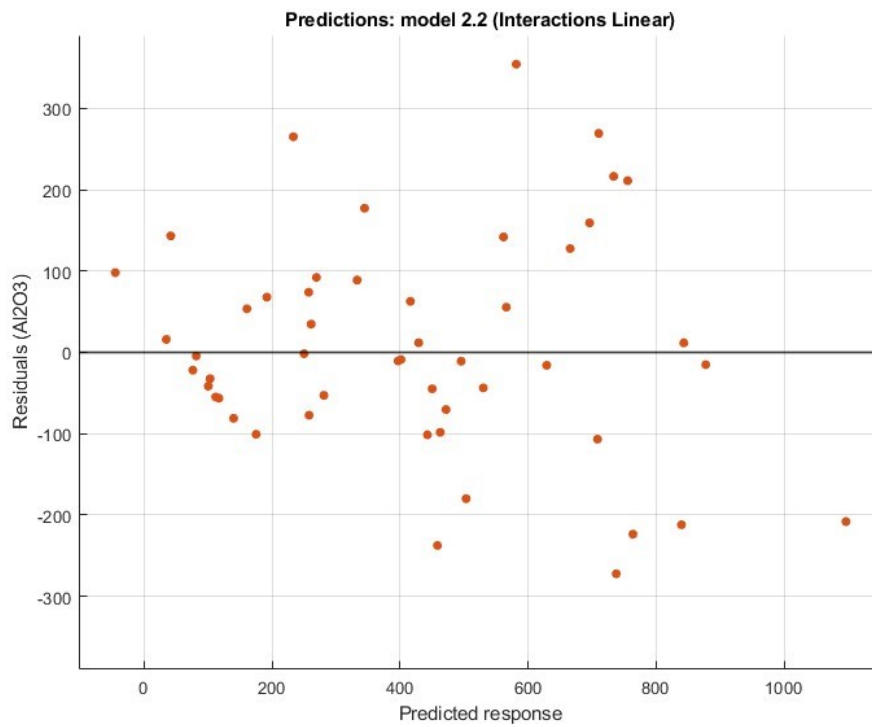




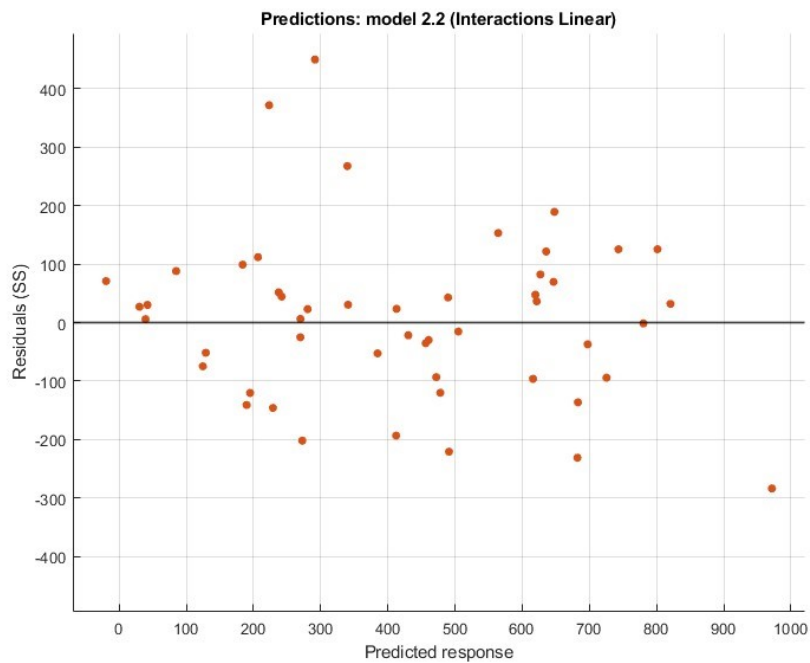
Slika 6.69 Grafovi validacije reziduala za stvarne odzive za linearno interakcijski regresijski model za Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>



Slika 6.70 Grafovi validacije reziduala za stvarne odzive za linearno interakcijski regresijski model za SS



Slika 6.71 Grafovi validacije reziduala za predviđene odzive za linearno interakcijski regresijski model za  $Al_2O_3$



Slika 6.72 Grafovi validacije reziduala za predviđene odzive za linearno interakcijski regresijski model za SS

Na grafovima validacije reziduala za stvarne odzive pojavljuju se reziduali, a kako te vrijednosti variraju uvelike od 0 zaključak je da model nije točan, odnosno ima pogrešaka. Isto vrijedi za grafove validacije reziduala za predviđene odzive.

Sljedeći korak je dobiti vrijednosti metričkih procjena, a to su srednja kvadratna pogreška (MSE), korijen srednje kvadratne pogreške (RMSE), srednje apsolutne pogreške (MAE) i koeficijent determinacije ( $R^2$ ).

Rezultati za srednju kvadratnu pogrešku za aluminijski oksid i nehrđajući čelik su sljedeći:

$$MSE_{Al_2O_3} = 17964$$

$$MSE_{SS} = 19383$$

Sljedeći su rezultati za korijen srednje kvadratne pogreške za aluminijski oksid i nehrđajući čelik:

$$RMSE_{Al_2O_3} = 134,03$$

$$RMSE_{SS} = 139,22$$

U ovome radu rezultati za srednju apsolutnu pogrešku za aluminijski oksid i nehrđajući čelik su sljedeći:

$$MAE_{Al_2O_3} = 102,35$$

$$MAE_{SS} = 102,89$$

U ovome radu rezultati za koeficijent determinacije za aluminijski oksid i nehrđajući čelik su sljedeći:

$$R^2_{Al_2O_3} = 0,78$$

$$R^2_{SS} = 0,72$$

Vrijednosti srednje kvadratne pogreške, korijena srednje kvadratne pogreške i srednje apsolutne pogreške uzimajući u obzir raspon vrijednosti eksperimentalnih podataka imaju niske do srednje vrijednosti.

U odnosu na linearni regresijski model, linearno interakcijski regresijski model ima veću vrijednost srednje kvadratne pogreške što znači da ima lošije performanse.

Također ima veću vrijednost srednje apsolutne pogreške što ukazuje da su predviđanja modela stvarnih vrijednosti bliža kod linearnog regresijskog modela.

Što se tiče srednje apsolutne pogreške linearno interakcijski regresijski model ima manju vrijednost za promatrani aluminijski oksid dok linearni regresijski model ima manju vrijednost za promatrani nehrđajući čelik. Manje vrijednosti ukazuju na točnija predviđanja modela.

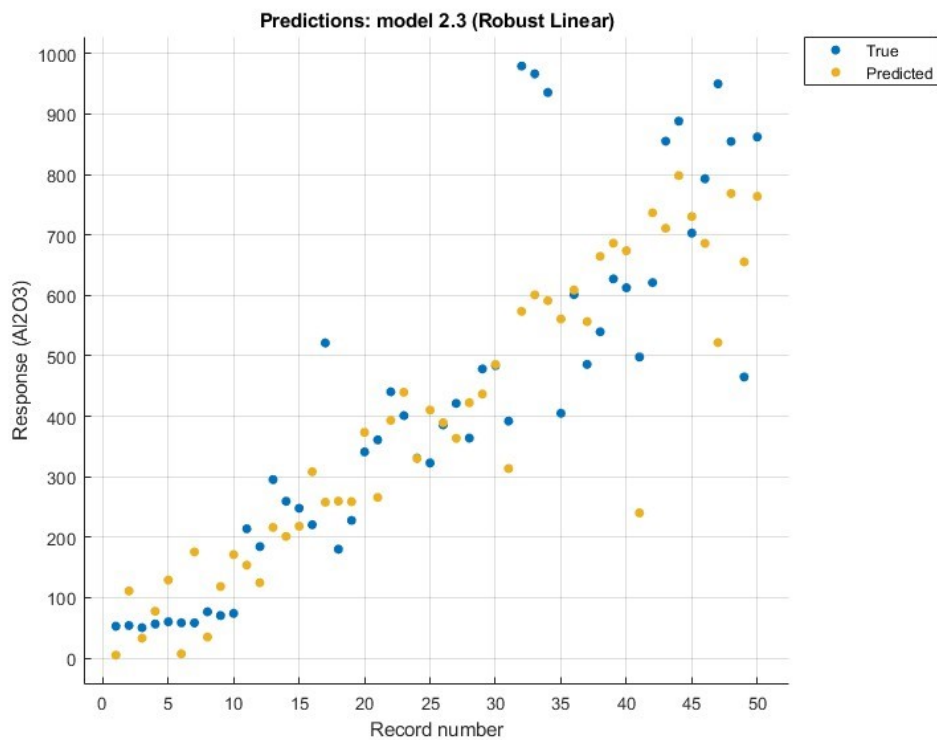
Koeficijent determinacije je bliži vrijednosti 1 kod linearnog regresijskog modela nego kod linearno interakcijsko regresijskog modela, što ukazuje na to da linearno regresijski model objašnjava veći dio varijance u ciljnoj varijabli.

Lako se da zaključiti da linearno regresijski model daje bolje rezultate nego linearno interakcijski regresijski model.

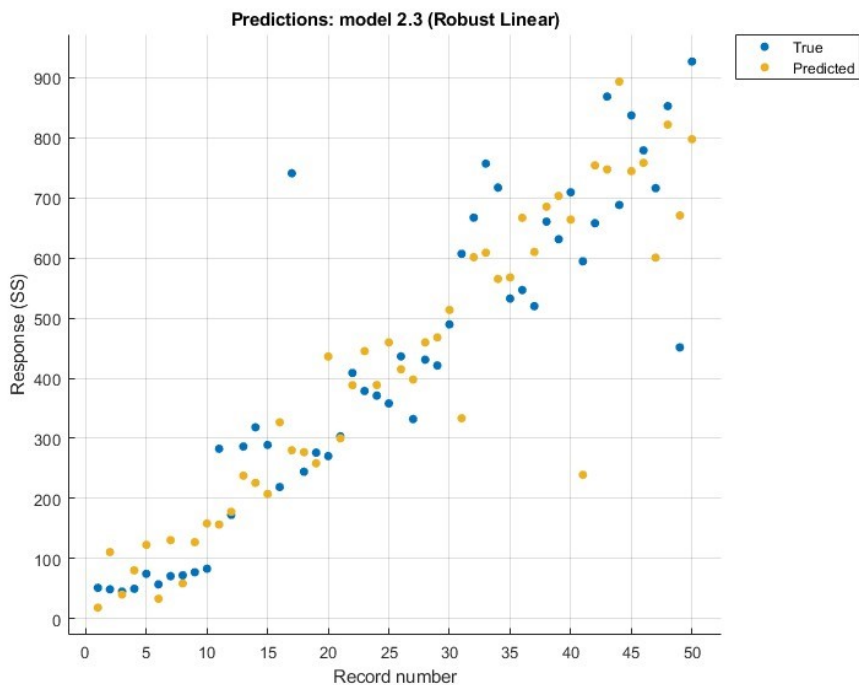
### 6.3.3 Robusno linearni regresijski model

Treći model kojem će se prikazati rezultati dobiveni u Matlabu je robusno linearni regresijski model. Nakon grafičkog prikaza, prikazati će se analitika regresijskog učenja ovog modela, odnosno rezultati metričkih procjena modela.

Na slikama 6.723 i 6.74 su prikazani odzivni grafovi za aluminijski oksid ( $Al_2O_3$ ) i nehrđajući čelik (SS). Na njima su prikazani sa plavim točkama stvarni odzivi, dok su sa žutim točkama prikazani predviđeni odzivi.



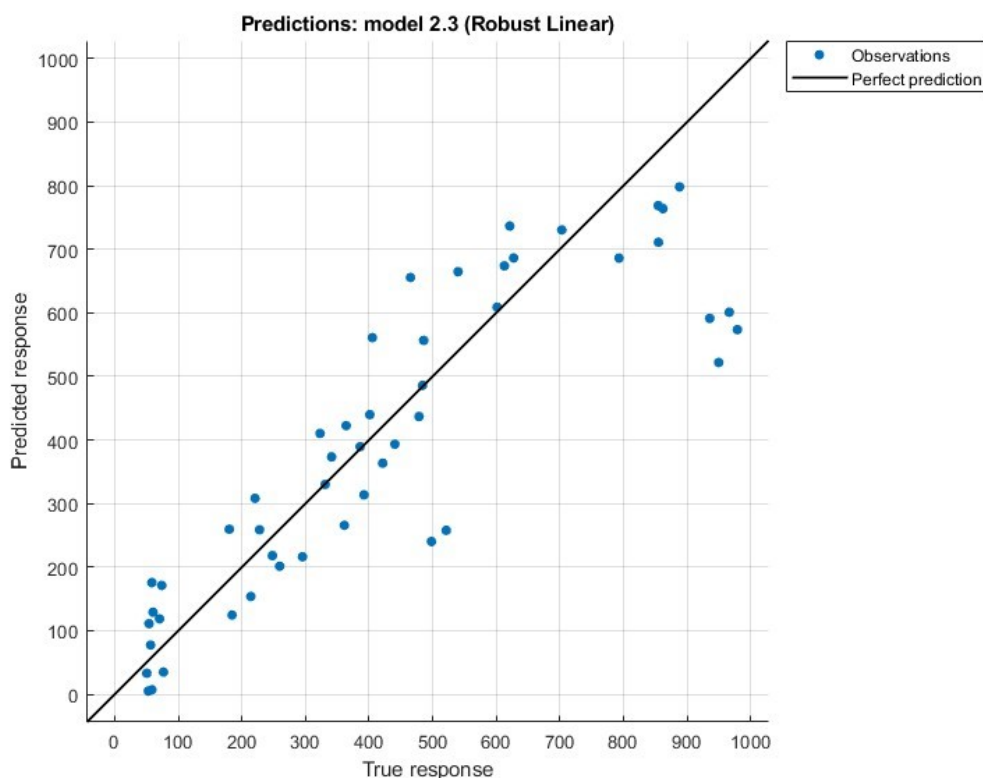
Slika 6.73 Odzivni graf za robusno linearni regresijski model za Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>



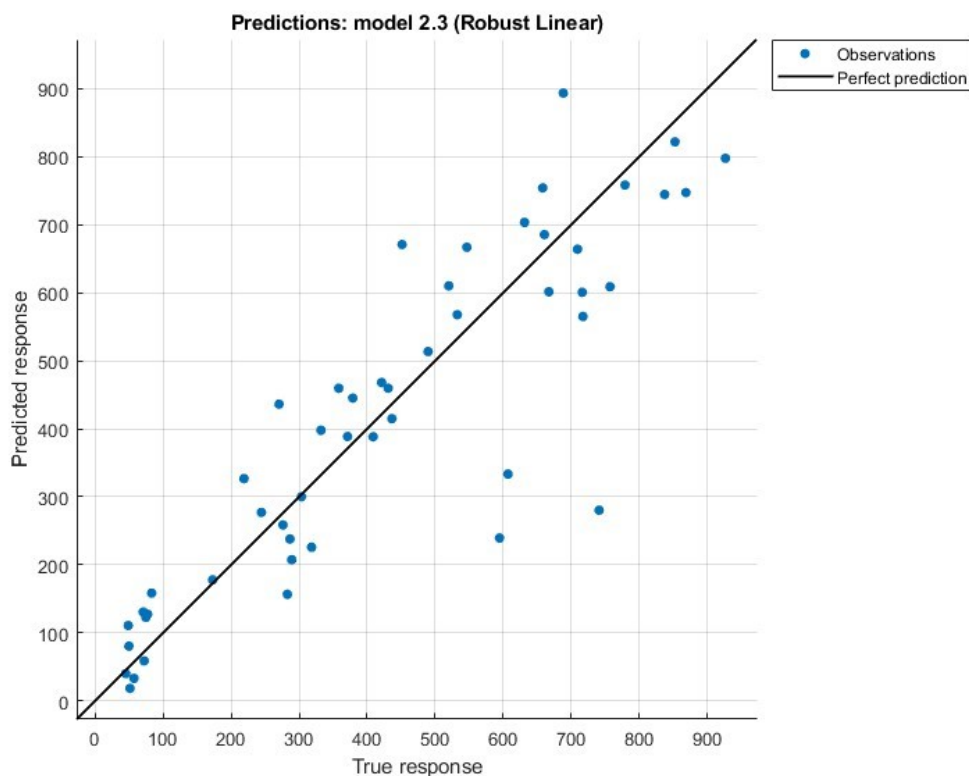
Slika 6.74 Odzivni graf za robusno linearni regresijski model za SS

Na odzivnim grafovima se po ordinati vide odstupanja između stvarnih i predviđenih odziva, po tome možemo zaključiti da eksperimentalni podaci nisu idealni, odnosno spajanjem linijama ne formiraju linearni te da će se javiti greške koje će se kasnije izračunati.

Sljedeći grafovi su grafovi validacije predviđenih u odnosu sa stvarnim odzivima prikazani na slikama 6.75 i 6.76 Na apcisi su stvarni odzivi, a na ordinati predviđeni odzivi. Također na njima su plavim točkama prikazana zapažanja, dok je crnom linearnom linijom prikazano kako bi izgledalo savršeno predviđanje.



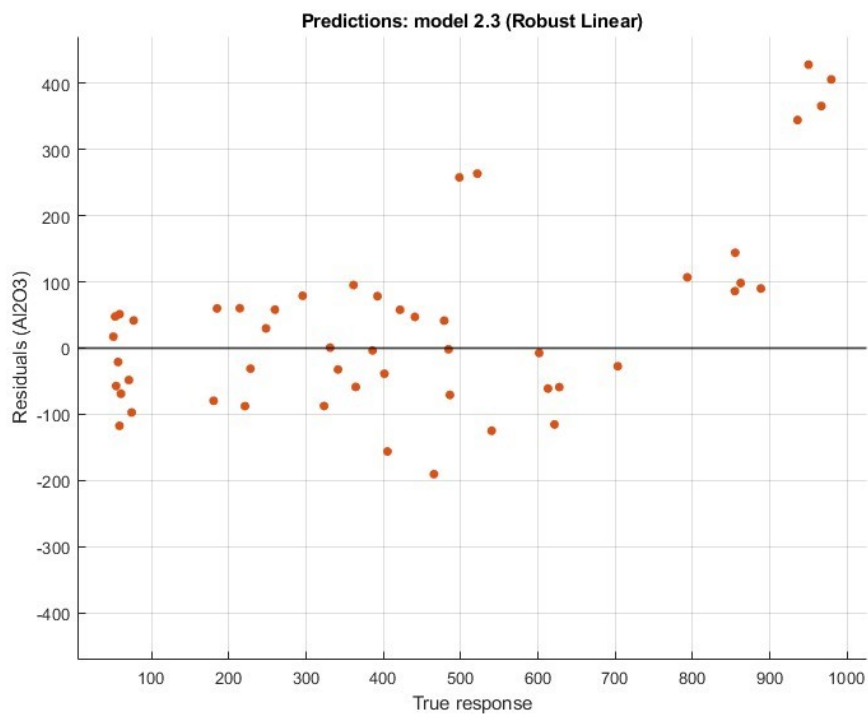
Slika 6.75 Graf validacije predviđenih u odnosu sa stvarnim odzivima za robusno linearni regresijski model za  $\text{Al}_2\text{O}_3$



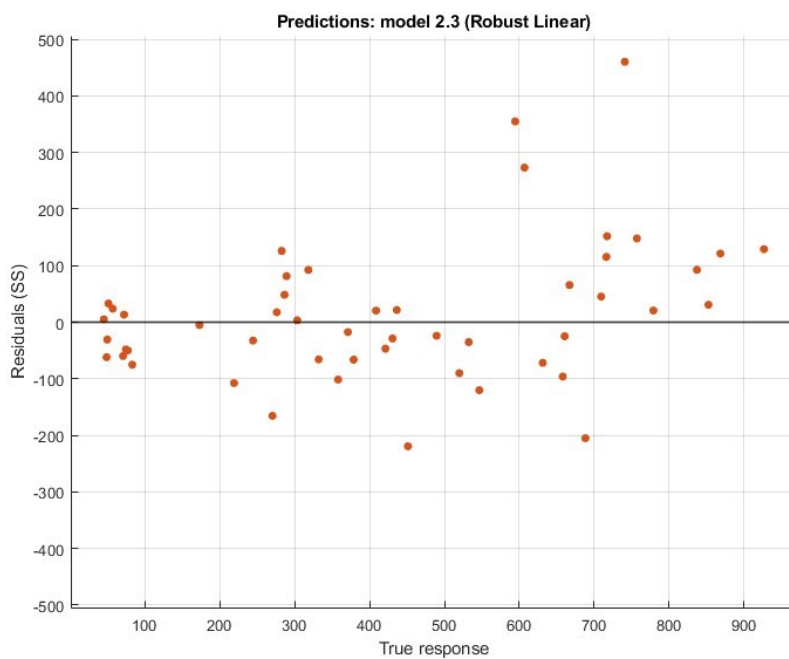
Slika 6.76 Graf validacije predviđenih u odnosu sa stvarnim odzivima za robusno linearni regresijski model za SS

Na ova dva grafa validacije predviđenih u odnosu sa stvarnim odzivima je također lako uočiti da zapažanja odstupaju od savršenog predviđanja. Povodom toga javit će se greške koje će se u kasnijem dijelu analitički prikazati.

Sljedeća dva para grafova su grafovi validacije reziduala za stvarne, slika 6.77 i 6.78, te za predviđene odzive, slika 6.79 i 6.80. Crvenim točkama su prikazani reziduali.

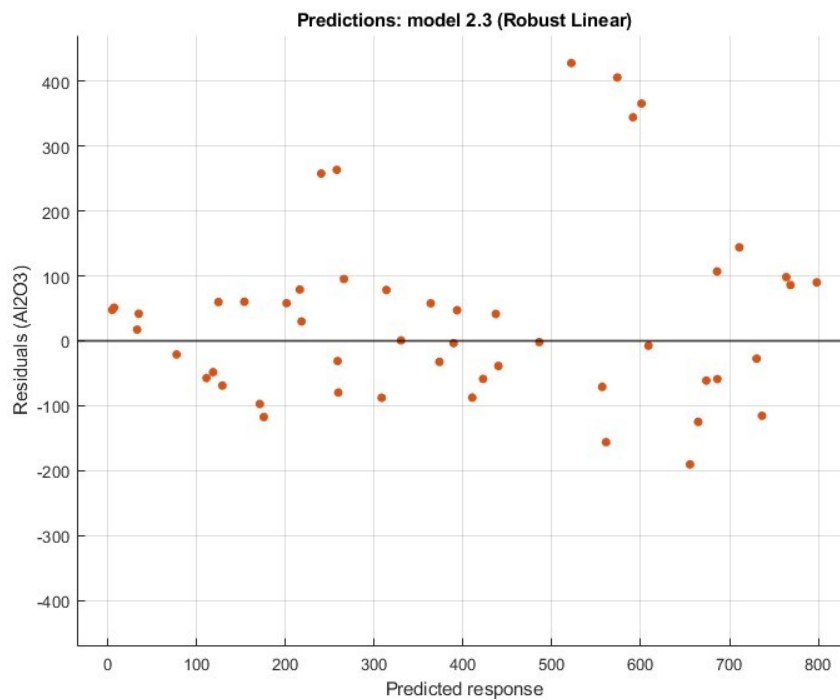


Slika 6.77 Grafovi validacije reziduala za stvarne odzive za robusno linearni regresijski model za  $Al_2O_3$

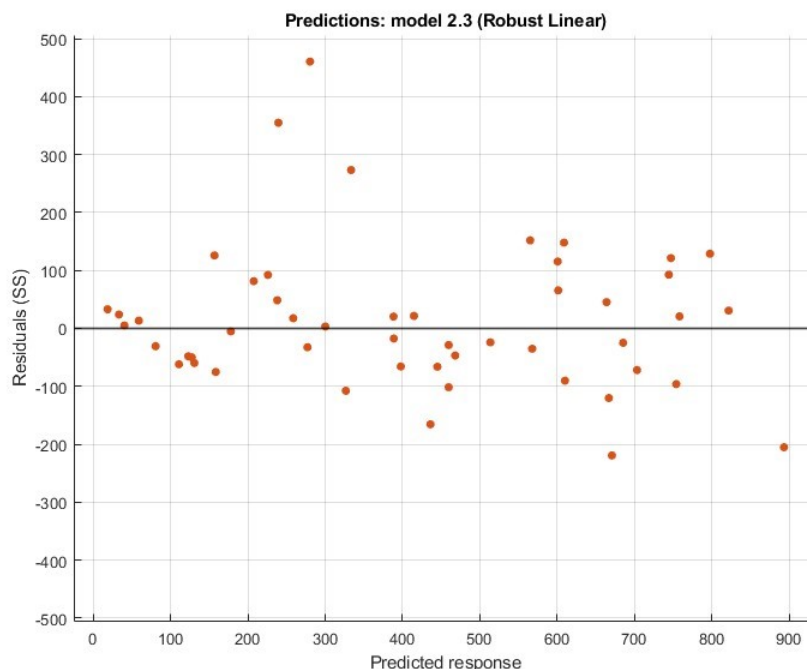


Slika 6.78 Grafovi validacije reziduala za stvarne odzive za robusno linearni regresijski model za SS





Slika 6.79 Grafovi validacije reziduala za predviđene odzive za robusno linearni regresijski model za Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>



Slika 6.80 Grafovi validacije reziduala za predviđene odzive za robusno linearni regresijski model za SS

Na grafovima validacije reziduala za stvarne odzive pojavljuju se reziduali, a kako te vrijednosti variraju uvelike od 0 zaključak je da model nije točan, odnosno ima pogrešaka.

Sljedeći korak je dobiti vrijednosti metričkih procjena, a to su srednja kvadratna pogreška (MSE), korijen srednje kvadratne pogreške (RMSE), srednje apsolutne pogreške (MAE) i koeficijent determinacije ( $R^2$ ).

Rezultati za srednju kvadratnu pogrešku za aluminijski oksid i nehrđajući čelik su sljedeći:

$$MSE_{Al_2O_3} = 20107$$

$$MSE_{SS} = 15328$$

Sljedeći su rezultati za korijen srednje kvadratne pogreške za aluminijski oksid i nehrđajući čelik:

$$RMSE_{Al_2O_3} = 141,8$$

$$RMSE_{SS} = 123,81$$

U ovome radu rezultati za srednju apsolutnu pogrešku za aluminijski oksid i nehrđajući čelik su sljedeći:

$$MAE_{Al_2O_3} = 99,967$$

$$MAE_{SS} = 86,944$$

U ovome radu rezultati za koeficijent determinacije za aluminijski oksid i nehrđajući čelik su sljedeći:

$$R^2_{Al_2O_3} = 0,76$$

$$R^2_{SS} = 0,78$$

Vrijednosti srednje kvadratne pogreške, korijena srednje kvadratne pogreške i srednje apsolutne pogreške uzimajući u obzir raspon vrijednosti eksperimentalnih podataka imaju niske do srednje vrijednosti.

Kako je linearno regresijski model, kada se uzmu u obzir metrike procjene sveukupno bolji od linearno interakcijsko regresijskog modela, prvo će se robusno linearni regresijski model usporediti sa njime kako bi se došlo do zaključka koji model bolje odgovara eksperimentalnim podacima.

U odnosu na linearni regresijski model, za promatrani aluminijski oksid robusno linearni regresijski model ima veću vrijednost srednje kvadratne pogreške što znači da ima lošije performanse. Dok je za promatrani nehrđajući čelik obrnuti rezultat, no razlika je vrlo mala, skoro neprimjetna.

Također ima veću vrijednost srednje apsolutne pogreške za promatrani aluminijski oksid što ukazuje da su predviđanja modela stvarnih vrijednosti bliža kod linearno regresijskog modela. Za promatrani nehrđajući čelik je opet obrnuti rezultat, no razlika je opet mala.

Što se tiče srednje apsolutne pogreške, robusno linearni regresijski model ima manje vrijednosti što ukazuje da ovaj model ima točnija predviđanja modela.

Koeficijent determinacije za promatrani aluminijski oksid je bliži vrijednosti 1 kod linearno regresijskog modela nego kod robusno linearno regresijskog modela, što ukazuje na to da linearno regresijski model objašnjava veći dio varijance u ciljnoj varijabli. Za promatrani nehrđajući čelik je obrnuta situacija.

Iz navedenog se da zaključiti da je linearno regresijski model bolji za promatrani aluminijski oksid, dok je robusno linearno regresijski model malo bolji za promatrani nehrđajući čelik.

Sljedeće je potrebno usporediti rezultate metričkih procjena robusno linearno regresijskog modela sa rezultatima linearno interakcijsko regresijskog modela.

U odnosu na linearno interakcijski regresijski model, za promatrani aluminijski oksid robusno linearni regresijski model ima veću vrijednost srednje kvadratne pogreške što znači da ima lošije performanse. Dok je za promatrani nehrđajući čelik obrnuti rezultat, te je razlika između rezultata znatna, što znači da model ima puno bolje performanse.

Također ima veću vrijednost srednje apsolutne pogreške za promatrani aluminijski oksid što ukazuje da su predviđanja modela stvarnih vrijednosti bliža kod linearno interakcijsko regresijskog modela. Za promatrani nehrđajući čelik je opet obrnuti rezultat te je razlika opet znatno velika.

Što se tiče srednje apsolutne pogreške, robusno linearni regresijski model ima manje vrijednosti što ukazuje da ovaj model ima točnija predviđanja modela.

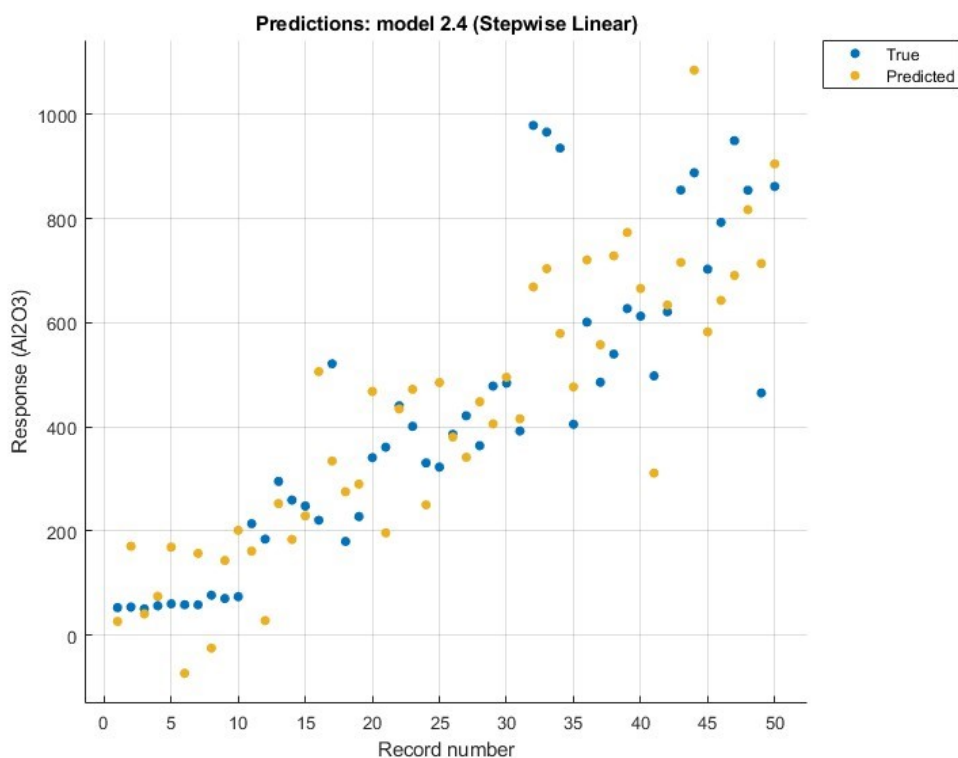
Koeficijent determinacije za promatrani aluminijski oksid je bliži vrijednosti 1 kod linearno interakcijsko regresijskog modela nego kod robusno linearno regresijskog modela, što ukazuje na to da linearno interakcijski regresijski model objašnjava veći dio varijance u ciljnoj varijabli. Za promatrani nehrđajući čelik je obrnuta situacija.

Iz navedenog se da zaključiti da je linearno interakcijski regresijski model bolji za promatrani aluminijski oksid, dok je robusno linearno regresijski model znatno bolji za promatrani nehrđajući čelik.

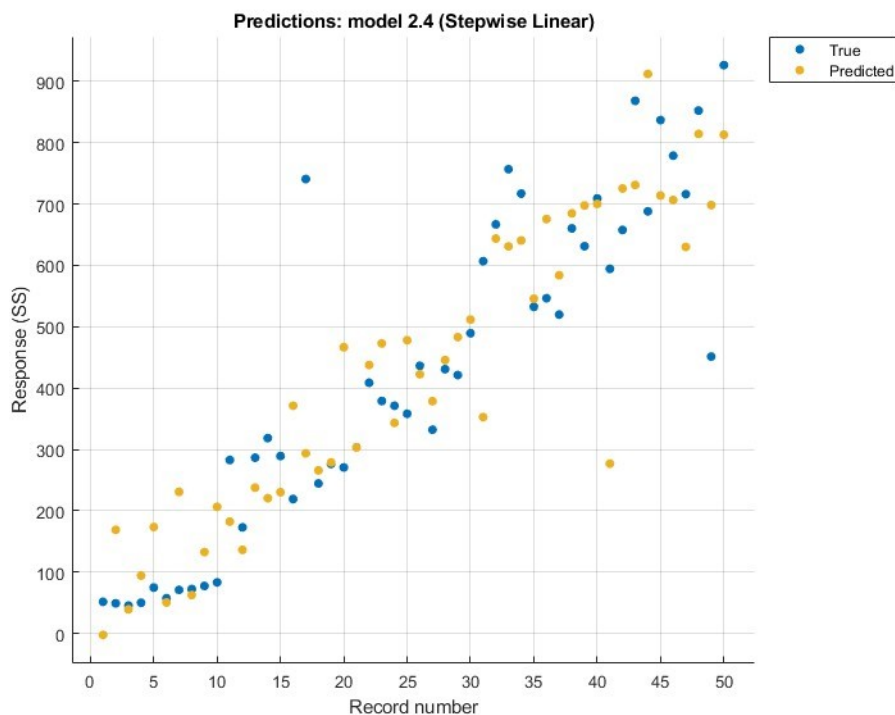
#### 6.3.4 Stepenasto linearni regresijski model

Treći model kojem će se prikazati rezultati dobiveni u Matlabu je robusno linearni regresijski model. Nakon grafičkog prikaza, prikazati će se analitika regresijskog učenja ovog modela, odnosno rezultati metričkih procjena modela.

Na slikama 6.81 i 6.82 su prikazani odzivni grafovi za aluminijski oksid ( $Al_2O_3$ ) i nehrđajući čelik (SS). Na njima su prikazani sa plavim točkama stvarni odzivi, dok su sa žutim točkama prikazani predviđeni odzivi.



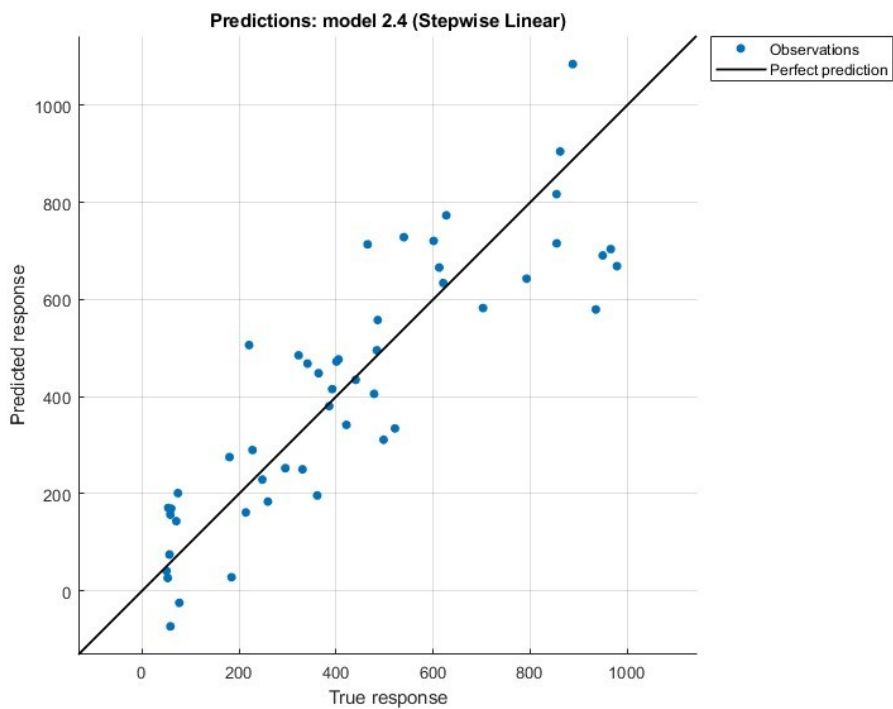
Slika 6.81 Odzivni graf za stepenasto linearni regresijski model za  $Al_2O_3$



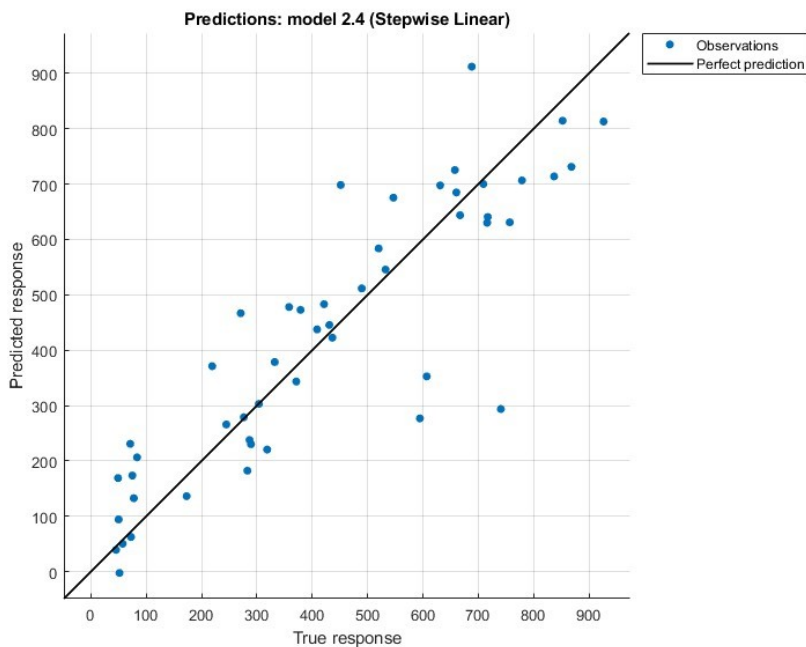
Slika 6.82 Odzivni graf za stepenasto linearni regresijski model za SS

Na odzivnim grafovima se po ordinati vide odstupanja između stvarnih i predviđenih odziva, po tome možemo zaključiti da eksperimentalni podaci nisu idealni, odnosno spajanjem linijama ne formiraju linearni te da će se javiti greške koje će se kasnije izračunati.

Sljedeći grafovi su grafovi validacije predviđenih u odnosu sa stvarnim odzivima prikazani na slikama 6.83 i 6.84 Na apcisi su stvarni odzivi, a na ordinati predviđeni odzivi. Također na njima su plavim točkama prikazana zapažanja, dok je crnom linearnom linijom prikazano kako bi izgledalo savršeno predviđanje.



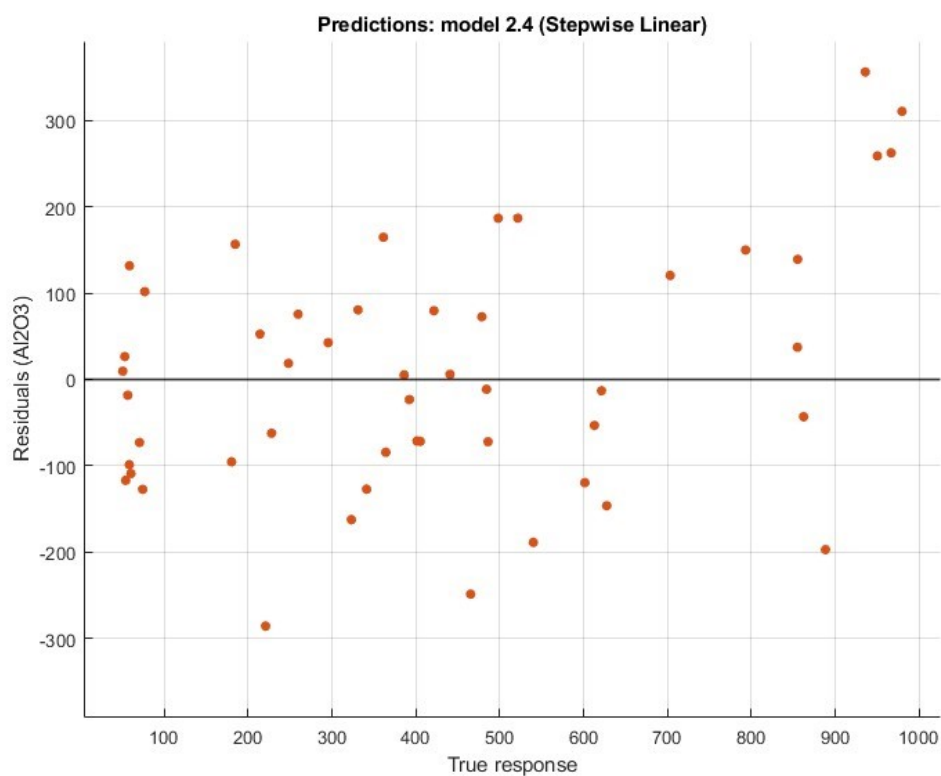
Slika 6.83 Graf validacije predviđenih u odnosu sa stvarnim odzivima za stepenasto linearni regresijski model za  $\text{Al}_2\text{O}_3$



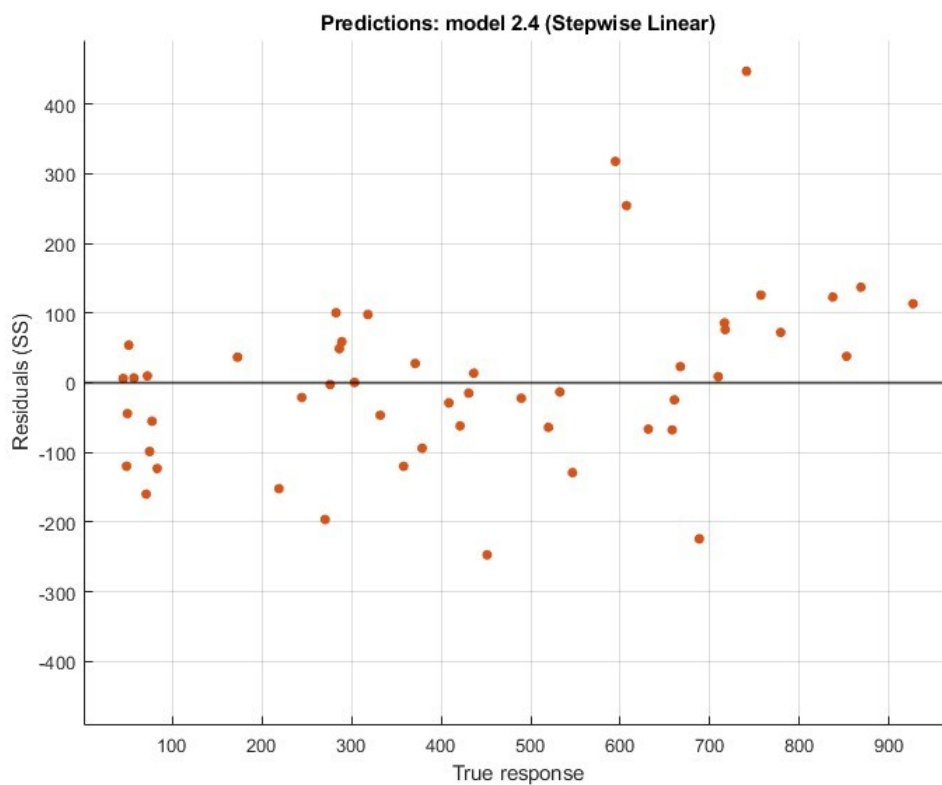
Slika 6.84 Graf validacije predviđenih u odnosu sa stvarnim odzivima za stepenasto linearni regresijski model za SS

Na ova dva grafa validacije predviđenih u odnosu sa stvarnim odzivima je također lako uočiti da zapažanja odstupaju od savršenog predviđanja. Povodom toga javit će se greške koje će se u kasnijem dijelu analitički prikazati.

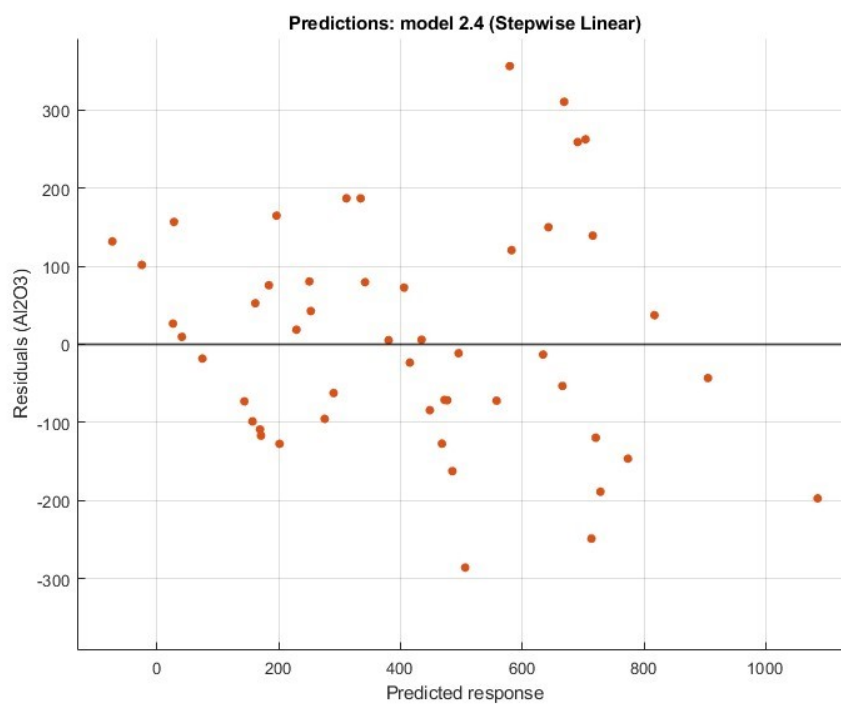
Sljedeća dva para grafova su grafovi validacije reziduala za stvarne, slika 6.85 i 6.86, te za predviđene odzive, slika 6.87 i 6.88. Crvenim točkama su prikazani reziduali.



Slika 6.85 Grafovi validacije reziduala za stvarne odzive za stepenasto linearni regresijski model za Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>

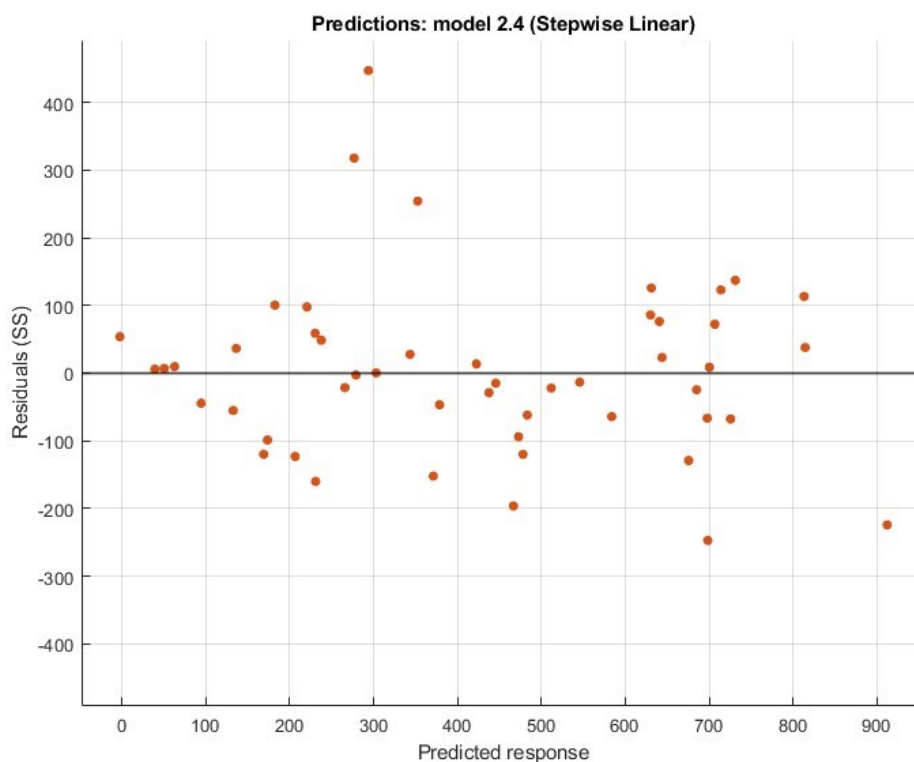


Slika 6.86 Grafovi validacije reziduala za stvarne odzive za stepenasto linearni regresijski model za SS



Slika 6.87 Grafovi validacije reziduala za predviđene odzive za stepenasto linearni regresijski model za  $Al_2O_3$





Slika 6.88 Grafovi validacije reziduala za predviđene odzive za stepenasto linearni regresijski model za SS

Na grafovima validacije reziduala za stvarne odzive pojavljuju se reziduali, a kako te vrijednosti variraju uvelike od 0 zaključak je da model nije točan, odnosno ima pogrešaka. Isto vrijedi za grafove validacije reziduala za predviđene odzive.

Sljedeći korak je dobiti vrijednosti metričkih procjena, a to su srednja kvadratna pogreška (MSE), korijen srednje kvadratne pogreške (RMSE), srednje apsolutne pogreške (MAE) i koeficijent determinacije ( $R^2$ ).

Rezultati za srednju kvadratnu pogrešku za aluminijski oksid i nehrđajući čelik su sljedeći:

$$MSE_{Al_2O_3} = 19795$$

$$MSE_{SS} = 15682$$

Sljedeći su rezultati za korijen srednje kvadratne pogreške za aluminijski oksid i nehrđajući čelik:

$$RMSE_{Al_2O_3} = 113,04$$

$$RMSE_{SS} = 125,23$$

U ovome radu rezultati za srednju apsolutnu pogrešku za aluminijski oksid i nehrđajući čelik su sljedeći:

$$MAE_{Al_2O_3} = 99,967$$

$$MAE_{SS} = 89,642$$

U ovome radu rezultati za koeficijent determinacije za aluminijski oksid i nehrđajući čelik su sljedeći:

$$R^2_{Al_2O_3} = 0,76$$

$$R^2_{SS} = 0,77$$

Vrijednosti srednje kvadratne pogreške, korijena srednje kvadratne pogreške i srednje apsolutne pogreške uzimajući u obzir raspon vrijednosti eksperimentalnih podataka imaju niske do srednje vrijednosti.

Prvo će se stepenasto linearni regresijski model usporediti sa linearno regresijskim modelom kako bi se došlo do zaključka koji model bolje odgovara eksperimentalnim podacima, nakon toga će usporediti sa linearno interakcijskim regresijskim i robusno linearno regresijskim modelom zbog istog cilja.

U odnosu na linearni regresijski model, za promatrani aluminijski oksid stepenasto linearni regresijski model ima veću vrijednost srednje kvadratne pogreške što znači da ima lošije performanse. Dok je za promatrani nehrđajući čelik obrnuti rezultat, no razlika je vrlo mala, skoro neprimjetna.

Stepenasto linearni model ima manju vrijednost srednje apsolutne pogreške što ukazuje da su mu predviđanja modela stvarnih vrijednosti bliža u odnosu na linearno regresijski modela.

Stepenasto linearni model također ima manju vrijednost srednje apsolutne pogreške u odnosu na linearno regresijski model što ukazuje da ovaj model ima točnija predviđanja modela.

Koeficijent determinacije za promatrani aluminijski oksid je bliži vrijednosti 1 kod linearno regresijskog modela nego kod stepenasto linearno regresijskog modela, što ukazuje na to da linearno regresijski model objašnjava veći dio varijance u ciljnoj varijabli. Za promatrani nehrđajući čelik vrijednosti koeficijenta determinacije su jednake.

Iz navedenog se da zaključiti da je stepenasto linearno regresijski model je sveukupno bolji od linearno regresijskog modela.

Kako je linearno regresijski model bolji od linearno interakcijsko regresijskog modela, dolazi se do zaključka da je i stepenasto linearno regresijski model bolji od linearno interakcijsko regresijskog modela.

Dalje je potrebno provjeriti je li stepenasto linearni model je bolji za promatrani nehrđajući čelik u odnosu na robusno linearno regresijski model. No usporedbom dobivenih rezultata metrika procjene jasno je da je robusno linearno regresijski model najbolji za promatrani nehrđajući čelik.

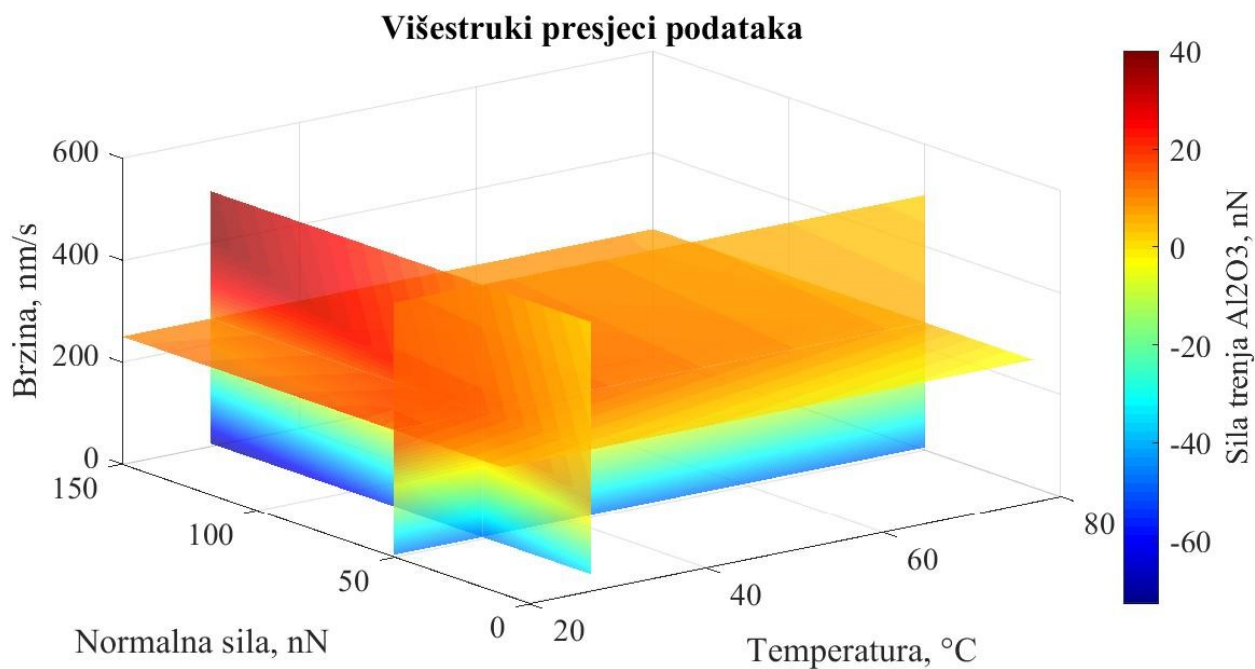
#### **6.4 Presjeci podataka u 4D**

Sljedeći zadatak je prikazati presjeke podataka, no kako je veliki raspon podataka za normalnu silu i brzinu, od 0 do 3000, potrebno im je smanjiti raspone, od 10 do 150 nN i od 5 do 500 nm/s te je temperatura od 20 do 80 °C.

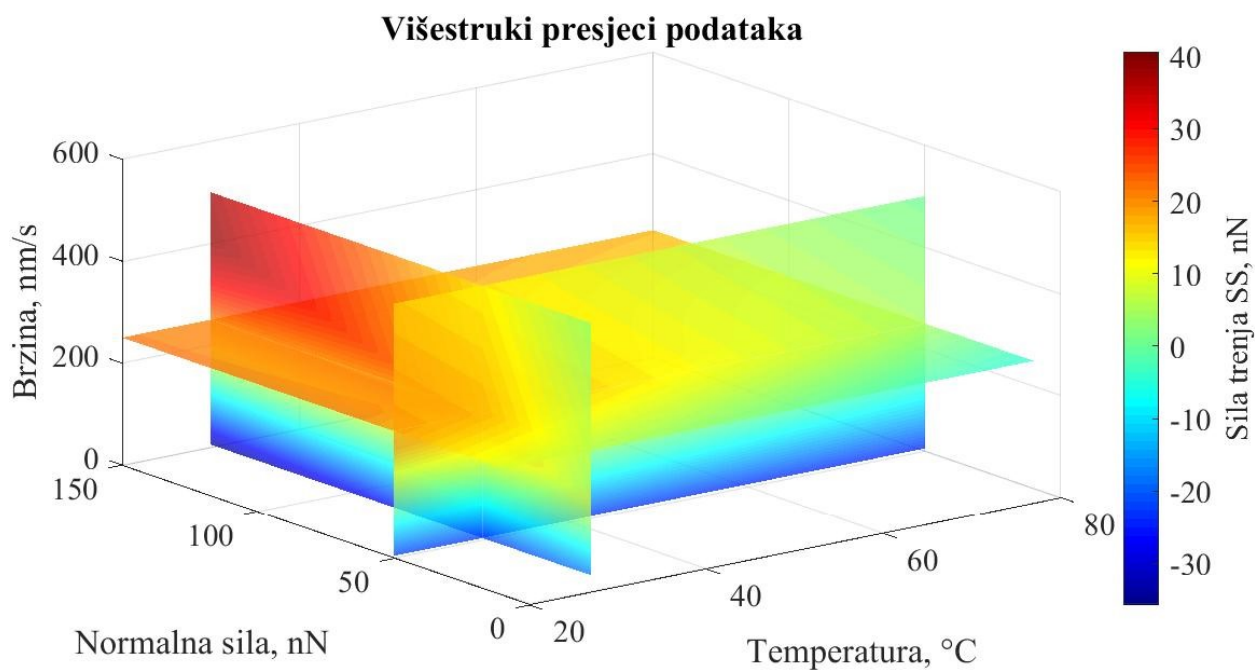
Razlog prikaza podataka presjecima jest da se kroz 2D plohe u prostoru prikažu dobivene vrijednosti sila trenja aluminijskog oksida i nehrđajućeg čelik, odnosno njihova ovisnost o ulaznim podacima temperature, normalne sile i brzine koja je ujedno cilj ovih presjeka podataka.

Kako u znanstvenoj vizualizaciji boja predstavlja kvantitativnu informaciju za izmjenjive entitete, u ovome slučaju silu trenja. Boja tako djeluje kao dodatni stupanj slobode, obično korišten kada su tri prostorne dimenzije koje možemo odmah opaziti već dodijeljene podacima.

Prvi način su višestruki presjeci podataka gdje su presjeci postavljeni na proizvoljno odabrane vrijednosti, temperatura je jednaka 30 °C, normalna sila 50 nN, a brzina 250 nm/s. Na slikama 6.88 i 6.89 su prikazani višestruki presjeci podataka za oba materijala.



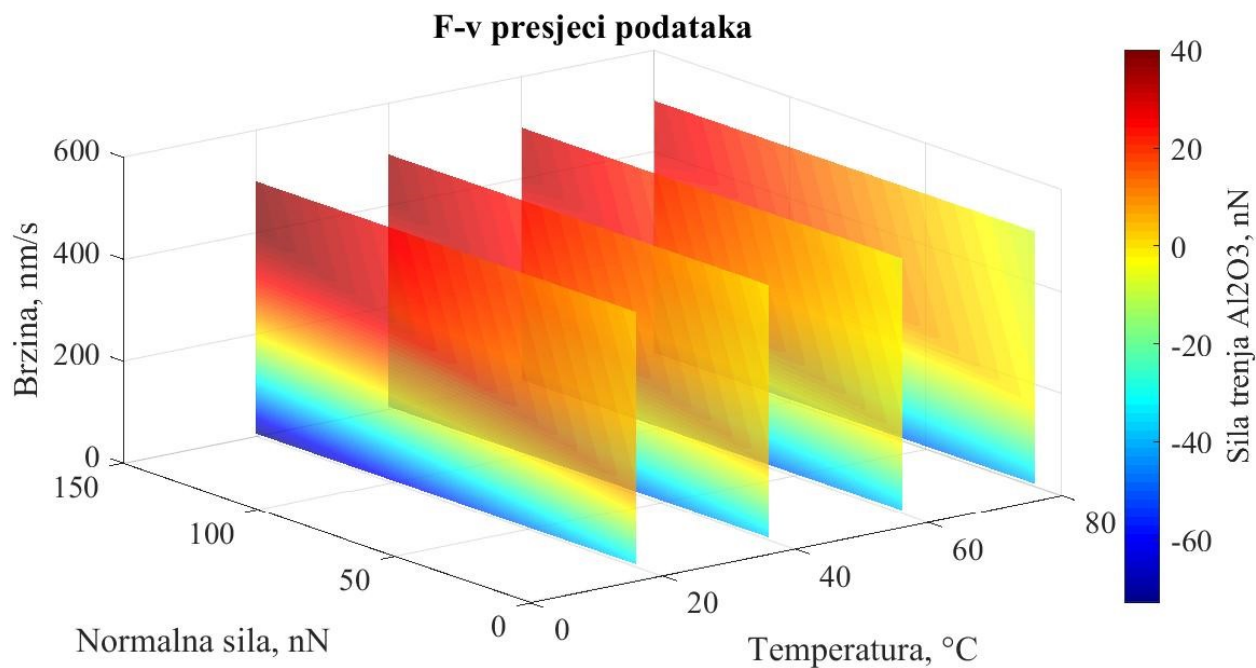
Slika 6.89 Višestruki presjeci podataka za  $\text{Al}_2\text{O}_3$



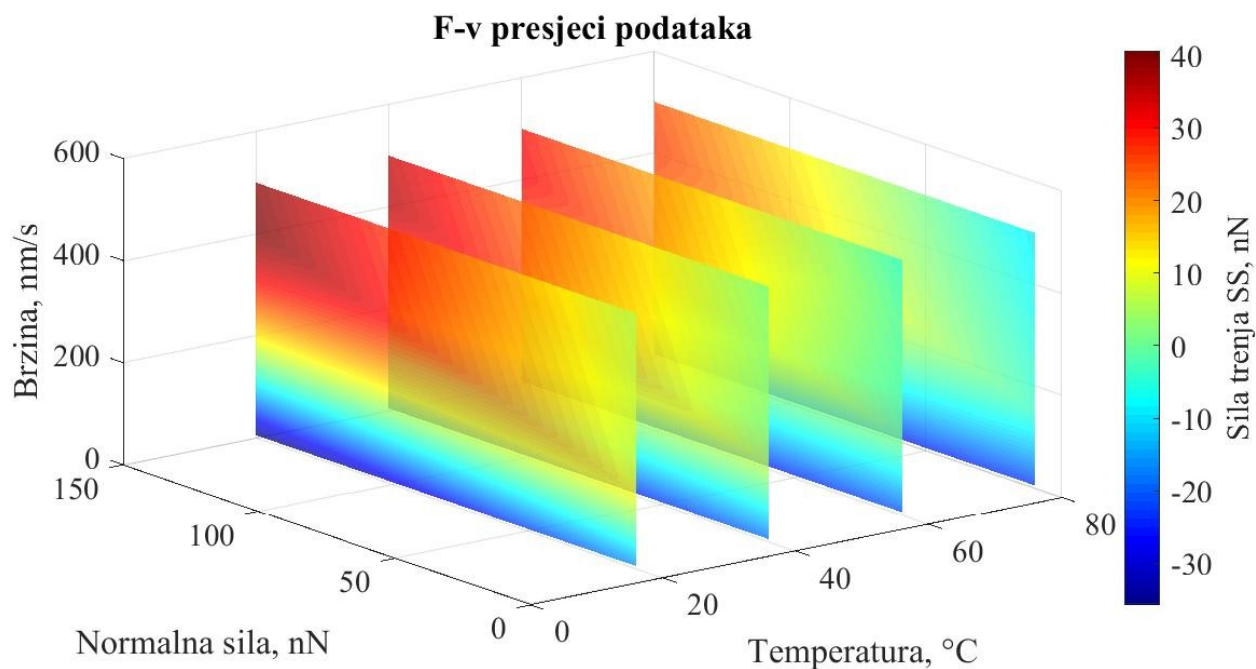
Slika 6.90 Višestruki presjeci podataka za SS

Iz višestrukih presjeka podataka se da zaključiti da sila trenja ima najveću vrijednost kod većih vrijednosti brzina i većih vrijednosti normalnih sila. Također vidimo da se u spektru boja kojoj je varijabla sila trenja pojavljuje negativna vrijednost, razlog tome je greška u ekstrapolaciji.

Na idući slikama 6.90 i 6.91, prikazani su presjeci F-v, gdje se plohe nalaze na vrijednostima temperatura od 0, 20, 40, 60 i 80 °C.



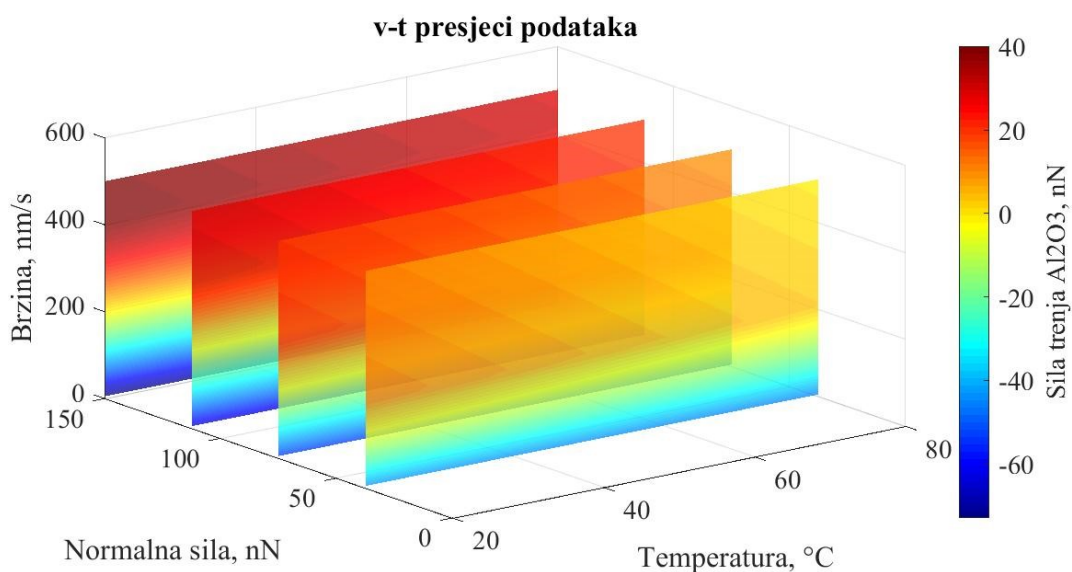
Slika 6.91 F-v presjeci podataka za Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>



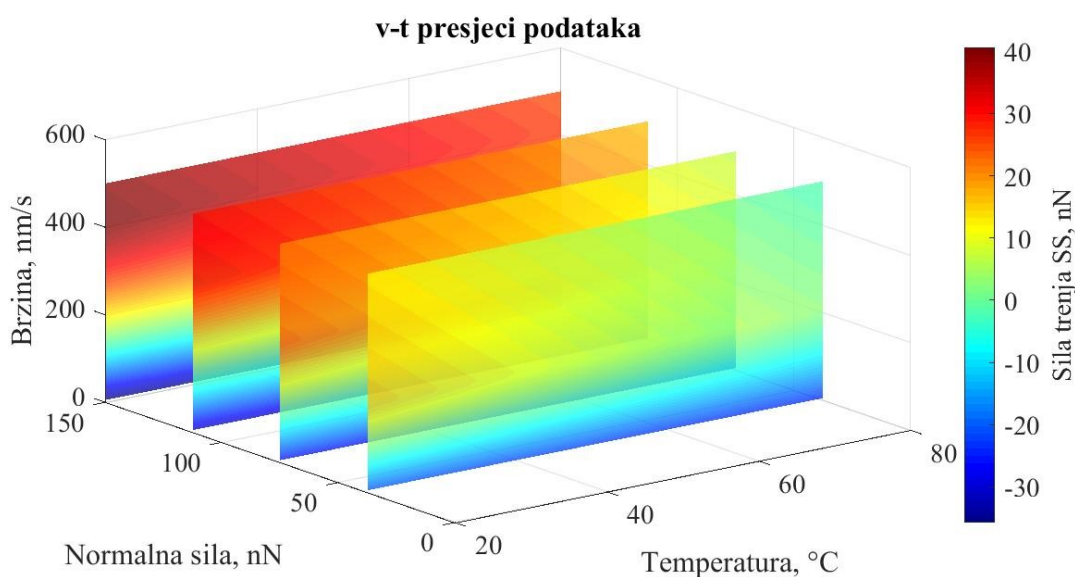
Slika 6.92 F-v presjeci podataka za SS

Iz F-v presjeka podataka se da zaključiti da sila trenja ima najveću vrijednost kod većih vrijednosti brzina i većih vrijednosti normalnih sila te je po bojama lako uočiti da je veća vrijednost sile trenja pri manjim vrijednostima temperature. Odnosno da se sila trenja smanjuje povećanjem temperature. Također vidimo da se u spektru boja kojoj je varijabla sila trenja pojavljuje negativna vrijednost, razlog tome je greška u ekstrapolaciji.

Zatim su prikazani presjeci v-t na slikama 6.92 i 6.93, gdje se plohe nalaze na vrijednostima normalne sile 0, 37.5, 75, 112.5 i 150 nN.



Slika 6.93 v-t presjeci podataka za Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>

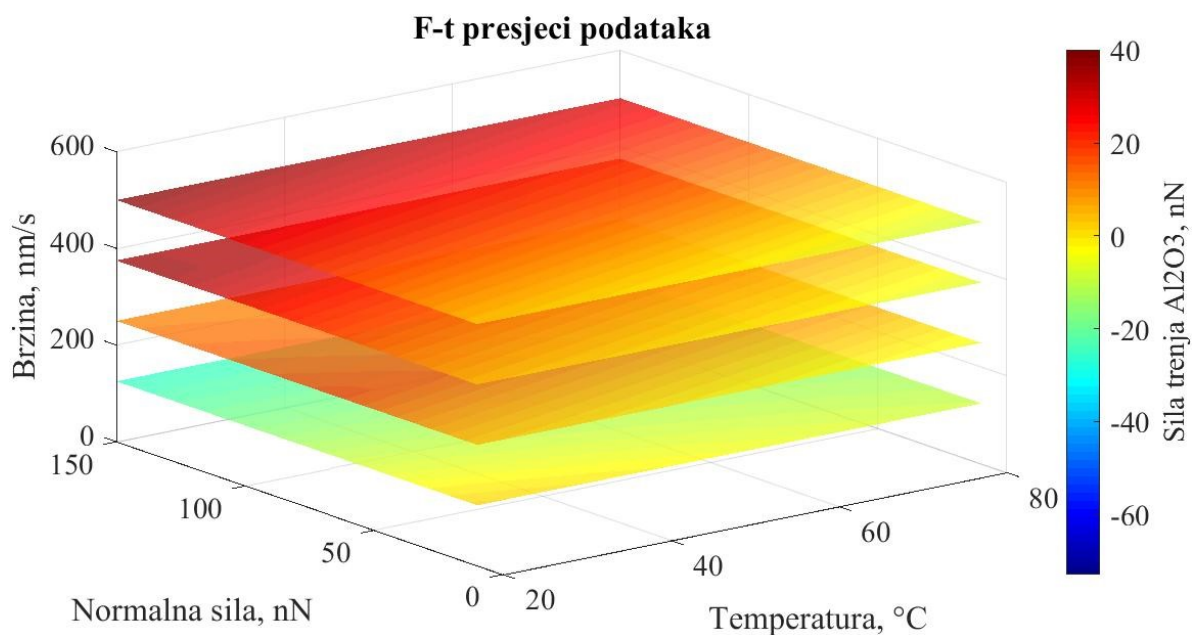


Slika 6.94 v-t presjeci podataka za SS

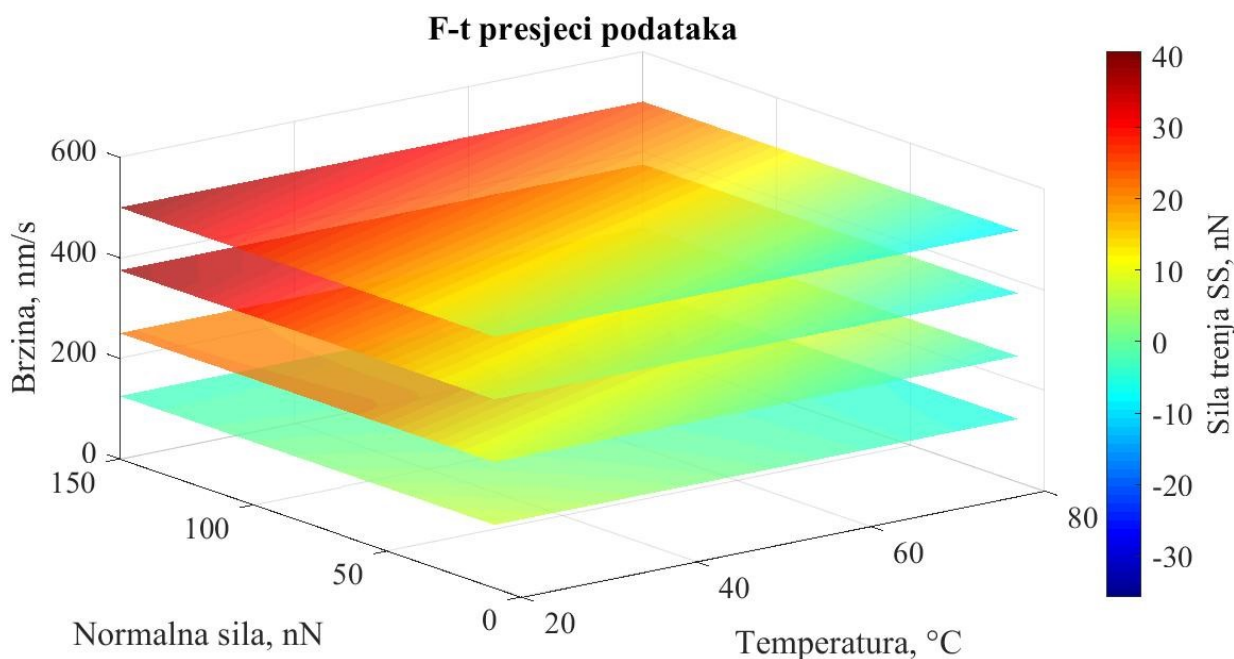


Iz v-t presjeka podataka se da zaključiti da sila trenja ima najveću vrijednost kod većih vrijednosti brzina i manjih vrijednosti temperature te je po bojama lako uočiti da je veća vrijednost sile trenja i pri većim vrijednostima normalne sile. Također vidimo da se u spektru boja kojoj je varijabla sila trenja ponovno pojavljuje negativna vrijednost, razlog tome je greška u ekstrapolaciji.

Te na poslijetku na slikama 6.94 i 6.95 se nalaze presjeci F-t gdje se plohe nalaze na vrijednostima 0, 125, 250, 375 i 500 nm/s.



Slika 6.95 F-t presjeci podataka za  $\text{Al}_2\text{O}_3$



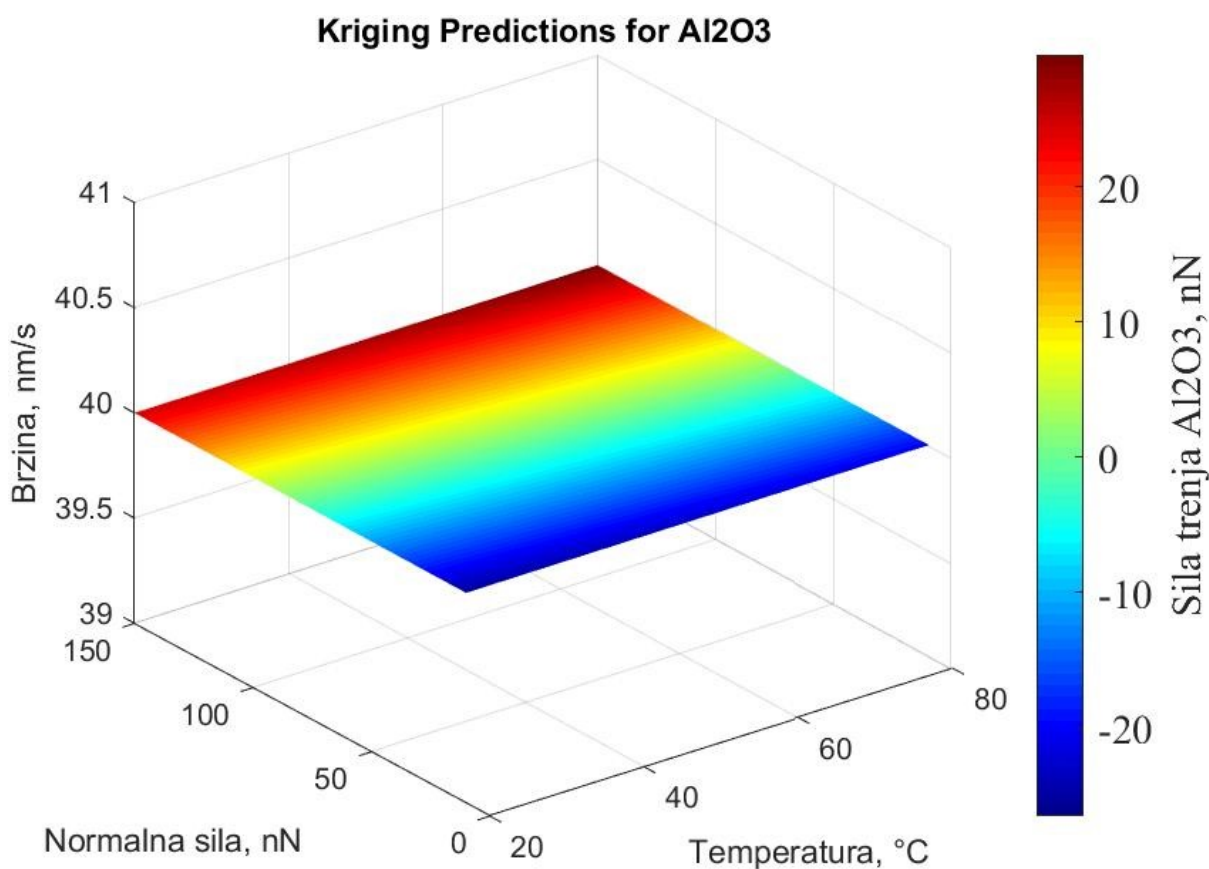
Slika 6.96 F-t presjeci podataka za SS

Iz F-t presjeka podataka se da zaključiti da sila trenja ima najveću vrijednost kod većih vrijednosti normalne sile i manjih vrijednosti temperature te je po bojama lako uočiti da je veća vrijednost sile trenja i pri većim vrijednostima brzine. Također vidimo da se u spektru boja kojoj je varijabla sila trenja ponovno pojavljuje negativna vrijednost, razlog tome je greška u ekstrapolaciji.

## 6.5 Kriging metoda

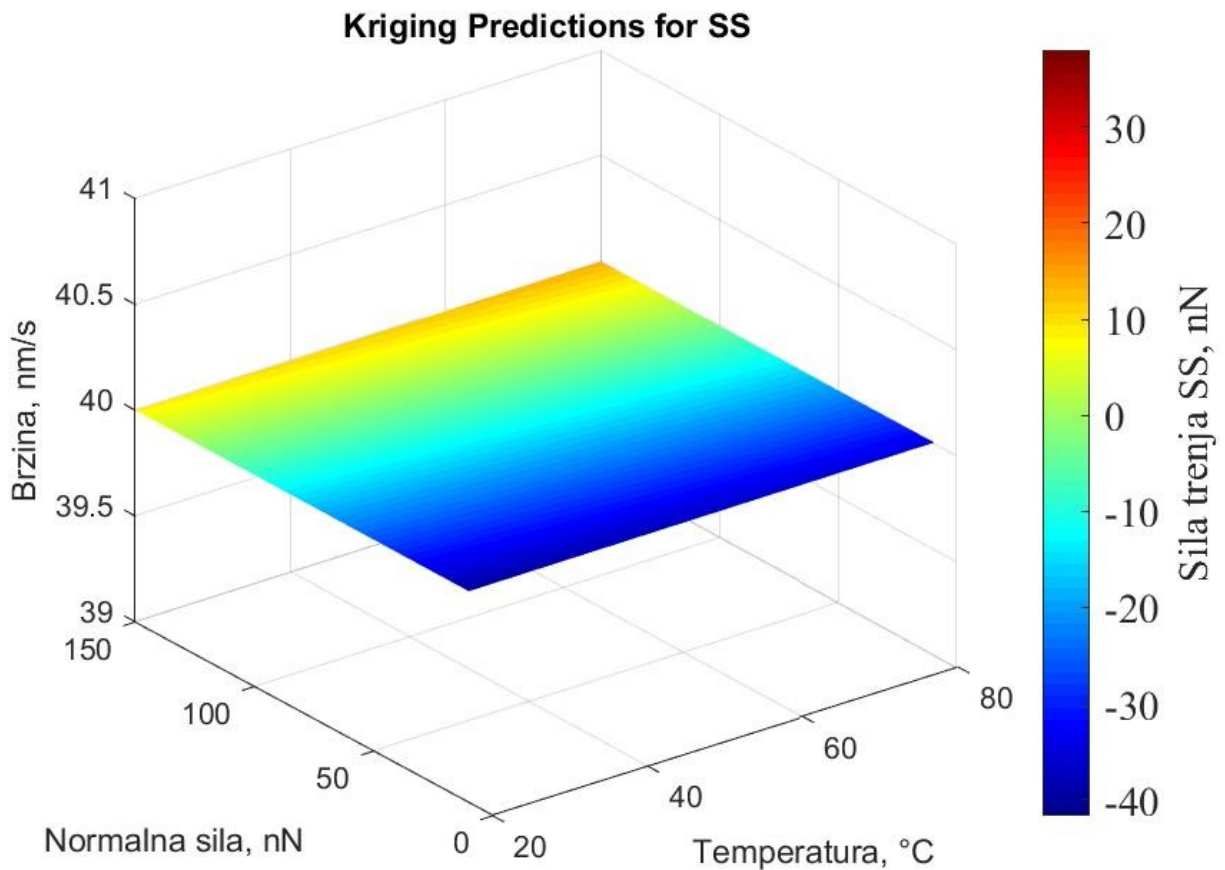
U četvrtom poglavlju se detaljno teorijski objasnili Kriging metoda, pomoću te teorije će se u programu Matlabu generirati kod te pokretanjem tog koda dobiti grafički prikazi spomenute metode. Ti grafički prikazi će se prikazati u ovome potpoglavlju te objasniti. Nakon toga će se u sljedećem poglavlju izračunati metrike procjene i prokomentirati njihovi rezultati.

Uvrštavanjem podataka u formule opisane u četvrtom poglavlju, odnosno pokretanjem koda u Matlabu dobivaju se rezultati predikcije za oba materijala, rezultati su prikazani na slikama 6.97 i 6.98:



Slika 6.97 Graf predikcije Kriging metode za Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>

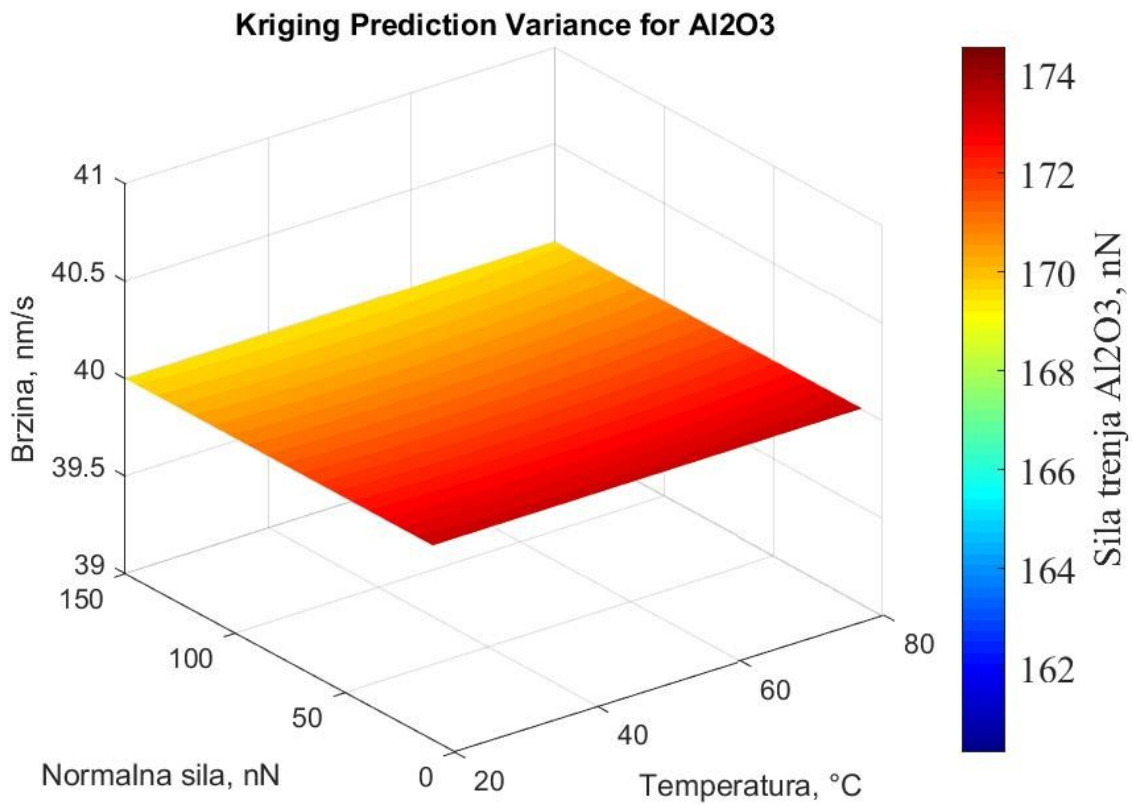




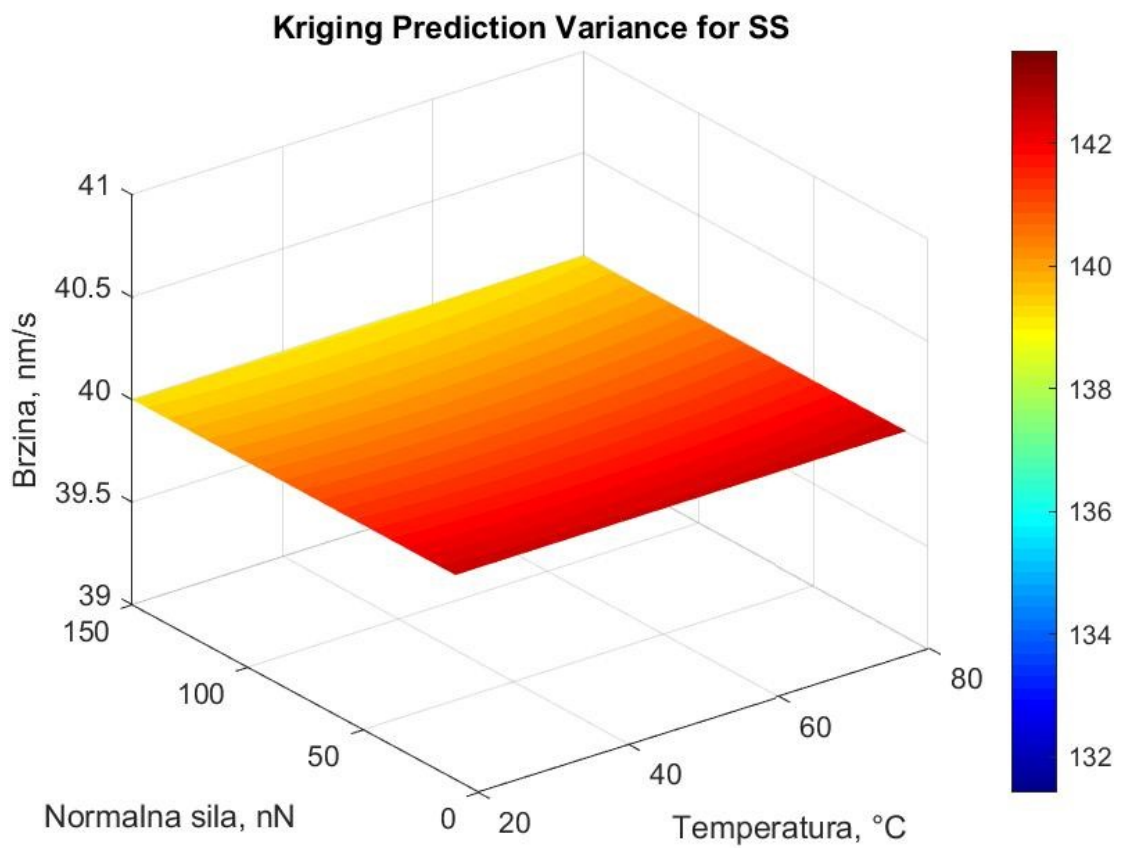
Slika 6.98 Graf predikcije Kriging metode za SS

Prema grafovima možemo zaključiti da Kriging metoda radi predikciju da što su veće vrijednosti ulaznih podataka, temperature i normalne sile, to će biti veća njihova rezultanta, odnosno sila trenja za oba materijala. Kako je brzina stalna, jednaka je 40 nm/s, ne utječe na promjenu sile trenja kroz plohu. No iz prethodnog potpoglavlja gdje su se koristili sirovi podaci se došlo do zaključka da sila trenja ima veću vrijednost što je vrijednost temperature manja. Stoga možemo zaključiti da je Kriging metoda pogriješnu predikciju izvršila, odnosno da će se pojaviti greške. Također vidimo da se u spektru boja kojoj je varijabla sila trenja ponovno pojavljuje negativna vrijednost, razlog tome je greška u ekstrapolaciji.

Uvrštavanjem podataka u formule opisane u četvrtom poglavlju, odnosno pokretanjem koda u Matlabu dobivaju se rezultati predikcija varijanci za oba materijala, rezultati su prikazani na slikama 6.99 i 6.100:



Slika 6.99 Graf predikcije varijanci Kriging metode za Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>



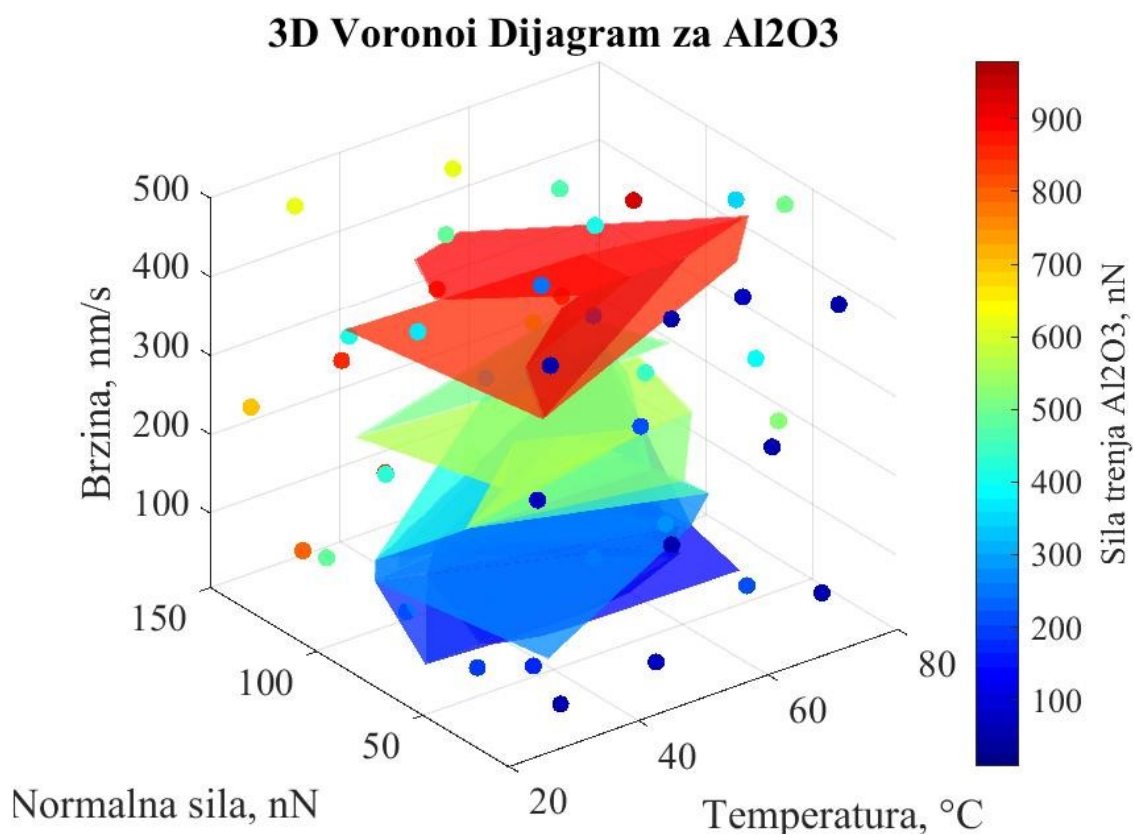
Slika 6.100 Graf predikcije varijanci Kriging metode za SS

Prema grafovima možemo zaključiti da Kriging metoda radi predikciju varijanci da što su manje vrijednosti ulaznih podataka, temperature i normalne sile, to će biti veća njihova rezultanta, odnosno sila trenja za oba materijala. Kako je brzina stalna, jednaka je 40 nm/s, ne utječe na promjenu sile trenja kroz plohu. No iz prethodnog potpoglavlja gdje su se koristili sirovi podaci se došlo do zaključka da sila trenja ima veću vrijednost što je vrijednost normalne sile veća. Stoga možemo zaključiti da je Kriging metoda pogriješnu predikciju varijanci izvršila, odnosno da će se pojaviti greške.

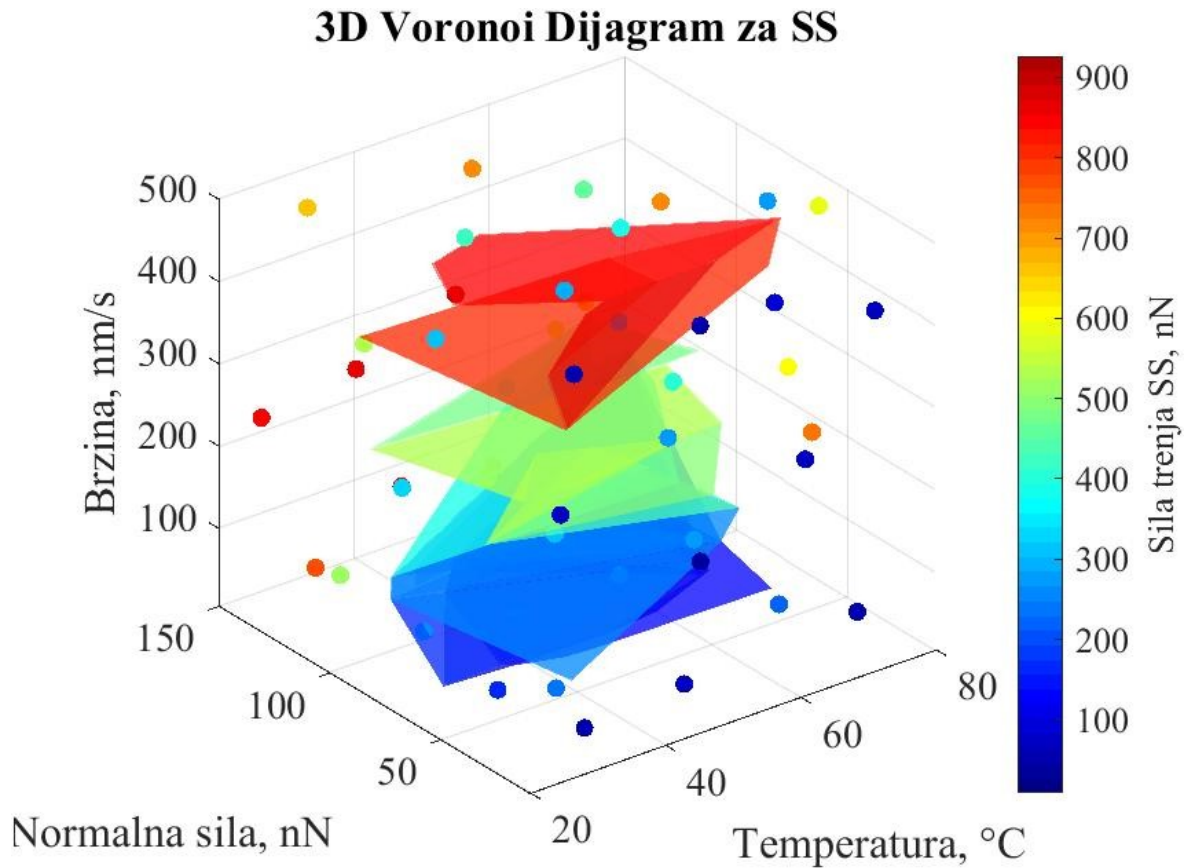
## 6.6 Prirodna susjedna interpolacija (Voronoi dijagram)

U četvrtom poglavlju se detaljno teorijski objasnila prirodna susjedna, pomoću te teorije će se u programu Matlabu generirati kod te pokretanjem tog koda dobiti grafički prikazi spomenute interpolacije. Ti grafički prikazi će se prikazati u ovome potpoglavlju te objasniti.

Uvrštavanjem podataka u formule opisane u četvrtom poglavlju, odnosno pokretanjem koda u Matlabu, dobivaju se volumeni prikazani na slikama 6.101 i 6.102:



Slika 6.101 3D Voronoi dijagram za Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>



Slika 6.102 3D Voronoi dijagram za SS

Na grafovima se vidi ponašanje Voronoiija, odnosno podjelu ravnina po bojama na područja koja su bliska svakoj vrijednosti sile trenja. Također vidimo da što su veće vrijednosti ulaznih podataka, normalne sile i brzine, a što manja temperatura, to će biti veća njihova rezultanta, odnosno sila trenja za oba materijala. Isti zaključci su dobiveni u prošlom potpoglavlju prikazom presjeka sirovih podatka stoga možemo zaključiti da je Voronoi dijagram dobar način za vizualizaciju eksperimentalnih podataka.

## 7 STATISTIČKA ANALIZA OBRADENIH PODATAKA

U programu Matlab se izvršila Krigingova metoda sa sirovim podacima te su se dobili predviđeni podaci za oba materijala. Kako postoji samo pedeset vrijednosti trenja za oba materijala koje su dobivene LFM metodom, a Krigingovom metodom u Matlabu se dobije puno više potrebno je bilo pomoću AI kreirati isti broj stvarnih vrijednosti kako bi se izračunale metričke procjene. Te vrijednosti su dobivene sljedećim formulama.

Formula za uzorak materijala  $Al_2O_3$  je sljedeća:

$$F_f = 0,01183 \cdot F_L - 0,0008751 \cdot v + 0,8707 \cdot \vartheta - 0,0194 \cdot \vartheta^2 + 0,0001258 \cdot \vartheta^3 - 9,67 \quad (7.1)$$

Formula za uzorak materijala X39CrMo17-1 (SS) je sljedeća: [7]

$$F_f = 0,04559 \cdot F_L - 0,0008751 \cdot v + 1,141 \cdot \vartheta - 0,02274 \cdot \vartheta^2 + 0,00013 \cdot \vartheta^3 - 12,72 \quad (7.2)$$

U ovom poglavlju biti će prikazani rezultati srednje kvadratne pogreške (MSE), korijena srednje kvadratne pogreške (RMSE), srednje apsolutne pogreške (MAE) i koeficijent determinacije ( $R^2$ ) te ostale statističke karakterizacije predviđenih podataka Krigingovom metodom te će se u zasebnom potpoglavlju prikazati iste te greške.

### 7.1 Rezultati metričkih procjena za Krigingovu metodu

Rezultati za srednju kvadratnu pogrešku za aluminijski oksid i nehrđajući čelik su sljedeći:

$$MSE_{Al_2O_3} = 210,149$$

$$MSE_{SS} = 282,762$$

Vrijednosti srednje kvadratne pogreške uzimajući u obzir raspon vrijednosti eksperimentalnih podataka imaju srednje vrijednosti. Što ukazuje na ne toliko dobru performansu modela.

Sljedeći su rezultati za korijen srednje kvadratne pogreške za aluminijski oksid i nehrđajući čelik:

$$RMSE_{Al_2O_3} = 14,4965$$

$$RMSE_{SS} = 16,8155$$

Vrijednosti srednje kvadratne pogreške uzimajući u obzir raspon vrijednosti eksperimentalnih podataka imaju niske vrijednosti. Što ukazuje da su predviđanja modela blizu stvarnih vrijednosti.

U ovome radu rezultati za srednju apsolutnu pogrešku za aluminijski oksid i nehrđajući čelik su sljedeći:

$$MAE_{Al_2O_3} = 12,491$$

$$MAE_{SS} = 13,746$$

Vrijednosti srednje apsolutne pogreške uzimajući u obzir raspon vrijednosti eksperimentalnih podataka imaju niske vrijednosti. Što ukazuje na točnija predviđanja modela.

U ovome radu rezultati za koeficijent determinacije za aluminijski oksid i nehrđajući čelik su sljedeći:

$$R^2_{Al_2O_3} = -137,1465$$

$$R^2_{SS} = -39,7548$$

## 7.2 Statističke karakterizacije predviđenih podataka

Teorijski su se opisale statističke karakterizacije predviđenih podataka u 3. poglavlju no u ovome će se prikazati njihovi rezultati.

Prva je srednja vrijednost koja je za aluminijski oksid i nehrđajući čelik jednaka:

$$\overline{y_{Al_2O_3}} = 1,4784$$

$$\overline{y_{SS}} = 7,6446$$

Medijan je jednak:

$$\widetilde{y_{Al_2O_3}} = 1,4315$$

$$\widetilde{y_{SS}} = 7,6799$$

Maksimalna vrijednost je:

$$\max_{Al_2O_3} = 29,7785$$

$$\max_{SS} = 45,86$$

Minimalna vrijednost je jednaka:

$$\min_{Al_2O_3} = -26,5217$$

$$\min_{SS} = -32,0258$$

Varijanca je jednaka:

$$\sigma_{Al_2O_3}^2 = 220,162$$

$$\sigma_{SS}^2 = 224,3228$$

Standardna devijacija je jednaka:

$$\sigma_{Al_2O_3} = 14,8378$$

$$\sigma_{SS} = 14,977$$

U prijašnjem poglavlju se pomoću grafičkih prikaza došlo do zaključka da je Kriging metoda pogriješne predikcije izvršila. Sljedeće je na redu provjeriti analitički, odnosno usporediti srednju kvadratnu pogrešku sa varijancom te korijen srednje kvadratne pogreške sa standardnom devijacijom.

Prvo je potrebno shvatiti ovisnosti srednja kvadratne pogreške i varijance. Ako je vrijednost MSE puno manja od vrijednosti varijance to znači da model učinkovito hvata temeljne obrasce u podacima i značajno smanjuje pogrešku u usporedbi s prirodnom varijabilnošću cilja. Ako je vrijednost MSE blizu vrijednosti varijance to sugerira da model nije puno bolji od jednostavnog predviđanja srednje vrijednosti ciljne varijable za sva opažanja, model ne hvata učinkovito temeljne obrasce u podacima, a njegova predviđanja ne smanjuju značajno pogrešku. Ako je vrijednost MSE veći od vrijednosti varijance znači da model možda ima lošiju izvedbu od jednostavnog osnovnog modela (poput predviđanja srednje vrijednosti). Model može predstavljati

dodatnu pogrešku, vjerojatno zbog pretjeranog opremanja, lošeg izbora modela ili neodgovarajuće obuke. [11]

Vrijednost MSE je za aluminijski oksid blizu vrijednosti varijance što znači da model nije puno bolji od jednostavnog predviđanja srednje vrijednosti ciljne varijable za sva opažanja, model ne hvata učinkovito temeljne obrasce u podacima, a njegova predviđanja ne smanjuju značajno pogrešku. Za nehrđajući čelik je vrijednost MSE veća od vrijednosti varijance što znači da model možda ima lošiju izvedbu od jednostavnog osnovnog modela (poput predviđanja srednje vrijednosti).

Sljedeće je potrebno shvatiti ovisnosti korijena srednje kvadratne pogreške i standardne devijacije. Ako je vrijednost RMSE puno manja od vrijednosti standardne devijacije ciljne varijable, to sugerira da model uspješno smanjuje pogreške predviđanja u usporedbi s prirodnom varijabilnošću podataka. Ako je vrijednost RMSE blizu vrijednosti standardne devijacije, to sugerira da se model ne poboljšava značajno na jednostavnom osnovnom predviđanju (kao što je predviđanje srednje vrijednosti). Ako je vrijednost RMSE veći od vrijednosti standardne devijacije, to sugerira da model radi lošije od prirodne varijabilnosti podataka. To može biti znak lošeg izbora modela, neadekvatnog odabira značajki ili drugih problema. [11]

Vrijednosti RMSE su blizu vrijednostima varijance što sugerira da se model ne poboljšava značajno na jednostavnom osnovnom predviđanju (kao što je predviđanje srednje vrijednosti).



## 8 ZAKLJUČAK

U ovome radu je izvršena obrada eksperimentalnih podataka dobivenih LFM metodom. Kod mjerenja stroj je koristio varijable temperature, sile i brzine te se kao rezultanta dobila sila trenja za tanke filmove materijala alumijevog oksida ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) i X39CrMo17-1 nehrđajući čelik (SS).

Prethodno spomenuta mjerenja su iz područja tribologije koja je uz LFM metodu detaljno obrađena u radu.

Sljedeće je obrađena statistička karakterizacija podataka kod koje su najbitniji pojmovi metričkih procjena. To su srednja kvadratna pogreška (MSE), korijen srednje kvadratne pogreške (RMSE), srednje apsolutne pogreške (MAE) i koeficijent determinacije ( $R^2$ ). Ovi pojmovi su važni za procjenu modela korištenih u ovome radu kako bi ih se moglo usporediti, odnosno kako bi se saznalo koji model je dobar, a koji loš za validaciju eksperimentalnih podataka.

Nakon su opisane interpolacijske metode koje su korištene u kasnije u Matlabu, a to su linearna, kubična i prirodna susjedna interpolacija, interpolacija najbližeg susjeda te Kriging.

Sljedeće su opisane funkcije korištene u Matlabu za Kriging i prirodnu susjednu interpolaciju. Funkcije koje su korištene su '*scatteredInterpolant*', '*fitgrp*' i '*delaunayTriangulation*'. Spomenute funkcije je potrebno teorijski razumijeti kako bi se mogle implementirati i koristiti na pravilan način u kodu.

Nakon teorije slijede rezultati obrade podataka i vizualizacija gdje su prikazani sirovi podaci u 3D, grafički rezultati aplikacije '*Curve fitter*' koja se nalazi unutar programa Matlab, njime su prikazan linearna, kubična interpolacija i interpolacija najbližeg susjeda. Grafički i analitički rezultati aplikacije '*Regression learner*' koja se također nalazi unutar korištenog programa. Pomoću te aplikacije koristiti će se linearni, linearno interakcijski, robusno linearni i stepenasto linearni model. Cilj ove obrade podataka je saznati koji model linearnog regresijskog učenja podataka je najbolji za dobivene eksperimentalne podatke. Taj cilj će se ostvariti usporedbom metrika procjene svih modela. Usporedba će se prikazati u tablicima, prvo za aluminijev oksid u tablici 8.1.

Tablica 8.1 Rezultati metrika procjena za regresijske modele za aluminijski oksid

	MSE	RMSE	MAE	R <sup>2</sup>
Linearno regresijski model	16876	121,91	103,48	0,8
Linearno interakcijsko regresijski model	17964	134,03	102,35	0,78
Robusno linearno regresijski model	20107	141,8	99,967	0,76
Stepenasto linearno regresijski model	19795	113,04	99,967	0,76

Nizak MSE ukazuje na bolje performanse modela, nizak RMSE ukazuje da su predviđanja modela blizu stvarnih vrijednosti, nizak MAE ukazuje na točnija predviđanja modela. Ako je R<sup>2</sup> je blizu vrijednosti 1 ukazuje na to da model objašnjava veliki dio varijance u ciljnoj varijabli.

Usporedbom modela dolazi se do zaključka da je linearno regresijski model najbolji za validaciju eksperimentalnih podataka za aluminijski oksid.

Isto je potrebno napraviti za nehrđajući čelik, u tablici 8.2 je prikazana usporedba.

Tablica 8.2 Rezultati metrika procjena za regresijske modele za nehrđajući čelik

	MSE	RMSE	MAE	R <sup>2</sup>
Linearno regresijski model	16123	126,98	91,927	0,77
Linearno interakcijsko regresijski model	19383	139,22	102,89	0,72
Robusno linearno regresijski model	15328	123,81	86,944	0,78

Stepenasto linearno regresijski model	15682	125,23	89,642	0,77
---	-------	--------	--------	------

Usporedbom modela dolazi se do zaključka da je robusno linearno regresijski model najbolji za validaciju eksperimentalnih podataka za nehrđajući čelik.

Posljednje su prikazani i objašnjeni presjeci sirovih podataka, grafički prikazi i analitički rezultati Kriginga te grafički prikazi prirodne susjedne interpolacije.

Iz dobivenih rezultata za Kriging se može zaključiti da je spomenuta metoda izvršila pogriješnu predikciju varijanci, odnosno da će se pojaviti greške. Usporedbom srednja kvadratne pogreške i varijance te korijena srednje kvadratne pogreške i standardne devijacije došlo se do zaključka da Kriging nije dobra metoda za validaciju eksperimentalnih podataka.

## 9 DODATAK

### 9.1 Matlab kod za presjeke podataka

```
x_data = podaci(:,2); % Temperatura od 20 do 80C
y_data = podaci(:,3); % Sila od 10 do 150nN
z_data = podaci(:,4); % Brzina od 5 do 500nm/s
t1 = podaci(:,5); % Trenje Al2O3
t2 = podaci(:,6); %trenje SS
n = 50; % n - broj tocaka za interpolaciju po dimenziji, ne stavljati
previse.
% Definiramo mrežu, tj. broj točaka u sve 3 dimenzije na koje ćemo
% interpolirati podatke
xmin=20; %min. temperature, tj. x-osi
xmax=80; %max. temp., tj. x-osi
ymin=10; %min normalne sile, y-os
ymax=150; %max normalne sile
zmin=5;%min brzine, z-os
zmax=500;%max. brzine
x = linspace(xmin, xmax, n); %Odredujemo sve ove x,y,z vrijednosti za n
tocaka u rasponu od min do max
y = linspace(ymin, ymax, n);
z = linspace(zmin, zmax, n);
[X, Y, Z] = meshgrid(x, y, z); %Od gore definiranih 50 tocaka u x,y,z
smjerovima ovdje stvaramo volumen

%Interpoliramo t1 podatke, tj. Al2O3, zato je oznaka F Al (za aluminiј)
FAl = scatteredInterpolant ( x_data,y_data,z_data,t1,"linear","linear");
%Interpolacija t1, tj Al2O3 seta)

%Odredimo vrijednosti interpolacije na točkama volumena x-y-z od 50-50-50,
%sto je prije definirano
data = FAl(X,Y,Z); %Odredivanje vrijednosti interpoliranih u točkama volumena
50x50x50

%interpoliramo podatke t2 za SS
Fss = scatteredInterpolant ( x_data,y_data,z_data,t2,"linear","linear");
%Interpolacija t2, tj SS seta)

%Odredimo vrijednosti interpolacije na točkama volumena x-y-z od 50-50-50,
```

```

%sto je prije definirano
datass = Fss(X,Y,Z); %Odredivanje vrijednosti interpoliranih u tockama
volumena 50x50x50

% Plotamo, ne morate ovako isto kao u primjeru, stavite razlicite presjeke,
% animacije, itd.
figure(1)
colormap jet

% slice na vrijednostima 30, 50, i 250 koje sam stavio proizvoljno, to su
% vrijednosti x,y,z, tj., temp. sila, i brzina.
subplot(2, 2, 1)
slice(X, Y, Z , data, 30, 50, 250, "linear")
shading interp
set(gca, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 14)
xlabel('Temperatura, °C')
ylabel('Normalna sila, nN')
zlabel('Brzina, nm/s')
title('Višestruki presjeci podataka')
alpha(0.75)
hClbr1 = colorbar;
set(hClbr1, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 14)
ylabel(hClbr1, 'Sila trenja Al2O3, nN')

% Lateral cross sections
subplot(2, 2, 2)
slice(X, Y, Z, data, [0 0.25 0.5 0.75 1]*max(abs(x)), [], [])
shading interp
set(gca, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 14)
xlabel('Temperatura, °C')
ylabel('Normalna sila, nN')
zlabel('Brzina, nm/s')
title('F-v presjeci podataka')
alpha(0.75)
hClbr2 = colorbar;
set(hClbr2, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 14)
ylabel(hClbr2, 'Sila trenja Al2O3, nN')

% Frontal cross sections
subplot(2, 2, 3)
slice(X, Y, Z, data, [], [0 0.25 0.5 0.75 1]*max(abs(y)), [])
shading interp

```

```

set(gca, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 14)
xlabel('Temperatura, °C')
ylabel('Normalna sila, nN')
zlabel('Brzina, nm/s')
title('v-t presjeci podataka')
alpha(0.75)
hClbr3 = colorbar;
set(hClbr3, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 14)
ylabel(hClbr3, 'Sila trenja Al2O3, nN')

% Horizontal cross sections
subplot(2, 2, 4)
slice(X, Y, Z, data, [], [], [0 0.25 0.5 0.75 1]*max(abs(z)))
shading interp
set(gca, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 14)
xlabel('Temperatura, °C')
ylabel('Normalna sila, nN')
zlabel('Brzina, nm/s')
title('F-t presjeci podataka')
alpha(0.75)
hClbr4 = colorbar;
set(hClbr4, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 14)
ylabel(hClbr4, 'Sila trenja Al2O3, nN')

hold on
% Plotamo, ne morate ovako isto kao u primjeru, stavite razlicite presjeke,
% animacije, itd.
figure(2)
colormap jet

% slice na vrijednostima 30, 50, i 250 koje sam stavio proizvoljno, to su
% vrijednosti x,y,z, tj., temp. sila, i brzina.
subplot(2, 2, 1)
slice(X, Y, Z, datass, 30, 50, 250, "linear") %ovdje malo mijenjati i
plotati s različitim metodama, ovo linear
shading interp
set(gca, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 14)
xlabel('Temperatura, °C')
ylabel('Normalna sila, nN')
zlabel('Brzina, nm/s')
title('Višestruki presjeci podataka')
alpha(0.75)

```

```

hClbr1 = colorbar;
set(hClbr1, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 14)
ylabel(hClbr1, 'Sila trenja SS, nN')

% Lateral cross sections
subplot(2, 2, 2)
slice(X, Y, Z, datass, [0 0.25 0.5 0.75 1]*max(abs(x)), [], [])
shading interp
set(gca, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 14)
xlabel('Temperatura, °C')
ylabel('Normalna sila, nN')
zlabel('Brzina, nm/s')
title('F-v presjeci podataka')
alpha(0.75)
hClbr2 = colorbar;
set(hClbr2, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 14)
ylabel(hClbr2, 'Sila trenja SS, nN')

% Frontal cross sections
subplot(2, 2, 3)
slice(X, Y, Z, datass, [], [0 0.25 0.5 0.75 1]*max(abs(y)), [])
shading interp
set(gca, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 14)
xlabel('Temperatura, °C')
ylabel('Normalna sila, nN')
zlabel('Brzina, nm/s')
title('v-t presjeci podataka')
alpha(0.75)
hClbr3 = colorbar;
set(hClbr3, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 14)
ylabel(hClbr3, 'Sila trenja SS, nN')

% Horizontal cross sections
subplot(2, 2, 4)
slice(X, Y, Z, datass, [], [], [0 0.25 0.5 0.75 1]*max(abs(z)))
shading interp
set(gca, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 14)
xlabel('Temperatura, °C')
ylabel('Normalna sila, nN')
zlabel('Brzina, nm/s')
title('F-t presjeci podataka')
alpha(0.75)

```

```

hClbr4 = colorbar;
set(hClbr4, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 14)
ylabel(hClbr4, 'Sila trenja SS, nN')

```

## 9.2 Matlab kod za Kriging metodu

```

x_data = podaci(:,2); % Temperatura od 20 do 80C
y_data = podaci(:,3); % Sila od 10 do 150nN
z_data = podaci(:,4); % Brzina od 5 do 500nm/s
t1 = podaci(:,5); % Trenje Al2O3
t2 = podaci(:,6); % Trenje SS
n = 50; % n - broj tocaka za interpolaciju po dimenziji, ne stavljati
previse.

% Definiramo mrežu, tj. broj točaka u sve 3 dimenzije na koje ćemo
% interpolirati podatke
xmin=20; %min. temperature, tj. x-osi
xmax=80; %max. temp., tj. x-osi
ymin=10; %min normalne sile, y-os
ymax=150; %max normalne sile
zmin=5;%min brzine, z-os
zmax=500;%max. brzine
x = linspace(xmin, xmax, n); %Određujemo sve ove x,y,z vrijednosti za n
tocaka u rasponu od min do max
y = linspace(ymin, ymax, n);
z = linspace(zmin, zmax, n);
[X, Y, Z] = meshgrid(x, y, z); %Od gore definiranih 50 tocaka u x,y,z
smjerovima ovdje stvaramo volumen
grid_points = [X(:), Y(:), Z(:)];

%Interpoliramo t1 podatke, tj. Al2O3, zato je oznaka F Al (za aluminiј)
FAl = scatteredInterpolant ( x_data,y_data,z_data,t1,"linear","linear");
%Interpolacija t1, tj Al2O3 seta)

%Odredimo vrijednosti interpolacije na točkama volumena x-y-z od 50-50-50,
%sto je prije definirano
data = FAl(X,Y,Z); %Određivanje vrijednosti interpoliranih u točkama volumena
50x50x50

%interpoliramo podatke t2 za SS

```



```

Fss = scatteredInterpolant ( x_data,y_data,z_data,t2,"linear","linear");
%Interpolacija t2, tj SS seta)

%Odredimo vrijednosti interpolacije na točkama volumena x-y-z od 50-50-50,
%sto je prije definirano
datass = Fss(X,Y,Z); %Odredivanje vrijednosti interpoliranih u tockama
volumena 50x50x50

% Plotamo, ne morate ovako isto kao u primjeru, stavite razlicite presjeke,
% animacije, itd.
figure(1)
colormap jet

% Priprema trening podataka za t1 koristeći interpolirane podatke
X1 = grid_points;
Y1 = data;

% Priprema trening podataka za t2 koristeći interpolirane podatke
X2 = grid_points;
Y2 = datass;

% Prilagodimo Krigingov model koristeći Gaussovu regresiju procesa za t1
(A1203)

%Ovdje se loada tablica podaci iz excel-a, tu sam stavio odvojeno s A1203
%za t1, a dolje SS za t2, paziti na naziv stupca gdje je sila trenja, dolje
%je 'SS'. Metode (ljubièasto) možete mijenjati kao gore i probavati,
%uspoređivati, itd.
gprMdl_t1 = fitrgp(podacit1, 'A1203', "FitMethod","exact",
'PredictMethod','exact')

% Predvidimo vrijednosti za toèke mreže za t1
[predicted_values_t1, prediction_variance_t1] = predict(gprMdl_t1,
grid_points);

% Preoblikujemo rezultate u rešetku
predicted_values_grid_t1 = reshape(predicted_values_t1, size(X));
prediction_variance_grid_t1 = reshape(prediction_variance_t1, size(X));

% Prilagodimo Krigingov model koristeći Gaussovu regresiju procesa za t2 (SS)
%Ovdje isto kao za t1 gore, samo paziti naziv stupca za Ff, ovdje se zove

```

```

%'SS'.
gprMdl_t2 = fitrgp(podacit2, 'SS' , "FitMethod","exact",
'PredictMethod','exact')

% Predvidimo vrijednosti za točke mreže za t2
[predicted_values_t2, prediction_variance_t2] = predict(gprMdl_t2,
grid_points);

% Preoblikujemo rezultate u rešetku
predicted_values_grid_t2 = reshape(predicted_values_t2, size(X));
prediction_variance_grid_t2 = reshape(prediction_variance_t2, size(X));

% Plotamo rezultate za t1 (Al2O3)
figure;
colormap jet;
slice(X, Y, Z, predicted_values_grid_t1, [], [], (0.5*max(abs(x))));
title('Kriging Predictions for Al2O3');
xlabel('Temperatura, °C')
ylabel('Normalna sila, nN')
zlabel('Brzina, nm/s')
hClbr1 = colorbar;
set(hClbr1, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 14)
ylabel(hClbr1, 'Sila trenja Al2O3, nN')
shading interp;

% Plotamo varijancu predviđanja za t1 (Al2O3)
figure;
colormap jet;
slice(X, Y, Z, prediction_variance_grid_t1, [], [], (0.5*max(abs(x))));
title('Kriging Prediction Variance for Al2O3');
xlabel('Temperatura, °C')
ylabel('Normalna sila, nN')
zlabel('Brzina, nm/s')
hClbr1 = colorbar;
set(hClbr1, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 14)
ylabel(hClbr1, 'Sila trenja Al2O3, nN')
shading interp;

% Plotamo rezultate za t2 (SS)
figure;
colormap jet;

```

```

slice(X, Y, Z, predicted_values_grid_t2, [], [], (0.5*max(abs(x))));
title('Kriging Predictions for SS');
xlabel('Temperatura, °C')
ylabel('Normalna sila, nN')
zlabel('Brzina, nm/s')
hClbr1 = colorbar;
set(hClbr1, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 14)
ylabel(hClbr1, 'Sila trenja SS, nN')
shading interp;

% Plotamo varijancu predviđanja za t2 (SS)
figure;
colormap jet;
slice(X, Y, Z, prediction_variance_grid_t2, [], [], (0.5*max(abs(x))));
title('Kriging Prediction Variance for SS');
xlabel('Temperatura, °C')
ylabel('Normalna sila, nN')
zlabel('Brzina, nm/s');
hClbr1 = colorbar;
set(hClbr1, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 14)
ylabel(hClbr1, 'Sila trenja SS, nN')
shading interp;

```

### 9.3 Matlab kod za Voronoi

```

% Definiramo mrežu, tj. broj točaka u sve 3 dimenzije na koje ćemo
% interpolirati podatke
xmin=20; %min. temperatura, tj. x-osi
xmax=80; %max. temp., tj. x-osi
ymin=10; %min normalne sile, y-os
ymax=150; %max normalne sile
zmin=5;%min brzine, z-os
zmax=500;%max. brzine
n = 50; % n - broj točaka za interpolaciju po dimenziji, ne stavljati previše

% Extract data
T = podaci(:,2); % Temperatura od 20 do 80C
S = podaci(:,3); % Sila od 10 do 150nN
B = podaci(:,4); % Brzina od 5 do 500nm/s
t1 = podaci(:,5); % Trenje Al2O3

```

```

t2 = podaci{:,6}; % Trenje SS

% Normaliziramo silu i brzinu na nove raspone
S = (S - min(S)) / (max(S) - min(S)) * (ymax - ymin) + ymin;
B = (B - min(B)) / (max(B) - min(B)) * (zmax - zmin) + zmin;

numPoints = length(T); % broj toèaka

% Kombiniramo toèke u matricu
points = [T S B];

% Izraèunamo Delaunayjevu triangulaciju
DT = delaunayTriangulation(points);

% Izraèunamo Voronoijev dijagram
[V, C] = voronoiDiagram(DT);

% Plotamo toèke i Voronoijeve æelije za t1
figure;
scatter3(T, S, B, 40, t1, 'filled');
hold on;

cmap = jet(numPoints);
colormap(cmap);

% Plotamo Voronoijeve æelije za t1
for i = 1:length(C)
    if all(C{i} > 1)
        vert = V(C{i}, :);

        % Provjerimo nalaze li se vrhovi unutar granica mreže
        vert = vert(all(vert >= [xmin, ymin, zmin], 2) & all(vert <= [xmax,
ymax, zmax], 2), :);

        % Osiguramo da postoji dovoljno jedinstvenih vrhova za formiranje
konveksne ljeske
        if size(vert, 1) > 3 && numel(unique(vert, 'rows')) > 3
            K = convhull(vert);
            centroid = mean(vert, 1);
            cellCentroids(i, :) = centroid; % Store the centroid

```

```

        % Mapiramo težišnu z-koordinatu na kartu boja
        colorIndex = ceil((centroid(3) - zmin) / (zmax - zmin) *
(numPoints - 1)) + 1;
        trisurf(K, vert(:,1), vert(:,2), vert(:,3), 'FaceColor',
cmap(colorIndex, :), 'FaceAlpha', 0.5, 'EdgeColor', 'none');
        end
    end
end

% Plotamo rezultate za t1 (Al2O3)
xlabel('Temperatura, °C');
ylabel('Normalna sila, nN');
zlabel('Brzina, nm/s');

cb = colorbar;
cb.Label.String = 'Sila trenja Al2O3, nN';
title('3D Voronoi Dijagram za Al2O3');
set(gca, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 14);
xlim([xmin xmax]);
ylim([ymin ymax]);
zlim([zmin zmax]);
grid on;
hold off;

% Plotamo točke i Voronoijeve ćelije za t2
figure;
scatter3(T, S, B, 40, t2, 'filled');
hold on;

cmap = jet(numPoints);
colormap(cmap);

% Plotamo Voronoijeve ćelije za t2
for i = 1:length(C)
    if all(C{i} > 1)
        vert = V(C{i}, :);

        % Provjerimo nalaze li se vrhovi unutar granica mreže
        vert = vert(all(vert >= [xmin, ymin, zmin], 2) & all(vert <= [xmax,
ymax, zmax], 2), :);

```

```

    % Osiguramo da postoji dovoljno jedinstvenih vrhova za formiranje
konveksne ljuške
    if size(vert, 1) > 3 && numel(unique(vert, 'rows')) > 3
        K = convhull(vert);
        centroid = mean(vert, 1);
        cellCentroids(i, :) = centroid; % Store the centroid

        % Mapiramo težišnu z-koordinatu na kartu boja
        colorIndex = ceil((centroid(3) - zmin) / (zmax - zmin) *
(numPoints - 1)) + 1;
        trisurf(K, vert(:,1), vert(:,2), vert(:,3), 'FaceColor',
cmap(colorIndex, :), 'FaceAlpha', 0.5, 'EdgeColor', 'none');
    end
end
end

% Plotamo rezultate za t2 (SS)
xlabel('Temperatura, °C');
ylabel('Normalna sila, nN');
zlabel('Brzina, nm/s');

cb = colorbar;
cb.Label.String = 'Sila trenja SS, nN';
title('3D Voronoi Dijagram za SS');
set(gca, 'FontName', 'Times New Roman', 'FontSize', 14);
xlim([xmin xmax]);
ylim([ymin ymax]);
zlim([zmin zmax]);
grid on;
hold off;

```

## LITERATURA

- [1] Simpson, J. A.; Weiner, E. S. C.: „*The Oxford English Dictionary*“, Oxford, 1989.
- [2] Merlin predavanje: „Definicije, ciljevi i povijest vizualizacije“
- [3] S internet adrese <https://www.infoworld.com/article/2324026/scattered-data.html>
- [4] S internet adrese <https://www.simplilearn.com/data-analysis-methods-process-types-article>
- [5] Bhushan, B: „Introduction to Tribology“, 10. lipnja 2002.
- [6] S internet adrese <https://wiki.anton-paar.com/en/basics-of-tribology/>
- [7] Perčić, M: „Characterization of parameters influencing friction in the nanometric domain“, Rijeka, 2020.
- [8] S internet adrese <https://www.parksystems.com/index.php/park-spm-modes/91-standard-imaging-mode/222-lateral-force-microscopy-lfm>
- [9] Romijn, Jan-Willem (2014). "Philosophy of statistics". *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, s Interneta <https://plato.stanford.edu/entries/statistics/> 19. listopada 2021.
- [10] Holcomb, Z: „Fundamentals of Descriptive Statistics“, 1998
- [11] Hastie, T., Tibshirani, R., and Friedman, J., *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction*, Second Edition, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2009
- [12] Martić, K: „Interpolacija“, Osijek, 2021.
- [13] S internet adrese [https://www.zemris.fer.hr/predmeti/irg/predavanja/6\\_interpolacija\\_krivulje.pdf](https://www.zemris.fer.hr/predmeti/irg/predavanja/6_interpolacija_krivulje.pdf)
- [14] S internet adrese <https://www.geeksforgeeks.org/cubic-spline-interpolation/>
- [15] Vukoje, D: „Algoritmi za povećanje prostorne rezolucije video signala“, Osijek, 2016.
- [16] S internet adrese <https://desktop.arcgis.com/en/arcmap/10.3/tools/3d-analyst-toolbox/how-kriging-works.htm>
- [17] Okabe, A.; Boots, B.; Sugihara, K.; Chiu, S. N.: „Spatial Tessellations Concepts and Applications of Voronoi Diagrams“, Second Edition, 25. rujna 2009.
- [18] S internet adrese <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/scatteredinterpolant.html>

[19] S internet adrese <https://www.mathworks.com/help/stats/fitrgp.html>

[20] S internet adrese <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/delaunaytriangulation.html>

[21] Merlin predavanje: „O percepciji vizualnog“

[22] S internet adrese

[https://infocenter.informationbuilders.com/wf80/index.jsp?topic=%2Fpubdocs%2Fvisdis%2FDevStudio\\_VisualDiscovery%2Fsource%2Ftopic27.htm](https://infocenter.informationbuilders.com/wf80/index.jsp?topic=%2Fpubdocs%2Fvisdis%2FDevStudio_VisualDiscovery%2Fsource%2Ftopic27.htm)

[23] S internet adrese <https://www.displayr.com/learn-what-are-residuals/>

[24] S internet adrese <https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/contour.htm>

[25] S internet adrese <https://www.ibm.com/topics/linear-regression>



## POPIS SLIKA

Slika 2.1 Tribo-sustav [6].....	4
Slika 2.2 Shematski crtež položaja točke zrake na PSPD-u zbog (a) okomitog otklona konzole za topografsko snimanje i (b) bočne torzije konzole za LFM snimanje. [8] .....	6
Slika 2.3 Prikaz pomaka konzole i LFM signala uzrokovanog topografskim značajkama i kontrastom materijala. [8] .....	7
Slika 4.1 Linearna interpolacija [13].....	15
Slika 4.2 Interpolacija najbližeg susjeda [15] .....	16
Slika 4.3 Voronoi dijagram [17] .....	19
Slika 6.1 Raspodjela sirovih podataka u 3D prostoru za $Al_2O_3$ .....	25
Slika 6.2 Raspodjela sirovih podataka u 3D prostoru za SS .....	26
Slika 6.3 F-t graf za linearnu interpolaciju za $Al_2O_3$ .....	28
Slika 6.4 F-t graf reziduala za linearnu interpolaciju za $Al_2O_3$ .....	28
Slika 6.5 F-t konturni graf za linearnu interpolaciju za $Al_2O_3$ .....	29
Slika 6.6 F-t graf za linearnu interpolaciju za SS.....	30
Slika 6.7 F-t graf reziduala za linearnu interpolaciju za SS .....	30
Slika 6.8 F-t konturni graf za linearnu interpolaciju za SS .....	31
Slika 6.9 v-t graf za linearnu interpolaciju za $Al_2O_3$ .....	32
Slika 6.10 v-t graf reziduala za linearnu interpolaciju za $Al_2O_3$ .....	32
Slika 6.11 v-t konturni graf za linearnu interpolaciju za $Al_2O_3$ .....	33
Slika 6.12 F-v graf za linearnu interpolaciju za SS.....	34
Slika 6.13 v-t graf reziduala za linearnu interpolaciju za SS .....	34
Slika 6.14 v-t konturni graf za linearnu interpolaciju za SS .....	35
Slika 6.15 F-v graf za linearnu interpolaciju za $Al_2O_3$ .....	36
Slika 6.16 F-v graf reziduala za linearnu interpolaciju za $Al_2O_3$ .....	36
Slika 6.17 F-v konturni graf za linearnu interpolaciju za $Al_2O_3$ .....	37
Slika 6.18 F-v graf za linearnu interpolaciju za SS.....	38
Slika 6.19 F-v graf reziduala za linearnu interpolaciju za SS .....	38
Slika 6.20 F-v konturni graf za linearnu interpolaciju za SS .....	39
Slika 6.21 F-t graf za kubičnu interpolaciju za $Al_2O_3$ .....	40
Slika 6.22 F-t graf reziduala za kubičnu interpolaciju za $Al_2O_3$ .....	40
Slika 6.23 F-t konturni graf za kubičnu interpolaciju za $Al_2O_3$ .....	41
Slika 6.24 F-t graf za kubičnu interpolaciju za SS .....	42
Slika 6.25 F-t graf reziduala za kubičnu interpolaciju za SS .....	42
Slika 6.26 F-t konturni graf za kubičnu interpolaciju za SS .....	43
Slika 6.27 v-t graf za kubičnu interpolaciju za $Al_2O_3$ .....	44
Slika 6.28 v-t graf reziduala za kubičnu interpolaciju za $Al_2O_3$ .....	44
Slika 6.29 v-t konturni graf za kubičnu interpolaciju za $Al_2O_3$ .....	45
Slika 6.30 v-t graf za kubičnu interpolaciju za SS .....	46
Slika 6.31 v-t graf reziduala za kubičnu interpolaciju za SS .....	46
Slika 6.32 v-t konturni graf za kubičnu interpolaciju za SS.....	47
Slika 6.33 F-v graf za kubičnu interpolaciju za $Al_2O_3$ .....	48
Slika 6.34 F-v graf reziduala za kubičnu interpolaciju za $Al_2O_3$ .....	48
Slika 6.35 F-v konturni graf za kubičnu interpolaciju za $Al_2O_3$ .....	49
Slika 6.36 F-v graf za kubičnu interpolaciju za SS .....	50
Slika 6.37 F-v graf reziduala za kubičnu interpolaciju za SS .....	50

Slika 6.38 F-v konturni graf za kubičnu interpolaciju za SS .....	51
Slika 6.39 F-t graf za interpolaciju najbližeg susjeda za $Al_2O_3$ .....	52
Slika 6.40 F-t graf reziduala za interpolaciju najbližeg susjeda za $Al_2O_3$ .....	53
Slika 6.41 F-t konturni graf za interpolaciju najbližeg susjeda za $Al_2O_3$ .....	53
Slika 6.42 F-t graf za interpolaciju najbližeg susjeda za SS .....	54
Slika 6.43 F-t graf reziduala za interpolaciju najbližeg susjeda za SS.....	55
Slika 6.44 F-t konturni graf za interpolaciju najbližeg susjeda za SS.....	55
Slika 6.45 v-t graf za interpolaciju najbližeg susjeda za $Al_2O_3$ .....	56
Slika 6.46 v-t graf reziduala za interpolaciju najbližeg susjeda za $Al_2O_3$ .....	57
Slika 6.47 v-t konturni graf za interpolaciju najbližeg susjeda za $Al_2O_3$ .....	57
Slika 6.48 v-t graf za interpolaciju najbližeg susjeda za SS.....	58
Slika 6.49 v-t graf reziduala za interpolaciju najbližeg susjeda za SS .....	59
Slika 6.50 v-t konturni graf za interpolaciju najbližeg susjeda za SS .....	59
Slika 6.51 F-v graf za interpolaciju najbližeg susjeda za $Al_2O_3$ .....	60
Slika 6.52 F-v graf reziduala za interpolaciju najbližeg susjeda za $Al_2O_3$ .....	61
Slika 6.53 F-v konturni graf za interpolaciju najbližeg susjeda za $Al_2O_3$ .....	61
Slika 6.54 F-v graf za interpolaciju najbližeg susjeda za SS .....	62
Slika 6.55 F-v graf reziduala za interpolaciju najbližeg susjeda za SS .....	63
Slika 6.56 F-v konturni graf za interpolaciju najbližeg susjeda za SS .....	63
Slika 6.57 Odzivni graf za linearno regresijski model za $Al_2O_3$ .....	65
Slika 6.58 Odzivni graf za linearno regresijski model za SS .....	65
Slika 6.59 Graf validacije predviđenih u odnosu sa stvarnim odzivima za linearno regresijski model za $Al_2O_3$ .....	66
Slika 6.60 Graf validacije predviđenih u odnosu sa stvarnim odzivima za linearno regresijski model za SS .....	67
Slika 6.61 Grafovi validacije reziduala za stvarne odzive za linearno regresijski model za $Al_2O_3$ .....	68
Slika 6.62 Grafovi validacije reziduala za stvarne odzive za linearno regresijski model za SS ...	68
Slika 6.63 Grafovi validacije reziduala za predviđene odzive za linearno regresijski model za $Al_2O_3$ .....	69
Slika 6.64 Grafovi validacije reziduala za predviđene odzive za linearno regresijski model za SS .....	69
Slika 6.65 Odzivni graf za linearno interakcijski regresijski model za $Al_2O_3$ .....	72
Slika 6.66 Odzivni graf za linearno interakcijski regresijski model za SS .....	72
Slika 6.67 Graf validacije predviđenih u odnosu sa stvarnim odzivima za linearno interakcijski regresijski model za $Al_2O_3$ .....	73
Slika 6.68 Graf validacije predviđenih u odnosu sa stvarnim odzivima za linearno interakcijski regresijski model za SS .....	74
Slika 6.69 Grafovi validacije reziduala za stvarne odzive za linearno interakcijski regresijski model za $Al_2O_3$ .....	75
Slika 6.70 Grafovi validacije reziduala za stvarne odzive za linearno interakcijski regresijski model za SS .....	75
Slika 6.71 Grafovi validacije reziduala za predviđene odzive za linearno interakcijski regresijski model za $Al_2O_3$ .....	76
Slika 6.72 Grafovi validacije reziduala za predviđene odzive za linearno interakcijski regresijski model za SS.....	76
Slika 6.73 Odzivni graf za robusno linearni regresijski model za $Al_2O_3$ .....	79
Slika 6.74 Odzivni graf za robusno linearni regresijski model za SS .....	79

Slika 6.75 Graf validacije predviđenih u odnosu sa stvarnim odzivima za robusno linearni regresijski model za $Al_2O_3$ .....	80
Slika 6.76 Graf validacije predviđenih u odnosu sa stvarnim odzivima za robusno linearni regresijski model za SS .....	81
Slika 6.77 Grafovi validacije reziduala za stvarne odzive za robusno linearni regresijski model za $Al_2O_3$ .....	82
Slika 6.78 Grafovi validacije reziduala za stvarne odzive za robusno linearni regresijski model za SS .....	82
Slika 6.79 Grafovi validacije reziduala za predviđene odzive za robusno linearni regresijski model za $Al_2O_3$ .....	83
Slika 6.80 Grafovi validacije reziduala za predviđene odzive za robusno linearni regresijski model za SS.....	83
Slika 6.81 Odzivni graf za stepenasto linearni regresijski model za $Al_2O_3$ .....	86
Slika 6.82 Odzivni graf za stepenasto linearni regresijski model za SS .....	87
Slika 6.83 Graf validacije predviđenih u odnosu sa stvarnim odzivima za stepenasto linearni regresijski model za $Al_2O_3$ .....	88
Slika 6.84 Graf validacije predviđenih u odnosu sa stvarnim odzivima za stepenasto linearni regresijski model za SS .....	88
Slika 6.85 Grafovi validacije reziduala za stvarne odzive za stepenasto linearni regresijski model za $Al_2O_3$ .....	89
Slika 6.86 Grafovi validacije reziduala za stvarne odzive za stepenasto linearni regresijski model za SS.....	90
Slika 6.87 Grafovi validacije reziduala za predviđene odzive za stepenasto linearni regresijski model za $Al_2O_3$ .....	90
Slika 6.88 Grafovi validacije reziduala za predviđene odzive za stepenasto linearni regresijski model za SS.....	91
Slika 6.89 Višestruki presjeci podataka za $Al_2O_3$ .....	94
Slika 6.90 Višestruki presjeci podataka za SS .....	94
Slika 6.91 F-v presjeci podataka za $Al_2O_3$ .....	95
Slika 6.92 F-v presjeci podataka za SS .....	95
Slika 6.93 v-t presjeci podataka za $Al_2O_3$ .....	96
Slika 6.94 v-t presjeci podataka za SS .....	96
Slika 6.95 F-t presjeci podataka za $Al_2O_3$ .....	97
Slika 6.96 F-t presjeci podataka za SS .....	97
Slika 6.97 Graf predikcije Kriging metode za $Al_2O_3$ .....	98
Slika 6.98 Graf predikcije Kriging metode za SS .....	99
Slika 6.99 Graf predikcije varijanci Kriging metode za $Al_2O_3$ .....	100
Slika 6.100 Graf predikcije varijanci Kriging metode za SS .....	100
Slika 6.101 3D Voronoi dijagram za $Al_2O_3$ .....	101
Slika 6.102 3D Voronoi dijagram za SS .....	102

## POPIS TABLICA

Tablica 8.1 Rezultati metrika procjena za regresijske modele za aluminijski oksid.....	108
Tablica 8.2 Rezultati metrika procjena za regresijske modele za nehrdajući čelik.....	108