

# Prijenosne funkcije linearnih vremenski neovisnih sustava

---

Štemberga, Helena

Undergraduate thesis / Završni rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:190:362955>

Rights / Prava: [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-10**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Engineering](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI

**TEHNIČKI FAKULTET**

Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

**PRIJENOSNE FUNKCIJE LINEARNIH VREMENSKI  
NEOVISNIH SUSTAVA**

Rijeka, srpanj 2022.

Helena Štemberga  
0069086764

SVEUČILIŠTE U RIJECI

**TEHNIČKI FAKULTET**

Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

**PRIJENOSNE FUNKCIJE LINEARNIH VREMENSKI  
NEOVISNIH SUSTAVA**

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Dražić

Rijeka, srpanj 2022.

Helena Štemberga  
0069086764

Rijeka, 18. ožujka 2022.

Zavod: **Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike**  
Predmet: **Inženjerska matematika ET**  
Grana: **1.01.07 primijenjena matematika i matematičko modeliranje**

## ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Helena Štemberga (0069086764)**  
Studij: **Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike**

Zadatak: **Prijenosne funkcije linearnih vremenski neovisnih sustava // Transfer functions of linear time-independent systems**

### Opis zadatka:

U radu je potrebno precizno objasniti matematički tretman linearnih sustava s naglaskom na vremenski neovisne sustave. Također je potrebno definirati pojam Laplaceove transformacije i povezati ga s pojmom prijenosne funkcije opisanog sustava.

U drugom dijelu rada potrebno je opisati ponašanje sustava s obzirom na matematička svojstva prijenosne funkcije te klasificirati linearne vremenski neovisne sustave s obzirom na matematička svojstva prijenosne funkcije.

U završnom dijelu rada potrebno je pojam prijenosne funkcije staviti u kontekst primjene u elektrotehnici.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

*Helena Štemberga*

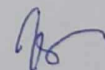
Zadatak uručen pristupniku: 21. ožujka 2022.

Mentor:



Doc. dr. sc. Ivan Dražić

Predsjednik povjerenstva za  
završni ispit:

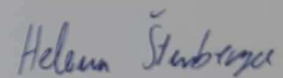


Prof. dr. sc. Viktor Sučić

## IZJAVA

Sukladno članku 8. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku preddiplomskih sveučilišnih studija/stručnih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 1. veljače 2020., izjavljujem da sam samostalno izradila završni rad prema zadatku preuzetom dana 21. ožujka 2022..

Rijeka, 06.07.2022.



---

Helena Štemberga

*Ovim putem zahvaljujem se mentoru doc. dr. sc. Ivanu Dražiću na pomoći, strpljenju i dostupnosti tijekom izrade ovog završnog rada.*

*Najveće hvala mojoj obitelji i dečku Alexu na podršci u svim trenucima dosadašnjeg obrazovanja.*

## Sadržaj

<b>1. Uvod</b>	<b>2</b>
<b>2. Laplaceove transformacije</b>	<b>4</b>
2.1. Laplaceove transformacije nekih važnijih funkcija . . . . .	6
2.1.1. Eksponecijalne funkcije . . . . .	6
2.1.2. Funkcije sinus i kosinus . . . . .	7
2.1.3. Heavisideova step funkcija . . . . .	7
2.1.4. Diracova delta funkcija . . . . .	8
2.2. Svojstva Laplaceove transformacije . . . . .	10
2.2.1. Teorem o slici derivacije . . . . .	10
2.2.2. Teorem o derivaciji slike . . . . .	11
2.2.3. Teorem o prigušenju (pomaku u slici) . . . . .	11
2.2.4. Teorem o slici integrala i teorem o integralu slike . . . . .	11
2.2.5. Teorem o slici konvolucije . . . . .	12
2.3. Primjena Laplaceove transformacije . . . . .	13
<b>3. Linearni sustavi i prijenosne funkcije</b>	<b>17</b>
<b>4. Polovi i nule prijenosne funkcije</b>	<b>21</b>
4.1. Određivanje polova i nula prijenosne funkcije . . . . .	22
4.2. Polovi i nule prijenosne funkcije u kontekstu stabilnosti sustava . . . . .	25
<b>5. Analiza rješenja diferencijalnih jednadžbi putem prijenosnih funkcija</b>	<b>27</b>
<b>6. Zaključak</b>	<b>39</b>
<b>Literatura</b>	<b>40</b>
<b>Sažetak i ključne riječi</b>	<b>41</b>
<b>Summary and key words</b>	<b>42</b>

## 1. Uvod

Integralne transformacije prvi put se spominju u 18. stoljeću u radovima Leonharda Eulera koji ih je smatrao ključnim alatom za rješavanje linearnih diferencijalnih jednačbi, što se kasnije pokazalo točnim. Naime, u današnje vrijeme Laplaceova integralna transformacija ključan je alat za rješavanje običnih linearnih diferencijalnih jednačbi s konstantnim koeficijentima, a može se primjenjivati i kod parcijalnih diferencijalnih jednačbi. U tu svrhu koriste se i druge integralne transformacije, kao što su Mellinova ili Fourierova, međutim u ovom ćemo se radu koncentrirati na primjenu isključivo Laplaceove transformacije.

Prema [1], Pierre-Simone Laplace bio je jedan od najvažnijih matematičara u 18. i 19. stoljeću. Rođen je u Francuskoj, a često je nazivan i francuskim Newtonom što dovoljno govori o njegovoj veličini. U skladu s tadašnjim običajima i kulturom od njega se očekivalo da karijeru gradi u crkvi ili u vojsci, stoga je sa 16 godina upisao studij teologije gdje otkriva svoju ljubav i talent prema matematici. Sa samo 19 godina napušta crkvu i putuje u Pariz gdje se od početka ističe svojim sposobnostima te počinje stvarati niz izvanrednih matematičkih radova, doprinoseći usput i raznim granama fizike i astronomije.



*Slika 1.1. Pierre Simon Laplace [1]*

Laplace se već u svojim ranim radovima bavio diferencijalnim jednačbama, njihovom primjenom i metodama rješavanja, a kroz svoj rad u području teorije vjerojatnosti često je koristio alat koji se kasnije razvio u integralnu transformaciju koju danas u njegovu čast zovemo Laplaceovom transformacijom.



Važnost Laplaceovih transformacija ogleda se u tome što se neke kompleksne matematičke operacije nakon transformacije značajno pojednostavljaju. Tako obične linearne diferencijalne jednačbe s konstantnim koeficijentima nakon što se na njih primjeni Laplaceova transformacija postaju algebarske jednačbe, a operacija konvolucije postaje obično množenje.

U ovom radu bavimo se upravo linearnim diferencijalnim jednačbama s konstantnim koeficijentima pomoću kojih se opisuju vremenski neovisni linearni sustavi i ono što će nas zanimati biti će forma te jednačbe nakon što se ona transformira putem Laplaceove transformacije. Pokazati ćemo da se takvi sustavi mogu opisati funkcijom koja se naziva prijenosna funkcija, a definirana je u Laplaceovoj ili  $s$  domeni.

Spomenuti sustavi uvelike se koriste kod modeliranja regulacijskih i električnih krugova, a prijenosne funkcije uvelike pojednostavljaju njihovu analizu.

U prvom dijelu rada bavit ćemo se definicijom i svojstvima Laplaceove transformacije koja su nam potrebna za definiranje prijenosne funkcije. Zatim ćemo prijenosnu funkciju promatrati kao racionalnu funkciju te definirati njene nule i polove. U nastavku ćemo pokazati kako se prijenosna funkcija, a samim time i promatrani sustav može opisati pomoću nula i polova, a na kraju rada ćemo tehnikom prijenosne funkcije analizirati niz diferencijalnih jednačbi s naglaskom na njihovu stabilnost, odnosno ponašanje odziva.

## 2. Laplaceove transformacije

Poznato je da integralne transformacije imaju široku primjenu u raznim područjima matematike, te služe kao alat za rješavanje realnih problema u području fizike, mehanike i elektrotehnike. Jedna od najčešće korištenih integralnih transformacija je Laplaceova transformacija, koju u ovom radu obrađujemo prema [3].

Laplaceova transformacija je linearni operator koji omogućuje preslikavanje funkcije u drugi skup funkcija što može olakšati rješavanje brojnih problema. Konkretno u području elektrotehnike, Laplaceova transformacija ima primjenu u prevođenju diferencijalnih jednačbi u algebarske čime se olakšava njihovo rješavanje. To posebno dolazi do izražaja kada se rješavaju diferencijalne jednačbe koje se ne mogu riješiti klasičnim metodama, primjerice ako uključuju nederivabilne funkcije s prekidima ili šiljcima. Kako se u struci rijetko pojavljuju savršeno glatki i neprekidni signali, Laplaceova transformacija pokazala se kao moćan alat za analizu i rješavanje problematike sa kojom se svakodnevno susrećemo.

Preslikavanje pomoću Laplaceove transformacije vrši se iz vremenske  $t$  domene u apstraktnu  $s$  domenu. Tom transformacijom deriviranje se uglavnom svodi na množenje te će diferencijalna jednačba postati algebarska. Algebarska jednačba rješava se vrlo jednostavno i za traženje rješenja polaznog problema samo je potrebno rješenje dobivene algebarske jednačbe inverznom Laplaceovom transformacijom iz  $s$  domene vratiti u  $t$  domenu.

Laplaceove transformacije našle su široku primjenu u teoriji signala i sustava te analizi električnih mreža i regulacijskih sustava. Upravo kod regulacijskih sustava značajnu ulogu imaju prijenosne funkcije koje se definiraju kao omjer Laplaceove transformacije izlaza i Laplaceove transformacije ulaza sustava uz početne uvjete jednake nuli što će detaljnije biti objašnjeno u nadolazećim poglavljima.

Sve integralne transformacije su izrazi oblika:

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s, t)f(t)dt, \quad (2.1)$$

gdje se funkcija  $f(t)$  naziva originalnom funkcijom sa područjem definicije koje se naziva područje originala. Funkcija  $F(s)$  se naziva slikom od  $f(t)$  ili njezinim transformatom. Funkciju  $K(s, t)$  nazivamo jezgrom intergalne transformacije te se razlikuje za različite transformacije.

Budući je svaka integralna transformacija u suštini integral, a integral je linearni operator, iz definicije integralne transformacije odmah možemo zaključiti njenu linearnost, tj. vrijedi

**Teorem 2.1** (Linearnost integralne transformacije). *Neka su zadane funkcije  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  te neka*

je  $\mathcal{T}$  proizvoljna integralna transformacija. Vrijedi:

$$\mathcal{T}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{T}\{f(t)\} + b\mathcal{T}\{g(t)\}, \quad (2.2)$$

pri čemu su  $a, b \in \mathbb{C}$  proizvoljne konstante.

Svaka poznata transformacija razlikuje se u jezgri i definiranim granicama integracije. Kod Laplaceove transformacije granice integrala iznose  $\alpha = 0$  i  $\beta = \infty$ , dok je jezgra transformacije definirana kao  $K(s, t) = e^{-st}$ . Simbol Laplaceove transformacije, odnosno preslikavanja je  $\mathcal{L}$ .

Laplaceova transformacija definirana je prema tome integralom:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (2.3)$$

Kako bi transformaciju mogli provesti, integral pod (2.3) mora konvergirati, odnosno mora biti konačan. To znači da funkcija  $f(t)$  mora biti integrabilna na segmentu  $[0, A]$ , za sve  $A > 0$  i da limes

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} f(t) dt \quad (2.4)$$

ima konačnu vrijednost.

Spomenuti uvjet osigurava nam eksponencijalni rast funkcije. Za funkciju ćemo reći da je eksponencijalnog rasta ako se može omeđiti s nekom eksponencijalnom funkcijom. Primjerice za funkciju  $f(t) = e^{t^2}$  nije moguće provesti Laplaceovu transformaciju jer nije eksponencijalnog rasta, odnosno nije ju moguće omeđiti s eksponencijalnom funkcijom. Istaknimo da uvjet eksponencijalnog rasta za elektrotehniku nije ograničavajući jer se u struci uglavnom javljaju funkcije koje su kombinacije polinoma i trigonometrijskih funkcija, a to su sve funkcije eksponencijalnog rasta.

Za izračun Laplaceovih transformacija elementarnih funkcija biti će nam potrebno svojstvo iskazano u sljedećem teoremu.

**Teorem 2.2** (Teorem sličnosti). *Neka je  $f$  funkcija koja zadovoljava uvjete za postojanje Laplaceove transformacije. Tada za realnu konstantu  $\omega > 0$  vrijedi*

$$\mathcal{L}\{f(\omega t)\} = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{s}{\omega}\right). \quad (2.5)$$

*Dokaz.* Po definiciji Laplaceove transformacije imamo

$$\mathcal{L}\{f(\omega t)\} = \int_0^{\infty} f(\omega t) e^{-st} dt. \quad (2.6)$$

Uvođenjem supstitucije  $\omega t = u$ , tj.  $\omega dt = du$  dobivamo

$$\mathcal{L}\{f(\omega t)\} = \int_0^{\infty} f(u) e^{-\frac{su}{\omega}} \frac{du}{\omega} = \frac{1}{\omega} \int_0^{\infty} f(u) e^{-u \frac{s}{\omega}} du = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{s}{\omega}\right). \quad (2.7)$$

□

## 2.1. Laplaceove transformacije nekih važnijih funkcija

U ovom će poglavlju biti izvedene transformacije funkcija koje se često koriste u struci, kao što su elementarne funkcije, te Heavisideova step funkcija i Diracova delta funkcija prema [4] i [5]. Laplaceove transformacije najčešće korištenih funkcija sistematizirane su u tablici 2.1.

Tablica 2.1. Tablica Laplaceovih transformacija

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$u(t) = 1$	$\frac{1}{s}$	$e^{\pm at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s \mp a)^2 + \omega^2}$	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$e^{\pm at}$	$\frac{1}{s \mp a}$	$e^{\pm at} \cos \omega t$	$\frac{s \mp a}{(s \mp a)^2 + \omega^2}$	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$e^{\pm at} \sinh \omega t$	$\frac{\omega}{(s \mp a)^2 - \omega^2}$	$t \sinh \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 - \omega^2)^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$e^{\pm at} \cosh \omega t$	$\frac{s \mp a}{(s \mp a)^2 - \omega^2}$	$t \cosh \omega t$	$\frac{s^2 + \omega^2}{(s^2 - \omega^2)^2}$
$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$	$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\delta(t)$	1
$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$	$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\delta(t-a)$	$e^{-as}$

### 2.1.1. Ekspencijalne funkcije

Odredimo sada Laplaceovu transformaciju eksponencijalne funkcije  $t \mapsto e^t$ , koja je neprekidna i očito eksponencijalnog rasta te njena transformacija postoji. Imamo:

$$\mathcal{L}\{e^t\} = \int_0^{\infty} e^t e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(1-s)t} dt = \frac{1}{1-s} e^{(1-s)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-1}, \quad (2.8)$$

za  $s > 1$  (ili ispravnije  $Re(s) > 1$ ).

Za Laplaceovu transformaciju funkcije  $t \mapsto e^{-t}$  imamo

$$\mathcal{L}\{e^{-t}\} = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(1+s)t} dt = \frac{-1}{1+s} e^{-(1+s)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+1}, \quad (2.9)$$

za  $s > -1$  (ili ispravnije  $Re(s) > -1$ ).

### 2.1.2. Funkcije sinus i kosinus

U sklopu ovog poglavlja ćemo odrediti Laplaceove transformacije funkcija kosinus i sinus. Za to će nam trebati definicije sinusa i kosinusa u kompleksnom području, tj.

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \quad (2.10)$$

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}). \quad (2.11)$$

Za primjenu ovih formula potrebne su nam Laplaceove transformacije iz sljedećeg primjera:

**Primjer 2.1.** *Odredimo Laplaceove transformacije funkcija  $t \mapsto e^{it}$  i  $t \mapsto e^{-it}$ . Imamo:*

$$\mathcal{L}\{e^{it}\} = \int_0^{\infty} e^{it} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(i-s)t} dt = \frac{1}{i-s} e^{(i-s)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-i}. \quad (2.12)$$

Ovdje smo koristili činjenicu da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(i-s)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-Re(s)t} e^{(t-Im(s))i} = 0, \quad (2.13)$$

ako je  $Re(s) > 0$ , budući je  $|e^{(t-Im(s))i}|$  ograničeno, što je ujedno i najveća moguća  $s$ -domena koju Laplaceova transformacija dozvoljava. Analogno se dobiva:

$$\mathcal{L}\{e^{-it}\} = \frac{1}{s+i}. \quad (2.14)$$

Sada smo u mogućnosti odrediti Laplaceove transformacije funkcija kosinus i sinus.

Korištenjem definicije kompleksnog kosinusa, linearnosti transformacije te teorema o sličnosti, dobivamo:

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{i\omega t}\} + \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{-i\omega t}\} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \quad (2.15)$$

Analognim postupkom dobivamo:

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (2.16)$$

### 2.1.3. Heavisideova step funkcija

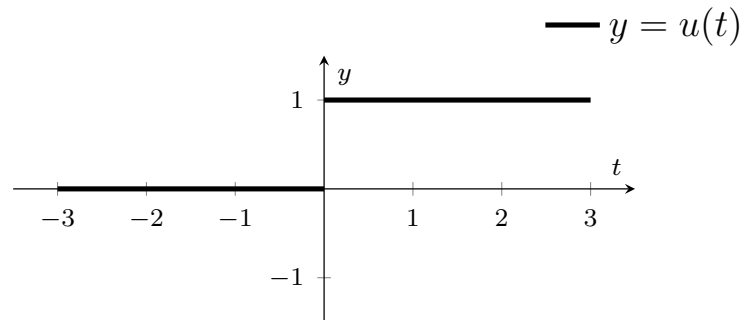
Heavisideova funkcija definirana je izrazom

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0, \end{cases} \quad (2.17)$$

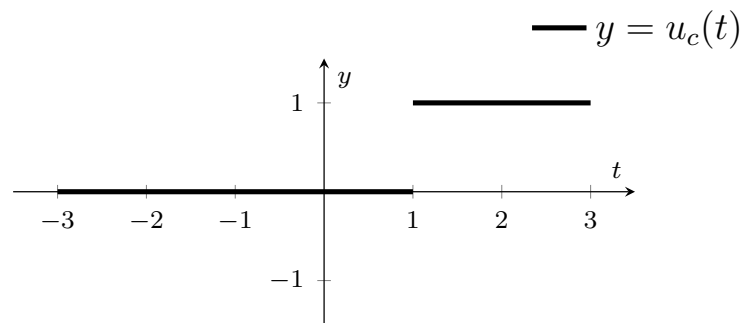
odnosno za slučaj kada skok nije u ishodištu izrazom

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ 1, & t \geq c. \end{cases} \quad (2.18)$$

Grafički prikazi Heavisideove funkcije  $u(t)$  te funkcije  $u_c(t)$  prikazani su na sljedećim slikama.



Slika 2.1. Grafički prikaz Heavisideove funkcije



Slika 2.2. Grafički prikaz pomaknute Heavisideove funkcije za  $c = 1$

Odredimo sada Laplaceovu transformaciju Heavisideove funkcije. Krećemo od definicije Laplaceove transformacije u koju uvrštavamo funkciju  $u(t)$ . Slijedi:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t) dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} = \frac{e^{-\infty}}{-s} - \frac{e^0}{-s} = \frac{1}{s}, \quad (2.19)$$

pri čemu smo iskoristili svojstvo da je  $e^{-\infty} = 0$ .

Laplaceovu transformaciju funkcije  $u_c(t)$  dobivamo na isti način:

$$\mathcal{L}\{u_c(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u_c(t) dt = \int_c^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_c^{\infty} = \frac{e^{-\infty}}{-s} - \frac{e^{-cs}}{-s} = \frac{e^{-cs}}{s}. \quad (2.20)$$

#### 2.1.4. Diracova delta funkcija

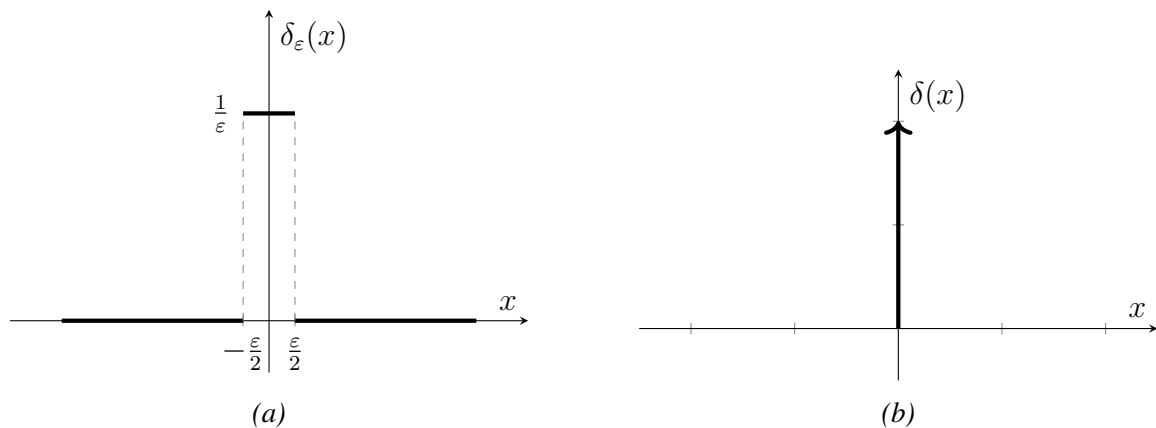
Diracova delta funkcija prikazana na slici 2.3b u elektrotehnici predstavlja impulsni signal. Takvi su signali česti i služe primjerice kao signali kojima se uklapaju određene poluvodičke kom-

ponente. Najpoznatiji primjer su tranzistori koji se uklapaju pomoću strujnih impulsa. Odnosno, kada na tranzistor dovedemo neki strujni impuls za koji je on građen, tranzistor počinje voditi, od stanja ne vođenja prelazi u stanje vođenja. Diracova delta funkcija u svakoj točki osim u 0 iznosi 0, dok u 0 iznosi  $\infty$ . Međutim, ona također mora zadovoljavati sljedeće svojstvo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (2.21)$$

Kako ovaj integral predstavlja površinu, a grafički prikaz delta funkcije sugerira da ispod nje nema površine, na delta funkciju ne možemo gledati kao na funkciju u klasičnom smislu. Upravo stoga, u matematičkoj analizi puno se češće promatra aproksimacija delta funkcije prikazana na slici 2.3a koja je funkcija u klasičnom smislu. Jasno je da vrijedi

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x). \quad (2.22)$$



Slika 2.3. Grafički prikazi Diracove  $\delta$  funkcije i njene aproksimacije

Odredimo sada Laplaceovu transformaciju Diracove delta funkcije tako što ćemo najprije odrediti Laplaceovu transformaciju njene aproksimacije. Tako imamo:

$$\mathcal{L}\{\delta_\varepsilon(t-a)\} = \int_0^{\infty} \delta_\varepsilon(t-a) e^{-st} dt = \int_{a-\frac{\varepsilon}{2}}^{a+\frac{\varepsilon}{2}} \frac{1}{\varepsilon} e^{-st} dt = \frac{e^{-s(a-\frac{\varepsilon}{2})} - e^{-s(a+\frac{\varepsilon}{2})}}{\varepsilon s}. \quad (2.23)$$

Sada primjenom L'Hospitalova pravila dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\delta(t-a)\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}\{\delta_\varepsilon(t-a)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-s(a-\frac{\varepsilon}{2})} - e^{-s(a+\frac{\varepsilon}{2})}}{\varepsilon s} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left( e^{-s(a-\frac{\varepsilon}{2})} + e^{-s(a+\frac{\varepsilon}{2})} \right) = e^{-as}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Uvrštavanjem  $a = 0$  u gornji izraz dobivamo da je

$$\mathcal{L}\{u(t)\delta(t-a)\} = 1, \quad (2.25)$$

što je i trebalo pokazati.

## 2.2. Svojstva Laplaceove transformacije

Laplaceova transformacija moćan je matematički aparat za čije uspješno korištenje treba poznavati niz svojstava koja navodimo u ovom poglavlju.

### 2.2.1. Teorem o slici derivacije

Teorem o slici derivacije, jedan je od važnijih teorema o Laplaceovoj transformaciji koji nam govori da se linearne diferencijalne jednačbe s konstantnim koeficijentima Laplaceovom transformacijom prevode u algebarske jednačbe.

**Teorem 2.3.** *Ako je  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , tada je*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f(0) + sF(s). \quad (2.26)$$

*Dokaz.* Iz definicije Laplaceove transformacije slijedi

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt. \quad (2.27)$$

Sada ćemo primijeniti formulu parcijalne integracije uzimajući

$$u = e^{-st}, \quad dv = f'(t)dt \quad (2.28)$$

odnosno

$$du = -se^{-st} dt, \quad v = f(t). \quad (2.29)$$

Dobivamo:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \underbrace{e^{-st}f(t)}_{=-f(0)} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = -f(0) + sF(s), \quad (2.30)$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Ovo svojstvo se može i generalizirati na derivaciju  $n$ -tog reda što je napravljeno u idućem teoremu kojeg navodimo bez dokaza.

**Teorem 2.4** (Teorem o slici derivacije  $n$ -tog reda). *Ako je  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , tada je*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0). \quad (2.31)$$



## 2.2.2. Teorem o derivaciji slike

**Teorem 2.5.** *Ako je  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , tada je*

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.32)$$

*Dokaz.* Deriviramo li funkciju

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.33)$$

dobivamo

$$F'(s) = - \int_0^{\infty} t f(t) e^{-st} dt = -\mathcal{L}\{t f(t)\}. \quad (2.34)$$

Daljnim deriviranjem ovog izraza odmah dobivamo traženu tvrdnju.  $\square$

Ovo svojstvo se koristi kod određivanja Laplaceove transformacije potencija, tj. funkcija oblika  $t \mapsto t^n$ .

## 2.2.3. Teorem o prigušenju (pomaku u slici)

**Teorem 2.6.** *Neka je  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  i  $a \in \mathbb{R}$ . Tada je*

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a). \quad (2.35)$$

U primjenama se često koriste funkcije s prigušenjem. Tako možemo zaključiti da vrijedi sljedeća jednakost:

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cos \omega t\} = \frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}. \quad (2.36)$$

## 2.2.4. Teorem o slici integrala i teorem o integralu slike

U matematičkim izrazima koji uključuju funkcije zadane putem integrala često se koriste ove dva teorema.

**Teorem 2.7.** *Ako je  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , tada je*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}. \quad (2.37)$$

**Teorem 2.8.** *Ako je  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , tada je*

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(s) ds \quad (2.38)$$

*uz uvjet da integral s desne strane jednakosti konvergira.*

### 2.2.5. Teorem o slici konvolucije

Konvolucija predstavlja matematičku operaciju koja ima primjenu u opisanju

fizikalnih sustava kod kojih ponašanje sustava ne ovisi samo o stanju sustava u trenutku  $t$ , već i o stanju sustava prije tog trenutka. Definira se kao:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau. \quad (2.39)$$

S obzirom da je konvolucija definirana pomoću integrala, mora vrijedi da su funkcije  $f$  i  $g$  integrabilne, a zbog uvjeta egzistencije Laplaceove transformacije moraju biti i eksponencijalnog rasta. Prema definiciji konvolucije, tada je i funkcija  $f * g$  integrabilna i eksponencijalnog rasta.

Za operaciju konvolucije vrijede neka uobičajna svojstva kao što su:

- Komutativnost

$$f * g = g * f, \quad (2.40)$$

- Distributivnost

$$f * (g + h) = f * g + f * h, \quad (2.41)$$

- Asocijativnost

$$(f * g) * h = f * (g * h). \quad (2.42)$$

Laplaceova transformacije konvolucije dana je sljedećim teoremom koji kaže da konvolucija u originalu odgovara umnošku u slici.

**Teorem 2.9.** *Neka je  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  i  $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ . Tada je*

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s) \cdot G(s). \quad (2.43)$$

*Dokaz.* Iz definicije Laplaceove transformacije dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} &= \int_0^{\infty} (f(t) * g(t))e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau e^{-st} dt = \\ & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)u(t - \tau)d\tau e^{-st} dt. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Promjenom poretka integracije slijedi

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(t-\tau)u(t-\tau)e^{-st}dt f(\tau)d\tau = \int_0^{\infty} \mathcal{L}\{g(t-\tau)u(t-\tau)\}f(\tau)d\tau =$$

$$\int_0^{\infty} G(s)e^{-\tau s}f(\tau)d\tau = G(s) \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-\tau s}d\tau = G(s) \cdot F(s). \quad (2.45)$$

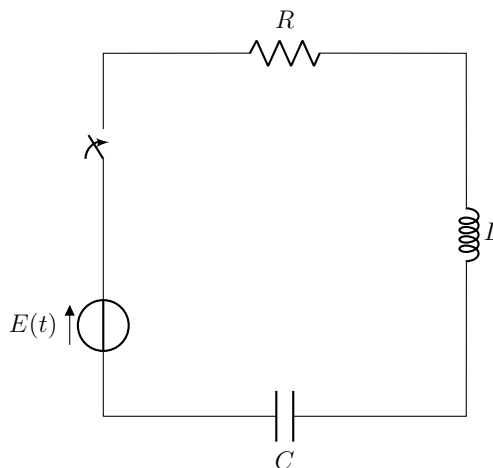
□

### 2.3. Primjena Laplaceove transformacije

Kako bi shvatili važnost primjene Laplaceove transformacije u elektrotehnici, pokazati ćemo njihovu primjenu na primjeru jednog strujnog kruga. Primjer je preuzet iz [6].

**Primjer 2.2.** Zadan je RLC krug čija je shema prikazana na slici 2.4 uz parametre  $R = 11 \Omega$ ,  $L = 0.1 H$  i  $C = 10^{-2} F$ . Pretpostavit ćemo da kondenzator nije prethodno nabijen te da kroz zavojnicu prije trenutka  $t = 0$  nije tekla nikakva struja. Drugim riječima, pretpostavljamo da početne uvjete  $i(0) = 0$  i  $i'(0) = 0$ . Za zadani RLC krug potrebno je izračunati odziv (struju), ako je ulazni napon modeliran funkcijom:

$$E(t) = \begin{cases} 100 \sin(400t), & 0 \leq t \leq 2\pi \\ 0, & t > 2\pi \end{cases}. \quad (2.46)$$



Slika 2.4. RLC krug

U zatvorenoj petlji, prema II. Kirchoffovom zakonu, napon izvora jednak je algebarskom zbroju padova napona. Kada zatvorimo sklopku u trenutku  $t = 0$ , kroz strujni krug počinje teći struja i ona stvara padove napona na pojedinim elementima.

Kako bi mogli napisati diferencijalnu jednadžbu II. Kirchoffovog zakona za zadani RLC krug najprije moramo definirati kako se stvara pad napona na pojedinim elementima prema [7].

Iz Ohmovog zakona vidi se kako je pad napona na otporniku otpora  $R$  proporcionalan struji koja kroz njega teče, odnosno vrijedi:

$$U = I \cdot R. \quad (2.47)$$

Zavojnica induktiviteta  $L$  ponaša se kao spremnik energije. Drugim riječima pad napona na zavojnici ne nastaje na jednak način kao na otporniku. Struja kroz zavojnicu ne raste trenutno, već mora proteći neko vrijeme prijelazne pojave kako bi konstantna struja tekla kroz zavojnicu, a prijelazna pojava je opisana eksponencijalnom funkcijom. Diferencijalna jednadžba pada napona na zavojnici glasi:

$$u_l(t) = L \cdot \frac{di}{dt}, \quad (2.48)$$

što nam govori kako pad napona na zavojnici ne ovisi o struji koja kroz nju prolazi, već o brzini promjene struje koja kroz nju teče.

Kondenzator se također ponaša kao spremnik energije, međutim na kondenzatoru napon ne dostiže trenutno maksimalnu vrijednost pada napona, već se napon na kondenzatoru mijenja po eksponencijalnoj funkciji i nakon završetka prijelazne pojave dostiže konstantnu vrijednost. Integralna jednadžba koja opisuje pad napona na kondenzatoru glasi:

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt, \quad (2.49)$$

a kako je:

$$i(t) = \frac{dq}{dt}, \quad (2.50)$$

vrijedi da je

$$q(t) = \int_0^t i(t) dt. \quad (2.51)$$

Konačno dobivamo da je pad napona na kondenzatoru jednak:

$$u_c(t) = \frac{q(t)}{C}. \quad (2.52)$$

Nakon analize pojedinih elemenata, sada možemo zbrojiti padove napona te primjeniti II. Kifchov zakon:

$$L \cdot \frac{di(t)}{dt} + I \cdot R + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = E(t). \quad (2.53)$$

Ova diferencijalno-integralna jednadžba je kompleksna za rješavanje klasičnim matematičkim metodama i na nju primjenjujemo tehniku Laplaceove transformacije, tj. teorem o slici integrala i teorem o slici derivacije iz prošlog poglavlja. Dobivamo:

$$L \cdot (-i(0) + sI(s)) + I(s) \cdot R + \frac{1}{C} \cdot \frac{I(s)}{s} = E(s), \quad (2.54)$$

pri čemu je  $I(s) = \mathcal{L}\{i(t)\}$  i  $E(s) = \mathcal{L}\{E(t)\}$ .

Uvrštavanjem početnim uvjeta, jednadžba poprima oblik:

$$L \cdot sI(s) + I(s) \cdot R + \frac{1}{C} \cdot \frac{I(s)}{s} = E(s), \quad (2.55)$$

odnosno

$$I(s) \left( Ls + R + \frac{1}{Cs} \right) = E(s). \quad (2.56)$$

Sada je

$$I(s) \left( 0.1s + 11 + \frac{1}{0.01s} \right) = \frac{100 \cdot 400s}{s^2 + 400^2} \left( \frac{1}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s} \right). \quad (2.57)$$

Pomnožimo li čitavu jednadžbu s  $10s$  dobiva se:

$$I(s)(s^2 + 110s + 1000) = \frac{1000 \cdot 400s}{s^2 + 400^2} \left( \frac{1}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s} \right), \quad (2.58)$$

odnosno vodeći računa da je  $s^2 + 110s + 1000 = (s + 10)(s + 100)$  izraz poprima oblik:

$$I(s)(s + 10)(s + 100) = 1000 \cdot 400 \left( \frac{s}{s^2 + 400^2} - \frac{se^{-2\pi s}}{s^2 + 400^2} \right), \quad (2.59)$$

$$I(s) = \frac{1000 \cdot 400}{(s + 10)(s + 100)} \frac{s}{s^2 + 400^2} - \frac{1000 \cdot 400}{(s + 10)(s + 100)} \frac{se^{-2\pi s}}{s^2 + 400^2}. \quad (2.60)$$

Uzmimo da vrijedi  $I(s) = I_1(s) - I_2(s)$ . Prvi razlomak možemo rastaviti na parcijalne razlomke, pri čemu dobivamo oblik:

$$I_1(s) = \frac{400000s}{(s + 10)(s + 100)(s^2 + 400^2)} = \frac{A}{s + 10} + \frac{B}{s + 100} + \frac{Ds + K}{s^2 + 400^2}. \quad (2.61)$$

Sređivanjem izraza dobiva se:

$$400000s = A(s + 100)(s^2 + 400^2) + B(s + 10)(s^2 + 400^2) + (Ds + K)(s + 10)(s + 100). \quad (2.62)$$

Za određivanje koeficijenta  $A$  i  $B$ , možemo postaviti vrijednost  $s = -10$  odnosno  $s = -100$ , pa dobivamo:

$$-4000000 = 90 \cdot (10^2 + 400^2)A, \quad A = -0.27760, \quad (2.63)$$

$$-40000000 = -90 \cdot (100^2 + 400^2)B, \quad B = 2.6144. \quad (2.64)$$

Uspoređivanjem koeficijenta uz  $s^3$  slijedi:

$$0 = A + B + D, \quad D = -2.3368, \quad (2.65)$$

dok uspoređivanjem koeficijenta uz  $s^2$  dobivamo

$$0 = 100A + 10B + 110D + K, \quad K = 258.66 = 0.6467 \cdot 400. \quad (2.66)$$

Sada u izraz za  $I_1(s)$  uvrštavamo dobivene koeficijente:

$$I_1(s) = -\frac{0.27760}{s+10} + \frac{2.6144}{s+100} - \frac{2.3368}{s^2+400^2} + \frac{0.6467 \cdot 400}{s^2+400^2}. \quad (2.67)$$

Izraz čini zbroj pribrojnika čije su Laplaceove transformacije tablične, pa se dobiva:

$$i_1(t) = -0.27760e^{-10t} + 2.6144e^{-100t} - 2.3368 \cos(400t) + 0.6467 \sin(400t). \quad (2.68)$$

Struja  $i(t)$  jednaka je struji  $i_1(t)$  na intervalu  $0 < t < 2\pi$ .

Uočimo da se  $I_2(s)$  razlikuje od  $I_1(s)$  samo za  $e^{-2\pi s}$ , a kako je  $\cos 400(t - 2\pi) = \cos(400t)$  i  $\sin 400(t - 2\pi) = \sin(400t)$ ,  $i_2(t) = 0$  za  $0 < t < 2\pi$ .

Za  $t > 2\pi$  dobiva se:

$$i_2(t) = -0.27760e^{-10(t-2\pi)} + 2.6144e^{-100(t-2\pi)} - 2.3368 \cos(400t) + 0.6467 \sin(400t). \quad (2.69)$$

Struja  $i(t)$  za  $t > 2\pi$  je  $i(t) = i_1(t) - i_2(t)$ , pa se dobiva:

$$i(t) = -0.27760(e^{-10t} - e^{-10(t-2\pi)}) + 2.6144(e^{-100t} - e^{-100(t-2\pi)}). \quad (2.70)$$

### 3. Linearni sustavi i prijenosne funkcije

Prema [8], sustav se može definirati kao kombinacija fizikalnih komponenti i/ili algoritama pomoću kojih se odvija proces koji rezultira transformacijom signala. Svaki sustav ima svoj ulaz i izlaz, gdje se ulaz često naziva pobuda, a izlaz iz sustava odziv.

Sustave možemo djeliti na kauzalne i nekauzalne, odnosno sustav će biti kauzalan ako trenutni izlaz ovisi samo o sadašnjim i/ili prošlim vrijednostima ulaza, a ne o budućim vrijednostima ulaza, te nema odziva prije nego što se sustav pobudi. Svi sustavi u praksi koji rade u realnom vremenu su kauzalni sustavi.

Također razlikujemo vremenski promjenjive i nepromjenjive sustave, odnosno sustav će biti vremenski nepromjenjiv kada se ulazno-izlazna relacija ne mijenja s vremenom. Tada vrijedi:

$$\forall x(t), \forall T : Sx(t - T) = y(t - T), \quad (3.1)$$

pri čemu je  $t$  vremenska varijabla,  $T$  vremenski trenutak,  $x(t)$  pobuda,  $y(t)$  odziv, a  $S$  označava ulazno-izlaznu relaciju.

Za sustav ćemo reći da je linearan ako vrijedi sljedeća relacija:

$$x(t) = \sum_{k=1}^N a_k x_k(t) \longrightarrow y(t) = \sum_{k=1}^N a_k y_k(t), \quad (3.2)$$

pri čemu  $x(t)$  označava pobudu, a  $y(t)$  pripadni odziv, odnosno pobudi  $x_i(t)$  odgovara odziv  $y_i(t)$ , dok su  $a_i$  konstante.

Linearni sustavi mogu se prikazati diferencijalnim jednadžbama, a sustave koji su linearni i vremenski nepromjenjivi zovemo LVN sustavima, te se s njima često susrećemo u elektrotehnici.

**Primjer 3.1.** *Promotrimo linearni sustav koji opisuje mehanički sustav. Kod tog sustava pobuda bi bila vanjska sila ( $x(t) = F(t)$ ), a odziv bi bio pomak ( $y(t)$ ). Odziv i pobuda povezani su diferencijalnom jednadžbom*

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = x(t), \quad (3.3)$$

s početnim uvjetima  $y(t) = y'(t) = 0$ , pri čemu su  $m$ ,  $c$  i  $k$  konstante. Laplaceovom transformacijom dobivamo

$$ms^2Y(s) + csY(s) + kY(s) = X(s), \quad (3.4)$$

odnosno

$$Y(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} X(s) \quad (3.5)$$

gdje funkciju

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad (3.6)$$

zovemo prijenosna funkcija. Prijenosna funkcija u potpunosti definira opisani mehanički sustav, odnosno njome su povezani pobuda i odziv u s domeni.

U prethodnom primjeru vidjeli smo kako sustave možemo opisati pomoću prijenosnih funkcija i upravo su prijenosne funkcije i njihova svojstva tema ovog rada.

Uvedimo sada strogu matematičku definiciju prijenosne funkcije i pokažimo da je njima sustav dobro definiran. Za to će nam biti potreban sljedeći niz matematičkih rezultata koje smo već spomenuli, no ovdje ih ponavljamo radi lakšeg praćenja.

**Definicija 3.1.** Generaliziranu funkciju  $\delta(x)$  za koju vrijedi

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}, \quad (3.7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (3.8)$$

zovemo **Diracova  $\delta$  funkcija**.

**Definicija 3.2.** Neka su  $f$  i  $g$  dvije integrabilne funkcije. Njihova **konvolucija**, u oznaci  $f * g$ , definirana je s:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)dy. \quad (3.9)$$

**Teorem 3.1.** Neka je  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  i  $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ . Tada je

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s) \cdot G(s). \quad (3.10)$$

**Teorem 3.2** (Svojstvo prosijavanja). Neka je  $f$  integrabilna funkcija. Za Diracovu  $\delta$  funkciju vrijedi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - a)dx = f(a). \quad (3.11)$$

Teorem kaže da na Diracovu  $\delta$  funkciju možemo gledati kao na sito koje nam "izvlači" neku konkretnu funkcijsku vrijednost, odnosno ako bi na funkciju gledali kao na vremenski signal, na ovaj bi način mogli doći do vrijednosti signala u bilo kojem trenutku  $t = a$ .

Zapišimo sada svojstvo prosijavanja korištenjem definicije konvolucije. Vrijedi:

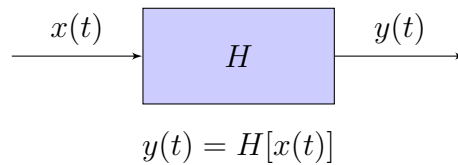
$$(\delta * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)f(t - \tau)d\tau = f(t), \quad (3.12)$$

pa se svojstvo prosijavanja može kraće zapisati sa:

$$(\delta * f)(t) = (f * \delta)(t) = f(t). \quad (3.13)$$



Bilo koji sustav shematski možemo prikazati putem bloka u vremenskoj domeni kao na slici 3.1. Na toj slici  $x(t)$  označava pobudu,  $y(t)$  odziv dok  $H$  predstavlja ulazno-izlaznu relaciju.



Slika 3.1. Shematski prikaz sustava

Pretpostaviti ćemo da je sustav sa slike 3.1 linearan i vremenski invarijantan, tj. da vrijede svojstva:

$$H [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha H [x_1(t)] + \beta H [x_2(t)]. \quad (3.14)$$

$$H [x(t + \sigma)] = y(t + \sigma), \quad (3.15)$$

pri čemu su  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\sigma$  realni brojevi.

Ulazni signal se može zbog svojstva prosijavanja Diracove  $\delta$  funkcije zapisati s:

$$x(t) = (x * \delta)(t), \quad (3.16)$$

pa koristeći definiciju integrala imamo:

$$\begin{aligned} y(t) &= H [x(t)] = H [(x * \delta)(t)] = \\ &= H \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(\tau - t) d\tau \right] = \lim_{\Delta\tau_i \rightarrow 0} H \left[ \sum_i x(\tau_i) \delta(\tau_i - t) \Delta\tau_i \right] = \\ &= \lim_{\Delta\tau_i \rightarrow 0} \sum_i x(\tau_i) H [\delta(\tau_i - t)] \Delta\tau_i = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) H [\delta(\tau - t)] d\tau = x(t) * h(t), \end{aligned}$$

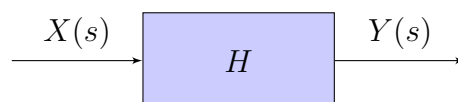
gdje je  $h(t) = H [\delta(t)]$ . Drugim riječima, vidimo da je funkcioniranje sustava determinirano tzv. impulsnim odzivom, tj. reakcijom sustava na pobudu Diracovom  $\delta$  funkcijom, te da je odziv u vremenskoj domeni posljedično konvolucija pobude i funkcije  $h(t)$ .

Pokažimo sada da je  $h(t)$  ništa drugo nego već spomenuta prijenosna funkcija u  $t$  domeni. Naime, konvolucija funkcija u vremenskoj domeni jednaka je umnošku funkcija u frekvencijskoj domeni, pa vrijedi

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s), \quad (3.17)$$

što je u skladu s definicijom prijenosne funkcije iz primjera s mehaničkim sustavom.

Zadani blok sada možemo prikazati u frekvencijskoj, odnosno  $s$  domeni.



Slika 3.2. Shematski prikaz sustava u frekvencijskoj domeni

Sada možemo i formalno definirati prijenosnu funkciju.

**Definicija 3.3.** *Neka je zadan linearni i vremenski invarijantan sustav kod kojeg pobudi  $x(t)$  odgovara odziv  $y(t)$  u vremenskoj domeni. Funkciju*

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}, \quad (3.18)$$

gdje je  $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$  i  $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$  zovemo **prijenosnom funkcijom** sustava.

Ovo poglavlje pisano je prema [9] i [10].

## 4. Polovi i nule prijenosne funkcije

U prethodnom poglavlju rekli smo da se linearni sustavi često opisuju linearnim diferencijalnim jednačbama s konstantnim koeficijentima. U ovom ćemo se poglavlju baviti matematičkom formom prijenosnih funkcija koje odgovaraju sustavima opisanim na taj način prema [11] i [12].

**Primjer 4.1.** Promotrimo stoga sustav zadan sljedećom diferencijalnom jednačbom:

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = x(t) \quad (4.1)$$

uz početne uvjete  $y(0) = 0$  i  $y'(0) = 0$ . Odredimo sada prijenosnu funkciju takvog sustava. Laplaceovom transformacijom jednačbe dobivamo:

$$a(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + b(sY(s) - y(0)) + cY(s) = X(s). \quad (4.2)$$

Sređivanjem slijedi:

$$(as^2 + bs + c)Y(s) = X(s), \quad (4.3)$$

odnosno

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{as^2 + bs + c}. \quad (4.4)$$

Iz ovog primjera možemo naslutiti da će prijenosna funkcija općenito biti zadana kao racionalna funkcija, odnosno da će imati sljedeći oblik:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{a_M \cdot s^M + a_{M-1} \cdot s^{M-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0}{b_N \cdot s^N + b_{N-1} \cdot s^{N-1} + \dots + b_1 \cdot s + b_0}. \quad (4.5)$$

Drugim riječima biti će zadana kao kvocijent polinoma  $Y(s)$  stupnja  $M$  i polinoma  $U(s)$  stupnja  $N$ .

Koristeći osnovni teorem algebre, odnosno činjenicu da svaki kompleksni polinom stupnja  $n$  ima  $n$  kompleksnih nultočaka (korijena), funkciju  $G(s)$  možemo zapisati u faktoriziranom obliku:

$$G(s) = k \frac{(s - s_{o1})(s - s_{o2}) \cdots (s - s_{oM})}{(s - s_{p1})(s - s_{p2}) \cdots (s - s_{pN})}, \quad (4.6)$$

gdje je  $k = \frac{a_M}{b_N}$ , dok su  $s_{o_i}$  korijeni polinoma  $Y(s)$ , a  $s_{p_j}$  korijeni polinoma  $U(s)$ .

Sada možemo uvesti pojam polova i nula prijenosne funkcije.

**Definicija 4.1.** Neka je dana prijenosna funkcija oblika

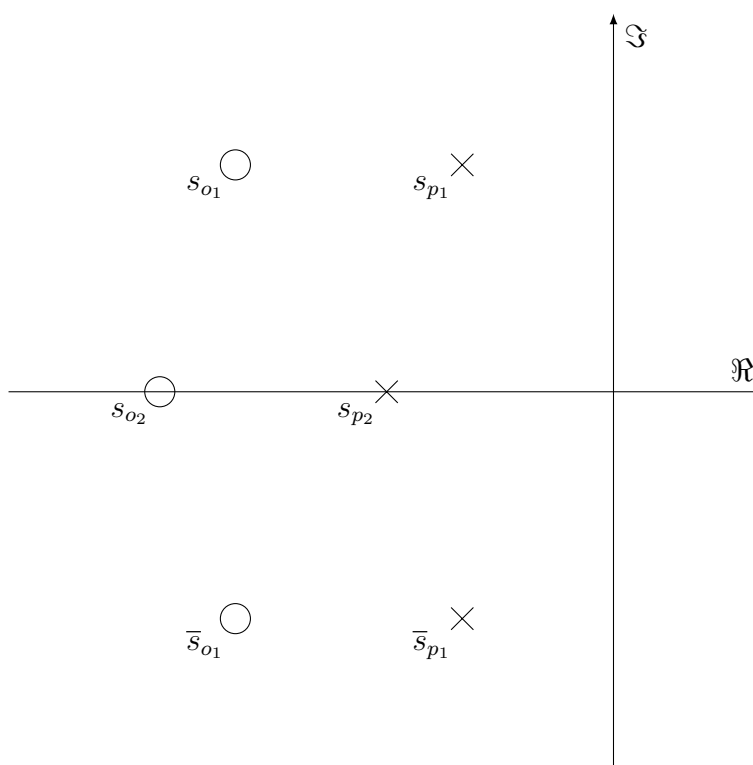
$$G(s) = k \frac{(s - s_{o1})(s - s_{o2}) \cdots (s - s_{oM})}{(s - s_{p1})(s - s_{p2}) \cdots (s - s_{pN})}, \quad (4.7)$$

kompleksne brojeve  $s_{o_i}$  nazivamo **nulama** prijenosne funkcije  $G(s)$ , a kompleksne brojeve  $s_{p_j}$  njenim **polovima**. Koeficijent  $k$  se naziva **faktorom pojačanja**.

Drugim riječima, nule prijenosne funkcije su vrijednosti argumenta  $s$  gdje funkcija poprima vrijednost 0, a to su nultočke brojnika. S druge strane polovi prijenosne funkcije su vrijednosti argumenta  $s$  u kojima funkcija poprima vrijednost  $\infty$ , a to su nultočke nazivnika.

Kako su nule i polovi kompleksni brojevi, prikazujemo ih u kompleksnoj ravnini. Treba napomenuti da su promatrani polinomi  $Y(s)$  i  $U(s)$  polinomi s realnim koeficijentima. To znači da su nule i polovi ili čisto realni ili se pak pojavljuju u imaginarnom djelu kompleksne ravnine kao konjugirani parovi. Kada bi primjerice postojao zaseban pol ili nula bez svog kompleksno konjugiranog para to bi značilo da su i koeficijenti polinoma kompleksni.

Nule i polove zapisujemo kao  $s_i = -\sigma_i + j\omega_i$ ,  $\bar{s}_i = -\sigma_i - j\omega_i$  ako se pojavljuju u obliku kompleksno konjugiranog para, odnosno kao  $s_i = -\sigma_i$  ako su realni, kako je prikazano na slici 4.1. Taj se grafički prikaz zove **dijagram polova i nula** i na njemu su polovi označeni križićima, dok su nule označene kružićima.



Slika 4.1. Prikaz polova i nula u kompleksnoj ravnini

#### 4.1. Određivanje polova i nula prijenosne funkcije

Pokažimo sada na nekoliko primjera postupak određivanje polova i nula prijenosne funkcije.

**Primjer 4.2.** Linearni sustav prikazan je diferencijalnom jednadžbom:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 2x'(t) + x(t), \quad (4.8)$$

pri čemu su svi početni uvjeti jednaki nula. Odredimo nule i polove sustava te ih prikazimo u pripadnom dijagramu.

U zadanom linearnom sustavu, desnu stranu možemo gledati kao pobudu (ulaz) u sustav, dok lijeva strana može predstavljati izlaz iz sustava. Prijenosna funkcija zadane diferencijalne jednadžbe dobiva se tako da i na lijevu i na desnu stranu jednadžbe primijenimo Laplaceovu transformaciju, te ih podijelimo. Kako su svi početni uvjeti jednaki 0, kada na obje strane primijenimo Laplaceovu transformaciju dobiva se sljedeće:

$$s^2Y(s) + 5sY(s) + 6Y(s) = 2sX(s) + X(s). \quad (4.9)$$

Izlučivanjem  $Y(s)$  sa lijeve strane i  $X(s)$  sa desne strane slijedi:

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) = X(s)(2s + 1). \quad (4.10)$$

Sada je potrebno srediti izraz na način da se iz njega može odrediti prijenosna funkcija sustava:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s + 1}{s^2 + 5s + 6}, \quad (4.11)$$

pa je

$$H(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 5s + 6}. \quad (4.12)$$

Kako bi se dobio oblik pogodan za iščitavanje polova i nula potrebno je faktorizirati polinom iz nazivnika. Za određivanje faktorizacije nazivnika treba riješiti kvadratnu jednadžbu:

$$s^2 + 5s + 6 = 0, \quad (4.13)$$

a njena rješenja su  $s_1 = -3$  i  $s_2 = -2$

Sada vrijedi

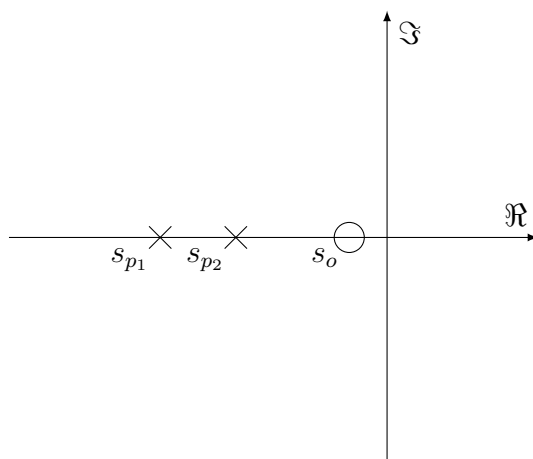
$$H(s) = \frac{1}{2} \frac{s + \frac{1}{2}}{(s + 3)(s + 2)}. \quad (4.14)$$

Iz faktoriziranog zapisa jednostavno možemo očitati polove i nule.

Sustav ima jednu realnu nulu  $s_o = -\frac{1}{2}$  i par polova  $s_{p1} = -3$  i  $s_{p2} = -2$ , dok je faktor pojačanja  $k = \frac{1}{2}$ .

Polovi i nule svojstva su prijenosne funkcije, dakle svojstva su i pripadne diferencijalne jednadžbe, te zajedno sa koeficijentom  $k$  u potpunosti karakteriziraju diferencijalnu jednadžbu i opisuju sustav u potpunosti.

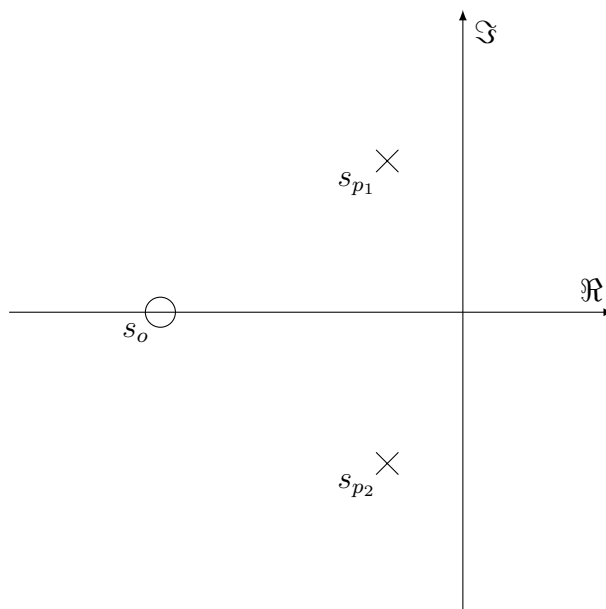
Odredimo još grafički prikaz dobivenih nula i polova. Kako smo već rekli nule ćemo u kompleksnoj ravnini prikazivati kružićima, a polove križićima. Dijagram polova i nula za razmatrani slučaj prikazan je na sljedećoj slici.



Slika 4.2. Prikaz polova i nula u kompleksnoj ravnini

U sljedećem ćemo primjeru vidjeti kako se iz informacijama o polovima, nulama i faktoru pojačanja može dobiti pripadna diferencijalna jednačba.

**Primjer 4.3.** Neka je zadana prijenosna funkcija koja ima par kompleksno konjugiranih polova  $s_{p1}, s_{p2} = -1 \pm j2$  i jednu nulu  $s_o = -4$  kao što prikazuje dijagram na slici 4.3. Potrebno je pronaći diferencijalnu jednačbu koja opisuje sustav uz početne uvjete  $y'(0) = 0$  i  $y(0) = 0$  te pojačanje  $k = 3$ .



Slika 4.3. Prikaz polova i nula u kompleksnoj ravnini

Prema danom broju polova i nula, prijenosna funkcija u faktoriziranom zapisu je sljedećeg oblika:

$$H(s) = k \frac{s - s_o}{(s - s_{p1})(s - s_{p2})}. \quad (4.15)$$

Daljnijim uvrštavanjem zadanih vrijednosti dobiva se:

$$H(s) = 3 \frac{s + 4}{(s - (-1 + 2j))(s - (-1 - 2j))}, \quad (4.16)$$

što nakon množenja koeficijenata u nazivniku poprima oblik:

$$H(s) = 3 \frac{s + 4}{s^2 + 2s + 5}. \quad (4.17)$$

Kako je

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}, \quad (4.18)$$

unakrsnim množenjem dobiva se:

$$Y(s)(s^2 + 2s + 5) = X(s)[3 \cdot (s + 4)], \quad (4.19)$$

$$Y(s)(s^2 + 2s + 5) = X(s)(3s + 12). \quad (4.20)$$

Kako bi se dobila originalna diferencijalna jednadžba, potrebno je na cjeli izraz primjeniti inverznu Laplaceovu transformaciju. Prema teoremu o slici derivacije, te uz korištenje početnih uvjeta proizlazi da je Laplaceova transformacija druge i prve derivacije funkcije  $y(t)$  jednaka:

$$\mathcal{L}(y''(t)) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s), \quad (4.21)$$

$$\mathcal{L}(y'(t)) = sY(s) - y(0) = sY(s). \quad (4.22)$$

Tako dobivamo diferencijalnu jednadžbu:

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 3x'(t) + 12x(t). \quad (4.23)$$

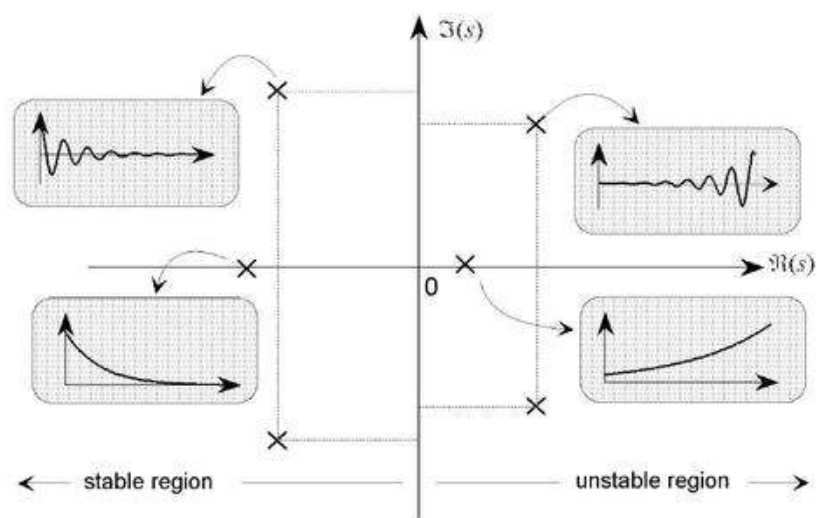
## 4.2. Polovi i nule prijenosne funkcije u kontekstu stabilnosti sustava

Grafički prikaz polova i nula vrlo je koristan instrument u slučaju kada se preispituje stabilnost nekog sustava. Kako prijenosna funkcija u potpunosti tumači diferencijalnu jednadžbu, njezini polovi i nule opisuju odziv sustava, a položaj polova u kompleksnoj ravnini govori nam je li sustav stabilan ili ne.

Ako se polovi nalaze u lijevoj poluravnini kompleksne ravnine, sustav će imati stabilan odziv, no ako se polovi nalaze u desnoj poluravnini, odziv sustava neće biti konačan, već će se oscilacije povećavati. Granični je slučaj kada se par polova nalazi točno na imaginarnoj osi, u tom slučaju se oscilacije ni ne povećavaju ni ne smanjuju, već su konstantne.

Nule sustav mogu ubrzati ili usporiti ovisno o položaju. Što se nula nalazi dalje od ishodišta to je sustav sporiji, a što je bliže ishodištu sustav je brži, odnosno odziv sustava je brži. Nule prijenosne funkcije same po sebi ne utječu na stabilnost, već na amplitudu odziva.

Sve navedene situacije ilustrirane su na sljedećoj slici.



Slika 4.4. Grafički prikaz odziva s obzirom na položaj polova [12]



## 5. Analiza rješenja diferencijalnih jednačbi putem prijenosnih funkcija

Kroz sljedeće primjere biti će analizirano ponašanje rješenja zadanih diferencijalnih jednačbi u vremenskoj domeni u odnosu na položaj nula i polova pripadne prijenosne funkcije u Laplace-ovoj domeni.

**Primjer 5.1.** *Neka je zadana je diferencijalna jednačba drugog reda*

$$y''(t) + 2y'(t) + 17y(t) = x'(t) + x(t), \quad (5.1)$$

*s početnim uvjetima:*

$$y'(0) = 0, \quad (5.2)$$

$$y(0) = 0, \quad (5.3)$$

$$x(0) = 0. \quad (5.4)$$

*Odredimo prijenosnu funkciju sustava opisanog zadanom diferencijalnom jednačbom, polove i nule prijenosne funkcije, kao i dijagram polova i nula.*

*Primjenom Laplaceove transformacije na pripadnu diferencijalnu jednačbu i korištenjem teorema o slici derivacije dobiva se:*

$$s^2Y(s) + 2Y(s) + 17Y(s) = sX(s) + X(s), \quad (5.5)$$

*odnosno*

$$Y(s)(s^2 + 2s + 17) = X(s)(s + 1). \quad (5.6)$$

*Podjelimo li izlaz (lijevu stranu) sa ulazom (desnom stranom) dolazimo do prijenosne funkcije sustava:*

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s + 1}{s^2 + 2s + 17}. \quad (5.7)$$

*Nula prijenosne funkcije dobiva se izjedačavanjem brojnika sa nulom i iznosi:*

$$s + 1 = 0, \quad (5.8)$$

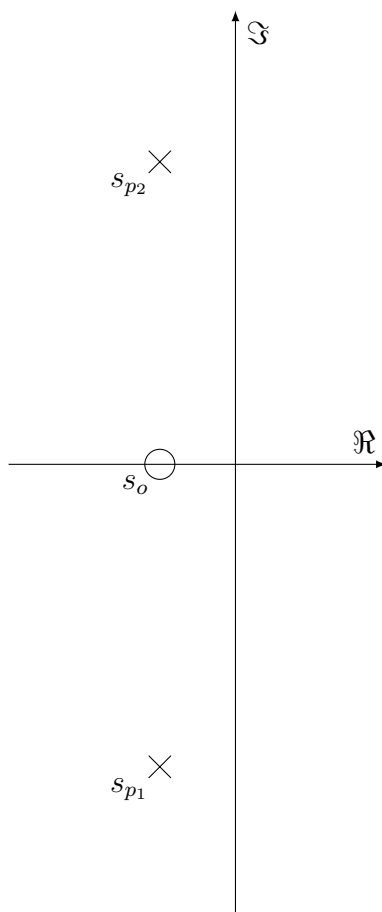
$$s_o = -1. \quad (5.9)$$

*Polovi su rješenja kvadratne jednačbe koja se nalazi u nazivniku:*

$$s^2 + 2s + 17 = 0,$$

$$s_{p1} = -1 - 4i,$$

$$s_{p2} = -1 + 4i.$$



Slika 5.1. Prikaz polova i nula u kompleksnoj ravnini

Odredimo sada pripadni dijagram polova i nula.

Iz dijagrama je vidljivo da se polovi nalaze u lijevom djelu kompleksne ravnine, što znači da će sustav imati stabilan odziv. Pokažimo sada tu činjenicu i analitički. Zbog jednostavnosti ćemo analizirati impulsnu pobudu, budući je u tom slučaju

$$X(s) = 1, \quad (5.10)$$

pa je i

$$Y(s) = H(s). \quad (5.11)$$

Drugim riječima, da bi dobili odziv dovoljno je prijenosnu funkciju iz Laplaceove domene prebaciti u vremensku.

Nakon svođenja nazivnika na potpuni kvadrant dobivamo

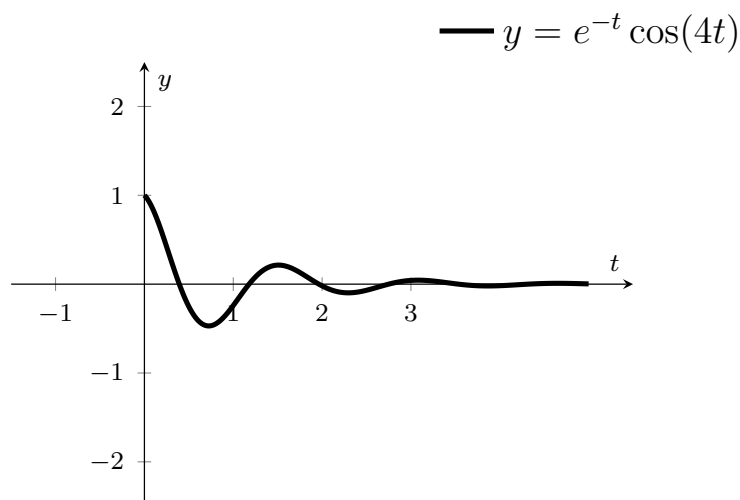
$$Y(s) = \frac{s + 1}{(s^2 + 2s + 1) + 16}, \quad (5.12)$$

$$Y(s) = \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 16}. \quad (5.13)$$

Može se uočiti kako je transformacija u ovom slučaju svedena na tabličnu te slijedi:

$$y(t) = e^{-t} \cos(4t). \quad (5.14)$$

Kada ovu jednadžbu prikažemo grafički, vidimo kako za danu pobudu imamo i konačan odziv.



Slika 5.2. Prikaz odziva u vremenskoj domeni

Sada ćemo analizirati jednu diferencijalnu jednadžbu koja opisuje nestabilan sustav.

**Primjer 5.2.** Neka je zadana je diferencijalna jednadžba drugog reda

$$y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = x'(t) - 2x(t), \quad (5.15)$$

s početnim uvjetima:

$$y'(0) = 0, \quad (5.16)$$

$$y(0) = 0, \quad (5.17)$$

$$x(0) = 0. \quad (5.18)$$

Odredimo prijenosnu funkciju sustava opisanog zadanom diferencijalnom jednadžbom, polove i nule prijenosne funkcije, kao i dijagram polova i nula.

Nakon primjene Laplaceove transformacije i teorema o slici derivacije, uz početne uvjete jednake nuli slijedi:

$$s^2Y(s) - 2sY(s) + 5Y(s) = sX(s) - 2X(s). \quad (5.19)$$

Izlučivanjem posebno svih pribrojnika koji se nalaze uz  $Y(s)$ , te posebno pribrojnika koji se nalaze uz  $X(s)$  dobiva se:

$$Y(s)(s^2 - 2s + 5) = X(s)(s - 2). \quad (5.20)$$

Prijenosna funkcija sada poprima oblik

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s - 2}{s^2 - 2s + 5}. \quad (5.21)$$

Nula prijenosne funkcije dobiva izjednačenjem brojnika sa nulom, te slijedi:

$$s - 2 = 0, \quad (5.22)$$

$$s_o = 2. \quad (5.23)$$

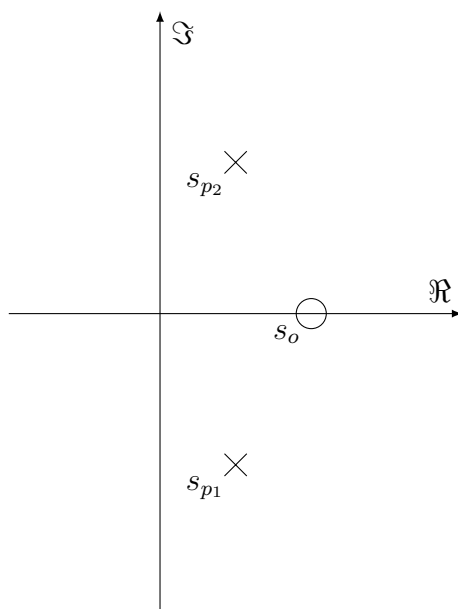
Polove prijenosne funkcije dobivamo izjednačavanjem nazivnika sa nulom, a polovi su rješenja pripadne kvadratne jednadžbe:

$$s^2 - 2s + 5 = 0$$

$$s_{p1} = 1 - 2i,$$

$$s_{p2} = 1 + 2i.$$

Prikažemo li nule i polove u kompleksnoj ravnini, primjećujemo kako su sada polovi smješteni u desnom dijelu kompleksne ravnine.



Slika 5.3. Prikaz polova i nula u kompleksnoj ravnini

Kao i u prethodnom primjeru analizirati ćemo impulsnu pobudu. Kako bi dobili pripadni odziv u vremenskoj domeni prijenosnu funkciju moramo svesti na pogodan oblik. Dobivamo:

$$H(s) = \frac{s - 2}{s^2 - 2s + 5} = \frac{s - 2}{s^2 - 2s + 1 + 4} = \frac{s - 2}{(s - 1)^2 + 4}. \quad (5.24)$$

Nakon svođenja nazivnika na potpuni kvadrant potrebno je rastaviti brojnik kako bi transformacija postala tablična:

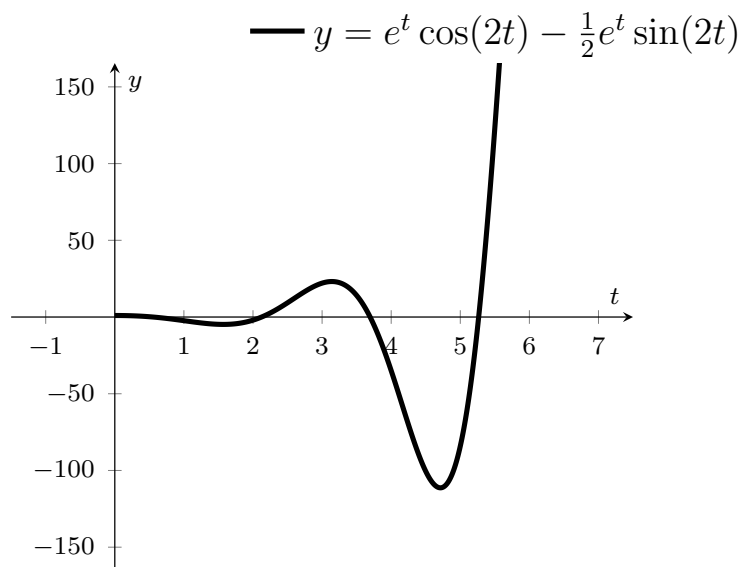
$$H(s) = \frac{s - 1 - 1}{(s - 1)^2 + 4} = \frac{s - 1}{(s - 1)^2 + 4} - \frac{1}{(s - 1)^2 + 4}, \quad (5.25)$$

$$H(s) = \frac{s - 1}{(s - 1)^2 + 4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(s - 1)^2 + 4}. \quad (5.26)$$

Sada na ovaj izraz primjenjujemo inverznu Laplaceovu transformaciju te dobivamo odziv sustava u vremenskoj domeni:

$$y(t) = g(t) = e^t \cos(2t) - \frac{1}{2}e^t \sin(2t). \quad (5.27)$$

Kada dobiveni odziv  $y(t)$  prikažemo grafički, vidimo kako se oscilacije povećavaju, te je sustav nestabilan i u konačnici se nalazi u beskonačnosti. Ovo potvrđuje tvrdnju da će sustav biti nestabilan ako se polovi nalaze u desnom djelu kompleksne ravnine.



Slika 5.4. Grafički prikaz odziva

U sljedećem primjeru analizirati ćemo diferencijalnu jednadžbu kod koje će odziv imati konstantne oscilacije.

**Primjer 5.3.** Neka je zadana je diferencijalna jednadžba drugog reda

$$2y''(t) + 3y(t) = \delta(t), \quad (5.28)$$

s početnim uvjetima:

$$y'(0) = 0, \quad (5.29)$$

$$y(0) = 0. \quad (5.30)$$

Odredimo prijenosnu funkciju sustava opisanog zadanom diferencijalnom jednadžbom, polove i nule prijenosne funkcije, kao i dijagram polova i nula.

Primjenom Laplaceove transformacije i teorema o slici derivacije dobiva se:

$$2s^2Y(s) + 3Y(s) = 1. \quad (5.31)$$

U slijedećem koraku izlučuju se svi probrojnici uz  $Y(s)$  te se dobiva:

$$Y(s)(2s^2 + 3) = 1. \quad (5.32)$$

U ovom slučaju prijenosna funkcija jednaka je  $Y(s)$ :

$$H(s) = Y(s) = \frac{1}{2s^2 + 3}. \quad (5.33)$$

Nule prijenosne funkcije nalaze se u beskonačnosti:

$$s_o \rightarrow \infty, \quad (5.34)$$

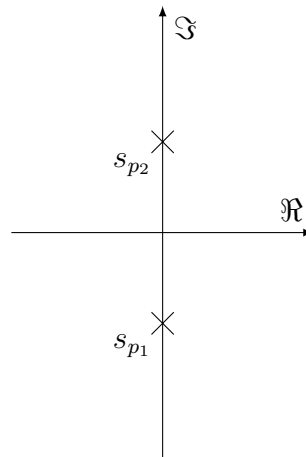
a polovi prijenosne funkcije rješenja su jednadžbe:

$$2s^2 + 3 = 0, \quad (5.35)$$

$$s_{p1} \approx -1.2i, \quad (5.36)$$

$$s_{p2} \approx 1.2i. \quad (5.37)$$

Prikažemo li polove u kompleksnoj ravnini, vidimo kako se nalaze točno na ordinati, odnosno imaginarnoj osi.



Slika 5.5. Prikaz polova u kompleksnoj ravnini

Prijenosnu funkciju potrebno je zapisati u takvom obliku da transformacija bude tablična. Prvi korak je djeljenje brojnika i nazivnika sa 2. Dobivamo:

$$H(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{3}{2}}. \quad (5.38)$$

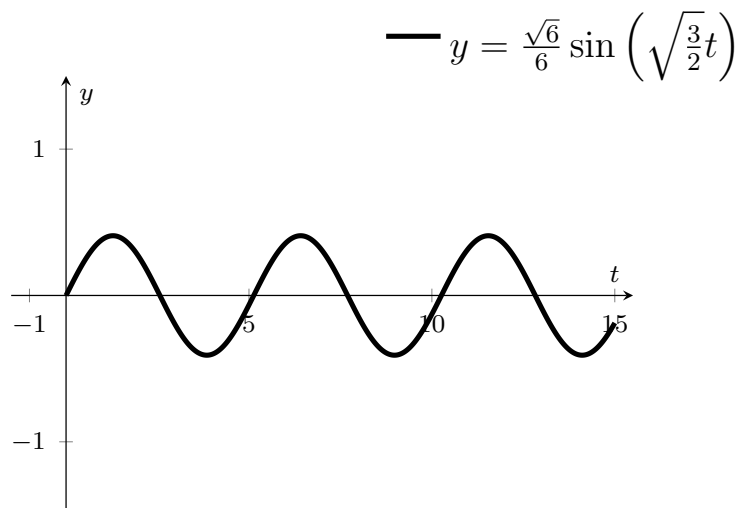
Sada je potrebno svesti izraz na tabličnu transformaciju:

$$H(s) = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{s^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{s^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}. \quad (5.39)$$

Konačno, primjenom inverzne Laplaceove transformacije na izraz dobiva se prijenosna funkcija u vremenskoj domeni:

$$g(t) = y(t) = \frac{\sqrt{6}}{6} \sin \left( \sqrt{\frac{3}{2}} t \right). \quad (5.40)$$

Kada grafički prikažemo odziv, vidimo da su oscilacije konstantne, ne povećavaju se ni smanjuju što je uvijek slučaj kada se polovi nalaze točno na imaginarnoj osi kompleksne ravnine.



Slika 5.6. Prikaz odziva u vremenskoj domeni

U sljedećem primjeru analizirati ćemo diferencijalnu jednadžbu čija prijenosna funkcija ima polove na realnoj osi.

**Primjer 5.4.** Neka je zadana je diferencijalna jednadžba drugog reda

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 32, \quad (5.41)$$

s početnim uvjetima:

$$y'(0) = 0, \quad (5.42)$$

$$y(0) = 0. \quad (5.43)$$

Odredimo prijenosnu funkciju sustava opisanog zadanom diferencijalnom jednadžbom, polove i nule prijenosne funkcije, kao i dijagram polova i nula. Također ćemo odrediti odziv za ovako zadanu pobudu.

Kako je kod ove diferencijalne jednadžbe pobuda dana s  $x(t) = 32$ , u cilju traženja prijenosne funkcije trebamo razmatrati jednadžbu definiranu s

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x(t), \quad (5.44)$$

Nakon primjene teorema o slici derivacije i Laplaceove transformacije na cijeli izraz, slijedi:

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = X(s). \quad (5.45)$$

Nakon izlučivanja svih pribrojnika uz  $Y(s)$  dobiva se:

$$Y(s)(s^2 + 3s + 2) = X(s). \quad (5.46)$$

Prijenosna funkcija dobiva se dijeljenjem izlaza sa ulazom te slijedi:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}. \quad (5.47)$$

Kako bi odredili polove trebamo riješiti sljedeću kvadratnu jednadžbu:

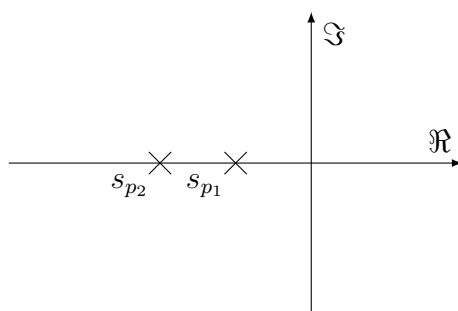
$$s^2 + 3s + 2 = 0. \quad (5.48)$$

Tako dobivamo polove

$$s_{p1} = -1, \quad (5.49)$$

$$s_{p2} = -2. \quad (5.50)$$

Svi polovi nalaze se u lijevom djelu kompleksne ravnine pa možemo očekivati da će sustav biti stabilan i konačan, s eksponencijalnim odzivom. Pripadni dijagram polova i nula dan je na sljedećoj slici.



Slika 5.7. Prikaz polova u kompleksnoj ravnini

Kako bi odredili pripadnu pobudu analiziramo situaciju kada je  $x(t) = 32$ , odnosno kada je

$$X(s) = \frac{32}{s}. \quad (5.51)$$

Iz (5.46) dobivamo da je

$$Y(s) = \frac{32}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{32}{s(s + 1)(s + 2)}. \quad (5.52)$$



Koristeći se tehnikom rastava na parcijalne razlomke, ovaj odziv prebacujemo u oblik pogodan za inverznu Laplaceovu transformaciju:

$$Y(s) = \frac{32}{s(s+1)(s+2)}, \quad (5.53)$$

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}. \quad (5.54)$$

Sada je

$$32 = A(s+1)(s+2) + Bs(s+2) + Cs(s+1), \quad (5.55)$$

$$32 = A(s^2 + 3s + 2) + B(s^2 + 2s) + C(s^2 + s), \quad (5.56)$$

$$32 = As^2 + 3As + 2A + Bs^2 + 2Bs + Cs^2 + Cs. \quad (5.57)$$

Dobiva se sustav s 3 jednačbe i 3 nepoznanice:

$$32 = 2A, \quad (5.58)$$

$$A + B + C = 0, \quad (5.59)$$

$$3A + 2B + C = 0, \quad (5.60)$$

čija su rješenja

$$A = 16, \quad B = -32, \quad C = 16. \quad (5.61)$$

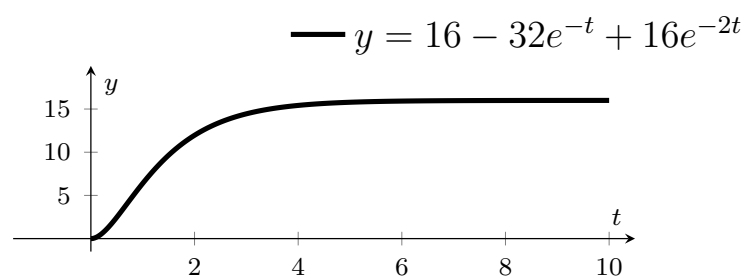
Konačno dobivamo:

$$Y(s) = \frac{16}{s} - \frac{32}{s+1} + \frac{16}{s+2}, \quad (5.62)$$

što nakon primjene inverzne Laplaceove transformacije u vremenskoj domeni daje:

$$y(t) = 16 - 32e^{-t} + 16e^{-2t}. \quad (5.63)$$

Prikazujemo odziv grafički u vremenskoj domeni:



Slika 5.8. Prikaz odziva u vremenskoj domeni

Sustav je stabilan, u stacionarnom stanju je konstantan kao što je prikazano na slici 5.8.

U sljedećem primjeru napraviti ćemo analizu još jednog nestabilnog sustava.

**Primjer 5.5.** Neka je zadana je diferencijalna jednadžba drugog reda

$$4y''(t) - y(t) = 4x'(t), \quad (5.64)$$

s početnim uvjetima:

$$y'(0) = 0, \quad (5.65)$$

$$y(0) = 0, \quad (5.66)$$

$$x(0) = 0. \quad (5.67)$$

Odredimo prijenosnu funkciju sustava opisanog zadanom diferencijalnom jednadžbom, polove i nule prijenosne funkcije, kao i dijagram polova i nula.

Nakon primjene Laplaceove transformacije i teorema o slici derivacije slijedi:

$$4s^2Y(s) - Y(s) = 4sX(s). \quad (5.68)$$

Izlučujemo u izrazu posebno sve pribrojnice uz  $Y(s)$  i posebno uz  $X(s)$ :

$$Y(s)(4s^2 - 1) = 4sX(s). \quad (5.69)$$

Prijenosna funkcija  $H(s)$  dobiva se dijeljenjem izlaza sa ulazom u sustav:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4s}{4s^2 - 1}. \quad (5.70)$$

Nula prijenosne funkcije se nalazi u nuli.

$$4s = 0, \quad (5.71)$$

$$s_o = 0. \quad (5.72)$$

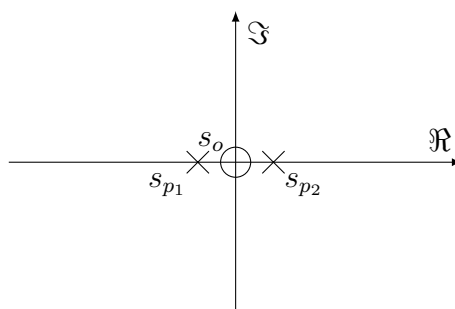
Polovi prijenosne funkcije rješenja su kvadratne jednadžbe iz nazivnika:

$$4s^2 - 1 = 0 \quad (5.73)$$

$$s_{p1} = -0.5, \quad (5.74)$$

$$s_{p2} = +0.5. \quad (5.75)$$

Na sljedećoj slici dan je prikaz polova i nula u kompleksnoj ravnini.



Slika 5.9. Prikaz polova i nula u kompleksnoj ravnini

Sa slike vidimo kako se jedan pol nalazi u desnom djelu kompleksne ravnine, što znači da će odziv težiti beskonačnost, te da je sustav nestabilan.

Kao i u prethodnim primjerima analizirati ćemo impulsnu pobudu i promatrati njen odziv. Kako bi dobili oblik prijenosne funkcije pogodan za ponovno prebacivanje u vremensku domenu zapisujemo funkciju preko parcijalnih razlomaka, a najprije je potrebno faktorizirati nazivnik:

$$Y(s) = H(s) = \frac{4s}{4s^2 - 1} = \frac{4s}{(2s + 1)(2s - 1)}, \quad (5.76)$$

što zapisano preko parcijalnih razlomaka daje:

$$Y(s) = \frac{A}{2s + 1} - \frac{B}{2s - 1}. \quad (5.77)$$

Sada imamo

$$4s = A(2s - 1) + B(2s + 1), \quad (5.78)$$

$$4s = 2As - A + 2Bs + B, \quad (5.79)$$

$$2A + 2B = 4, \quad (5.80)$$

$$B = A. \quad (5.81)$$

Dobiva se sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice i rješavanjem sustava dobivamo rješenja:

$$A = 1, \quad B = 1. \quad (5.82)$$

Uvrštavanjem u polazni izraz dolazimo do:

$$Y(s) = \frac{1}{2s + 1} + \frac{1}{2s - 1}. \quad (5.83)$$

Kako bi mogli odrediti inverznu Laplaceovu transformaciju moramo napraviti još jednu manipulaciju ovog izraza:

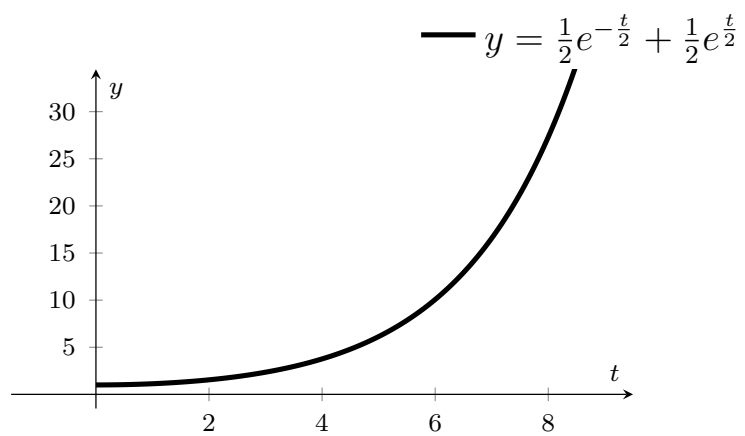
$$Y(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s - \frac{1}{2}}. \quad (5.84)$$

Na ovaj izraz primijenimo inverznu Laplaceovu transformaciju i dobijemo:

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}. \quad (5.85)$$

Sada funkciju prikazujemo grafički u vremenskoj domeni.

Na slici 5.10 vidimo kako je sustav uistinu nestabilan, odnosno odziv je eksponencijalan i nema konačnu vrijednost već je beskonačan.



Slika 5.10. Prikaz odziva u vremenskoj domeni

## 6. Zaključak

U ovom radu bavimo se linearnim i vremenski neovisnim sustavima opisanim pomoću linearnih diferencijalnih jednačbi s konstantnim koeficijentima. Analizi tih sustava, odnosno pripadnih diferencijalnih sustava pristupamo u tzv.  $s$ -domeni, odnosno nakon što na njih primijenimo Laplaceovu transformaciju. Stoga smo u prvom dijelu rada detaljno objasnili pojam Laplaceove transformacije i sva pripadna svojstva.

U drugom dijelu rada uveli smo pojam prijenosne funkcije kao funkcije koja povezuje pobudu i odziv linearnog vremenski neovisnog sustava u  $s$  domeni. Štoviše pokazali smo da je prijenosnom funkcijom sustav jednoznačno definiran. Također smo pokazali da će kod opisanih sustava prijenosne funkcije imati oblik racionalne funkcije, odnosno funkcije koja je prikazana kao kvocijent dva polinoma.

Nadalje definiramo pojam polova i nula prijenosne funkcije. Naime, kako se radi o racionalnoj funkciji jasno je da prema osnovnom teoremu algebre i polinom u nazivniku i polinom u brojniku imaju korijene, odnosno nul-točke. Nul-točke polinoma iz brojnika zvat ćemo nule, dok su nul-točke polinoma iz nazivnika polovi. Kako je polinom određen svojim nul-točkama, zaključujemo da je i prijenosna funkcija tada određena polovima i nulama. Također navodimo i svojstva sustava u ovisnosti o položaju polova u kompleksnoj ravnini. Tako će sustav biti stabilan ako su polovi u lijevoj poluravnini, a nestabilan ako se bar jedan pol nalazi u desnoj poluravnini.

U sljedećem poglavlju na nizu primjera analiziramo diferencijalne jednačbe koristeći se prijenosnim funkcijama pripadnih sustava, pri čemu smo dali primjere i stabilnih i nestabilnih sustava.

Možemo zaključiti da prijenosne funkcije, te njihove nule i polovi mogu poslužiti kao vrijedan matematički alat za analizu linearnih i vremenski neovisnih sustava. Analizom prijenosne funkcije možemo unaprijed odrediti hoće li neki sustav biti stabilan ili ne te predvidjeti prirodu odziva takvog sustava, što ima velike primjene u elektrotehnici, primjerice u dizajnu filtara.

## Literatura

- [1] "Pierre-Simon Laplace", s Interneta, [https://en.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon\\_Laplace](https://en.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace), 21.04.2022.
- [2] "Pierre Simon de Laplace", s Interneta, <http://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=35431>, 21.04.2022.
- [3] Salinger, Ž.: "Laplaceova transformacija", završni rad, Sveučiliste J.J.Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2011.
- [4] S. Stutts, D.: "A Brief Introduction To Laplace Transformation", Missouri University of Science and Technology, s Interneta, <https://web.mst.edu/stutts/SupplementalNotes/LaplaceT.PDF>, 21.04.2022.
- [5] Finan M.B.: "Laplace Transforms: Theory, Problems, and Solutions", Arkansas Tech University, s Interneta, <https://faculty.atu.edu/mfinan/4243/Laplace.pdf>, 21.04.2022.
- [6] Kreyszig, E., E.J. Norminton: "Advanced Engineering Mathematics (10th edition)", Wiley, New York, 2011.
- [7] Stojkovic, N.; Naglić, V.; Mijat, N.: "Teorija mreža i linija", Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, 2005.
- [8] Vukic, Z.; Kuljača, Lj.: Automatsko upravljanje - analiza linearnih sustava, FER, Zagreb 2005.
- [9] "Transfer Functions", s Interneta, <https://nucinkis-lab.cc.ic.ac.uk>, 21.04.2022.
- [10] Bemporad, A.: "Transfer functions", Sveučilište u Trentu, s Interneta, <http://cse.lab.imtlucca.it/bemporad/teaching/ac/pdf/03-transfer-functions-laplace.pdf>, 21.04.2022.
- [11] "Understanding Poles and Zeros", s Interneta, <https://web.mit.edu/2.14/www/Handouts/PoleZero.pdf>, 21.04.2022.
- [12] "Understanding Poles and Zeros in Transfer Functions", Robert Keim, s Interneta, <https://www.allaboutcircuits.com/technical-articles/understanding-poles-and-zeros-in-transfer-functions/>, 21.04.2022.

## Sažetak i ključne riječi

U radu su obrađeni linearni i vremenski neovisni sustavi te je definirana njihova prijenosna funkcija. Pokazano je da je takva prijenosna funkcija dana u obliku racionalne funkcije koja je određena nul-točkama brojnika i nazivnika, odnosno nulama i polovima. Promatrani sustavi, odnosno njihovi odzivi analizirani su u odnosu na položaj polova u kompleksnoj ravnini pri čemu je obrađen niz primjera koji pokrivaju stabilne i nestabilne sustave. Također je dan pregled osnovnih svojstava Laplaceove transformacije kao ključnog alata za definiciju i određivanje prijenosne funkcije.

**Ključne riječi:** Prijenosna funkcija, Laplaceova transformacija, polovi, nule, diferencijalne jednadžbe, sustavi

## **Summary and key words**

The paper deals with linear and time-independent systems and defines their transfer function. It is shown that such a transfer function is given in terms of a rational function determined by the zeros of the numerator and denominator, i.e., by zeros and poles. The observed systems, i.e., their responses, have been analyzed in terms of the location of the poles in the complex plane, and a number of examples of stable and unstable systems have been worked on. An overview of the basic properties of the Laplace transform as a key tool for defining and determining the transfer function is also given.

**Keywords:** Transfer function, Laplace transform, poles, zeros, differential equations, systems