

# Laplaceova diferencijalna jednađba i električni potencijal

---

Španjol, Ella

Undergraduate thesis / Završni rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:190:596878>

Rights / Prava: [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-06**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Engineering](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI

**TEHNIČKI FAKULTET**

Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

**LAPLACEOVA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA I  
ELEKTRIČNI POTENCIJAL**

Rijeka, srpanj 2022.

Ella Španjol  
0069080888

SVEUČILIŠTE U RIJECI

**TEHNIČKI FAKULTET**

Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

**LAPLACEOVA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA I  
ELEKTRIČNI POTENCIJAL**

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Dražić

Komentor: prof. dr. sc. Viktor Sučić

Rijeka, srpanj 2022.

Ella Španjol  
0069080888

**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
TEHNIČKI FAKULTET  
POVJERENSTVO ZA ZAVRŠNE ISPITE**

Rijeka, 2. ožujka 2021.

Zavod: **Zavod za matematiku fiziku, strane jezike i kineziologiju**  
Predmet: **Inženjerska matematika ET**  
Grana: **2.03.03 elektronika**

## ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Ela Španjol (0069080888)**  
Studij: **Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike**

Zadatak: **Laplaceova diferencijalna jednačba i električni potencijal // Laplace differential equation and electric potential**

### Opis zadatka:

U radu je potrebno opisati Laplaceovu diferencijalnu jednačbu i pripadne rubne probleme. Treba se osvrnuti na kategorizaciju Laplaceove diferencijalne jednačbe te njen oblik u ovisnosti o prostornoj dimenziji i izboru koordinatnog sustava. Potrebno je opisati metode analitičkog rješavanja Laplaceove diferencijalne jednačbe, s posebnim osvrtom na metodu Fourierovih redova i metodu integralnih transformacija. U sklopu rada, Laplaceovu diferencijalnu jednačbu treba staviti u kontekst primjene na određivanje električnog potencijala i pritom analizirati nekoliko karakterističnih primjera.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

*Ela Španjol*

Zadatak uručen pristupniku: 15. ožujka 2021.

Mentor:



Doc. dr. sc. Ivan Dražić

Predsjednik povjerenstva za  
završni ispit:



Prof. dr. sc. Viktor Sučić



Prof. dr. sc. Viktor Sučić (komentor)

## IZJAVA

Sukladno članku 8. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku prediplomskih sveučilišnih studija/stručnih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 1. veljače 2020., izjavljujem da sam samostalno izradio/izradila završni rad prema zadatku preuzetom dana 15. ožujka 2021.

Rijeka, 13. srpnja 2022.

  
Ella Španjol

*Ovom prilikom željela bih se zahvaliti svim osobama koje su mi bile podrška svih ovih godina studiranja. Posebno se želim zahvaliti profesoru i mentoru Ivanu Dražiću koji mi je svojim znanjem, strpljivošću, nesebičnim pomaganjem i savjetima pomogao u pisanju završnog rada. Veliko hvala mojoj obitelji, Matiji i mojim prijateljicama koji su me podržavali i poticali u radu, vjerovali u moj uspjeh i bili uz mene u lijepim i onim manje lijepim trenucima. Hvala kolegicama i kolegama bez kojih ovo studiranje nebi bilo isto. Najveće hvala mami i tati koji su uvijek bili tu, uz mene. Bez njihove podrške i vjere ne bih postigla ovo što jesam. Hvala Vam!*

## Sadržaj

<b>1. Uvod</b>	<b>2</b>
<b>2. Fourierovi redovi</b>	<b>3</b>
2.1. Joseph Fourier . . . . .	5
2.2. Fourierov red . . . . .	6
2.3. Fourierov red funkcije proizvoljna perioda . . . . .	10
2.4. Konvergencija Fourierova reda . . . . .	13
2.5. Fourierov red parnih i neparnih funkcija . . . . .	13
<b>3. Parcijalne diferencijalne jednačbe</b>	<b>19</b>
3.1. Početni i rubni uvjeti . . . . .	21
3.2. Hiperboličke jednačbe . . . . .	21
3.3. Paraboličke jednačbe . . . . .	22
3.4. Eliptičke jednačbe . . . . .	22
<b>4. Laplaceova jednačba</b>	<b>23</b>
4.1. Pierre-Simon de Laplace . . . . .	23
4.2. Laplaceova jednačba u koordinatnom sustavu . . . . .	24
4.3. Rješavanje Laplaceove diferencijalne jednačbe . . . . .	25
<b>5. Primjena Laplaceove jednačbe na električni potencijal u elektrotehnici</b>	<b>31</b>
5.1. Električni potencijal . . . . .	31
5.2. Poissonova diferencijalna jednačba . . . . .	32
5.3. Određivanje potencijala i Dirichletov rubni problem . . . . .	33
5.4. Laplaceova jednačba u polarnim koordinatama . . . . .	35
5.5. Primjer izračuna električnog potencijala . . . . .	36
<b>6. Zaključak</b>	<b>41</b>
<b>Literatura</b>	<b>42</b>
<b>Sažetak i ključne riječi</b>	<b>43</b>
<b>Summary and key words</b>	<b>44</b>

## 1. Uvod

Parcijalne diferencijalne jednačbe nam omogućuju opisati zakonitosti mnogih fizičkih problema kao što su: titranje, ponašanje struje i napona u strujnim krugovima, prijenos topline... Razlikujemo: hiperboličke, paraboličke i eliptičke jednačbe. Kao pomoć pri rješavanju parcijalnih diferencijalnih jednačbi koristimo mnoge metode, a jedna od njih je Fourierova metoda koja je objašnjena u ovom radu.

Tema ovoga rada je Laplaceova jednačba (eliptičke jednačbe) koja se pojavljuje u mnogim znanstvenim područjima. Ime je dobila po francuskom matematičaru i astronomu Pierre-Simonu de Laplaceu koji se bavio pronalaskom i istraživanjem njenih rješenja.

Laplaceova jednačba je linearna homogena parcijalna diferencijalna jednačba drugog reda koju koristimo kako bismo riješili mnoge fizikalne probleme (elektrostatika, mehanika fluida i nauka o toplini). Kod Laplaceove jednačbe potrebno je spomenuti Laplaceov operator kojeg primjenjujemo kada koristimo matematičke metode u fizikalnim problemima. Definiran je kao zbroj ostalih parcijalnih derivacija neke funkcije po svim njenim varijablama.

Rad započinjemo objašnjenjem Fourierovih redova, potom ćemo objasniti vrste parcijalnih diferencijalnih jednačbi, početne i rubne uvjete. Kako je tema ovoga rada Laplaceova jednačba, spomenuti ćemo i tvorca Laplaceove jednačbe, njene rubne uvjete te ćemo na jednom primjeru riješiti Laplaceovu jednačbu. Na kraju ćemo pokazati primjenu Laplaceove jednačbe na električni potencijal u elektrotehnici.



## 2. Fourierovi redovi

Fourierova analiza omogućuje nam modeliranje periodičnih pojava koje se često pojavljuju u inženjerstvu i drugdje (rotirajući dijelovi strojeva, izmjenične električne struje ili kretanje planeta). Glavna ideja Fourierove analize je prikazati komplicirane funkcije kao jednostavne periodične funkcije, kao što su kosinus i sinus. Takvu sumu nazivamo Fourierov red. Otkriće Fourierove analize imalo je golem utjecaj kako na primijenjenu matematiku, tako i na matematiku u cjelini. [1]

Ideja koju je Jean Fourier postavio je problem rješavanja parcijalne diferencijalne jednačbe za širenja topline. On je u razdoblju od 1804. do 1807. godine razvio teorije o širenju topline i Fourierovim redovima, a svoja je zapažanja objavio u radu *O širenju topline u čvrstim tijelima* iz 1822. godine. Tom radu suprostavljali su se neki od poznatih matematičara kao što su Lagrange i Laplace. Nisu se slagali sa Fourierovom tvrdnjom da se sve (pa čak i nederivabilne) funkcije mogu razviti u trigonometrijski red. Iako derivabilnost nije nužan uvjet za zapisivanje funkcije kao sume sinusa, poslije će se pokazati da je prethodna Fourierova tvrdnja ipak bila preambiciozna. Fourierova ideja reprezentacije funkcije pomoću sinusa i kosinusa, između ostalog je bila temelj za danas iznimno korištenu diskretnu Fourierovu transformaciju koja ima široku multimedijску primjenu (JPEG, MP3).

Temelj ovog rada su Fourierovi redovi koji počivaju na sljedećem važnom svojstvu trigonometrijskih funkcija koje preuzimamo iz [2].

**Teorem 2.1.** *Funkcije iz skupa  $\{\cos ax, \sin ax, a \in \mathbb{N}\}$  međusobno su okomite, tj. vrijedi*

$$\langle \sin ax, \cos bx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin ax \cos bxdx = 0, \quad (2.1)$$

$$\langle \cos ax, \cos bx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos ax \cos bxdx = 0, \quad a \neq b, \quad (2.2)$$

$$\langle \sin ax, \sin bx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin ax \sin bxdx = 0, \quad a \neq b, \quad (2.3)$$

pri čemu  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  označava standardni skalarni produkt funkcija na  $[-\pi, \pi]$ , odnosno

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx. \quad (2.4)$$

*Dokaz.* Funkcija kosinus je parna, a funkcija sinus je neparna. Pomnožimo li takve dvije funkcije, rezultat će biti neparna funkcija, a integral koji ima simetrične granice neparne funkcije jednak je nuli.

Za tvrdnje (2.2) i (2.3) koristiti ćemo se formulama za transformaciju umnoška trigonometrijskih funkcija u zbroj:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y)), \quad (2.5)$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y)). \quad (2.6)$$

Slijedi:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ax \cos bxdx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(a + b)xdx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(a - b)xdx = \\ &= \frac{1}{2(a + b)} \sin(a + b)\pi + \frac{1}{2(a + b)} \sin(a + b)\pi + \frac{1}{2(a - b)} \sin(a - b)\pi + \\ & \quad \frac{1}{2(a - b)} \sin(a - b)\pi = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

čime je dokazana tvrdnja (2.2). Tvrdnja (2.3) dokazuje se analogno, primjenom formule (2.5).  $\square$

Od velike je važnosti i sljedeći teorem.

**Teorem 2.2.** Za funkcije iz skupa  $\{\cos ax, \sin ax, a \in \mathbb{N}\}$  vrijedi:

$$\langle \sin ax, \sin ax \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 ax dx = \pi, \quad (2.8)$$

$$\langle \cos ax, \cos ax \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 ax dx = \pi. \quad (2.9)$$

*Dokaz.* Za  $a \neq 0$ , primjenom formule

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad (2.10)$$

dobivamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 ax dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2ax) dx = \pi - \frac{1}{2a} \sin 2a\pi + \frac{1}{2a} \sin 2a\pi = \pi. \quad (2.11)$$

Kada vrijedi  $a = 0$  dobivamo:

$$\langle \sin 0x, \sin 0x \rangle = 0, \quad (2.12)$$

$$\langle \cos 0x, \cos 0x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi, \quad (2.13)$$

čime je tvrdnja dokazana. Analogno se dokazuje formula za kosinuse, pri čemu se koristi jednakost

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x). \quad (2.14)$$

$\square$

Za svaku funkciju  $f(x)$  iz prostora  $L^2[-\pi, \pi]$  vrijediti će reprezentacija dana u [1]:

$$f(x) = \sum_{a=0}^{\infty} (a_a \cos ax + b_a \sin ax). \quad (2.15)$$

## 2.1. Joseph Fourier

Tvorac Fourierovog reda je Joseph Fourier. Fourier je bio francuski matematičar i fizičar koji je rođen u gradu Auxereu 21. ožujka 1768. godine. Bio je profesor u školi u Parizu. Godine 1798. sudjelovao je u Napoleonovom pohodu na Egipat (sudjelovao je kao savjetnik i znanstvenik). Njegovo društveno djelovanje bilo je veliko te čak i krater na Mjesecu nosi njegovo ime (Fourier (krater)).

Na Pariškom institutu 21. prosinca 1807. godine pročitani su njegovi važni memoari "O širenju topline u čvrstim tijelima" koje je pisao od 1804. do 1807. godine. Odbor su činili Laplace, Lagrange, Lacroix i Monge koji je osnovan da izvještava o radu. Danas su njegovi memoari vrlo cijenjeni no u to vrijeme su smatrani kontroverzima.



Slika 2.1. Joseph Fourier. Izvor [3]

Godine 1822. Fourier objavljuje svojim prvi rad koji nosi naslov Analitička teorija topline. U tom radu analizirao je problem širenja topline. Problem širenja topline opisan je parcijalnim diferencijalnim jednažbama i u tom radu koristio je svoj revolucionarni način prikazivanja funkcija kako bi riješio problem. Na taj način doprinjeo je mnogo matematičkoj fizici. Iza sebe ostavio je nedovršeno djelo u kojem se bavio matematičkom analizom jednažbi te ga je dopunio i objavio 1831. godine francuski matematičar Henri Navier<sup>1</sup>.

Fourier je jedan od prvih koji je definirao učinak staklenika. Izračunao je da bi se nebesko tijelo koje je veličine Zemlje trebalo više hladiti kada bi toplina dolazila samo iz Sunčeve energije. Nekoliko godina kasnije, dolazi do spoznaje da temperatura Zemljine površine u velikoj mjeri ovisi i o plinovima u Zemljinoj atmosferi. Time je ušao u trag spoznajama koje će kasnije nazivati učinak(efekt) staklenika.

Joseph Fourier preminuo je 16.svibnja 1830. godine u Parizu. [4]

## 2.2. Fourierov red

Reprezentaciju funkcije (2.15) zvat ćemo razvojem funkcije  $f(x)$  u Fourierov red, a sada ćemo odrediti koeficijente tog reda. Na osnovu Teorema 2.1 i 2.2 dobivamo:

$$\langle f(x), \sin bx \rangle = \sum_{a=0}^{\infty} (a_a \langle \cos ax, \sin bx \rangle + b_a \langle \sin ax, \sin bx \rangle) = \quad (2.16)$$

$$b_b \langle \sin bx, \sin bx \rangle = b_b \pi.$$

Iz ovog izraza slijedi:

$$b_a = \frac{1}{\pi} \langle f(x), \sin ax \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin ax dx, \quad a > 0, \quad (2.17)$$

dok za  $a = 0$  vrijedi  $b_a = 0$ .

Analogno se dobiva:

$$a_a = \frac{1}{\pi} \langle f(x), \cos ax \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos ax dx, \quad a > 0, \quad (2.18)$$

dok za  $a = 0$  vrijedi:

$$\langle f(x), \cos 0x \rangle = \sum_{a=0}^{\infty} (a_a \langle \cos ax, \cos 0x \rangle + b_a \langle \sin ax, \cos 0x \rangle) = \quad (2.19)$$

$$a_0 \langle \cos 0x, \cos 0x \rangle = a_0 \cdot 2\pi,$$

---

<sup>1</sup>Claude-Louis Navier (Dijon, 10. veljače 1785. - Pariz, 21. kolovoza 1836.), rođen kao Claude Louis Marie Henri Navier, francuski inženjer i fizičar specijaliziran za mehaniku, Navier-Stokesove jednažbe nazvane su po njemu i Georgeu Gabrielu Stokesu

te je

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \langle f(x), \cos 0x \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (2.20)$$

S ovako izvedenim koeficijentima, Fourierov red obično se zapisuje na sljedeći način:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{a=1}^{\infty} (a_a \cos ax + b_a \sin ax), \quad (2.21)$$

gdje je

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (2.22)$$

$$a_a = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos ax dx \quad a = 1, 2, \dots, \quad (2.23)$$

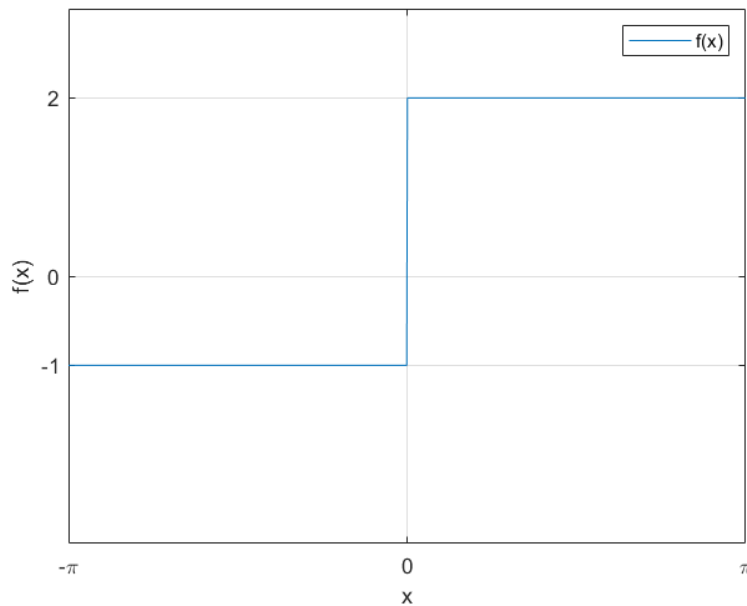
$$b_a = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin ax dx \quad a = 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

Pokažimo sada na jednom primjeru kako se pomoću navedenih formula izračunava Fourierov red.

**Primjer 2.1.** Neka je zadana funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \in [0, \pi >, \\ -1, & x \in [-\pi, 0 > \end{cases}, \quad (2.25)$$

za koju vrijedi  $f(x) = f(x+2\pi)$ . Odredimo njen Fourierov razvoj. Izgled zadane funkcije prikazan je na sljedećoj slici.



Slika 2.2. Grafički prikaz funkcije  $f(x)$ . Izvor: izradio autor

Za dobivanje vrijednosti koeficijenta  $a_0$  koristiti ćemo prethodno zapisanu formulu (2.22):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (2.26)$$

Uvrstimo li zadane vrijednosti funkcije  $f(x)$  na prethodno zadanim granicama, dobivamo:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2 dx = 1. \quad (2.27)$$

Sada ćemo odrediti vrijednost koeficijenta  $a_a$  pomoću formule (2.23):

$$a_a = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos ax dx. \quad (2.28)$$

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti funkcije dobivamo:

$$a_a = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \cos ax dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \cos ax dx. \quad (2.29)$$

Korištenjem metode supstitucije dobijemo:

$$a_a = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{a} \sin ax \Big|_{-\pi}^0 + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{a} \sin ax \Big|_0^{\pi} = 0. \quad (2.30)$$

Koeficijent  $b_a$  iz (2.24) računamo na sličan način.

$$b_a = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin ax dx. \quad (2.31)$$

Uvrstimo vrijednosti funkcije  $f(x)$  i dobivamo:

$$b_a = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \sin ax dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \sin ax dx = \frac{3}{\pi a} (1 - \cos(\pi a)). \quad (2.32)$$

Znajući da je  $\cos(\pi a) = (-1)^a$ , dobivamo:

$$b_a = \frac{3}{\pi a} (1 - (-1)^a). \quad (2.33)$$

Sada kada znamo vrijednosti koeficijenata ostaje nam samo izračunati  $F(x)$  iz (2.21):

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{a=1}^{\infty} (a_a \cos(ax) + b_a \sin(ax)) = \quad (2.34)$$

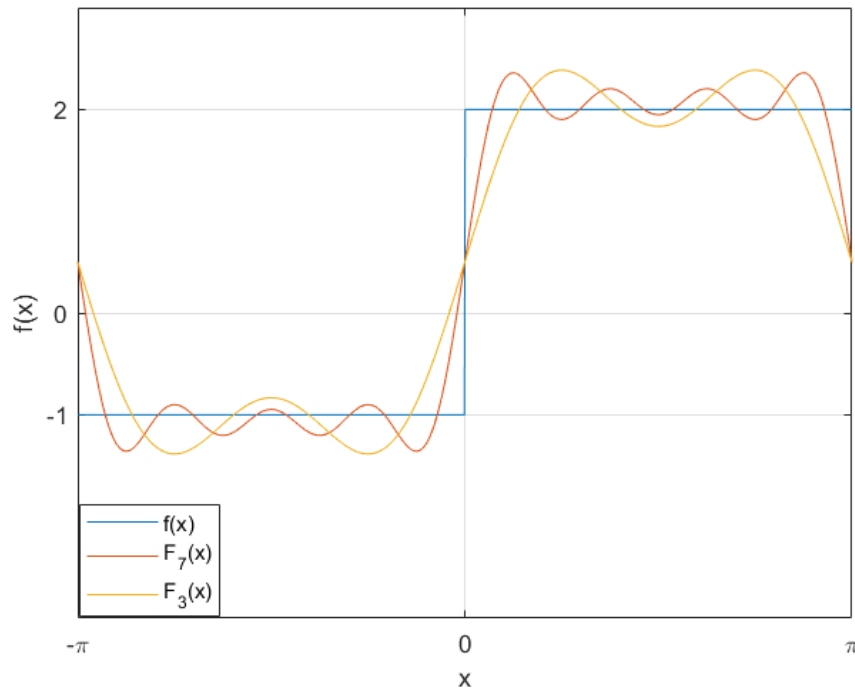
$$\frac{1}{2} + \frac{3}{\pi} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^a)}{a} \sin(ax). \quad (2.35)$$

Sada možemo razviti red do određenog stupnja čime dobijemo aproksimaciju početne funkcije. U ovom primjeru razviti ćemo Fourierov red do 3 odnosno 7 stupnja. Ovi redovi dani su u sljedećim izrazima:

$$F_3(x) = \frac{1}{2} + 2 \sin(x) + \frac{2 \sin(3x)}{3}, \quad (2.36)$$

$$F_3(x) = \frac{1}{2} + 2 \sin(x) + \frac{2 \sin(3x)}{3} + \frac{2 \sin(5x)}{5} + \frac{2 \sin(7x)}{7}. \quad (2.37)$$

Ovo sad možemo prikazati grafički.



Slika 2.3. Grafički prikaz funkcija  $f(x)$ ,  $F_3(x)$ ,  $F_7(x)$ . Izvor: izradio autor

Iz (2.3) vidimo da veći stupanj razvoja Fourierovog reda znači bolju aproksimaciju početne funkcije. Teoretski ako Fourierov red razvijemo do beskonačnog stupnja, Fourierova aproksimacija savršeno odgovara početnoj funkciji. Međutim znamo da red ne možemo razviti do beskonačnosti pa će uvijek biti prisutna greška aproksimacije.

### 2.3. Fourierov red funkcije proizvoljna perioda

Nije realno za očekivati da ćemo u praksi susretati samo funkcije s temeljnom periodom  $T = 2\pi$ . Stoga ćemo razmatranja iz prethodnog poglavlja generalizirati, kao što je dano u [6], na funkcije koje su definirane na intervalu  $[-L, L]$ . U nastavku ćemo promotriti linearno preslikavanje koje interval  $[-\pi, \pi]$  preslikava u interval  $[-L, L]$  kako bismo dobili Fourierov red za funkcije definirane na intervalu  $[-L, L]$ . To će preslikavanje biti definirano s

$$x = \frac{L}{\pi}y, \quad (2.38)$$

odakle je

$$y = \frac{\pi}{L}x, \quad dy = \frac{\pi}{L}dx, \quad \tilde{f}(x) = f(y), \quad (2.39)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{a=1}^{\infty} \left( a_a \cos \frac{a\pi x}{L} + b_a \sin \frac{a\pi x}{L} \right), \quad (2.40)$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad (2.41)$$



$$a_a = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{a\pi x}{L} dx, \quad (2.42)$$

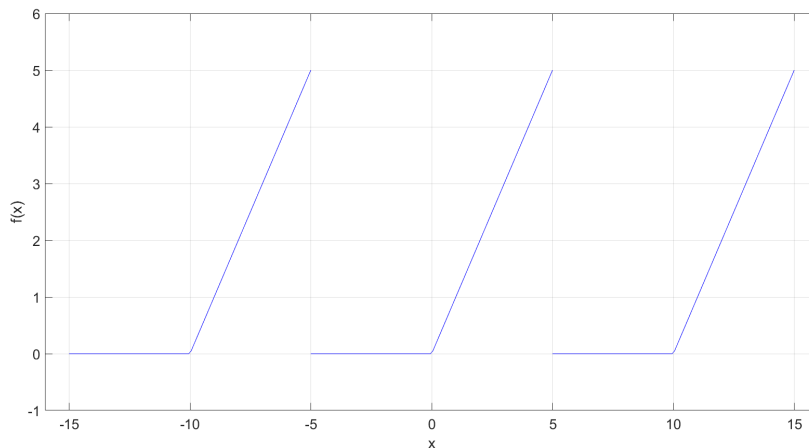
$$b_a = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{a\pi x}{L} dx. \quad (2.43)$$

Na sljedećem primjeru pokazati ćemo kako se pomoću prethodnih formula izračunava Fourierov red.

**Primjer 2.2.** Neka je zadana funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle 0, 5 \rangle, \\ 0, & x \in [-5, 0 \rangle \end{cases}, \quad (2.44)$$

za koju vrijedi  $f(x) = f(x + 10)$ . Ovu funkciju prikazat ćemo na sljedećoj slici.



Slika 2.4. Grafički prikaz funkcije  $f(x)$ . Izvor: izradio autor.

Odredimo njen Fourierov razvoj.

Za dobivanje vrijednosti koeficijenta  $a_0$  koristiti ćemo prethodno zapisanu formulu (2.41):

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx. \quad (2.45)$$

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti funkcije  $f(x)$  na unaprijed određenim granicama, dobivamo:

$$a_0 = \frac{1}{5} \int_0^5 x dx = \frac{5}{2}. \quad (2.46)$$

Koeficijent  $a_a$  određujemo pomoću formule (2.42):

$$a_a = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{a\pi x}{L} dx. \quad (2.47)$$

Uvrstimo li zadane vrijednosti funkcije, dobivamo:

$$a_a = \frac{1}{5} \int_0^5 x \cos \frac{a\pi x}{L} dx. \quad (2.48)$$

Korištenjem metode parcijalne integracije dobijemo:

$$a_a = -\frac{1}{a\pi} \int_0^5 \sin \left( \frac{a\pi x}{5} \right) dx. \quad (2.49)$$

Kada uvrstimo granice, dobivamo:

$$a_a = -\frac{1}{a\pi} \cdot \frac{5}{a\pi} \left( -\cos \frac{a\pi x}{5} \right) \Big|_0^5 = \frac{5}{a^2\pi^2} ((-1)^a - 1). \quad (2.50)$$

Koeficijent  $b_a$  iz (2.43) izračunat ćemo na sličan način.

$$b_a = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{a\pi x}{L} dx. \quad (2.51)$$

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti, dobivamo:

$$b_a = \frac{1}{5} \int_0^5 x \sin \left( \frac{a\pi x}{5} \right) dx. \quad (2.52)$$

Korištenjem metode parcijalne integracije, dobivamo:

$$b_a = \frac{1}{5} \left[ \frac{5x}{a\pi} \cos \left( \frac{a\pi x}{5} \right) \Big|_0^5 + \frac{5}{a\pi} \int_0^5 \cos \left( \frac{a\pi x}{5} \right) dx \right] = \quad (2.53)$$

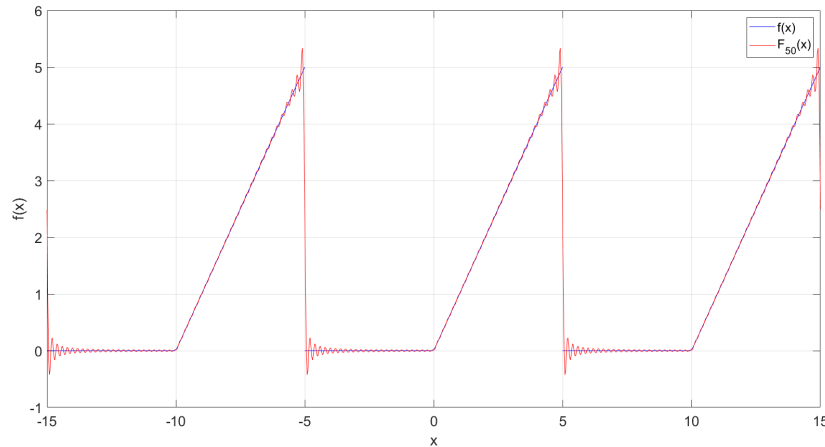
$$- \frac{5}{a\pi} (-1)^a. \quad (2.54)$$

Znajući vrijednosti svih koeficijenata možemo izračunati  $F(x)$  iz (2.40):

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{a=1}^{\infty} \left( a_a \cos \frac{a\pi x}{L} + b_a \sin \frac{a\pi x}{L} \right) = \quad (2.55)$$

$$\frac{5}{4} + \frac{5}{\pi^2} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{((-1)^a - 1)}{n^2} \cos \frac{a\pi x}{5} - \frac{5}{\pi} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{(-1)^a}{a} \sin \frac{a\pi x}{5}. \quad (2.56)$$

Sad rezultat možemo provjeriti grafičkim prikazom razvijenog Fourierovog polinoma. U svrhu ovog primjera polinom ćemo razviti do pedesetog stupnja. Grafički prikaz početne funkcije i razvijenog reda dan je sljedećom slikom.



Slika 2.5. Grafički prikaz funkcije  $f(x)$  i  $F_{50}(x)$ . Izvor: izradio autor

## 2.4. Konvergencija Fourierova reda

Već je iz same definicije  $L_2$  prostora jasno da Fourierov red postoji za integrabilne funkcije. Precizni uvjeti koji definiraju postojanje Fourierova reda zovu se Dirichletovi uvjeti preuzimamo iz [2], a iskazani su sljedećom definicijom.

**Definicija 1.** Dirichletove uvjete funkcija  $f$  zadovoljava na intervalu,  $[a, b]$  kada vrijedi da je:

1. funkcija  $f$  je neprekidna po dijelovima i njezini su prekidi prve vrste,
2. funkcija  $f$  je monotona ili ima najviše konačan broj strogih ekstrema

Konvergencija Fourierova reda opisana je sljedećim teoremom:

**Teorem 2.3.** Funkcija  $f$  je po dijelovima glatka periodična funkcija koja zadovoljava Dirichletove uvjete. Fourierov red  $S(x)$  funkcije  $f$  konvergira ka funkciji  $f$  u svim točkama u kojima je ona neprekidna, dok u skokovima vrijedi:

$$S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}. \quad (2.57)$$

## 2.5. Fourierov red parnih i neparnih funkcija

Kao što vidimo u [2], kada je funkcija  $f$ , definirana na simetričnom intervalu  $[-L, L]$ , parna tj. neparna, njezin Fourierov red sadržavati će samo kosinus, odnosno sinus članove.

1. Kada je  $f(x) = f(-x)$  za svaki  $x$ , tj.  $f$  parna funkcija, tada je  $b_n = 0$  za svaki  $n$  jer je odgovarajuća podintegralna funkcija u formulama (2.41), (2.42), (2.43) neparna. Njezin Fourierov red glasi:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{a=1}^{\infty} a_a \cos \frac{a\pi x}{L}. \quad (2.58)$$

Koeficijenti koji se nalaze uz kosinus funkcije računaju se po sljedećim formulama:

$$a_a = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{a\pi x}{L} dx, \quad a \geq 0. \quad (2.59)$$

2. Kada je  $f(-x) = -f(x)$  za svaki  $x$ , tj. ako je  $f$  neparna funkcija, tada zbog istih razloga vrijedi  $a_a = 0$  za svaki  $n$ . Fourierov red glasi:

$$f(x) = \sum_{a=1}^{\infty} b_a \sin \frac{a\pi x}{L}. \quad (2.60)$$

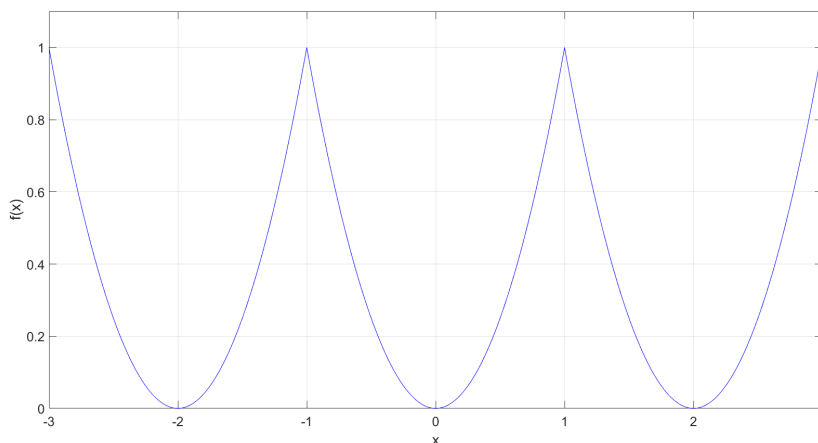
dok koeficijente računamo po formulama:

$$b_a = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{a\pi x}{L} dx, \quad a \geq 1. \quad (2.61)$$

Funkciju  $f$  razvili smo u Fourierov red po kosinus, odnosno sinus funkcijama.

Prethodne tvrdnje prikazati ćemo na sljedećim primjerima.

**Primjer 2.3.** Razvijmo u Fourierov red funkciju koja je definirana na intervalu  $[-1, 1]$ , formulom  $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = f(x + 2k)$  [5]. Sada ćemo funkciju prikazati grafički.



Slika 2.6. Grafički prikaz funkcije  $f(x)$ . Izvor: izradio autor

Iz slike (2.6) vidimo da je funkcija  $f(x)$  parna. Vrijedi da je  $L=1$ . Koristeći formulu (2.59) dobivamo koeficijente:

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}, \quad (2.62)$$

$$a_a = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{a\pi x}{L} dx = 2 \int_0^1 x^2 \cos(a\pi x) dx. \quad (2.63)$$

Uzastopnom parcijalnom integracijom dobivamo:

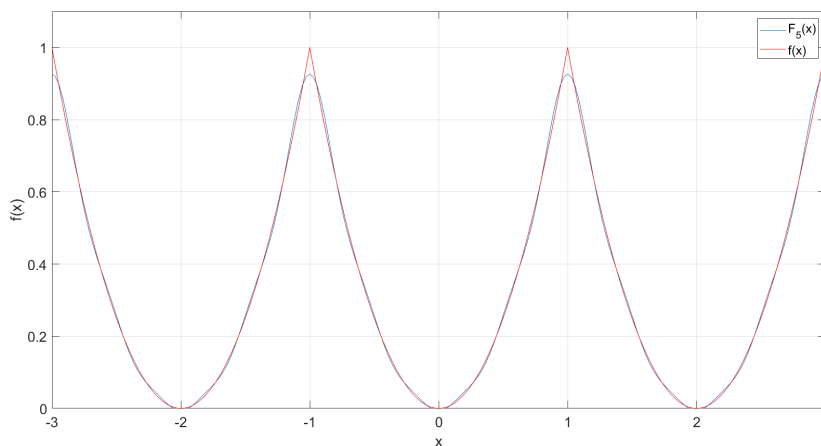
$$a_a = \frac{4}{\pi^2 a^2} (-1)^a. \quad (2.64)$$

Sukladno tome, dobiveni Fourierov red funkcije  $f$  biti će:

$$F(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{(-1)^a}{a^2} \cos a\pi x = \quad (2.65)$$

$$\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \left( \cos \pi x - \frac{\cos 2\pi x}{2^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} - \dots \right) \quad (2.66)$$

Razvojem Fourierovog reda možemo dobiti aproksimaciju početne funkcije što ćemo prikazati na sljedećoj slici.



Slika 2.7. Grafički prikaz funkcija  $f(x)$  i  $F_5$ . Izvor: izradio autor

Ako je funkcija  $f$  u početku definirana na intervalu  $[0, L]$ , možemo je razviti u red samo po kosinus, odnosno samo po sinus funkcijama. Prvo ju moramo nadopuniti na intervalu  $[-L, 0]$  do parne, odnosno neparne funkcije. Njezin će period tada iznositi  $T = 2L$ , i takva dva proširenja se razlikuju na intervalu  $[-L, 0]$ . U nastavku je ćemo ovo kroz dane primjere i pokazati.

**Primjer 2.4.** Funkciju  $f(x) = \frac{\pi}{4}$  razvijte u Fourierov red na intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$  po sinus funkcijama [5]. Pomoću dobivenog razvoja sumirajte redove

$$a) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots;$$

$$b) 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \dots$$

Računamo prema formuli (2.61):

$$b_a = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{a\pi x}{L} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} \sin(ax) dx = \frac{1}{2a} [1 - (-1)^a]. \quad (2.67)$$

Stoga,

$$b_{2a} = 0, \quad (2.68)$$

$$b_{2a+1} = \frac{1}{2a+1}. \quad (2.69)$$

Zbog toga

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{a=0}^{\infty} \frac{\sin(2a+1)x}{2a+1} = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots, \quad 0 < x < \pi \quad (2.70)$$

Posebno, za  $x = \frac{\pi}{2}$  dobijemo:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots, \quad (2.71)$$

a za  $x = \frac{\pi}{3}$  dobijemo

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \dots \right), \quad (2.72)$$

i suma reda pod b) iznosi  $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ .

**Primjer 2.5.** Funkciju  $f(x) = x$  potrebno je razviti u intervalu  $[0, \pi]$  [5].

a) po kosinus funkcijama; b) po sinus funkcijama.

Koristeći razvoj u a) potrebno je izračunati sumu reda  $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$

a) Funkcija se može proširiti na simetričan interval  $[-\pi, \pi]$  tako da bude parna ili neparna. Proširiti ćemo je do parne funkcije. Tada je poluperiod  $L = \pi$  i prema formuli (2.59) imamo

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi. \quad (2.73)$$

$$a_a = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{a\pi x}{L} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos ax dx. \quad (2.74)$$

Uvrstimo li u formulu, dobiti ćemo:

$$a_a = \frac{2}{\pi} \left( y \frac{\sin(ax)}{a} \Big|_0^\pi - \frac{1}{a} \int_0^\pi \sin ax dx \right) = \quad (2.75)$$

Nadalje:

$$\frac{2}{a^2\pi} \cos ax \Big|_0^\pi = \frac{2}{a^2\pi} [\cos n\pi - 1]. \quad (2.76)$$

Dakle,

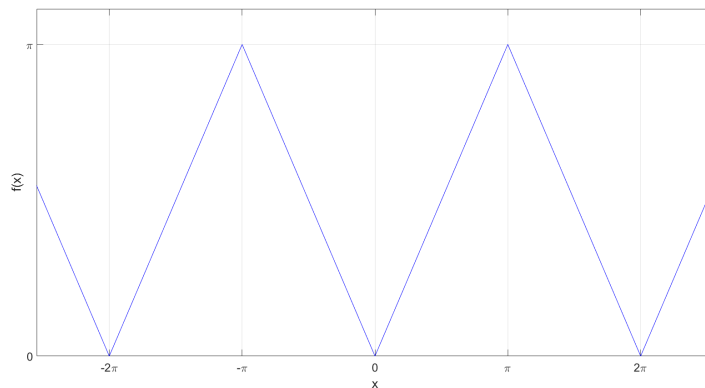
$$a_{2a} = 0, \quad a_{2a+1} = -\frac{4}{(2a+1)^2\pi}. \quad (2.77)$$

Tako smo dobili:

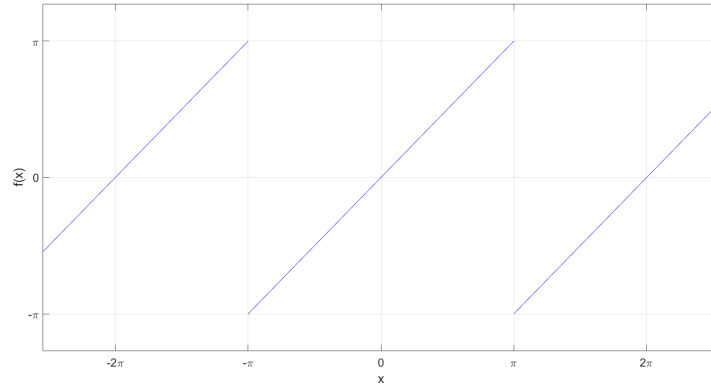
$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{a=0}^{\infty} \frac{1}{(2a+1)^2} \cos(2a+1)x, \quad 0 \leq x < \pi. \quad (2.78)$$

Na intervalu  $[-\pi, 0]$  ovaj red predstavlja funkciju  $-x$ . Na slici (2.8) nacrtan je graf dobivenog Fourierovog reda. Uvrstimo li u (2.78)  $x = 0$ , dobivamo:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}. \quad (2.79)$$



Slika 2.8. Parno periodično proširenje funkcije  $f(x) = x$ . Izvor: Izradio autor



Slika 2.9. Neparno periodično proširenje funkcije  $f(x) = x$ . Izvor: Izradio autor

Prema formuli (2.61),

$$b_a = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{a\pi x}{L} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin ax dx. \quad (2.80)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left( -x \frac{\cos(ax)}{a} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{a} \int_0^{\pi} \cos ax dx \right) = \quad (2.81)$$

Dobivamo:

$$b_a = -\frac{2}{a} \cos a\pi = \frac{2}{\pi} (-1)^{a+1}. \quad (2.82)$$

te je:

$$f(x) = 2 \sum_{a=1}^{\infty} \frac{(-1)^{a+1}}{(n)} \sin(ax), \quad 0 < x < \pi. \quad (2.83)$$

Ovaj trigonometrijski red je prikazan na slici 2.9.



### 3. Parcijalne diferencijalne jednačbe

Jednačbe koje sadrže jednu ili više parcijalnih derivacija neke nepoznate funkcije i koja ovisi o najmanje dvije nezavisne varijable nazivamo parcijalne diferencijalne jednačbe. Njihova primjena je raznolika; modeliranje problema u dinamici, kvantnoj mehanici, elektromagnetizmu,...

Opći oblik diferencijalne jednačbe preuzimamo iz [7], a dan je u sljedećoj definiciji.

**Definicija 3.1.** *Svaki matematički izraz oblika:*

$$F \left( g_1, \dots, g_n, h, \frac{\partial h}{\partial g_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial g_n}, \dots, \frac{\partial^m h}{\partial^m g_1}, \dots, \frac{\partial^m h}{\partial^m g_n} \right) = 0, \quad (3.1)$$

*nazivamo parcijalnom diferencijalnom jednačbom.*

*Parcijalnu derivaciju funkcije  $h$  po varijabli  $g$  definiramo kao:*

$$\frac{\partial h}{\partial g}, \quad (3.2)$$

*$F$  predstavlja funkciju odgovarajućeg broja argumenata. Parametar  $m$  označava red najviše derivacije odnosno red samo jednačbe.*

Do izraza za linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačbu drugog reda dođemo pomoću izraza (3.1).

Sljedećim izrazom:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial g^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial g^2} + \frac{\partial u}{\partial u} = 5 \quad (3.3)$$

prikazana je parcijalna jednačba u kojoj je  $u(g, h)$  funkcija koju ne znamo, odnosno  $u(g, h)$  predstavlja rješenje te jednačbe.

Jedna od varijabli u parcijalnoj diferencijalnoj jednačbi predstavlja vrijeme, dok druga varijabla najčešće predstavlja prostor. Parcijalne diferencijalne jednačbe klasificiraju se pojmom reda, a red diferencijalne jednačbe određen je redom najviše derivacije koja se pojavljuje u jednačbi.

**Definicija 3.2.** *Svaki matematički izraz oblika*

$$Ah_{gg} + Bh_{zz} + Ch_{zz} + Dh_g + Eh_z + Fh = G, \quad (3.4)$$

*definiramo kao linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačbu 2. reda sa dvije nezavisne varijable. Gdje oznake  $A, B, C, D, E, F$  i  $G$  označavaju funkcije varijabli  $g$  i  $z$ , a  $h(g, z)$  je nepoznata funkcija (rješenje).*

Prethodnoj napisanoj linearnoj parcijalnoj diferencijalnoj jednadžbi (3.4) odgovara funkcija

$$\Delta(g, h) = B^2(g, h) - A(g, h)C(g, h), \quad (3.5)$$

na temelju koje jednadžbe možemo podijeliti u 3 skupine

1. Ako vrijedi da je  $B^2 - 4AC = 0$ , jednadžba je parabolična,
2. Ako vrijedi da je  $B^2 - 4AC > 0$ , jednadžba je hiperbolična,
3. Ako vrijedi da je  $B^2 - 4AC < 0$ , jednadžba je eliptična.

Svaka skupina parcijalnih diferencijalnih jednadžbi iziskuje rubne uvjete koji će biti objašnjeni u sljedećem poglavlju. Rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe ovisi o proizvoljnim funkcijama koje su posljedica integriranja.

Ako je funkcija  $F$  linearna u funkciji  $h$  i svim njezinim derivacijama onda možemo reći da je parcijalna diferencijalna jednadžba linearna jednadžba. U tom slučaju koeficijenti koji množe  $h$  i njezine derivacije ovise samo o nezavisnim varijablama  $g_1, \dots, g_n$ . Za slučaj kada funkcija  $F$  nije linearna u funkciji  $h$  i svim njezinim derivacijama, ne vrijedi linearnost. U slučaju da je jednadžba linearna samo u parcijalnim derivacijama najvišeg reda funkcije  $h$  onda takvu za takvu jednadžbu kažemo da je kvazi - linearna.

U slučaju kada bi rezultat ( $G$ ) u izrazu (3.4) bio jednak nuli takvu jednadžbu definiramo kao homogenu, u protivnom jednadžba je nehomogena. To možemo objasniti i na način da kada svi članovi parcijalne diferencijalne jednadžbe ovise o nekoj od nezavisnih varijabli ili o njihovim derivacijama za jednadžbu kažemo da je nehomogena, u suprotnom je homogena.

Linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda primjenjujemo u inženjerstvu. Zbog svoje široke primjene često ih nazivamo i jednadžbama matematičke fizike. Nabrojati ćemo neke od primjera takvih jednadžbi:

1. jednodimenzionalna jednadžba provođenja topline:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial g^2}, \quad (3.6)$$

2. jednodimenzionalna valna jednadžba:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial g^2}, \quad (3.7)$$

3. dvodimenzionalna Laplaceova jednadžba:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial g^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} = 0, \quad (3.8)$$

3. dvodimenzionalna Poissonova jednadžba:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial g^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} = f(g, h). \quad (3.9)$$

Rješenje parcijalnih diferencijalnih jednačbi ovisiti će o određenom broju konstanti jer se uvijek zadaju u nekoj domeni. Kako ne bi morali upotrebljavati konstante u rješenju, uz samu jednačbu nameću se dodatni uvjeti pomoću kojih se te konstante eliminiraju. U fizikalnim problemima razlikujemo početne i rubne uvjete.

### 3.1. Početni i rubni uvjeti

Parcijalne diferencijalne jednačbe imaju beskonačno mnogo rješenja. Kako bismo dobili rješenje jednačbe moramo odrediti sve njene konstante. Te konstante dobivamo uz pomoć rubnih odnosno početnih uvjeta koje zadajemo na početku. Jednačba bi trebala imati onoliko početnih i rubnih uvjeta koliko ima i konstanti.

Početni uvjeti su slični rubnim uvjetima. Razlika je u tome što su vezani za neku karakterističnu točku preko koje izračunavamo konstanta  $C$ . Njima opisujemo neku poznatu točku kroz koju prolazi graf rješenja diferencijalne jednačbe. Početni uvjeti imaju oblik:

$$u(x, 0) = g(x), \quad (3.10)$$

Početnim uvjetima opisujemo ponašanje neke funkcije u trenutku od kojeg promatramo funkciju, a najčešće je to  $t=0$ . Upravo zbog toga, kao što smo na početku i spomenuli, početni je uvjet često vezan uz varijablu vremena.

Rubne uvjete definiramo kao kombinacije vrijednosti nepoznate funkcije i njene derivacije na rubovima intervala na kojima tražimo rješenje. Namjena rubnih uvjeta je njima opišemo ponašanje funkcije na rubu njezine domene. Primjerice, rubni uvjeti su oblika:

$$u(0, t) = g(t), \quad (3.11)$$

Postoji nekoliko vrsta rubnih uvjeta koji su obrađeni u [9], te ćemo ih u nastavku objasniti.

**Definicija 3.3.** *Rubne uvjete koji vrijede za parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije varijable  $x$  i  $t$  na promatranom intervalu  $[n, m]$  definiramo kao:*

1.  $y(n, t) = y(m, t) = 0$  - Dirichletov rubni uvjet,
2.  $\frac{\partial y}{\partial x}(n, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(m, t) = 0$  - Neumannov rubni uvjet,
3.  $y(n, t) + \frac{\partial y}{\partial x}(n, t) = y(m, t) + \frac{\partial y}{\partial x}(m, t) = 0$  - Robinov rubni uvjet.

Sada ćemo objasniti nekoliko osnovnih vrsti diferencijalnih jednačbi koje preuzimamo iz [6].

### 3.2. Hiperboličke jednačbe

Glavni predstavnih hiperboličkih jednačbi je jednodimenzionalna valna jednačba koja je dana s:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial g^2}, \quad (3.12)$$

pri čemu je  $k^2$  definirana kao pozitivna konstanta u jednadžbi.

U praksi jednodimenzionalnom valnom jednadžbom opisujemo titranje žice. Stoga će rješenje jednadžbe  $u(g, t)$  opisivati položaj žice u točki  $g$  u nekom trenutku  $t$ .

### 3.3. Paraboličke jednadžbe

Provođenje topline opisano je paraboličkom jednadžbom čiji je oblik:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial g^2}, \quad (3.13)$$

pri čemu je  $k^2$  konstanta koja ima pozitivnu vrijednost.

### 3.4. Eliptičke jednadžbe

Laplaceova parcijalna jednadžba u dvije dimenzije glavni je predstavnik diferencijalnih jednadžbi eliptičkog tipa, a ujedno i tema ovog rada. Eliptička jednadžba dana je izrazom:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial g^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} = 0. \quad (3.14)$$

Osim Laplaceove jednadžbe, eliptičkim jednadžbama pripada i Poissonova jednadžba. Ona je dana oblikom:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial g^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} = f(g, h). \quad (3.15)$$

## 4. Laplaceova jednadžba

Tema ovoga završnog rada je Laplaceova jednadžba. Ime je dobila po francuskom matematičaru i astronomu Pierre-Simonu de Laplaceu koji se potkraj 18. stoljeća bavio dobivanjem njenih rješenja.

Kao što vidimo u [5] Laplaceova jednadžba je linearna homogena parcijalna diferencijalna jednadžba drugog reda koju koristimo kako bismo riješili mnoge fizikalne probleme (elektrostatika, mehanika fluida i nauka o toplini).

Kod Laplaceove jednadžbe potrebno je spomenuti Laplaceov operator koji ima značajnu primjenu kada se želimo koristiti matematičkim metodama pri rješavanju fizikalnih problema. Laplaceovim operatorom uspoređujemo vrijednosti funkcije u nekoj točki i u njenim susjednim točkama. Ono što je derivacija drugog reda radila u jednoj dimenziji, ona radi u tri. Definiramo ga kao zbroj drugih parcijalnih derivacija neke funkcije po svim njenim varijablama:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial g^2} + \frac{\partial^2}{\partial h^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (4.1)$$

### 4.1. Pierre-Simon de Laplace

Pierre-Simon de Laplace francuski je matematičar i astronom rođen u Beaumont-en-Auge 23. ožujka 1749. godine. Njegovi radovi imali su široku primjenu prilikom razvoja matematike, astronomije i statistike. Studirao je na nekoliko sveučilišta i predavao je matematiku. Laplace se danas zbog njegovog utjecaja i njegovih otkrića ubraja u najveće znanstvenike svih vremena i katkada ga se spominje kao francuskog Newtona.

Laplace je bio matematičar. Matematičku analizu smatrao je osnovnim sredstvom za rješavanje astronomskih i fizikalnih problema. Nekoliko puta uspio je otkriti izvanredne nove metode. Nije imao potrebe drugima dokazivati i objašnjavati rezultate u koje je bio siguran.

Zanimljivo je da je parcijalna diferencijalna jednadžba poznata kao Laplaceova jednadžba koja nosi ime po Laplaceu, bila poznata i prije njega. Osim Laplaceove jednadžbe još nekoliko matematičkih pojmova nosi ime po njemu. Pa tako i postupak za izračunavanje determinante, Laplaceov razvoj determinante. Prethodno smo već spomenuli i Laplaceov operator. Jedna od njegovih otkrića bila je i Laplaceova transformacija. To je vrsta transformacije funkcija koju koristimo prilikom rješavanja diferencijalnih jednadžbi. Ova se transformacija koristi npr. u avijaciji za izračunavanje lateralnog pomaka aviona. [11]



Slika 4.1. Pierre-Simon de Laplace. Izvor: [10]

#### 4.2. Laplaceova jednadžba u koordinatnom sustavu

Matematički gledano, možemo definirati beskonačno mnogo različitih koordinatnih sustava, ali u praktičnoj primjeni uglavnom koristimo određene koordinatne sustave koji najbolje opisuju standardnim problemima koje želimo riješiti.

Kao što vidimo u [1] Laplaceova parcijalna jednadžba može se izraziti preko dvije ili tri dimenzije u različitim koordinatama:

1. Laplaceova jednadžba u dvije dimenzije:

a) Kartezijske koordinate:

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy}. \quad (4.2)$$

b) Polarne koordinate:

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}. \quad (4.3)$$

2. Laplaceova jednadžba u tri dimenzije:

a) Kartezijske koordinate:

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}. \quad (4.4)$$

b) Cilindrične koordinate:

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz}. \quad (4.5)$$

c) Sferne koordinate:

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi} + \frac{\cot \phi}{r^2}u_\phi + \frac{1}{r^2 \sin \phi}u_{\theta\theta}. \quad (4.6)$$

Laplaceova jednadžba neovisna je o vremenskoj varijabli i zbog toga nije potrebno zadavati početne uvjete. Zbog toga zadajemo samo rubne uvjete odnosno uvjete na rubovima područja koje promatramo. Tri osnovna rubna uvjeta su: Dirichletov, Neumannov i mješoviti ili Robinov rubni uvjet.

Rubne uvjete postavljamo kako bismo dobili jedinstveno rješenje konkretnog fizikalnog problema. Primjerice, na rubovima domene možemo zadavati vrijednosti temperature ili potencijala (Dirichletovi rubni uvjeti) ili brzine strujanja fluida ili gustoće toplinskog toka (Neumannovi rubni uvjeti).

U ovom radu posebno ćemo razmatrati samo Dirichletov rubni uvjet.

### 4.3. Rješavanje Laplaceove diferencijalne jednadžbe

Sada ćemo riješiti primjer kojim ćemo pokazati kako se rješava Laplaceova parcijalna diferencijalna jednadžba u dvije dimenzije zadana s:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (4.7)$$

Jednadžbu ćemo promatrati na domeni:

$$0 < x < 4, \quad 0 < y < 4 \quad (4.8)$$

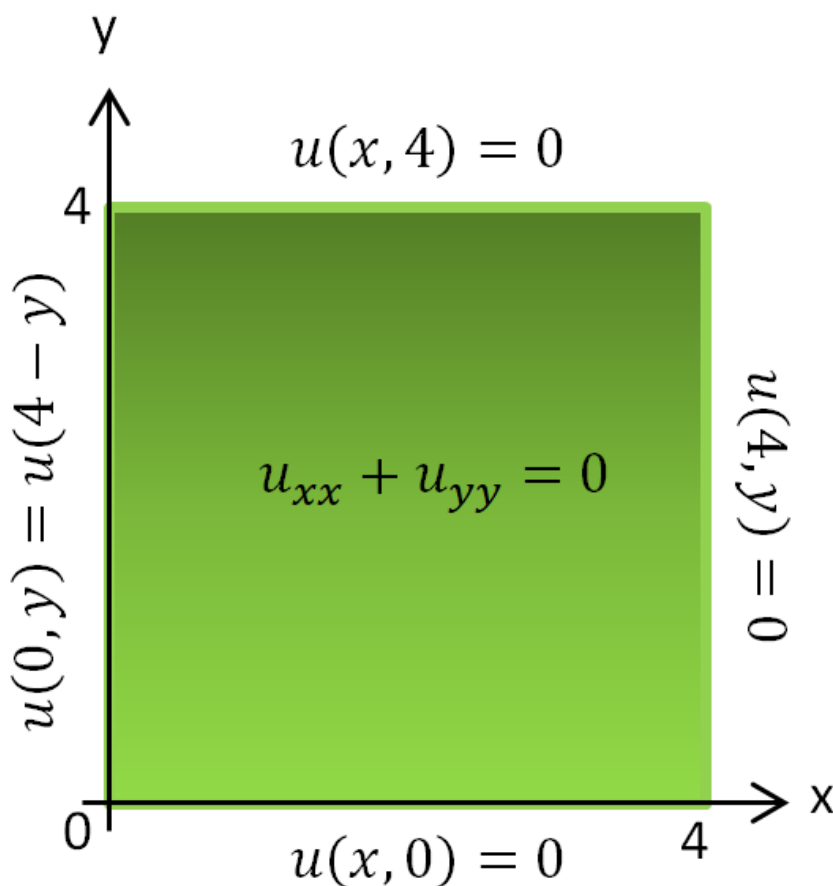
s rubnim uvjetima:

$$u(x, 0) = u(x, 4) = u(4, y) = 0 \quad (4.9)$$

i

$$u(0, y) = y(4 - y) \quad (4.10)$$

što je prikazano na slici.



Slika 4.2. Prikaz domene i rubnih uvjeta kod rubnog problema za Laplaceovu diferencijalnu jednadžbu. Izvor: izradio autor

Rješavanje započinjemo metodom separacije varijabli, pri čemu ćemo rješenje zapisati u obliku:

$$u(g, h) = X(g)Y(h). \quad (4.11)$$

Derivacijom dobivamo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial h^2} = XY'', \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial g^2} = X''Y. \quad (4.13)$$

Uvrštavanjem dobivenih izraza u jednadžbu (4.7) dobijemo:

$$XY'' + X''Y = 0. \quad (4.14)$$

Ako prethodni izraz podijelimo sa  $X$  i  $Y$  dobijemo:

$$\frac{Y''}{Y} + \frac{X''}{X} = 0, \quad (4.15)$$

Izjednačavanjem prethodnog izraza dobivamo:

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} = k \quad (4.16)$$



gdje je  $k$  konstanta jednaka, veća ili manja od 0.

Dobili smo dvije obične diferencijalne jednačbe koje su oblika:

$$X'' + kX = 0, \quad (4.17)$$

$$Y'' - kY = 0. \quad (4.18)$$

U nastavku ćemo razmotriti sva tri ishoda za tri moguća slučaja vrijednosti  $k$  te vidjeti koji je od njih jedini moguć.

Rubne uvjete zapisati ćemo pomoću funkcija  $X$  i  $Y$ . Vrijedi:

$$u(g, 0) = X(g)Y(0) = 0, \quad (4.19)$$

$$u(g, 4) = X(g)Y(4) = 0, \quad (4.20)$$

$$u(4, h) = X(4)Y(h) = 0, \quad (4.21)$$

$$u(0, h) = X(0)Y(h) = y(4 - h). \quad (4.22)$$

Zaključujemo da vrijedi:

$$Y(0) = 0, \quad (4.23)$$

$$Y(4) = 0, \quad (4.24)$$

$$X(4) = 0. \quad (4.25)$$

Sada ćemo riješiti slučaj kada konstanta ima vrijednost  $k = 0$  i ispitati je li taj slučaj uopće moguć. Iz formule (4.18) slijedi:

$$Y'' = 0, \quad (4.26)$$

dobivamo rješenje  $Y(h) = ah + b$ . Trebalo bi vrijediti  $a = b = 0$  radi zadanih uvjeta, odnosno  $Y(h) = 0$  što znači da je  $u(g, h) = X(g)Y(h) = 0$  ali to nije moguće zbog rubnog uvjeta  $u(0, h) = y(2 - h)$ . Zaključujemo da slučaj kada je  $k = 0$  nije moguć.

U drugom slučaju pretpostaviti ćemo da vrijedi  $k > 0$ , onda vrijedi  $k = \alpha^2$ . Diferencijalnu jednačbu oblika:

$$Y'' - kY = 0, \quad (4.27)$$

svesti ćemo jednačbu oblika

$$Y'' - \alpha^2 Y = 0, \quad (4.28)$$

čije je rješenje oblika:

$$Y(h) = Ae^{\alpha h} + Be^{-\alpha h}. \quad (4.29)$$

Kada uvrstimo u posljednji izraz prethodno zadane rubne uvjete dobivamo:

$$A + B = 0, \quad (4.30)$$

$$Ae^{4\alpha} + Be^{-4\alpha} = 0. \quad (4.31)$$

Dobiva se:

$$A(e^{4\alpha} - e^{-4\alpha}) = 0, \quad (4.32)$$

te je  $A = B = 0$ . Za ovaj slučaj opet vrijedi  $u(g, h) = X(g)Y(h) = 0$ . Iz toga zaključujemo da ni slučaj kada je  $k > 0$  nije moguć.

Preostaje nam još posljednji slučaj za koji vrijedi  $k < 0$ . Ako pretpostavimo da je  $k = -\alpha^2$ , dobivamo

$$Y'' + \alpha^2 Y = 0, \quad (4.33)$$

čije je rješenje dano:

$$Y(h) = A \cos(\alpha h) + B \sin(\alpha h). \quad (4.34)$$

Uvrstimo li rubni uvjet  $Y(0) = 0$  slijedi

$$Y(0) = A = 0, \quad (4.35)$$

a zbog toga:

$$Y(h) = B \sin(\alpha h). \quad (4.36)$$

Uvrstimo li da vrijedi  $Y(4) = 0$ , dobivamo

$$Y(h) = B \sin(4\alpha) = 0. \quad (4.37)$$

Ako bi vrijedilo da je  $B = 0$  onda bi vrijedilo i  $Y(h) = 0$  za koju smo već prethodno pokazali i utvrdili da nije moguća. Stoga treba biti:

$$\sin(4\alpha) = 0, \quad (4.38)$$

odnosno

$$4\alpha = n\pi, \quad (4.39)$$

iz toga proizlazi da je

$$\alpha = \frac{n\pi}{4}, \quad (4.40)$$

pa vrijedi

$$Y(h) = Y_n(h) = B \sin\left(\frac{n\pi h}{4}\right). \quad (4.41)$$

Možemo zaključiti kako je slučaj kada je  $k < 0$  jedini moguć.

Jednadžba koja opisuje funkciju  $X(g)$  sada ima oblik:

$$X'' - \left(\frac{n\pi}{4}\right)^2 X = 0, \quad (4.42)$$

čije rješenje izgleda

$$X_n(g) = C_n e^{\frac{n\pi g}{4}} + D_n e^{-\frac{n\pi g}{4}} \quad (4.43)$$

Kako je  $X(4) = X_n(4) = 0$ , slijedi

$$C_n e^{n\pi} + D_n e^{-n\pi} = 0. \quad (4.44)$$

Iz prethodnog izraza dobiti ćemo

$$D_n = -C_n e^{2n\pi}, \quad (4.45)$$

te je

$$X_n(g) = C_n \left( e^{\frac{n\pi g}{4}} - e^{2n\pi} e^{-\frac{n\pi g}{4}} \right). \quad (4.46)$$

Dobiti ćemo niz funkcija

$$u_n(g, t) = E_n \left( e^{\frac{n\pi g}{4}} - e^{2n\pi} e^{-\frac{n\pi g}{4}} \right) \sin \left( \frac{n\pi h}{4} \right), \quad (4.47)$$

za  $n = 1, 2, \dots$  pri čemu vrijedi  $E_n = B \cdot C_n$ , dok će konačno rješenje našeg problema biti funkcija

$$u(g, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left( e^{\frac{n\pi g}{4}} - e^{2n\pi} e^{-\frac{n\pi g}{4}} \right) \sin \left( \frac{n\pi h}{4} \right). \quad (4.48)$$

Kako bi odredili vrijednost parametra  $E_n$  uvrstiti ćemo preostali rubni uvjet. Za  $g = 0$  dobiti ćemo:

$$u(0, h) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n (1 - e^{2n\pi}) \sin \left( \frac{n\pi h}{4} \right) = h(4 - h). \quad (4.49)$$

Možemo zaključiti da će zbroj biti jednak zadanoj funkciji ako su brojevi  $E_n (1 - e^{2n\pi})$  za  $n = 1, 2, \dots$  koeficijenti Fourierovog razvoja po sinusima funkcije  $u(0, h) = y(4 - h)$  odnosno ako vrijedi:

$$E_n (1 - e^{2n\pi}) = \frac{2}{2} \left( \int_0^4 h(4 - h) \sin \left( \frac{nh\pi}{4} \right) dh \right) = \quad (4.50)$$

$$\int_0^4 4h \sin \left( \frac{nh\pi}{4} \right) dh - \int_0^4 h^2 \sin \left( \frac{nh\pi}{4} \right) dh. \quad (4.51)$$

Ove integrale riješavamo metodom parcijalne integracije. Za prvi integral koristiti ćemo:

$$u = 4h, \quad dv = \sin \left( \frac{nh\pi}{4} \right) dh, \quad du = 4dh, \quad v = -\frac{4}{n\pi} \cos \left( \frac{nh\pi}{4} \right), \quad (4.52)$$

a za drugi

$$u = h^2, \quad dv = \sin \left( \frac{nh\pi}{4} \right) dh, \quad du = 4h dh, \quad v = -\frac{4}{n\pi} \cos \left( \frac{nh\pi}{4} \right). \quad (4.53)$$

Uvrstimo li u prvi integral dobiti ćemo:

$$\int_0^4 4h \sin \left( \frac{nh\pi}{4} \right) dh = -\frac{16yh}{n\pi} \cos \left( \frac{nh\pi}{4} \right) \Big|_0^4 + \frac{16}{n\pi} \int_0^4 \cos \left( \frac{nh\pi}{4} \right) dh = -\frac{64}{n\pi} \cos(n\pi). \quad (4.54)$$

Za drugi integral vrijedi:

$$\int_0^4 h^2 \sin\left(\frac{nh\pi}{4}\right) dh = -\frac{4h^2}{n\pi} \cos\left(\frac{nh\pi}{4}\right) \Big|_0^4 + \frac{16}{n\pi} \int_0^4 h \cos\left(\frac{nh\pi}{4}\right) dh = \quad (4.55)$$

$$- \frac{64}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{16}{n\pi} \int_0^4 h \cos\left(\frac{nh\pi}{4}\right) dh. \quad (4.56)$$

Dobiveni integral riješavamo također metodom parcijalne integracije koristeći sljedeće integrale:

$$u = h, \quad dv = \sin\left(\frac{nh\pi}{4}\right) dh, \quad du = dh, \quad v = -\frac{4}{n\pi} \cos\left(\frac{nh\pi}{4}\right). \quad (4.57)$$

Dobivamo:

$$\frac{16}{n\pi} \int_0^4 h \cos\left(\frac{nh\pi}{4}\right) dh = \frac{16}{n\pi} \left( \frac{4h}{n\pi} \left( \sin \frac{n\pi h}{4} \right) \Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{4}{n\pi} \left( \sin \frac{n\pi h}{4} \right) dh \right) = \quad (4.58)$$

$$\frac{256}{n^2\pi^2} \left( \cos \frac{n\pi h}{4} \right) \Big|_0^4 = -\frac{256}{n^3\pi^3} ( -(-1)^n + 1 ). \quad (4.59)$$

Konačno dobivamo:

$$E_n(1 - e^{2n\pi}) = \frac{256}{n^3\pi^3} ( -(-1)^n + 1 ), \quad (4.60)$$

Konačno rješenje dano je izrazom:

$$u(g, h) = \frac{256}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3(1 - e^{2n\pi})} (e^{\frac{ng\pi}{2}} - e^{2n\pi - \frac{ng\pi}{2}}) \left( \sin \frac{n\pi h}{4} \right). \quad (4.61)$$

## 5. Primjena Laplaceove jednadžbe na električni potencijal u elektrotehnici

### 5.1. Električni potencijal

Elektrostatika se bavi silama kojima električno polje djeluje na nabijeni objekt. Jedna od najbitnijih varijabli u elektrostatici je električni potencijal kojim opisujemo potencijalnu energiju električki nabijene čestice u promatranom električnom polju [13]. Osim pojma električnog potencijala, u elektrostatici bitan je i pojam gravitacijskog polja kojim opisujemo područje u kojem gravitacijska sila djeluje na tijela koja imaju masu. S obzirom da djelovanje gravitacijske sile u svim točkama prostora neće biti isto, gravitacijsko polje možemo modelirati vektorskim poljem  $g$ . Gravitacijsko polje  $g$  opisuje gravitacijsku silu po jedinici mase u svakoj točki prostora.

$$g = \frac{F}{m}, \quad (5.1)$$

gdje je  $F$  gravitacijska sila, a  $m$  masa tijela.

Jednadžba kojom opisujemo Newtonov zakon (dva se tijela privlače silom koja je proporcionalna umnošku njihovih masa, a obrnuto proporcionalna kvadratu njihove udaljenosti)

$$F = -G \frac{mM}{|r|} r, \quad (5.2)$$

gdje je  $G$  gravitacijska konstanta,  $M$  masa Zemlje, a  $r$  vektor položaja promatranog tijela u odnosu na Zemlju. Uvrštavanjem (5.2) u (5.1) dobivamo:

$$g(r) = -\frac{GM}{|r|} r, \quad (5.3)$$

Zbog postojanja skalarnog polja  $\Phi$  vrijedi

$$g = -\nabla\Phi. \quad (5.4)$$

Potencijalom vektorskog polja ili gravitacijskim potencijalom, kako ga još nazivamo, zovemo skalarno polje  $\Phi$ . Prethodnom relacijom (5.4) povezane su sila i energija. Iz toga vidimo da skalarno polje  $\Phi(r)$  zapravo predstavlja potrebnu energiju koja je potrebna jedinici mase u polju  $g$  kako bi održala položaj  $r$ .

Prostor u kojem električni naboj djeluje privlačnom ili odbojnom električnom silom na neko drugo električno nabijeno tijelo nazivamo električno polje. Njega kao i gravitacijsko polje možemo modelirati vektorskim poljem  $E$ . Električnu silu (po jedinici naboja) u svakoj proizvoljnoj točki prostora možemo opisati vektorskim poljem. Kažemo da vrijedi:

$$E = \frac{F}{Q}. \quad (5.5)$$

gdje  $F$  električna sila, a  $Q$  naboj. Vrijedi:

$$F = k_e \frac{Q_1 Q_2}{|r|} r. \quad (5.6)$$

U prethodnoj zapisanoj formuli  $Q_1$  i  $Q_2$  označavaju dva nabijena naboja, a  $k_e$  Coulombovu konstantu. Kada uvrstimo (5.6) u (5.5) dobiti ćemo:

$$E(r) = \frac{k_e Q}{|r|} r. \quad (5.7)$$

Ako pogledamo i usporedimo matematički zapis polja  $E$  u (5.5) gravitacijskog polja  $g$  u (5.3) vidjeti ćemo da su isti.

Postojati će i skalarno polje  $\Phi$  takvo da vrijedi:

$$E = -\nabla\Phi. \quad (5.8)$$

Prethodnom jednadžbom definiramo električni potencijal koji u suštini predstavlja energiju koja je potrebna da jedinica naboja u polju  $E$  održava položaj  $r$ . Iz ovoga zaključujemo kako električki potencijal u potpunosti određuje električno polje.

## 5.2. Poissonova diferencijalna jednadžba

Uzeti ćemo za primjer određivanje električnog potencijala kugle smještene unutar nekog električnog polja  $E$ . Znamo da se unutar zadanog područja  $V$  nalazi određena količina naboja gustoće  $\rho(r)$  na koje će djelovati električno polje. Posljedica tog djelovanja biti će da će nešto naboja uspjeti proći kroz rub područja  $V$  koji označavamo s  $\partial V$ . Ta količina naboja koja je uspjela proći kroz rub područja naziva se fluks električnog polja ( $\Psi$ ). Definiramo ga pomoću plošnog integrala druge vrste:

$$\Psi = \iint_{\partial V} E \cdot n dS, \quad (5.9)$$

gdje je koeficijent  $n$  jedinični vektor vanjske normale na plohu  $\partial V$ .

U nastavku moramo koristiti Gaussov<sup>1</sup> teorem o divergenciji kako bi došli do jednadžbe kojom ćemo opisati potencijal na promatranom području  $V$ .

**Teorem 5.1.** *Za Gaussov teorem o divergenciji vrijedi:*

$$\iiint_B \nabla \cdot u dV = \iint_{\partial B} u \cdot n dS, \quad (5.10)$$

gdje koeficijentom  $u$  definiramo vektor vanjske normale plohe  $\partial B$ .

<sup>1</sup>Karl Friedrich Gauss (Braunschweig 1777.-Göttingen 1855.), njemački matematičar i astronom

Kao posljedica električnog polja, sav naboj opisan gustoćom  $\rho(r)$  izvući će se iz područja  $V$ . Vrijedi:

$$\Psi = \iint_{\partial V} E \cdot ndS = \iiint_V \rho(r)dV, \quad (5.11)$$

Kada na dobivenu jednakost primjenimo prethodno zapisan Gaussov teorem o divergenciji dobivamo:

$$\iiint_V \rho(r)dV = \iiint_V \nabla \cdot E(r)dV, \quad (5.12)$$

odakle slijedi:

$$\nabla \cdot E(r) = \rho(r), \quad (5.13)$$

Prisjetimo li se sada definicije električnog potencijala i uvrstimo poznato u prethodnu jednadžbu dobivamo:

$$-\nabla \cdot \nabla \Phi(r) = \rho(\mathbf{r}). \quad (5.14)$$

Vrijedi da je

$$-\Delta \Phi = \rho, \quad (5.15)$$

gdje  $\Delta$  predstavlja oznaku za Laplaceov operator:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial g^2} + \frac{\partial^2}{\partial h^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (5.16)$$

Jednadžbu (5.15) zovemo Poissonova diferencijalna jednadžba koju također svrstavamo u eliptičke diferencijalne jednadžbe.

U slučaju kada električno polje djeluje na području u kojem nema dodatnog naboja vrijedi da je  $\rho(r) = 0$ . Poissonova diferencijalna jednadžba (5.15) tada poprima oblik Laplaceove diferencijalne jednadžbe:

$$\Delta \Phi = 0. \quad (5.17)$$

### 5.3. Određivanje potencijala i Dirichletov rubni problem

Već smo prije spomenuli da ako želimo dobiti konkretno rješenje, uz diferencijalnu jednadžbu zadajemo dodatne uvjete. Dodatni uvjeti kao što je već spomenuto opisuju ponašanje na rubu analiziranog područja. Takav problem kod diferencijalne jednadžbe zovemo rubnim problemom. Primjerice, ako imamo područje  $D$  za koje je zadana diferencijalna jednadžba čije je rješenje  $u$ , na rubu tog područja  $\partial D$  moramo zadati rubne uvjete kako bi odbili odgovarajuća rješenja, a rubni uvjeti mogu biti oblika:

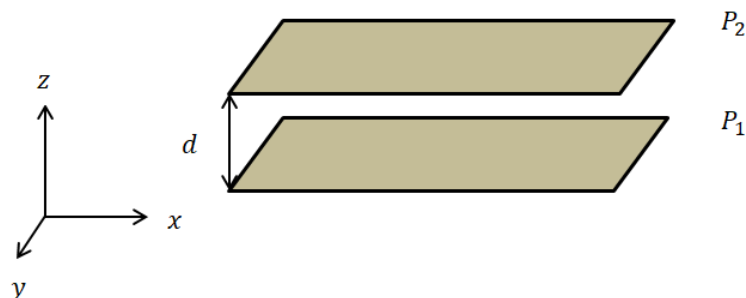
$$u|_{\partial D} = g_1(gg), \quad (5.18)$$

pa ih nazivamo Dirichletovim rubnim uvjetima. Ili mogu biti oblika:

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = g_2(g), \quad (5.19)$$

pa ih nazivamo Neumannovim rubnim uvjetima.

Sada možemo na primjeru sa parom paralelnih vodljivih metalnih ploča objasniti kako se postavlja rubni problemi kako bismo što točnije odredili električni potencijal. Ploče ćemo označiti s  $P_1$  i  $P_2$ ). Razmještaj ploča prikazan je na slici 4.1.



Slika 5.1. Par paralelnih nabijenih ploča. Izvor: izradio autor.

Kao posljedica toga što su ploče  $P_1$  i  $P_2$  nabijene, između njih se stvara električno polje. Razmak među pločama iznosi  $d = 4m$ . Ako ih smjestimo u koordinatni sustav, ploču  $P_1$  modelirati ćemo ravninom  $z = 0$ , a ploču  $P_2$  ravninom  $z = 4$ . Također radi jednostavnosti prilikom rješavanja ovog primjera pretpostaviti ćemo da je donja ploča uzemljena, a da gornja ploča ima električki potencijal  $\Phi = -6A$ .

Još nam je samo ostalo definirati rubni problem:

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0 & \text{za } 0 < z < 4 \\ \Phi = 0 & \text{za } z=0 \\ \Phi = -6 & \text{za } z=4 \end{cases} \quad (5.20)$$

Laplaceov se operator zbog ovisnosti električnog potencijala o varijabli  $z$  može pojednostaviti na način:

$$\Delta\Phi = \Phi''(z). \quad (5.21)$$

Takva diferencijalna jednadžba izgleda:

$$\Phi''(z) = 0, \quad (5.22)$$

i njeno je rješenje možemo zapisati kao:

$$\Phi(z) = Xz + Y, \quad (5.23)$$

$X$  i  $Y$  su konstante. Vrijednosti tih konstanti odrediti ćemo pomoću zadanih rubnih uvjeta. Za ploču  $P_1$  vrijedi:

$$\Phi(0) = X \cdot 0 + Y = 0, \quad (5.24)$$



Zbog uvjeta na drugu ploču vrijednost koeficijenta  $Y$  biti će  $Y = 0$ , a ako uvrstimo i drugu granicu uvjeta na gornju ploču, vidimo da je:

$$\Phi(4) = X \cdot 4 + 0 = -6, \quad (5.25)$$

pa nam je vrijednost  $X = -1.5$ .

Funkcija koja opisuje dobiveni električni potencijal izgleda:

$$\Phi(z) = -\frac{6}{4}z. \quad (5.26)$$

U slučajevima kada geometrija nije jednostavna kao što je bila u ovom danom primjeru, jednadžba može ostati parcijalna i za njeno rješavanje biti će potrebni napredni matematički alati (primjena integralnih transformacija kao što je Mellinova).

#### 5.4. Laplaceova jednadžba u polarnim koordinatama

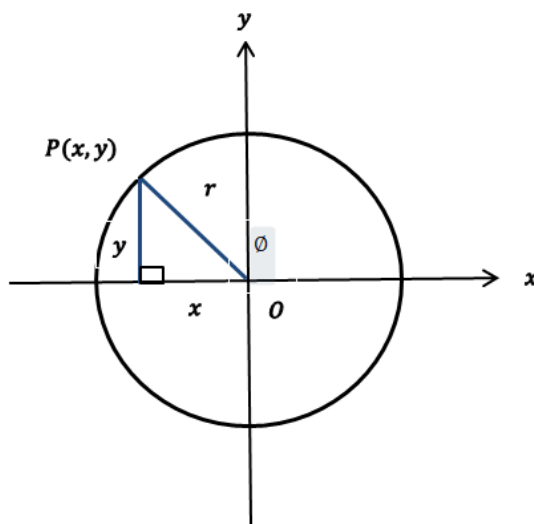
Većina primjera koje je potrebno riješiti neće biti jednostavni kao prehodni primjer. U takvom slučaju problem moramo tretirati u dvije ili čak i tri dimenzije te su nam potrebni napredniji matematički alati (Mellinova transformacija).[13].

Laplaceov operator u dvodimenzionalnom Kartezijevom  $(x, y)$  koordinatnom sustavu zadan je s:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (5.27)$$

Veza između koordinata polarnog sustava  $(r, \phi)$  i Kartezijevog sustava  $(g, h)$  definirana je kao:

$$\begin{cases} g = r \cos \phi; \\ h = r \sin \phi \end{cases} \quad (5.28)$$



Slika 5.2. Odnos polarnih i Kartezijevih koordinata. Izvor: izradio autor.

U primjeru  $g$  i  $h$  predstavljaju ono što na slici predstavljaju  $x$  i  $y$ .

Vrijedi:

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos \phi, \quad \frac{\partial g}{\partial \phi} = -r \sin \phi, \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \sin \phi, \quad \frac{\partial h}{\partial \phi} = r \cos \phi, \quad (5.30)$$

kao i

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial r}. \quad (5.31)$$

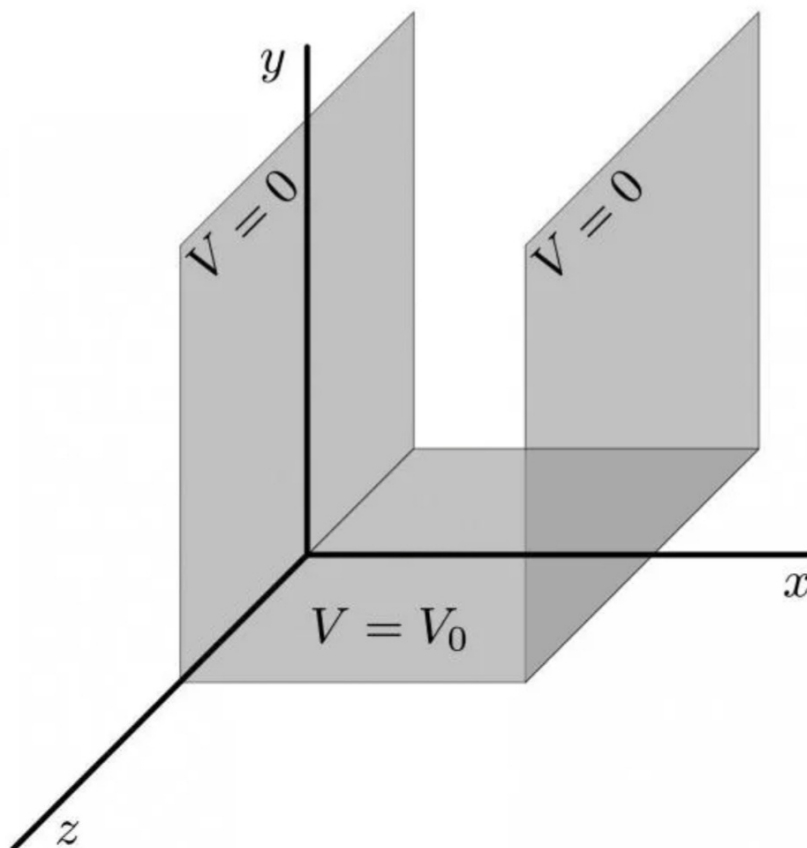
iz toga slijedi:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \cos \phi \frac{\partial u}{\partial g} + \sin \phi \frac{\partial u}{\partial h}. \quad (5.32)$$

## 5.5. Primjer izračuna električnog potencijala

Primjer djelovanja odnosno korištenja Laplaceove jednadžbe u elektrostatici možemo vidjeti u raspodjeli naboja (potencijala) po ploči.

U ovom primjeru računati ćemo potencijal između dvije paralelne ploče.



Slika 5.3. Dvije paralelne vodljive ploče. Izvor:[12]

Kao prvi primjer rubnog problema, ispitujemo područje između dviju beskonačnih vodljivih ploča koje se nalaze na  $x = 0$  i  $x = L$ , te iznad treće ploče koja je smještena na  $y = 0$ . Prve dvije ploče su beskonačne u smjerovima  $y$  i  $z$ . Postavljene su paralelno i za svaku vrijedi  $V = 0$ . Treća ploča je beskonačna samo u  $z$ -smjeru i za nju vrijedi  $V = V_0$ . Primjećujemo da je potencijal diskontinuiran (rastavljen) na  $(x, y) = (0, 0)$  i  $(x, y) = (L, 0)$ . U praksi to postizemo umetanjem tankog sloja izolacijskog materijala između donje i bočne ploče.

Želimo pronaći elektrostatički potencijal svugdje između dvije bočne (paralelne) ploče i iznad donje ploče. To zahtijeva pronalaženje rješenja rubnog problema određenog Laplaceovom jednačbom

$$\nabla^2 V = 0, \quad (5.33)$$

zajedno sa rubnim uvjetima:

$$V(x = 0, y) = 0, \quad V(x = L, y) = 0, \quad V(x, y = 0) = V_0. \quad (5.34)$$

Potencijal bi trebao nestati na  $y = \infty$  i iz toga proizlazi posljednji rubni uvjet

$$V(x, y = \infty) = 0. \quad (5.35)$$

Budući da su sve ploče beskonačne u  $z$ -smjeru, ništa se fizički ne mijenja dok se krećemo u tom smjeru, pa je sustav stoga simetričan u odnosu na translacije u  $z$ -smjeru. To podrazumijeva da će potencijal biti funkcija  $x$  i  $y$ , ali će biti neovisan o  $z$ .

Započinjemo s jednažbom:

$$V_{\alpha,\beta}(x, y, z) = \begin{Bmatrix} \cos(\alpha x) \\ \sin(\alpha x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{i\beta y} \\ e^{-i\beta y} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z} \\ e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z} \end{Bmatrix}. \quad (5.36)$$

Translacijska simetrija zahtijeva da prekinemo  $z$ -ovisnost ovih rješenja, a to možemo postići ako vrijedi:  $\beta = -\alpha^2$ , tako da je  $\beta = \pm i\alpha$ . Vrijedi:

$$V_{\alpha,\beta}(x, y, z) = \begin{Bmatrix} \cos(\alpha x) \\ \sin(\alpha x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{\alpha y} \\ e^{-\alpha y} \end{Bmatrix}. \quad (5.37)$$

gdje ukazujemo da rješenja ovise samo o  $x$  i  $y$ , te da je  $\alpha$  jedini preostali slobodni parametar.

Znamo da  $V$  mora nestati na  $y = \infty$ , a to podrazumijeva da rješenje ne može uključivati  $e^{\alpha y}$ , koji raste do beskonačnosti. Potencijal također mora nestati na  $x = 0$ , a time se isključuje prisutnost faktora  $\cos(\alpha x)$ . Uzimajući u obzir ova dva granična uvjeta možemo zaključiti da se osnova faktoriziranih rješenja mora ograničiti na

$$V_{\alpha}(x, y) = \sin(\alpha x) e^{-\alpha y}. \quad (5.38)$$

Parametar  $\alpha$  je još uvijek proizvoljan, ali sad mora biti pozitivan, kako bi se osiguralo da je  $V \rightarrow 0$  kada je  $y \rightarrow \infty$ .

Treći rubni uvjet je da je  $V = 0$  na  $x = L$ . Da bismo to postigli moramo zahtijevati da  $\sin(\alpha x) = 0$  na  $x = L$ , tako da  $\alpha L$  mora biti višekratnik  $\pi$ .

$$\alpha = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.39)$$

u smislu pozitivnog cijelog broja  $n$ . (Negativni cijeli brojevi su isključeni jer  $\alpha$  mora biti pozitivan.) Osnova rješenja dalje je ograničena na

$$V_n(x, y) = \left( \sin \frac{n\pi x}{L} \right) e^{-n\pi y/L}, \quad (5.40)$$

a članovi baze sada mogu biti označeni cijelim brojem  $n$ .

Konačno rješenje našeg graničnog problema biti će superpozicija ovih osnovnih rješenja. Možemo to izraziti kao:

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right) e^{-n\pi y/L}, \quad (5.41)$$

gdje su  $b_n$  konstantni koeficijenti. Ovo proširenje nas podsjeća na sinusni Fourierov niz ali osnovne funkcije su funkcije i  $x$  i  $y$ .

Četvrti rubni uvjet kaže da je  $V = V_0$  kada je  $y = 0$ . Ovaj posljednji uvjet će odrediti koeficijente  $b_n$  i dati konačno rješenje rubnog problema. Uvrštavanjem  $y = 0$  u jednadžbu (5.41) daje

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (5.42)$$

a to je upravo sinusni Fourierov red za konstantnu funkciju  $V_0$ . Koeficijenti se dobivaju uz pomoć jednadžbe:

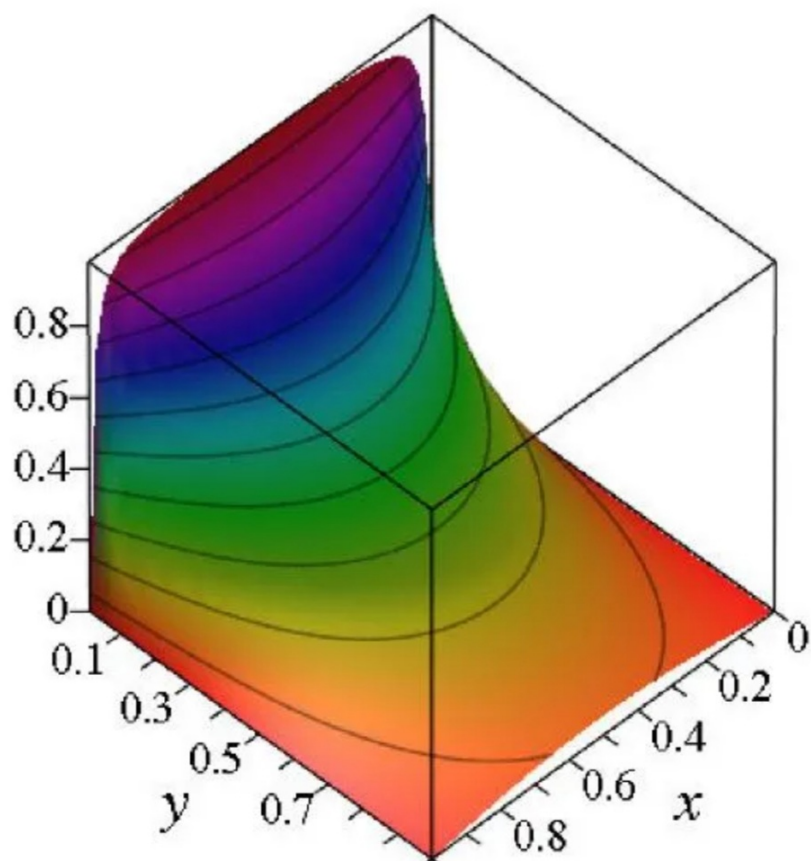
$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L V_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (5.43)$$

Daljnjim izračunom dobijemo da je  $b_n = 2V_0(1 - \cos n\pi x)/(n\pi)$ . Za parni  $n$  je  $\cos(n\pi) = 1$  i  $b_n = 0$ , dok je za neparni  $n$   $\cos(n\pi) = -1$  i  $b_n = 4V_0/(n\pi)$ .

Konačno rješenje rubnog problema je:

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-n\pi y/L}. \quad (5.44)$$

Možemo primjetiti da je ovaj izraz potpuno određen; nema slobodnih parametara, a mi imamo jedinstveno rješenje. Tipično je za probleme ovog tipa da imaju konačno rješenje izraženo kao beskonačan niz. Koeficijenti se smanjuju kao  $1/n$  s povećanjem  $n$ . Koeficijenti bi se smanjivali još brže da potencijal nebi predstavljao diskontinuitete na  $(x, y) = (0, 0)$  i  $(x, y) = (L, 0)$ . Trodimenzionalni dijagram  $V(x, y)$  prikazan je na slici (5.4).



*Slika 5.4. Potencijal između bočnih ploča i iznad donje ploče. Dijagram prikazuje  $V/V_0$  kao funkciju  $x$  i  $y$  za  $L = 1$ . Crnom su prikazane krivulje konstantnih vrijednosti  $V$ . [12]*

## 6. Zaključak

Parcijalne diferencijalne jednačbe postale su sve potrebnije za shvaćanje svijeta i fizičkih zakonitosti koji vladaju u njemu. Njima možemo opisati prijenos topline, titranje, ponašanje struje i napona u strujnim krugovima,... Neke se diferencijalne jednačbe mogu riješiti jednostavno ali ponekad nam je potrebna pomoć pri rješavanju. Tada pri rješavanju koristimo mnoge metode, a jedna od njih je Fourierova metoda koju smo objasnili u ovom radu.

U ovom završnom radu obrađena je tema Laplaceove jednačbe i njene primjene na električni potencijal. Ime je dobila po francuskom matematičaru i astronomu Pierre-Simonu de Laplaceu koji se potkraj 18. stoljeća bavio izučavanjem njenih rješenja. Laplaceova jednačba je linearna homogena parcijalna diferencijalna jednačba drugog reda koju koristimo kako bismo riješili mnoge fizikalne probleme.

Za Laplaceovu jednačbu zadaju se samo rubni uvjeti tj. uvjeti na rubovima područja koje promatramo, a oni su: Dirichletov, Neumannov i mješoviti ili Robinov rubni uvjet. Njih zadajemo kako bismo dobili rješenje jednačbe. Kroz primjer opisan je način rješavanja dvodimenzionalne Laplaceove diferencijalne jednačbe.

Električni potencijal jedna je od najbitnijih varijabli u elektrostatici. Njime opisujemo potencijalnu energiju električki nabijene čestice u promatranom električnom polju. Na kraju ovog rada prikazan je primjer u kontekstu struke u kojem smo pomoću Laplaceove jednačbe izračunali potencijal između dvije paralelne ploče.

## Literatura

- [1] Farlow J.S.: "Partial differential equations", Dover publications, inc. , New York, 1982.
- [2] Dražić I.: "Fourierovi redovi- Skripta", Sveučilište u Rijeci, Rijeka 2020.
- [3] "Wikipedia: Jean Joseph Fourier", s Interneta: [https://sh.wikipedia.org/wiki/Jean\\_Baptiste\\_Joseph\\_Fourier](https://sh.wikipedia.org/wiki/Jean_Baptiste_Joseph_Fourier), 2.5.2022.
- [4] "Britannica: Joseph Fourier", s Interneta: <https://www.britannica.com/biography/Joseph-Baron-Fourier>, 2.5.2022.
- [5] Elezović, N.: "Fourierov red i integral, Laplaceova transformacija", Element, Zagreb, 2007.
- [6] Kreyszig E.: "Advanced engineering mathematics", Ohio State University Columbud, Ohio, 2011.
- [7] Edre P.: "Parcijalne diferencijalne jednačbe", Novi Sad, 1985.
- [8] Nonveiller D.: "Primjena Fourierovih redova kod rješavanja diferencijalnih jednačbi", Sveučilište u Rijeci, Rijeka, 2021.
- [9] Mandić L.: "Fourierova metoda rješavanja linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačbi drugog reda", Sveučilište u Rijeci, Rijeka, 2021.
- [10] "Wikipedia: Pierre-Simon Laplace", s Interneta [https://hr.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon\\_Laplace](https://hr.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace), 10.5.2022.
- [11] "Pierre Simon de Laplace", s Interneta, <http://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=35431>, 10.05.2022.
- [12] "University of Guelph", s Interneta, <https://www.physics.uoguelph.ca/chapter-10-laplaces-equation>, 22.06.2022.
- [13] Žugčić P.: "Mellinova transformacija i primjena u elektrotehnici", Sveučilište u Rijeci, Rijeka, 2019.



## Sažetak i ključne riječi

Na početku ovoga rada objašnjen je Fourierov red. Na nekoliko smo primjera prikazali razvoj funkcije u Fourierov red. U nastavku smo definirali parcijalne diferencijalne jednačbe, njihove početne i rubne uvjete te vrste parcijalnih diferencijalnih jednačbi. Tema ovog rada je diferencijalna Laplaceova jednačba i električni potencijal. Upoznali smo se sa rubnim uvjetima kod Laplaceove jednačbe te smo na primjeru pokazali kako se rješava Laplaceova parcijalna diferencijalna jednačba u dvije dimenzije. Na kraju smo definirali električni potencijal. Primjer djelovanja odnosno korištenja Laplaceove jednačbe u elektrostatici pokazali smo primjerom u kojem smo računali potencijal (raspodjelu naboja) između dvije paralelne ploče.

**Ključne riječi:** Fourierov red, konvergencija, početni uvjeti, rubni uvjeti, parcijalne diferencijalne jednačbe, laplaceova jednačba, električni potencijal, Dirichletovi uvjeti

## Summary and key words

At the beginning of this paper, the Fourier series was explained. We showed the development of a function into a Fourier series using several examples. In the following, we defined partial differential equations, their initial and boundary conditions, and types of partial differential equations. The topic of this paper is the differential Laplace equation and electric potential. We got acquainted with the boundary conditions of Laplace's equation and we showed by example how to solve Laplace's partial differential equation in two dimensions. Finally, we defined the electric potential. We showed an example of how the Laplace equation works in electrostatics with an example in which we calculated the potential (charge distribution) between two parallel plates.

**Keywords:** Fourier series, convergence, initial conditions, boundary conditions, partial differential equations, Laplace's equation, electrical potential, Dirichlet conditions