SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

POISSONOVA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA

Rijeka, srpanj 2023.

Tihomir Lupinski
0069083416

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

POISSONOVA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Komentor: prof. dr. sc. Viktor Sučić

Rijeka, srpanj 2023.

Tihomir Lupinski
0069083416

IZJAVA

Sukladno članku 7. stavku 1. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku sveučilišnih prijediplomskih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 4. travnja 2023., izjavljujem da sam samostalno izradio završni rad prema zadatku preuzetom dana 21. ožujka 2022.

Rijeka, 10. srpnja 2023.

Tihomir Lupinski

SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET
POVJERENSTVO ZA ZAVRŠNE ISPITE

Rijeka, 18. ožujka 2022.

Zavod: **Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike**
Predmet: **Inženjerska matematika ET**
Grana: **1.01.07 primijenjena matematika i matematičko modeliranje**

ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Tihomir Lupinski (0069083416)**
Studij: Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Zadatak: **Poissonova diferencijalna jednadžba // Poisson differential equation**

Opis zadatka:

U radu je potrebno definirati Poissonovu diferencijalnu jednadžbu i objasniti njenu klasifikaciju. Potrebno je objasniti postupak rješavanja pripadnih početnih i rubnih problema koristeći se različitim pristupima dobivanja analitičkog rješenja problema.
Poissonovu jednadžbu potrebno je staviti u povijesni kontekst te u kontekst primjene u elektrotehnici, s posebnim osvrtom na problem potencijala.
U završnom dijelu rada potrebno je objasniti numeričko rješavanje Poissonove jednadžbe metodom konačnih razlika te napraviti nekoliko pripadnih numeričkih simulacija.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Zadatak uručen pristupniku: 21. ožujka 2022.

Mentor:

Doc. dr. sc. Ivan Dražić

Predsjednik povjerenstva za završni ispit:

Prof. dr. sc. Viktor Sučić

Ovom prigodom želim iskazati zahvalu svima koji su bili moja ustrajna podrška tijekom ovih godina školovanja. Zahvaljujem mentoru izv. prof. dr. sc. Ivanu Dražiću koji me svojim znanjem i strpljivošću motivirao i olakšao izradu ovog rada. Zahvaljujem mu se na uloženom trudu i vremenu, te iskazanom povjerenju tijekom izrade ovog rada. Hvala mojoj obitelji na iskazanoj podršci i razumijevanju u dosadašnjem školovanju. Također zahvalio bih se i svim svojim prijateljima koji su mi ovaj period školovanja učinili lakšim.

Sadržaj

1. Uvod

Parcijalne diferencijalne jednadžbe danas su sastavni dio matematike i fizike zbog mogućnosti modeliranja raznih fizikalnih pojava. Mogućnost ovakve modulacije dovodi ove jednadžbe u najužu vezu s primjenom u inženjerstvu pa tako i na području elektrotehnike. Primjena i forma ovih jednadžbi definirana je kroz drugo poglavlje, gdje će pobliže biti prikazane definicije i vrste ovih jednadžbi. Razumijevanje ovih jednadžbi omogućuje bolji uvid u shvaćanje Poissonove jednadžbe i njene primjene unutar elektrotehnike.

Upravo je Poissonova diferencijalna jednadžba tema ovog rada, te je njena pojava vidljiva u mnogim granama fizike kao što su: elektrostatika, mehanika i druge grane znanosti. Poissonova jednadžba spada u vrstu parcijalnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda čija se važnost na području elektrostatike uočava prilikom izračuna potencijala uzrokovanog poznatom raspodjelom električnog naboja. Forma i postupci rješavanja (analitički i numerički) ove jednadžbe objašnjeni su kroz treće poglavlje. Prilikom određivanja analitičkog rješenja korištene su metoda separacije varijabli kod rješavanja posebnog slučaja Poissonove jednadžbe kada je desna strana zadane jednadžbe jednaka nuli. Nadalje pokazano je rješenje Dirichletovog problema za Poissonovu jednadžbu primjenom Greenove funkcije koja počiva na integralnom obliku zapisa rješenja. Ovakvi postupci rješenja nisu praktični s obzirom na kompleksnost i težinu samog proračuna, iz tog razloga uvode se numeričke metode koje omogućuju aproksimaciju rješenja i pojednostavljuju rješavanje. Tehnološkim napretkom dolazi do sve veće implementacije numeričkih metoda u praksi i u ovom radu obrađena je jedna od tih metoda (Metoda konačnih razlika), te je njenom primjenom pokazano rješavanje Poissonove jednadžbe.

S obzirom na to da nam je od interesa primjena Poissonove jednadžbe na području elektrotehnike prvo je potrebno upoznati određene zakonitosti koje vrijede za naboje, a koji su objašnjeni unutar četvrtog poglavlja. Nadalje napravljen je detaljan izvod Poissonove jednadžbe za potencijal te su nakon toga definirani početni i rubni uvjeti koji moraju biti zadovoljeni kako bi bila osigurana jedinstvenost rješenja. U konačnici kroz dva primjera pokazano je rješavanje Poissonove jednadžbe na mogućim problemima u elektrostatici.

2. Poissonova diferencijalna jednadžba

2.1. Pierre-Simon de Laplace

Unutar ovog poglavlja opisana je biografija te doprinosi matematici i ostalim granama znanosti Pierra Simonea de Laplacea. [1] [2]
Pierre Simon de Laplace (Beaumont-en-Auge, 23. ožujka 1749. - Pariz, 5. ožujka 1827.) bio je francuski astronom i matematičar poznat po svojim radovima koji su uvelike doprinijeli razvoju matematike, statistike i astronomije.

Slika 2.1. Pierre-Simon de Laplace. Izvor: [1]

Studirao je teologiju na Sveučilištu u Caenu gdje pronalazi interes za matematiku. Nikad nije diplomirao teologiju, međutim, daljnje usavršavanje pronalazi u Parizu pod mentorstvom Jeana Baptistea le Rond d'Alemberta[1]. Zahvaljujući preporuci d'Alemberta od 1771. do 1778. predaje matematiku u Visokoj vojnoj školi (École royale militaire) u Parizu, te godine 1773. postaje članom Francuske akademije znanosti. Utemeljio je zakon o nepromjenjivosti gibanja planeta oko Sunca, te uveo hipotezu o porijeklu Sunčeva sustava. Otkrio je ovisnost sekularnih promjena u ekscentricitetu Zemljine putanje o gravitaciji Mjeseca, te proučavao plimu i oseku (Laplaceove plimne jednadžbe). Također, po njemu je nazvan planetoid 4628 Laplace. Za života se bavio i

[1] Jean Baptiste le Rond d'Alembert (Pariz, 16.studenog 1717. - Pariz 29.listopada 1783.), francuski znanstvenik, matematičar i fizičar.

ostalim područjima matematičke fizike, pa tako vrijedi napomenuti njegove doprinose u području elektriciteta, specifičnim toplinskim kapacitetima čvrstih tijela i kapilarnosti tekućina. Uvodi teoriju vjerojatnosti kod tumačenja znanstvenih podataka uvelike pridonijevši njenom razvoju kao matematičke discipline. Zahvaljujući njegovim velikim doprinosima i reputaciji smatran je jednim od najvećih znanstvenika svih vremena, te ga neki nazivaju francuskim Newtonom.

2.2. Siméon Denis Poisson

U ovom poglavlju opisana je biografija i doprinosi znanosti Siméona Denisa Poissona. [3] [4] [5]

Siméon Denis Poisson (Pithiviers, 21.lipanj 1781. - Pariz, 25.travnja 1840.) bio je francuski matematičar i fizičar poznat po svojim radovima na području statistike, mehanike, elektrostatike i magnetizma. Rođen je u Pithiviersu u Francuskoj kao sin Siméona Poissona, oficira francuske vojske. 1798. godine upisuje se na École polytechnique u Parizu, gdje kao prvi na svojoj godini privlači pažnju profesora, koji mu daju slobodu da sam odluči o tome što će studirati. U 1800. sa samo osamnaest godina diplomirao je za manje od dvije godine nakon upisa. Iste godine izdaje dva memoara koja su objavljena u Recueil des savant étrangers što je bila velika čast za osamnaestogodišnjaka. Ovakav uspjeh omogućuje mu ulazak u znanstvene krugove. Odmah po završetku studija imenovan je za asistenta u nastavi (répétiteur) te tu funkciju obavlja do 1802. godine. Predavao je kao profesor matematike i mehanike na École polytechnique od 1802. te kao profesor mehanike na Faculté des sciences u Parizu od 1809. godine. Godine 1817. oženio je Nancy de Bardi s kojom je imao četvero djece. Tijekom života bavio se Fourierovim integralima, računom

Slika 2.2. Siméon Denis Poisson 1804. Izvor: [4]

varijacija i teorijom vjerojatnosti, te problemima iz područja magnetizma i elektrostatike. Autor je mnogih radova, a neka značajnija djela su: Traité de mécanique (Rasprava o mehanici iz 1811), Théorie mathématique de la Chaleur (Matematička teorija topline iz 1835), Recherches sur la probabilité des jugements (Istraživanja o vjerojatnosti sudova iz 1837).

Zbog raznih zasluga i doprinosa znanosti ime mu se nalazi na popisu imena 72 francuska znanstvenika koja su ugravirana na prvoj platformi Eiffelovog tornja, također po njemu je nazvan i jedan od kratera na Mjesecu (Poisson). Bio je član mnogih uglednih društva, pa tako u ožujku 1818. biva izabran kao član Kraljevskog društva, 1822. kao strani počasni član Američke akademije znanosti i umjetnosti, 1823. kao strani član Kraljevske švedske akademije znanosti, te 1825. godine dobiva titulu baruna. Za života ostvaruje velike doprinose na području matematike, fizike

Slika 2.3. Siméon Denis Poisson. Izvor: [3]

i mehanike. Neki od njegovih značajnijih radova su Poissonova raspodjela koja iskazuje vjerojatnost da neka slučajna varijabla poprimi određenu vrijednost, svoju primjenu pronalazi u fizici. Također uvodi Poissonov koeficijent (Poissonov omjer) koji predstavlja omjer između kontrakcije presjeka i dilatacije kada sila djeluje okomito na poprječni presjek tijela. Jedan od Poissonovih najvažnijih radova kao i tema ovog završnog rada je Poissonova diferencijalna jednadžba. Spada u vrstu parcijalnih diferencijalnih jednadžbi te da bi mogli ostvariti potpuno razumijevanje ove jednadžbe kao i njenu primjenu potrebno je prvo shvatiti što su zapravo parcijalne diferencijalne jednadžbe i koja je njihova matematička primjena. Više o ovim jednadžbama rečeno je u idućem poglavlju.

2.3. Parcijalne diferencijalne jednadžbe

Kroz ovo poglavlje razmatrane su definicija i podjela parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (u daljnjem tekstu PDJ), riješen je primjer jedne PDJ, te su objašnjeni formulacija i značaj početnih i rubnih uvjeta. [6] [7] [8]

Parcijalne diferencijalne jednadžbe ili skraćeno PDJ opisuju vezu između neke nepoznate funkcije i njene parcijalne derivacije. Za razliku od običnih diferencijalnih jednadžbi gdje tražena funkcija ovisi samo o jednoj varijabli, kod PDJ-i tražena funkcija ovisi o dvije ili više nezavisnih varijabli (primjer je temperatura $T(x, t)$ koja ovisi o vremenu t i položaju x). Ove jednadžbe dovode matematiku u najužu vezu s primjenom, pa je tako česta primjena ovih jednadžbi u fizici, geometriji, ekonomiji, kao i inženjerstvu jer omogućuju modeliranje različitih pojava u prirodi. Parcijalne diferencijalne jednadžbe se vrlo često koriste prilikom opisivanja različitih pojava i fenomena unutar fizike kao što su toplina, elektrodinamika, zvuk, kvantna mehanika i elektrostatika. Postoji više vrsta PDJ-i koje se javljaju unutar fizike i ostalih grana znanosti, a neke najistaknutije su jednadžba provođenja topline, valna jednadžba te Poissonova i Laplaceova jednadžba koje su od posebnog interesa jer svoju primjenu pronalaze unutar područja elektrotehnike.
Ukoliko promotrimo funkciju $u(x) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ sa n nezavisnih varijabli $x_1, x_2, ..., x_n$, tada njene parcijalne derivacije označavamo s

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{2.1}$$

Sada relaciju oblika

$$F\left(x_1, .., x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, ...\right) = 0 \tag{2.2}$$

nazivamo parcijalnom diferencijalnom jednadžbom (PDJ). F ovdje predstavlja neku poznatu funkciju, dok je $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ funkcija koja se traži u nezavisnim varijablama $x_1, x_2, ..., x_n$. Sve PDJ-e opisuju se pojmom reda koji se određuje na temelju najvišeg stupnja derivacije koji se pojavljuje unutar jednadžbe. Ukoliko bi najviši stupanj derivacije bio dva imali bi PDJ-u drugog reda, ukoliko je najviši stupanj tri, jednadžba bi bila trećeg reda itd.

Definicija 2.1. *Izraz* (2.2) *bit će linearan ako je oblika*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = a_0, \tag{2.3}$$

pri čemu su a_i i a_0 poznate funkcije i ovise samo o promjenjivim varijablama $x_1, .., x_n$.

Ukoliko samo jedna od funkcija a_i i a_0 zavisi i o traženoj funkciji u, tada bi se jednadžba (2.3) zvala kvazilinearnom. Jednadžba (2.3) bit će homogena ukoliko je $a_0 = 0$, u suprotnom se radi o nehomogenoj jednadžbi. Zbog vrlo raširene primjene u matematičkom modeliranju, primjene na području fizike i inženjerstva od najvećeg značaja bit će linearne parcijalne jednadžbe drugog reda. Općeniti oblik linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda glasi

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0. \tag{2.4}$$

Pri čemu su A, B, C i D koeficijenti konstantnih iznosa. Tip ove jednadžbe ovisi o predznaku njene determinante $B^2 - 4AC$, pa se prema tome razlikuju tri vrste:

1. Eliptička ukoliko je $B^2 - 4AC < 0$,
2. Parabolička ukoliko je $B^2 - 4AC = 0$,
3. Hiperbolička ukoliko je $B^2 - 4AC > 0$.

Izraz (2.4) u n nezavisnih varijabli $x_1, x_2, ..., x_n$ može se još zapisati kao

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i u_{x_i} + Fu = G, \tag{2.5}$$

gdje su A_{ij}, B_i, F i G funkcije varijabli $x_1, x_2, ..., x_n$. Ovo je pogodan zapis jer omogućuje pridruživanje diferencijalnog operatora L danoj jednadžbi

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial}{\partial x_i} + F. \tag{2.6}$$

L je linearan operator jer vrijedi

$$L[\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2] = \alpha_1 L[u_1] + \alpha_2 L[u_2], \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}. \tag{2.7}$$

Linearne jednadžbe zadovoljavaju princip superpozicije, ovaj princip je od velikog značaja u rješavanju PDJ-i metodom separacije varijabli jer omogućuje zapis općeg rješenja kao linearne kombinacije nekih posebnih rješenja.

Teorem 2.1. *Ako su u_1 i u_2 rješenja jednadžbi*

$$L[u_1] = G_1, \qquad L[u_2] = G_2, \tag{2.8}$$

tada će linearna kombinacija $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ biti rješenje jednadžbe:

$$L[u] = \alpha_1 L[u_1] + \alpha_2 L[u_2] = \alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2. \tag{2.9}$$

Posebni slučaj javlja se ako su u_1 i u_2 rješenja homogene jednadžbe, tj. kada je $L[u] = 0$, tada će svaka linearna kombinacija $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ biti rješenje iste jednadžbe jer je $L[\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2] = 0$.

Primjer 2.1. *Potrebno je odrediti rješenje jednadžbe*

$$u_{xx} - u_y = 18x + 8y, \tag{2.10}$$

koristeći se principom superpozicije.[7]

Ukoliko promotrimo dvije jednadžbe

$$u_{xx} - u_y = 18x, \tag{2.11}$$

$$u_{xx} - u_y = 8y. \tag{2.12}$$

Njihova rješenja tražit ćemo u obliku $u_1 = u_1(x)$ *i* $u_2 = u_2(y)$. *Primjenimo li navedene izraze na jednadžbe* (2.11) *i* (2.12) *dobivamo*

$$u_1''(x) = 18x, \tag{2.13}$$

$$-u_2'(y) = 8y. \tag{2.14}$$

Dobivene izraze potrebno je integrirati kako bi dobili vrijednosti $u_1(x)$ *i* $u_2(y)$, *pa tako izraz* (2.13) *dvostruko integriramo po varijabli* x

$$\begin{aligned} \int u_1''(x)dx &= \int 18xdx, \\ u_1'(x) &= 9x^2 + a, \\ \int u_1'(x)dx &= \int 9x^2 + adx, \end{aligned} \tag{2.15}$$

odakle slijedi rješenje za $u_1(x)$

$$u_1(x) = 3x^3 + ax + b. \tag{2.16}$$

Istim postupkom dolazimo do $u_2(y)$

$$\int -u_2'(y)dy = \int 8ydy, \tag{2.17}$$

što daje rješenje za $u_2(y)$

$$u_2(y) = -4y^2 + c, \tag{2.18}$$

pri čemu su $a, b, c \in \mathbf{R}$ *konstante dobivene integracijom. Sada je primjenom principa superpozicije traženo rješenje zadane jednadžbe* (2.10) *jednako*

$$u(x, y) = u_1(x) + u_2(y) = 3x^3 - 4y^2 + ax + b + c. \tag{2.19}$$

Primjer 2.2. *Postoji mnogo primjera linearnih PDJ-i drugog reda, a neki od najistaknutijih su:* ***Poissonova diferencijalna jednadžba****, te* ***Laplaceova jednadžba*** *u slučaju kada je* $f(x, y) = 0$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y), \qquad \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, \tag{2.20}$$

koje su eliptičkog tipa.
Iduća jednadžba je ***Jednadžba provođenja topline***

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{2.21}$$

te je ona klasični primjer jednadžbi paraboličkog tipa.
Posljednji primjer je ***Valna jednadžba***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{2.22}$$

koja spada u skupinu hiperboličkih jednadžbi. Također valja primijetiti kako se u slučaju jednadžbe provođenja topline i valne jednadžbe varijabla y *zamijenila vremenskom varijablom* t *radi boljeg isticanja njihovog evolucijskog karaktera.*

2.3.1. Početni uvjeti

S obzirom na to da svaki problem opisan parcijalnom diferencijalnom jednadžbom može zadovoljavati beskonačno mnogo rješenja koja ovise o nekim proizvoljnim funkcijama, potrebno je uvesti neke početne uvjete koji osiguravaju jedinstvenost rješenja. Svaki problem koji se opisuje PDJ mora sadržavati onoliko rubnih uvjeta koliko je potrebno da se iz skupa beskonačno mnogo rješenja PDJ-i izdvoji ono rješenje koje najbolje opisuje stvarnu fizikalnu pojavu. Prema tome da bi problem koji se opisuje PDJ bio dobro postavljen i rješiv, mora zadovoljavati tri uvjeta:

1. **Dirichletov rubni uvjet**, kada je na granici promatrane domene definirana vrijednost funkcije,

2. **Neumannov rubni uvjet**, kada je na granici promatrane domene definirana vrijednost derivacije funkcije,

3. **Miješani rubni uvjet**, kada nam je na jednom djelu domene definirana vrijednost funkcije, a na drugom vrijednost njene derivacije.

Kako se prilikom rješavanja realnih problema početni uvjeti određuju provođenjem mjerenja, oni neće biti poznati sa sto postotnom točnošću već se javljaju određena odstupanja. Odstupanja u početnim uvjetima dovode do pogreški u rješenjima jednadžbe koje mogu biti značajnih vrijednosti. Osnovno teorijsko pitanje koje je definirao Jacques Hadamard[2] jest dobra postavljenost problema opisanog PDJ i početnim uvjetima. Njegova definicija kaže da je problem dobro postavljen ako zadovoljava sljedeće uvjete:

1. postojanje rješenja,

2. jedinstvenost rješenja, tj. da će rješenje biti jedinstveno za zadane početne uvjete,

3. stabilnost, tj. da će rješenje kontinuirano ovisiti o početnim uvjetima i parametrima jednadžbe.

Možemo reći da će PDJ biti stabilna ako će male promjene početnih uvjeta uzrokovati male promjene u rješenju. Tada će dobiveno rješenje biti dobra aproksimacija egzaktnog rješenja. Ako su navedeni uvjeti zadovoljeni, može se pristupiti rješavanju problema koristeći razne analitičke ili numeričke metode. Analitičke metode koristile su se u početcima razvoja rješavanja PDJ-i. Neke od njih su metoda direktne integracija i metoda separacije varijabli. S druge strane, razvojem računalnih programa i programiranja više do izražaja dolaze numeričke metode rješavanja kao što

[2]Jacques Salomon Hadamard (8.prosinca 1865.-17.listopada 1963.), francuski matematičar s velikim doprinosom u teoriji brojeva i PDJ.

su npr. metoda konačnih volumena i metoda konačnih elemenata. Razumijevanje definicije PDJ-e i njenih svojstava, te pristup rješavanju ovih jednadžbi omogućuje detaljno i lakše razmatranje Poissonove jednadžbe čija su detaljna definicija i opis dani u sljedećem poglavlju.

2.4. Definicija Poissonove i Laplaceove diferencijalne jednadžbe

U ovom poglavlju definirane su Poissonova i Laplaceova jednadžba te je opisana njihova ovisnost o promatranom koordinatnom sustavu. [8] [9] [10]

Poissonova PDJ-a je nehomogena eliptična PDJ drugog reda koja opisuje vezu funkcije $u(x,y)$, njezinih parcijalnih derivacija po varijablama x i y te neke zadane funkcije $f(x,y)$ unutar neke ravninske domene D

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y) \quad ; (x,y) \in D, \tag{2.23}$$

pri čemu je $D \in \mathbb{R}^2$. Posebni slučaj Poissonove jednadžbe kada je $f(x,y) = 0$, naziva se Laplaceova jednadžba koja je homogena PDJ-a oblika:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad ; (x,y) \in D. \tag{2.24}$$

Uz Laplaceovu i Poissonovu jednadžbu veže se Laplaceov operator, koji je eliptički diferencijalni operator drugog reda. On zapravo predstavlja divergenciju gradijenta, tj. vrijedi $\nabla \cdot \nabla = \Delta$

Definicija 2.2. *Neka je dana skalarna funkcija $u = u(x,y,z)$, tada je:*

$$div\ grad\ u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u, \tag{2.25}$$

gdje desna strana ove jednadžbe bez oznake funkcije u predstavlja Laplaceov operator.

Laplaceov operator skalarnoj ili vektorskoj funkciji pridružuje sumu drugih parcijalnih derivacija, a označava se simbolom ∇^2, međutim često se u literaturi zamjenjuje simbolom Δ, pa tada prema jednadžbi (2.25) možemo pisati

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{2.26}$$

Pri čemu je simbol ∇ Hamiltonov operator (nabla) koji predstavlja parcijalnu derivaciju neke funkcije po označenoj koordinati

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k, \tag{2.27}$$

gdje su i, j i k, jedinični vektori koordinatnih osi x, y i z. Općenito se Laplaceov operator u Kartezijevom koordinatnom sustavu s n dimenzija daje kao

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}. \tag{2.28}$$

Fizikalna interpretacija Laplaceovog operatora je uspoređivanje vrijednosti funkcije u nekoj točki sa vrijednostima u susjednim točkama. Ukoliko za neku (x,y) točku vrijedi:

1. da je $\Delta u > 0$, tada će vrijednost funkcije $u(x, y)$ biti manja od aritmetičke sredine vrijednosti funkcije u susjednim točkama,

2. da je $\Delta u = 0$, tada će vrijednost funkcije $u(x, y)$ biti jendaka aritmetičkoj sredini vrijednosti funkcije u susjednim točkama,

3. da je $\Delta u < 0$, tada će vrijednost funkcije $u(x, y)$ biti veće od aritmetičke sredine vrijednosti funkcije u susjednim točkama.

S obzirom na to da su Laplaceova i Poissonova jednadžba klasificirane kao eliptičke jednadžbe, čiju primjenu nalazimo prilikom opisivanje problema ravnoteže, njihova najbitnija osobina bila bi princip maksimuma.

Teorem 2.2. *Ovaj princip kaže da za vrijednosti rješenja unutar neke domene rješenja Ω koja je ograničena vrijednostima rješenja na rubu toga područja Γ vrijedi*

$$\mathbf{min} u \mid_\Gamma \leq u \mid_\Omega \leq \mathbf{max} u \mid_\Gamma . \tag{2.29}$$

Zapis (2.24) Poissonove jednadžbe i, posljedično, Laplaceove jednadžbe vrijedi za slučaj Descartesovih koordinata u dvije dimenzije. Općenito, Poissonova jednadžba primjenjujući definiciju Laplaceovog operatora (2.26) daje se u sljedećem obliku

$$\Delta u = f, \tag{2.30}$$

te ukoliko je $f = 0$, Laplaceova jednadžba daje se kao

$$\Delta u = 0. \tag{2.31}$$

Mogući su alternativni zapisi Poissonove jednadžbe ovisno o vrsti promatranog koordinatnog sustava, pa se u slučaju domene problema u obliku kugle to jest koordinatnog sustava dvije dimenzije (x, y) prelazil na polarne koordinate (r, θ).

Sa slike 2.4 možemo vidjeti kako su polarne koordinate definirane preko kuta θ te radijusa r, a njihova veza sa Kartezijevim koordinatama ostvaruje se preko izraza

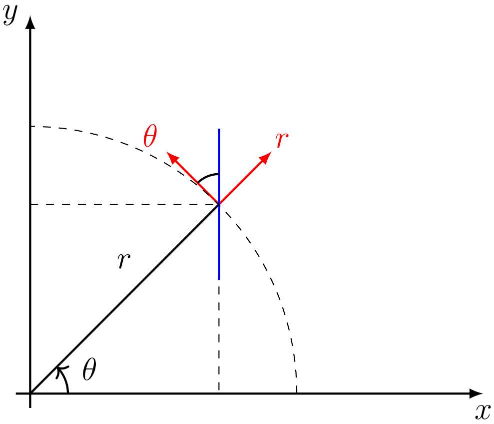
$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2, \\ \tan\theta &= \frac{y}{x}, \end{aligned} \tag{2.32}$$

ili ako zapišemo preko koordinata x i y

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Prilikom pretvorbe Laplaceova operatora iz Kartezijevih u polarne koordinate, kreće se od zapisa Laplaceovog operatora u dvije dimenzije, pa prema (2.28) slijedi

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{2.34}$$



Slika 2.4. Veza dvodimenzionalnog Kartezijevog i polarnog koordinatnog sustava. Izvor: Izrada autora

Potrebno je svesti druge derivacije funkcije u po varijablama x i y na polarne koordinate, a to možemo ostvariti primjenom totalnog diferencijala

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}, \tag{2.35}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}, \tag{2.36}$$

pri čemu su pojedini članovi jednaki

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{x}{r} = \cos\theta, \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\theta}{r}, \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{y}{r} = \sin\theta, \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\theta}{r}. \tag{2.40}$$

Iz navedenih izraza (2.37) do (2.40) sada slijedi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Na sličan način može se dobiti druga derivacija po x-u

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{2.42}$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{2.43}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos\theta - \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r^2}\right)\cos\theta \\
&+ \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\sin\theta}{r} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\sin\theta}{r}
\end{aligned} \tag{2.44}
$$

$$
= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\theta + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{sin^2\theta}{r^2} + 2\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}. \tag{2.45}
$$

Analogno druga derivacija po y-u je

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial\theta}{\partial y} \tag{2.46}
$$

$$
= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\partial\theta}{\partial y} \tag{2.47}
$$

$$
= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\partial\theta}{\partial y} \tag{2.48}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin\theta - \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r} - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r^2}\right)\sin\theta \\
&+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\cos\theta}{r} - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\cos\theta}{r}
\end{aligned} \tag{2.49}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin\theta - \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r} - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r^2}\right)\sin\theta \\
&+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\cos\theta}{r} - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\cos\theta}{r}
\end{aligned} \tag{2.50}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin\theta - \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r} - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r^2}\right)\sin\theta \\
&+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\cos\theta}{r} - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\cos\theta}{r}
\end{aligned} \tag{2.51}
$$

$$
= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\theta + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\theta}{r} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{cos^2\theta}{r^2} - 2\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}. \tag{2.52}
$$

Zbrajanjem i sređivanjem izraza (2.45) i (2.52) dobiva se izraz

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{r}\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{1}{r^2}\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right), \tag{2.53}
$$

koji je moguće dodatno pojednostaviti korištenjem teorema

$$
\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1. \tag{2.54}
$$

U konačnici Laplaceov operator u polarnim koordinatama poprima oblik

$$
\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}. \tag{2.55}
$$

Ukoliko se sada u jednadzbu (2.30) uvrsti dobiveni izraz za Laplaceov operator u polarnim koordinatama, dolazi se do izraza Poissonove jednadžbe u polarnim koordinatama

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = f. \tag{2.56}
$$

U slučaju kada je promatrana domena u 3 dimenzije koriste se cilindrične ili sferne koordinate ovisno o promatranom problemu. Poissonova jednadžba u Kartezijevom koordinatnom sustavu sa tri dimenzije s koordinatama x, y, z glasi

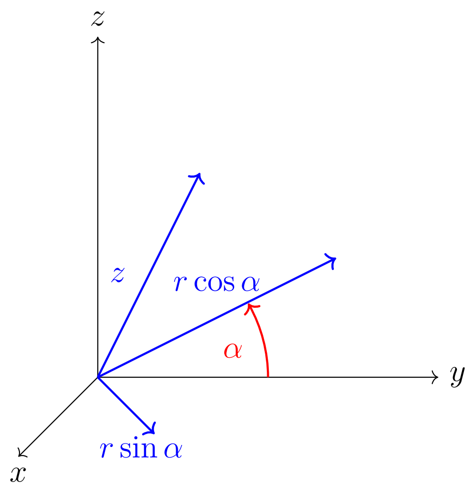
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f. \tag{2.57}$$

Za cilindrični koordinatni sustav s koordinatama r, α, z veza s koordinatama u Kartezijevom sustavu je sljedeća

$$x = r\cos\alpha, \tag{2.58}$$

$$y = r\sin\alpha, \tag{2.59}$$

pri čemu koordinata z ostaje nepromijenjena.



Slika 2.5. Veza trodimenzionalnog Kartezijevog i cilindričnog koordinatnog sustava. Izvor: Izrada autora

Primjenom odgovarajućih matematičkih operacija dolazi se do izraza Poissonove jednadžbe u cilindričnom koordinatnom sustavu, koja glasi

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f. \tag{2.60}$$

Na jednak način dolazi se do izraza Poissonove jednadžbe za sferni koordinatni sustav s koordinatama r, θ, α, pri čemu je veza s x, y, i z koordinatama Kartezijevog sustava dana sljedećim relacijama

$$x = r\sin\theta\cos\alpha, \tag{2.61}$$

$$y = r\sin\theta\sin\alpha, \tag{2.62}$$

$$z = r\cos\theta. \tag{2.63}$$

Povezivanjem (2.61) - (2.63) sa izrazom (2.57) te sređivanjem dolazimo do izraza Poissonove jednadžbe u sfernim koordinatama koja glasi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} = f. \tag{2.64}$$

Sve navedene formule vrijede i u slučaju Laplaceove jednadžbe kada je $f = 0$.

3. Rješenje Poissonove jednadžbe

U ovom poglavlju obrađen je analitički i numerički pristup rješavanju Poissonove i Laplaceove jednadžbe sa pripadnim rubnim i početnim uvjetima koristeći se različitim pristupima rješavanju problema.[9] [10] [11] [12]

3.1. Rješenje Laplaceove jednadžbe separacijom varijabli

Rješenje koje zadovoljava Laplaceovu jednadžbu (2.24) naziva se harmonijska funkcija, općenito se formalno rješenje Laplaceove jednadžbe daje u obliku reda

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{3.1}$$

gdje su u_n harmonijske funkcije unutar promatrane domene D. Generalno se neku neprekidnu funkciju u sa svojstvom $\Delta u = 0$ (i s neprekidnim parcijalnim derivacijama) unutar neke domene D naziva harmonijskom funkcijom. Harmonijske funkcije su one funkcije koje se prirodno javljaju u teoriji funkcija kompleksnih varijabli (Teorija funkcija). Upravo u slučaju kada je najviši stupanj derivacije u jednadžbi jednak 2, teorija Laplaceove jednadžbe bit će teorija analitičkih funkcija. Veza tih teorija počiva na činjenici da su imaginarni i realni dio analitičke funkcije $F(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ harmonijske funkcije. To znači da u i v zadovoljavaju Cauchy-Reimannove jednadžbe[1] pa pišemo:

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}(v_y) - \frac{\partial}{\partial y}(v_x) = 0. \tag{3.2}$$

Metoda separacije varijabli primjenjuje se na Laplaceovu jednadžbu kada vrijedi određena simetrija promatrane domene D. Radi jednostavnosti, promatrat će se rješenje na pravokutnoj domeni. Ako pretpostavimo pravokutnu domenu definiranu kao

$$D = (0,a) \times (0,b), \tag{3.3}$$

te promotrimo Laplaceovu jednadžbu za tu domenu

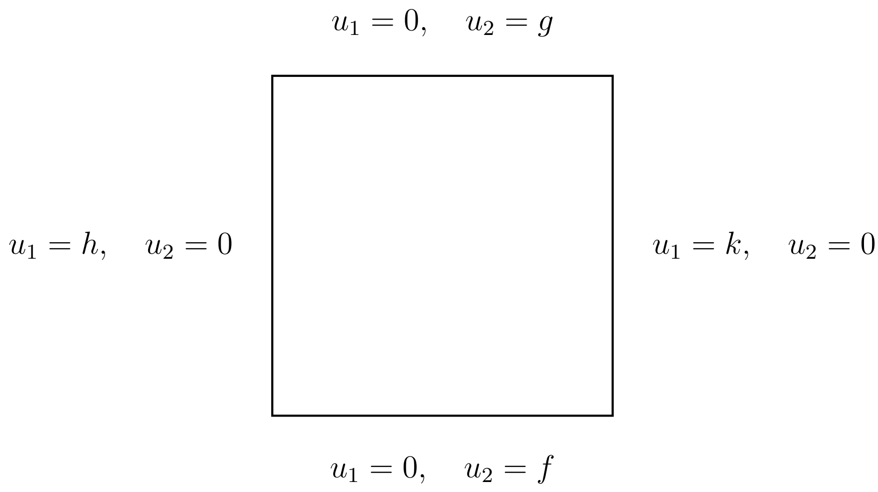
$$\Delta u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{3.4}$$

s poznatim Dirichletovim rubnim uvjetima

$$u(x,0) = f(x), \quad u(x,b) = g(x), \quad 0 \leq x \leq a, \tag{3.5}$$

$$u(0,y) = h(y), \quad u(b,y) = k(y), \quad 0 \leq y \leq b. \tag{3.6}$$

[1] Cauchy-Reimannovi uvjeti su uvjeti koje trebaju zadovoljiti realni i imaginarni dio neke promatrane funkcije kompleksne varijable kako bi ona bila analitička. Daju se dvjema parcijalnim diferencijalnim jednadžbama $u_x = v_y$ i $u_y = -v_x$, gdje su sve promatrane parcijalne derivacije (u_x, u_y, v_x, v_y) neprekidne unutar promatranog područja.



Slika 3.1. Rubni uvjeti za zadani problem (3.4). *Izvor: Izrada autora*

Tada će postavljeni problem biti rješiv ako se rješenje u Laplaceove jednadžbe (3.4) razvije u red. Razvoj u red postiže se pridruživanjem odgovarajućeg Sturm-Liouvilleovog problema[2] Laplaceovoj jednadžbi, to jest odgovarajuće bazne funkcije koje će omogućiti razvoj rješenja u red. Ovaj problem traži homogene rubne uvijete, pa je traženo rješenje u potrebno rastaviti na zbroj $u_1 + u_2$, pri čemu su u_1 i u_2 harmonijske funkcije koje zadovoljavaju rubne uvjete sa slike 3.1

$$u_1(x,0) = 0, \quad u_1(x,b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \tag{3.7}$$

$$u_2(x,0) = f(x), \quad u_2(x,b) = g(x), \quad 0 \leq x \leq a, \tag{3.8}$$

$$u_1(0,y) = h(y), \quad u_1(a,y) = k(y), \quad 0 \leq y \leq b, \tag{3.9}$$

$$u_2(0,y) = 0, \quad u_2(a,y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b. \tag{3.10}$$

Kako bi se ostvarila neprekidnost rubnih uvjeta za funkcije u_1 i u_2 unutar promatrane domene D, pretpostavlja se zadovoljavanje uvjeta kompatibilnosti funkcija f, g, h i k

$$f(0) = f(a) = 0, \quad g(0) = g(a) = 0, \tag{3.11}$$

$$h(0) = h(b) = 0, \quad k(0) = k(b) = 0. \tag{3.12}$$

Evidentno je ispunjenje zadanih rubnih uvjeta, stoga, funkcija $u = u_1 + u_2$ predstavlja jedinstveno rješenje promatranog problema, te je on uspješno postavljen. Rješavanju se pristupa prvo tražeći rješenje funkcije u_1 u separiranom obliku $u_1(x,y) = P(x)Q(y)$, temeljem ovog zapisa iz jednadžbe (3.4) dobivamo

$$\frac{P''(x)}{P(x)} = -\frac{Q''(y)}{Q(y)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

[2] Sturm-Liouvilleov problem nazvan je po Jacquesu Sturmu i Josephu Liouvilleu. Svrha ovog problema je određivanje vrijednosti λ za koje postoje netrivijalna rješenja diferencijalne jednadžbe $\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = -\lambda w(x)u$ koja zadovoljavaju početne rubne uvjete.

Drugim riječima, funkcije P i Q zadovoljavat će jednadžbe

$$P''(x) - \lambda P(x) = 0, \quad 0 < x < a, \tag{3.14}$$

$$Q''(y) + \lambda Q(y) = 0, \quad 0 < y < b. \tag{3.15}$$

Iz rubnih uvjeta (3.7) slijedi

$$Q(0) = Q(b) = 0, \tag{3.16}$$

te će funkcija Q zadovoljavati pripadni Sturm-Liouvilleov problem (3.15). Funkcije i pripadajuće vlastite vrijednosti dane su sa

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad Q_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \tag{3.17}$$

pri čemu je $n \in \mathbb{N}$. Jednadžba funkcije P sada poprima oblik

$$P''(x) - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 P(x) = 0, \quad 0 < x < a. \tag{3.18}$$

S obzirom da na stranicama pravokutnika vrijede rubni uvjeti $x = 0$ i $x = a$ (vidi sliku 3.1) opće rješenje jednadžbe (3.18) zapisuje se kao

$$P_n(x) = A_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}(x-a)\right). \tag{3.19}$$

Kod ovog rješenja valja primjetiti linearnu nezavisnost hiperbolnih funkcija $\sinh\left(\frac{n\pi}{b}\right)$ i $\sinh\left(\frac{n\pi}{b}(x-a)\right)$ kao rješenja jednadžbe (3.18). Nadalje primjenom principa superpozicije opisanog teoremom (2.1) dobivamo formalni zapis rješenja funkcije u_1 u obliku reda

$$u_1(x,y) = P_n(x)Q_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}(x-a)\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right). \tag{3.20}$$

Ukoliko izraz (3.20) supstituiramo u (3.18) dobiva se

$$u_1(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} -B_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}(x-a)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = h(y), \quad 0 \le y \le b, \tag{3.21}$$

$$u_1(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = k(y), \quad 0 \le y \le b. \tag{3.22}$$

Jednadžbe (3.21) - (3.22) predstavljaju razvoj u Fourierov red[3] po sinusima funkcija h i k, pri čemu je razvoj proveden na intervalu $[0, b]$.

Ukoliko se definiraju koeficijenti kao

$$\alpha_n = A_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right), \quad \beta_n = -B_n\left(\frac{n\pi a}{b}\right), \tag{3.23}$$

[3]Fourierove redove kao način za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi uvodi Joseph Fourier. Svrha im je razvoj periodičkih funkcija u sumu jednostavnih oscilatornih funkcija (sinusa i kosinusa).

funkcije h i k poprimaju oblik

$$h(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad 0 \leq y \leq b, \tag{3.24}$$

$$k(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad 0 \leq y \leq b. \tag{3.25}$$

Koeficijenti Fourierova reda dani su

$$\alpha_n = \frac{2}{b}\int_0^b k(y)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy, \quad \beta_n = \frac{2}{b}\int_0^b h(y)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy. \tag{3.26}$$

Povezujući dobivene izraze za koeficijente sa (3.23) dolazi se do

$$A_n = \frac{2}{b\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\int_0^b k(y)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy, \tag{3.27}$$

$$B_n = -\frac{2}{b\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\int_0^b h(y)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy. \tag{3.28}$$

Istovjetnim načinom dolazi se do rješenja za $u_2(x, y)$

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + D_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(y-b)\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \tag{3.29}$$

pri čemu je

$$C_n = \frac{2}{a\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\int_0^a g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx, \tag{3.30}$$

$$D_n = -\frac{2}{a\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx. \tag{3.31}$$

Ukoliko predpostavimo da je domena $D = (0, 3) \times (0, 3)$, to jest da su koeficijenti $a = b = 3$, rješenje poprima oblik

$$A_n = \frac{2}{3\sinh(n\pi)}\int_0^3 k(y)\sin\left(\frac{n\pi}{3}y\right)dy, \tag{3.32}$$

$$B_n = -\frac{2}{3\sinh(n\pi)}\int_0^3 h(y)\sin\left(\frac{n\pi}{3}y\right)dy, \tag{3.33}$$

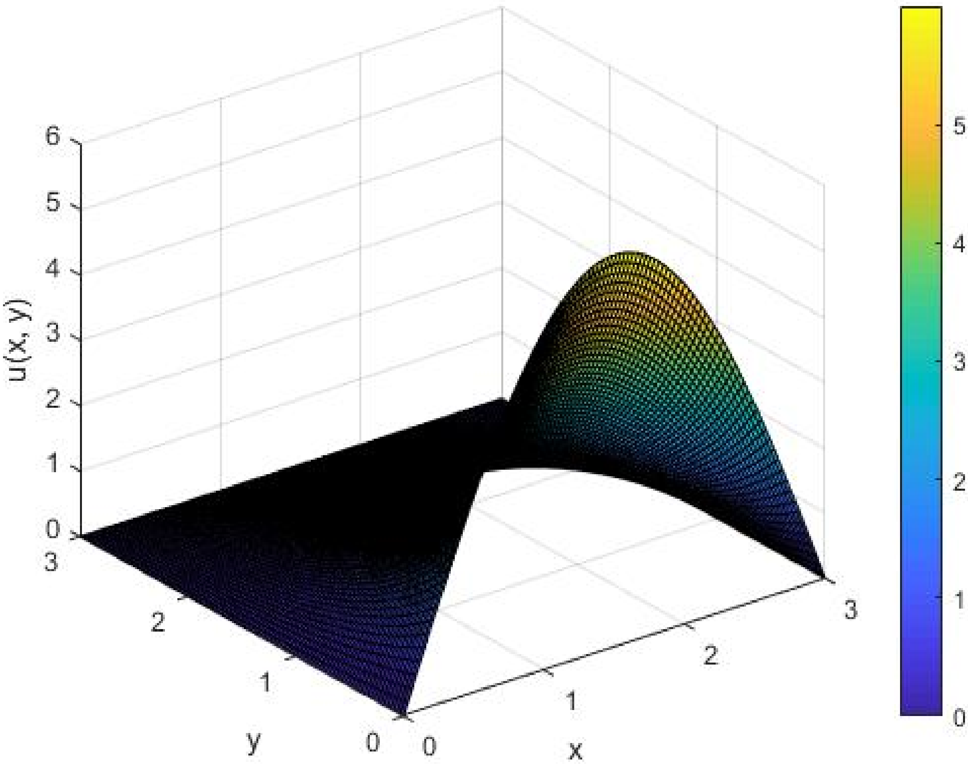
$$C_n = \frac{2}{3\sinh(n\pi)}\int_0^3 g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right)dx, \tag{3.34}$$

$$D_n = -\frac{2}{3\sinh(n\pi)} \int_0^3 f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right) dx. \tag{3.35}$$

Formalni zapis rješenja zadanog problema Laplaceove jednadžbe jednak je

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y). \tag{3.36}$$

Na slici 3.2 nalazi se grafički prikaz rješenja Laplaceove jednadžbe $u(x, y)$ za pretpostavljene vrijednosti domene $a = 3$ i $b = 3$ u slučaju kada je $f(x) = \sin(\frac{\pi x}{3})$, dok su sve ostale funkcije jednake nuli.



Slika 3.2. Grafički prikaz rješenja $u(x, y)$. Izvor: Izrada autora

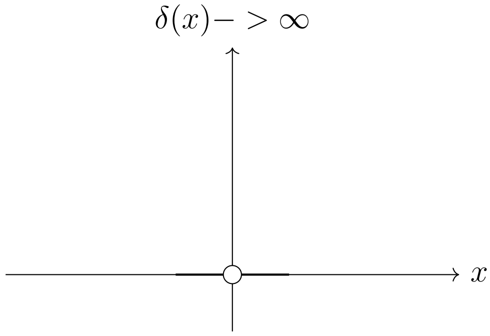
Valja napomenuti da ova rješenja Laplaceove jednadžbe vrijede ako i samo ako rubne funkcije $f(x)$, $g(x)$, $h(y)$, $k(y)$ zadovoljavaju uvjete kompatibilnosti (3.11) i (3.12).

3.2. Rješenje Poissonove jednadžbe primjenom Greenove funkcije

Implementacija Greenove funkcije[4] kod rješavanja diferencijalnih jednadžbi počiva na integralnom obliku zapisa rješenja uz primjenu teorema o superpoziciji. Funkcija je razvijena upravo

[4]Greenova funkcija dobila je ime po Engleskom matematičaru i fizičaru Georgu Greenu(14.lipnja 1793.-31.svibnja 1841.).

sa svrhom rješavanja Poissonove jednadžbe kod problema potencijala u vakuumu. Primjena Greenove funkcije nije ograničena samo na Poissonovu jednadžbu već se koristi kod rješavanja različitih matematičkih problema opisanih diferencijalnim jednadžbama i zadanim rubnim ili početnim uvjetima. Radi boljeg razumijevanja ove funkcije neophodno je prvo definirati Diracovu delta funkciju[5] pomoću koje se u kasnijem izračunu omogućuje zapis poznate funkcije f iz (2.23). Diracova delta funkcija poseban je slučaj funkcije (impuls) koja će biti jednaka nuli u svim točkama, osim u točki izvora (ishodištu) kada njen iznos teži ka beskonačnosti.



Slika 3.3. Prikaz Diracove delta funkcije. Izvor: Izrada autora

Promatrajući 1D prostor Diracova delta funkcija ima oblik $\delta(x - x_0)$, te za nju vrijedi

$$\delta(x - x_0) = 0, \quad x \neq x_0, \tag{3.37}$$

$$\int_a^b \delta(x - x_0)dx = 1. \tag{3.38}$$

Također ukoliko je $x \in [a, b]$ vrijedi

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x). \tag{3.39}$$

Za slučaj delte u više dimenzija, primjerice u 2D prostoru, biti će reprezentirana zbrojem delta funkcija u 1D prostoru

$$\delta(x - x_0, y - y_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0). \tag{3.40}$$

Nadalje, možemo definirati Greenovu funkciju koja za problem Poissonove jednadžbe unutar nekog promatranog prostora D zadovoljava jednadžbu

$$\nabla^2 G(x; x0) = \delta(x - x0), \quad za \quad x_0 \in D. \tag{3.41}$$

Valja napomenuti da Greenova funkcija zadovoljava svojstvo simetrije to jest da vrijedi

$$G(x; x_0) = G(x_0; x). \tag{3.42}$$

[5]Razvija je britanski fizičar Paul Dirac sa svrhom primjene u teoriji distribucija. Fizikalno gledano izvor te funkcije označuje upravo centar mase ili mjesto djelovanja točkastih naboja.

Ovo svojstvo može biti korisno prilikom provjere ispravnosti računa.
Promotrimo sada Dirichletov problem na granici D za Poissonovu jednadžbu unutar domene Ω

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{3.43}$$

$$u(x,y) = h(x,y), \quad (x,y) \in D. \tag{3.44}$$

Unutar promatrane domene Ω, Greenova funkcija zadovoljava jednadžbe

$$\nabla^2 G = \delta(x_0 - x)\delta(y_0 - y), \quad dok \quad je \quad \nabla^2 G = \frac{\partial^2 G}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y_0^2}. \tag{3.45}$$

Vrijedi da će Greenova fukcija biti kontinuirana u svim točkama $(x, y; x_0, y_0)$, osim diskontinuiteta kod (x, y) u slučaju prve parcijalne derivacije $\frac{\partial G}{\partial n}$ gdje vrijedi

$$\lim_{r \to 0} \int\limits_{D_r} \frac{\partial G}{\partial n} ds = 1, \tag{3.46}$$

pri čemu n pretstavlja vanjsku normalu na kružnicu D_r, koja je opisana jednadžbom

$$(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 = R^2, \tag{3.47}$$

gdje R predstavlja polumjer kružnice za središtem (x, y). Greenova funkcija može se zapisati kao zbroj partikularnog i homogenog dijela

$$G(x, y; x_0, y_0) = G_1(x, y; x_0, y_0) + G_2(x, y; x_0, y_0), \tag{3.48}$$

pri čemu je G_1 Greenova funkcija bez rubnih uvjeta za koju vrijedi $\nabla^2 G_1 = \delta(x_0 - x)\delta(y_0 - y)$, a za G_2 vrijedi jednakost $\nabla^2 G_2 = 0$. Zbog zadovoljavanja principa superpozicije na granici područja D vrijedi

$$G = 0, \quad G_2 = -G_1. \tag{3.49}$$

Prvo određujemo partikularno rješenje[6] kada nema rubnih uvijeta koje možemo pretpostaviti u formi

$$G_1 = A + B \log r, \tag{3.50}$$

pri čemu su A i B konstante koje se traže. Ovo rješenje proizlazi iz primjene ranije opisane metode separacije varijabli na polarni zapis izraza za G_1 ukoliko vrijedi neovisnost G_1 o kutu θ

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial G_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G_1}{\partial \theta^2} = 0. \tag{3.51}$$

Ukoliko se (3.50) uvrsti u (3.46) i dobiveni izraz raspiše dolazi se do

$$\lim_{r \to 0} \int\limits_{D_r} \frac{\partial G_1}{\partial n} ds = 1, \tag{3.52}$$

[6]Partikularno rješenje Greenove funkcije zovemo funkcijom proizvoljnog područja *(eng. free space Green's function).*

$$\lim_{r\to 0}\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\partial}{\partial n}(A + B\log r)Rd\theta = \lim_{r\to 0}\int\limits_{0}^{2\pi} Bd\theta = 1. \tag{3.53}$$

Rješavanjem dobivenog integrala (3.53) proizlazi rješenje za konstantu B koje glasi

$$B = \frac{1}{2\pi}. \tag{3.54}$$

S obzirom da je moguć proizvoljan odabir vrijednosti konstante A uzima se $A = 0$ zbog pojednostavljenja daljnjeg proračuna. Ukoliko se dobiveni iznosi konstanti sada uvrste u (3.50) proizlazi

$$G_1(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\log r = \frac{1}{4\pi}\log\left[(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2\right]. \tag{3.55}$$

Ako vrijedi pretpostavka da će za svaki $(x, y) \in \Omega$ biti poznata Greenova funkcija koja zadovoljava uvjet da za svaki $(x_0, y_0) \in D$ vrijedi $G(x, y; x_0, y_0) = 0$, moguće je rješenje problema (3.44) $u(x, y)$ odrediti primjenom Greenove formule[7].

Definicija 3.1. *Neka su P i Q neke proizvoljno odabrane funkcije, tada Greenova formula glasi*

$$\int\int\limits_{\Omega} (P\nabla^2 Q - Q\nabla^2 P)dV = \int\limits_{D} \left(P\frac{\partial Q}{\partial n} - Q\frac{\partial P}{\partial n}\right) ds, \tag{3.56}$$

pri čemu je D neki volumen sa površinom s.

Ovisnost P i Q o x_0 i y_0 dana je

$$P(x_0, y_0) = G(x, y; x_0, y_0), \tag{3.57}$$

$$Q(x_0, y_0) = u(x_0, y_0). \tag{3.58}$$

Ukoliko se (3.57) i (3.58) uvrste u definiciju za Greenovu drugu formulu (3.56) proizlazi

$$\int\int\limits_{\Omega} \left[G(x, y; x_0, y_0)\nabla^2 u - u(x_0, y_0)\nabla^2 G\right] dx_0 dy_0 = \int\limits_{D} \left[G(x, y; x_0, y_0)\frac{\partial u}{\partial n} - u(x_0, y_0)\frac{\partial G}{\partial n}\right] ds, \tag{3.59}$$

pri čemu na Ω moraju biti zadovoljeni sljedeći uvjeti

$$\nabla^2 u = f(x_0, y_0), \tag{3.60}$$

$$\nabla^2 G = \delta(x_0 - x)\delta(y_0 - y), \tag{3.61}$$

a na granici D

$$G = 0, \tag{3.62}$$

$$u(x_0, y_0) = g(x_0, y_0). \tag{3.63}$$

[7]Greenova formula povezuje dvostruki integral definiran na području domene ω sa jednostrukim integralom na granici D.

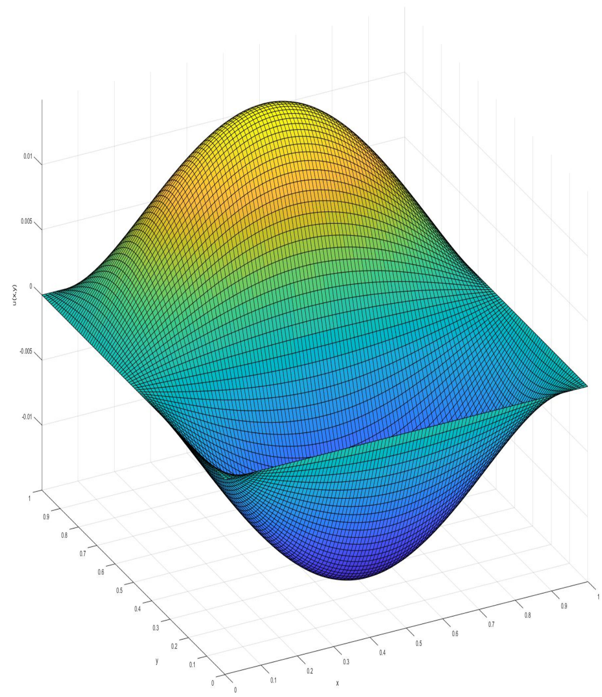
Ako se sada izrazi (3.63) - (3.60) uvrste u (3.59) proizlazi

$$\int\int_{\Omega} \left[G(x,y;x_0,y_0)f(x_0,y_0) - u(x_0,y_0)\delta(x_0-x)\delta(y_0-y)\right] dx_0 dy_0 = \tag{3.64}$$

$$\int_{D} \left[0\frac{\partial u}{\partial n} - g(x_0,y_0)\frac{\partial G}{\partial n}\right] ds, \tag{3.65}$$

čijim se daljnjim sređivanjem dolazi do općeg oblika rješenja Dirichletovog problema Poissonove jednadžbe

$$u(x,y) = \int\int_{\Omega} G(x,y;x_0,y_0)f(x_0,y_0)dx_0dy_0 + \int_{D} g(x_0,y_0)\frac{\partial G}{\partial n}(x,y;x_0,y_0)ds. \tag{3.66}$$



Slika 3.4. Grafički prikaz rješenja $u(x,y)$ *za vrijednosti funkcije* $h(x,y) = \sin(\pi x)\sin(2\pi y)$. *Izvor: Izrada autora*

Iz dobivenog izraza općeg rješenja može se izvesti zaključak kako će rješenje $u(x,y)$ upravo ovisiti samo o vrijednosti Greenoove funkcije $G(x,y;x_0,y_0)$. Valja napomenuti kako se ispravan izraz prilikom određivanja funkcije G pojavljuje na ograničenom broju domena (kružnim i pravokutnim). Također iz dobivenih izraza proizlazi kako se cijeli postupak svodi na zbroj rješenja nehomogene jednadžbe s homogenom jednadžbom.

3.3. Metoda konačnih razlika

Metoda konačnih razlika jedna je od osnovnih metoda koje omogućuju numeričko rješavanje diferencijalnih jednadžbi aproksimacijom operatora derivacije. [13] [14]

Numeričke metode omogućuju pronalazak aproksimiranih rješenja diferencijalnih jednadžbi te pojednostavljuju rješavanje istih. Postupak se svodi na izdvajanje svih derivacija iz diferencijalnih jednadžbi te njihovom zamjenom aproksimiranim izrazima. Ovakvim izdvajanjem dobiju se algebarske jednadžbe čije rješavanje je uvelike pojednostavljeno, te se na temelju njihovih rješenja dobivaju aproksimacije. Metode konačnih razlika služe za pretvorbu običnih ili PDJ (mogu biti nelinearne) u sustav linearnih jednadžbi. Modernizacijom dolazi do sve veće implementacije korištenja ove metode u numeričkoj analizi, s obzirom na efikasnost i lakoću samog izračuna. Ideja aproksimacije derivacije proizlazi iz same definicije derivacije

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{3.67}$$

Geometrijska interpretacija prve derivacije pretstavljena je nagibom tangente na krivulju f u točki x koji je moguće aproksimirati s pravcima koji prolaze kroz susjedne točke na krivulji. Tako se razlikuju tri moguće aproksimacije

1. Aproksimacija razlikom unaprijed:
$$\left(\frac{df}{dx}\right)_i \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \tag{3.68}$$
2. Aproksimacija razlikom unazad:
$$\left(\frac{df}{dx}\right)_i \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \tag{3.69}$$
3. Aproksimacija središnjom razlikom:
$$\left(\frac{df}{dx}\right)_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \tag{3.70}$$

Zapis derivacije s limesom (3.67) neće biti moguće provesti u računalu s obzirom na ograničenja računalne memorije, već je potrebno provesti aproksimaciju izraza (3.67) u slučaju kada su vrijednosti funkcije f poznate na konačnom broju čvorova s konačnim razmakom Δx. Prilikom aproksimacije javljaju se određene pogreške koje se aproksimiraju razvojem funkcije u Taylorov red

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x) + \frac{1}{2}\Delta x^2 f''(x) + \frac{1}{6}\Delta x^3 f'''(x) + 0(\Delta x^4). \tag{3.71}$$

Izraz za prvu derivaciju sada je

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{1}{2}\Delta x^2 f''(x) - \frac{1}{6}\Delta x^3 f'''(x) + 0(\Delta x^4), \tag{3.72}$$

pri čemu je pogreška aproksimacije proporcionalna razmaku Δx. Moguće je dobiti bolju aproksimaciju kombiniranjem zapisa (3.71) i

$$f(x-\Delta x) = f(x) - \Delta x f'(x) + \frac{1}{2}\Delta x^2 f''(x) - \frac{1}{6}\Delta x^3 f'''(x) + 0(\Delta x^4), \tag{3.73}$$

odakle slijedi

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} - \frac{1}{6}\Delta x^3 f'''(x) + 0(\Delta x^4). \tag{3.74}$$

Dakle, aproksimacija je sada

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x}, \tag{3.75}$$

pri čemu je pogreška aproksimacije proporcionala s Δx^2. Na sličan način dobija se aproksimacija druge derivacije koja glasi

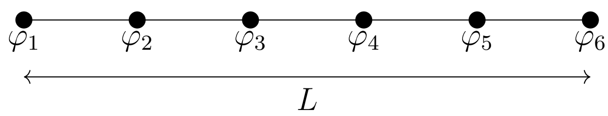
$$f''(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x^2}. \tag{3.76}$$

3.3.1. Primjena metode konačnih razlika za rješavanje Poissonove jednadžbe

Primjena metode konačnih razlika zbog jednostavnosti pokazana je na primjeru zadane jednodimenzionalne Poissonove jednadžbe

$$-3\frac{d^2\varphi}{dx^2} - 2\frac{d\varphi}{dx} - 4\varphi = \left[-24 + 18(\frac{\pi}{L})^2\right]\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + 12\frac{\pi}{L}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \tag{3.77}$$

unutar području $0 \leq x \leq L$ na mreži od 6 i 9 točaka sa jednako razmaknutim čvorovima, uz pretpostavku duljine $L = 2m$. Zadani rubni uvjeti su $\varphi(0) = 6$ i $\frac{d\varphi}{dx}(2) = 0$.



Slika 3.5. Diskretizacijska mreža s $n = 6$ čvorova. Izvor: Izrada autora

Na temelju slike 3.5 Δx iznosi

$$\Delta x = \frac{L}{n-1} = \frac{2}{5} = 0.4, \tag{3.78}$$

te je konstantan. Nadalje potrebno je izračunati vrijednosti desne strane u svakom čvoru prema formuli

$$A_i = \left[-24 + 18(\frac{\pi}{L})^2\right]\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + 12\frac{\pi}{L}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \tag{3.79}$$

gdje A_i označuje vrijednost desne strane u svakom čvoru i. Vrijednosti A_i za čvorove su sada

1. Čvor 2

$$x_2 = 0.4, \quad A_2 = 27.59. \tag{3.80}$$

2. Čvor 3

$$x_3 = 0.8, \quad A_3 = 24.23. \tag{3.81}$$

3. Čvor 4

$$x_4 = 1.2, \quad A_4 = 11.62. \tag{3.82}$$

4. Čvor 5

$$x_5 = 1.6, \quad A_5 = -5.44. \tag{3.83}$$

Ovime postižemo jednostavnije određivanje lijeve strane jednadžbe koja sada poprima oblik

$$\left(-3\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_i - \left(2\frac{d\varphi}{dx}\right)_i - 4(\varphi)_i = A_i. \tag{3.84}$$

Primjenjujući formule za aproksimaciju prve derivacije opisane u prethodnom poglavlju dobivenu jednadžbu raspisujemo kao

1. Jednadžba za čvor 1 temeljem rubnog uvjeta glasi

$$\varphi(0) = \varphi_1 = 6. \tag{3.85}$$

2. Jednadžba za čvor 2 glasi

$$-3\frac{\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3}{(\Delta x)^2} - 2\frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2\Delta x} - 4\varphi_2 = 27.57, \tag{3.86}$$

čijim sređivanjem slijedi

$$-52\varphi_2 + 45\varphi_3 = 942.134. \tag{3.87}$$

3. Jednadžba za čvor 3 glasi

$$-3\frac{\varphi_2 - 2\varphi_3 + \varphi_4}{(\Delta x)^2} - 2\frac{\varphi_4 - \varphi_2}{2\Delta x} - 4\varphi_3 = 24.23, \tag{3.88}$$

čijim sređivanjem slijedi

$$55\varphi_2 - 52\varphi_3 + 45\varphi_4 = 3435.844. \tag{3.89}$$

4. Jednadžba za čvor 4 glasi

$$-3\frac{\varphi_3 - 2\varphi_4 + \varphi_5}{(\Delta x)^2} - 2\frac{\varphi_5 - \varphi_3}{2\Delta x} - 4\varphi_4 = 11.62, \tag{3.90}$$

čijim sređivanjem slijedi

$$55\varphi_3 - 52\varphi_4 + 45\varphi_5 = 9952.038. \tag{3.91}$$

5. Jednadžba za čvor 5 glasi

$$-3\frac{\varphi_4 - 2\varphi_5 + \varphi_6}{(\Delta x)^2} - 2\frac{\varphi_6 - \varphi_4}{2\Delta x} - 4\varphi_5 = -5.44, \tag{3.92}$$

čijim sređivanjem slijedi

$$55\varphi_4 - 52\varphi_5 + 45\varphi_6 = 23257.382. \tag{3.93}$$

6. Jednadžba za čvor 6 temeljem rubnog uvjeta glasi

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi_6 - \varphi_5}{\Delta x} = 0, \tag{3.94}$$

čijim sređivanjem slijedi

$$-\varphi_5 + \varphi_6 = 0. \tag{3.95}$$

Dobivene aproksimacije mogu se zapisati u matričnom obliku kako slijedi

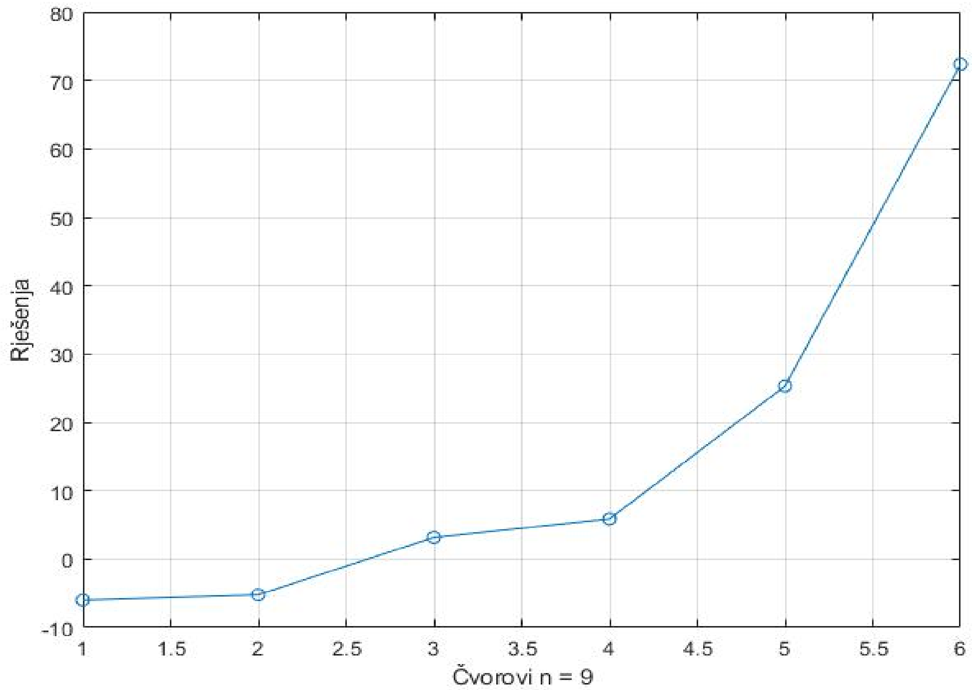
$$Y \times \varphi = B. \tag{3.96}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -52 & 45 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & -52 & 45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 55 & -52 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 55 & -52 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 942.134 \\ 3435.844 \\ 9952.038 \\ 23257.382 \\ 592.8 \end{bmatrix}$$

Određivanjem inverza traženo rješenje glasi

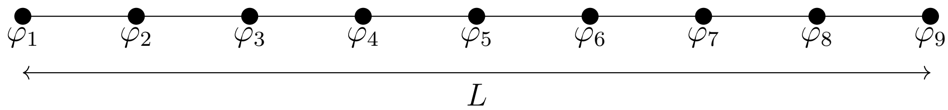
$$\varphi = Y^{-1} \times B \tag{3.97}$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} -6 \\ -5.22 \\ 3.17 \\ 5.87 \\ 25.31 \\ 72.38 \end{bmatrix}$$



Slika 3.6. Grafički prikaz rješenja za broj čvorova $n = 6$. Izvor: Izrada autora

Nadalje ponavaljamo isti postupak u ovom slučaju za mrežu od $n = 9$ čvorova.



Slika 3.7. Diskretizacijska mreža s $n = 9$ čvorova. Izvor: Izrada autora

U ovom slučaju na temelju slike 3.7 Δx iznosi

$$\Delta x = \frac{L}{n-1} = \frac{2}{8} = 0.25. \tag{3.98}$$

Nadalje vrijedi isti postupak, pa za desnu stranu slijedi

1. Čvor 2
$$x_2 = 0.25, \quad A_2 = 20.7. \tag{3.99}$$
2. Čvor 3
$$x_3 = 0.5, \quad A_3 = 27.76. \tag{3.100}$$
3. Čvor 4
$$x_4 = 0.75, \quad A_4 = 25.23. \tag{3.101}$$
4. Čvor 5
$$x_5 = 1, \quad A_5 = 18.84. \tag{3.102}$$

5. Čvor 6

$$x_6 = 1.25, \quad A_6 = 9.6. \tag{3.103}$$

6. Čvor 7

$$x_7 = 1.5, \quad A_7 = -1.1. \tag{3.104}$$

7. Čvor 8

$$x_8 = 1.75, \quad A_8 = -11.65. \tag{3.105}$$

Lijeva strana jednadžbe sada poprima oblik

$$\left(-3\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_i - \left(2\frac{d\varphi}{dx}\right)_i - 4(\varphi)_i = A_i. \tag{3.106}$$

Primjenjujući isti postupak kao i u prethodnom slučaju slijedi

1. Jednadžba za čvor 1 temeljem rubnog uvjeta glasi

$$\varphi(0) = \varphi_1 = 6. \tag{3.107}$$

2. Jednadžba za čvor 2 glasi

$$-3\frac{\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3}{(\Delta x)^2} - 2\frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2\Delta x} - 4\varphi_2 = 20.7, \tag{3.108}$$

čijim sređivanjem slijedi

$$-628\varphi_2 + 325\varphi_3 = 2028.44. \tag{3.109}$$

3. Jednadžba za čvor 3 glasi

$$-3\frac{\varphi_2 - 2\varphi_3 + \varphi_4}{(\Delta x)^2} - 2\frac{\varphi_4 - \varphi_2}{2\Delta x} - 4\varphi_3 = 27.76, \tag{3.110}$$

čijim sređivanjem slijedi

$$351\varphi_2 - 628\varphi_3 + 325\varphi_4 = 278.643. \tag{3.111}$$

4. Jednadžba za čvor 4 glasi

$$-3\frac{\varphi_3 - 2\varphi_4 + \varphi_5}{(\Delta x)^2} - 2\frac{\varphi_5 - \varphi_3}{2\Delta x} - 4\varphi_4 = 25.23, \tag{3.112}$$

čijim sređivanjem slijedi

$$351\varphi_3 - 628\varphi_4 + 352\varphi_5 = 889.9. \tag{3.113}$$

5. Jednadžba za čvor 5 glasi

$$-3\frac{\varphi_4 - 2\varphi_5 + \varphi_6}{(\Delta x)^2} - 2\frac{\varphi_6 - \varphi_4}{2\Delta x} - 4\varphi_5 = 18.84, \tag{3.114}$$

čijim sređivanjem slijedi

$$351\varphi_4 - 628\varphi_5 + 325\varphi_6 = 1808.464. \tag{3.115}$$

6. Jednadžba za čvor 6 temeljem rubnog uvjeta glasi

$$-3\frac{\varphi_5 - 2\varphi_6 + \varphi_7}{(\Delta x)^2} - 2\frac{\varphi_7 - \varphi_5}{2\Delta x} - 4\varphi_6 = 9.6, \tag{3.116}$$

čijim sređivanjem slijedi

$$351\varphi_5 - 628\varphi_6 + 325\varphi_7 = 3117.608. \tag{3.117}$$

7. Jednadžba za čvor 7 temeljem rubnog uvjeta glasi

$$-3\frac{\varphi_6 - 2\varphi_7 + \varphi_8}{(\Delta x)^2} - 2\frac{\varphi_8 - \varphi_6}{2\Delta x} - 4\varphi_7 = -1.1, \tag{3.118}$$

čijim sređivanjem slijedi

$$351\varphi_6 - 628\varphi_7 + 325\varphi_8 = 4931.58. \tag{3.119}$$

8. Jednadžba za čvor 8 temeljem rubnog uvjeta glasi

$$-3\frac{\varphi_7 - 2\varphi_8 + \varphi_9}{(\Delta x)^2} - 2\frac{\varphi_9 - \varphi_7}{2\Delta x} - 4\varphi_8 = -11.65, \tag{3.120}$$

čijim sređivanjem slijedi

$$351\varphi_7 - 628\varphi_8 + 325\varphi_9 = 7395,512. \tag{3.121}$$

9. Jednadžba za čvor 9 temeljem rubnog uvjeta glasi

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi_9 - \varphi_8}{\Delta x} = 0, \tag{3.122}$$

čijim sređivanjem slijedi

$$-\varphi_8 + \varphi_9 = 0. \tag{3.123}$$

Dobivene aproksimacije u matričnom obliku glase

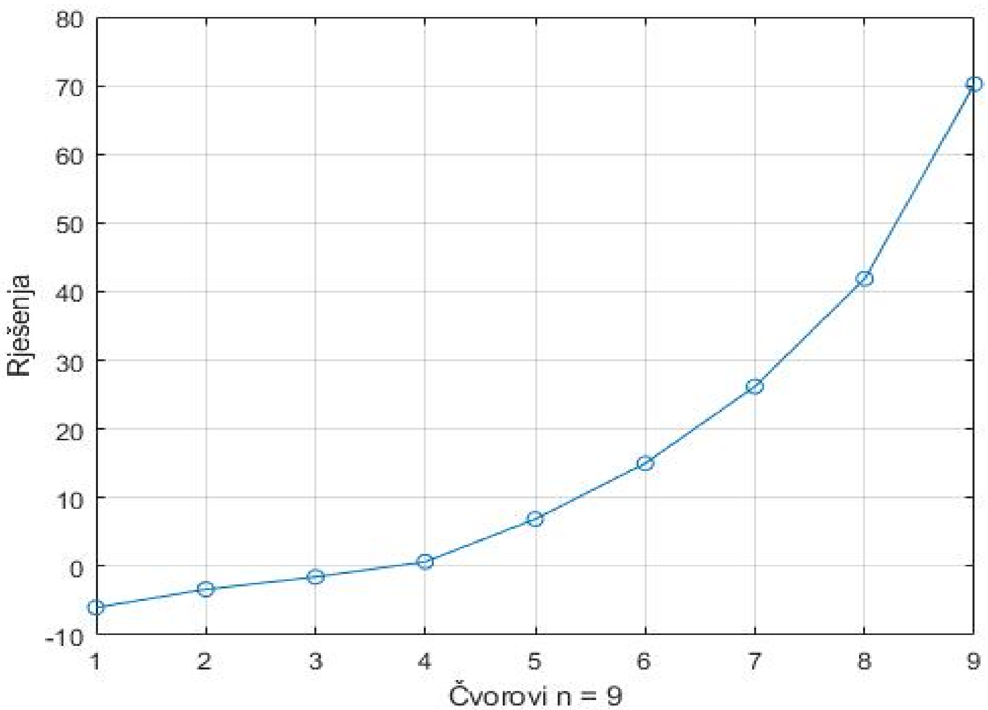
$$Y \times \varphi = B. \tag{3.124}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -628 & 325 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 351 & -628 & 325 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 351 & -628 & 325 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 351 & -628 & 325 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 351 & -628 & 325 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 351 & -628 & 325 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 351 & -628 & 325 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \varphi_8 \\ \varphi_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2028.44 \\ 278.643 \\ 889.9 \\ 1808.464 \\ 3117.608 \\ 4931.58 \\ 7395.512 \\ 10685.656 \end{bmatrix}$$

Određivanjem inverza traženo rješenje glasi

$$\varphi = Y^{-1} \times B \tag{3.125}$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} -6 \\ -3.345 \\ -1.54 \\ 0.678 \\ 6.89 \\ 14.98 \\ 26.18 \\ 41.87 \\ 70.22 \end{bmatrix}$$



Slika 3.8. Grafički prikaz rješenja za broj čvorova $n = 9$*. Izvor: Izrada autora*

Iz dobivenih rezultata možemo zaključiti kako će kvaliteta aproksimiranog rješenja ovisiti o korištenom broju čvorova. Bolje aproksimacije javljaju se za veći broj čvorova, pa tako ako se aproksimirano rješenje želi približiti analitičkom potreban je velik broj čvorova. Povećanjem broja čvorova produljuje se i dodatno komplicira proračun međutim sama dobivena rješenja bila bi točnija. Iz ovog razloga potrebno je detaljno procijeniti kolika je točnost rješenja zapravo potrebna i prema tome prilagoditi broj korištenih čvorova

4. Problem potencijala

Unutar ovog poglavlja objašnjeni su osnovni zakoni i veličine koji se javljaju unutar područja elektrostatike, a od iznimne su važnosti prilikom definiranja Poissonove jednadžbe za potencijal. [15] [16] [17]

Teorija Poissonove jednadžbe naziva se teorija potencijala. Ova jednadžba spada u najbolje proučene diferencijalne jednadžbe, te ima široku primjenu u elektrostatici, mehanici kao i drugim granama fizike. Njome se opisuju različite fizikalne pojave kao što su raspodjela brzine fluida po poprečnom presjeku cijevi kojom taj fluid prolazi, gravitacijsko polje, koriste se za opisivanje distribucije električnog potencijala u u prostoru unutar kojeg nema naboja, ili za temperaturu u uslijed nekog izvora topline f. S obzirom na to da je nama od interesa upravo opisivanje električnog potencijala Poissonovom jednadžbom, prvo se potrebno upoznati s elementarnim veličinama i zakonitostima koje vrijede unutar područja elektrostatike.

4.1. Uvod u elektrostatiku

Elektrostatika je grana fizike i elektrotehnike unutar koje se razmatraju električna polja koja su posljedica djelovanja mirujućih naboja te ostale pojave uzrokovane mirujućim nabojima. Gibanje i raspodjelu naboja unutar nekog prostora možemo promatrati kao izvor koji kao posljedicu ima pojavu sile te javljanje električnog polja. Električno polje je zapravo polje sile koje je posljedica naboja koji se ponašaju kao izvor. S obzirom na to da za električno polje vrijedi da je konačno i kontinuirano isto svojstvo mora vrijediti i za gustoću tih naboja tj.ona također mora biti konačna. Iz navedenog proizlazi da je naboj temeljna fizikalna veličina elektrostatike. Električni naboji mogu se podijeliti u dvije skupine: pozitivni koje vežemo uz protone i negativni koji su vezani uz elektrone.
Jedan od osnovnih zakona elektrostatike bio bi **Coulombov zakon** koji opisuje odnos sila između tijela nabijenih statičkim elektricitetom. Karakter sile ovisi o polaritetu naboja tj. sila može biti privlačna ako su naboji raznoimeni te odbojna ako su istoimeni. Otkriva ga 1785. godine francuski inženjer Charles Coulomb[1] provodeći niz pokusa kojima je ustanovio da je sila između dva mala nabijena tijela smještena u vakuumu koja se nalaze na udaljenosti R proporcionalna količini električnog naboja, a obrnuto proporcionalna kvadratu njihove međusobne udaljenosti. Prema tome Coulombov zakon definiran je kao

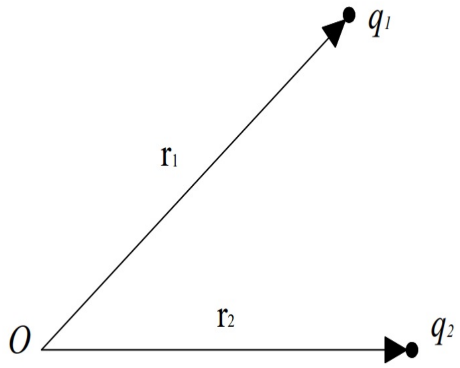
$$F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{R^2}, \tag{4.1}$$

[1] Charles-Augustin de Coulomb (14.lipnja 1736.-23.kolovoza 1806.), bio je francuski fizičar po kojem je nazvana mjerna jedinica električnog naboja kulon [C]

pri čemu su Q_1 i Q_2 vrijednosti naboja na promatranim tijelima, a k konstanta koja se računa po formuli:

$$k = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}, \tag{4.2}$$

ϵ_0 je dielektrična konstanta vakuuma i ona iznosi $8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$. Ako sada promatramo dva točkasta naboja koja se nalaze na dva različita položaja to jest naboj q_1 smješten na položaju r_1 i naboj q_2 smješten na položaju r_2 prema slici 4.1.

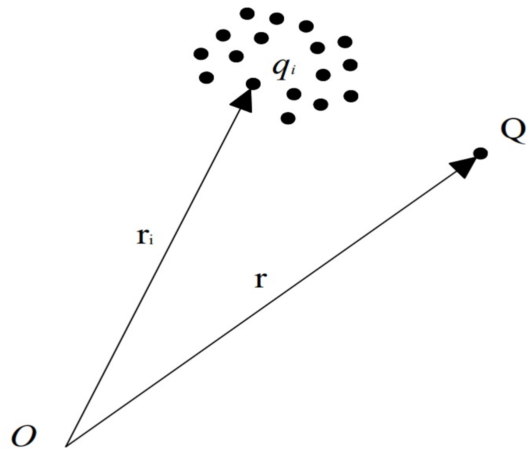


Slika 4.1. Sila između dva naboja. Izvor: Izrada autora

Sila između njih bila bi prema izrazu (4.1) jednaka

$$F = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{|r_1 - r_2|^2} \cdot \frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|}. \tag{4.3}$$

Ako jedan od dva naboja fiksiramo npr. naboj Q_1, a drugi naboj Q_2 pomičemo u okolini naboja Q_1 možemo primijetiti da će u svakoj točki prostora naboj Q_1 djelovati silom na naboj Q_2 odnosno javit će se polje sila koje je posljedica djelovanja naboja Q_1. Ukoliko sada naboj Q_2 prikažemo nabojem Q koji se nalazi na položaju r, a naboj Q_1 vizualiziramo skupom točkastih naboja $q_i = q_1, q_2, ..., q_k$ na položajima $r_1, r_2, ..., r_k$.



Slika 4.2. Sila između dva naboja. Izvor: Izrada autora

Tada je ukupna sila prema teoremu superpozicije jednaka vektorskom zbroju sila koje se javljaju između naboja q_i i Q.

$$F_Q = F_1 + F_2 + ... + F_k = \sum_{i=1}^{k} F_i = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \sum_{i=1}^{k} \frac{q_i \cdot Q}{|r - r_i|^2} \cdot \frac{r - ri}{|r - ri|} \tag{4.4}$$

Podijelimo li jednadžbu (4.4) nabojem Q dobivamo formulu za **električno polje**[2] E_Q u točki r

$$\frac{F_Q}{Q} = E_Q = E_1 + E_2 + ... + E_k = \sum_{i=1}^{k} E_i = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \sum_{i=1}^{k} \frac{q_i}{|r - r_i|^2} \cdot \frac{r - ri}{|r - ri|}. \tag{4.5}$$

Sljedeća osnovna veličina elektrostatike bila bi upravo **električni potencijal**. Svaka materija je u suštini neutralna odnosno raspolaže jednakim brojem pozitivnih i negativnih naboja, također mora vrijediti zakon očuvanja količine naboja koji kaže da algebarska suma naboja mora biti konstantna. Zbog toga, ukoliko bi željeli dobiti izolirane pozitivne i negativne naboje npr. na dvije paralelne vodljive ploče, onda bi pozitivni naboj na jednoj ploči te negativni naboj na drugoj ploči stvarali dovođenjem negativnih naboja s jedne ploče čime bi ona postala pozitivno nabijena, i dovođenjem tih naboja na drugu ploču čime ona postaje negativno nabijena. Kako bi uspješno razdvojili naboje potrebno je utrošiti određenu količinu energije koja se manifestira kroz stvaranje električnog polja među pločama. Ta energija opisana je potencijalom, prema tome možemo zaključiti da je električni potencijal skalarna veličina koja opisuje potencijalnu energiju naboja u električnom polju. Polje E_i preko izraza (4.5) možemo zapisati u obliku

$$E_i(r) \propto \frac{r_i - r}{|r_i - r|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{|r - r_i|} \right). \tag{4.6}$$

Čime dolazimo do formule za električni potencijal

$$\Phi(r) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \sum_{i=1}^{k} \frac{q_i}{|r - r_i|}. \tag{4.7}$$

Pri čemu je $\Phi(r)$ skalarno polje takvo da vrijedi

$$E(r) = -\nabla \Phi(r). \tag{4.8}$$

Iz čega se vidi da je električno polje E u potpunosti određeno preko potencijala. Uz potencijal veže se još jedna bitna formula, a to je formula koja opisuje rad. Rad zapravo predstavlja potencijalnu energiju nekog naboja Q u nekoj promatranoj točki električnog polja a tj. utrošak energije na udaljenosti l prilikom pomicanja naboja iz jedne točke npr. smještene u beskonačnosti (u kojoj nema djelovanja polja) u točku a koja se nalazi unutar područja promatranog polja.

$$W_p(a) = -\int_{\infty}^{a} Q \cdot E \cdot dl. \tag{4.9}$$

[2] Električno polje je prostor odnosno polje sile unutar kojeg električni naboj djeluje privlačnom ili odbojnom (ovisno o polaritetu) silom na neko drugo električno tijelo.

Iz spomenute relacije dolazimo do još jedne bitne formule koja omogućuje izračun potencijala u nekoj promatranoj točki električnog polja ako je poznata jakost električnog polja

$$\varphi(a) = -\int_{\infty}^{a} E \cdot dl. \tag{4.10}$$

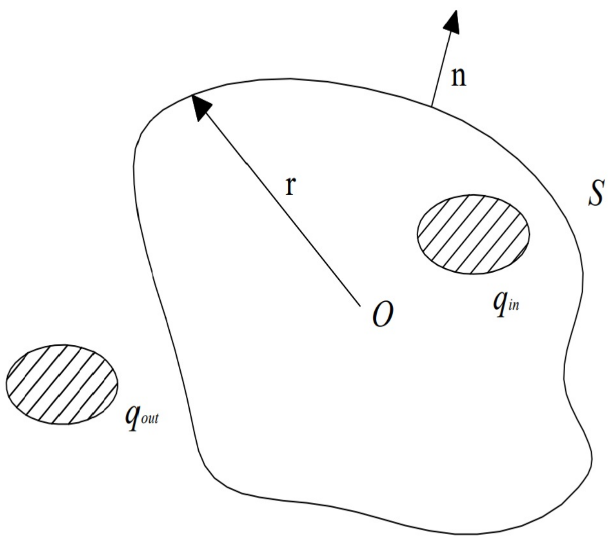
Poznavanje ove relacije omogućuje izračun razlike potencijala između dvije točke smještene unutar promatranog električnog polja. Razlika potencijala naziva se naponom čija oznaka je U iako u stranim literaturama se često koristi V. Ako promatramo napon između dvaju točaka označenih sa a i b, pri čemu je točka a na višem potencijalu u odnosu na točku b. Razlika potencijala tih točaka bit će označena kao U_{ab}, i računa se prema formuli

$$U_{ab} = \varphi(a) - \varphi(b) = -\int_{b}^{a} E \cdot dl. \tag{4.11}$$

Idući, a ujedno i posljednji važan zakon elektrostatike bio bi **Gaussov zakon**[3]. Ovaj zakon opisuje vezu električnog polja s gustoćom prostornog naboja to jest opisuje ukupni električni tok kroz neku zatvorenu plohu koji je proporcionalan ukupnom naboju pohranjenom unutar te plohe, a njegov zapis daje se u dvije forme:

1. Integralna forma,
2. Diferencijalna forma.

Ukoliko zamislimo naboj q_{in} koji se nalazi unutar neke zatvorene plohe S gdje n predstavlja vektor normale na promatranu plohu.



Slika 4.3. Položaj q_{in} unutar S. Izvor: Izrada autora

[3] Johann Carl Friedrich Gauss (30.travnja 1777.-23.veljače 1855.), bio je njemački fizičar, matematičar i astronom.

Integralna forma Gaussova zakona glasit će

$$\oint_S E \cdot dS = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}, \tag{4.12}$$

gdje plošni integral predstavlja protok električnog polja kroz plohu S. Ovdje valja primijetiti da je tok električnog polja E_{out} naboja q_{out} jednak nuli tj. ukupna vrijednost polja u točki r jednaka je $E = E_{in} + E_{out} = E_{in}$. Ovakav zapis pogodan je prilikom računanja električnog polja kada je raspodjela naboja simetrična (sferna,cilindrična ili ravninska simetrija), pri tome nam simetrija naboja indicira da je električno polje također simetrično to jest poznata nam je orijentacija polja te u skladu s tim informacijama možemo odabrati plohu S. Do diferencijalne forme Gaussova zakona dolazimo direktno iz njegovog integralnog zapisa uvođenjem gustoće naboja $\rho(r)$

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{4.13}$$

pri čemu ovaj izraz vrijedi u točki prostora r. Ako promotrimo jednadžbu (4.8)

$$E = -\nabla \Phi, \tag{4.14}$$

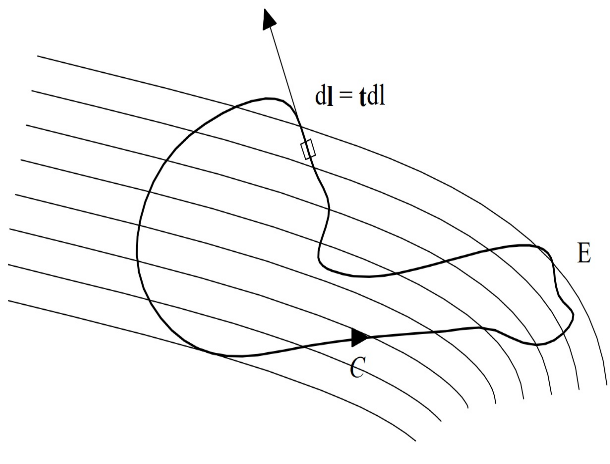
dolazimo do zaključka da rotor električnog polja iščezava tj. da vrijedi relacija

$$\nabla \times E = 0. \tag{4.15}$$

Zbog toga prema Stokesovom teoremu možemo zaključiti da je krivuljni integral električnog polja jednak nuli.

$$\oint_C E \cdot dl = 0 \tag{4.16}$$

Pri čemu je dl diferencijalna duljina luka krivulje C, a t tangenta, te vrijedi relacija da je $dl = tdl$ prema danoj slici.



Slika 4.4. Prikaz krivulje C. Izvor: Izrada autora

Teorem 4.1. *Ukoliko su ova svojstva zadovoljena zaključujemo da se radi o potencijalnom polju čiji potencijal računamo prema sljedećem izrazu*

$$\Phi(r_2) - \Phi(r_1) = -\int_{r_1}^{r_2} E \cdot dl, \tag{4.17}$$

pri čemu je električno polje E zadano.

Iz opisanih svojstva Gaussova zakona i rotora električnog polja proizlaze osnovni zakoni elektrostatike koji se dijele u dvije skupine. Prvi integralni zakoni koji glase:

$$\oint_S E \cdot dS = \frac{q}{\epsilon_0},$$
$$\oint_C E \cdot dl = 0. \tag{4.18}$$

Te diferencijalni zakoni:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$
$$\nabla \times E = 0. \tag{4.19}$$

4.2. Izvod i definicija Poissonove diferencijalne jednadžbe električnog potencijala

Općenito se Poissonova jednadžba za električni potencijal daje u sljedećem obliku

$$\nabla^2 \phi = \sigma(x), \tag{4.20}$$

pri čemu je ϕ neka nepoznata skalarna veličina koja se traži, a σ je poznata kao "izvorna funkcija". Izvod Poissonove jednadžbe započinjemo primjenom diferencijalne forme Gaussova zakona

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{4.21}$$

Gdje sada uvrštavanjem izraza za jakost električnog polja opisanog relacijom (4.8) u izraz (4.21) dolazimo do relacije

$$E = -\nabla\varphi \quad \longrightarrow \quad \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$
$$\nabla(-\nabla\varphi) = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{4.22}$$

Ovime dobivamo izraz Poissonove jednadžbe za potencijal

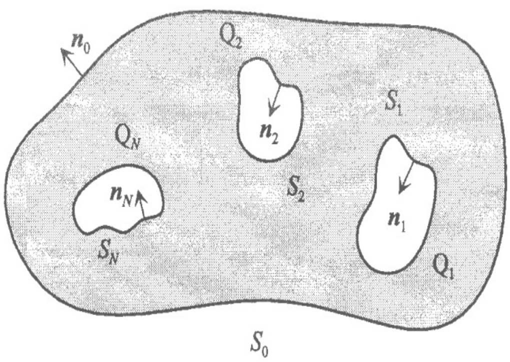
$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{4.23}$$

gdje je ϵ_0 dielektrična konstanta(permitivnost) vakuuma koja iznosi

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 \cdot c_0^2} = 8.85419 \times 10^{-12} \frac{As}{Vm}, \tag{4.24}$$

pri čemu je c_0 brzina svjetlosti u vakuumu, a μ_0 relativna permeabilnost vakuuma iznosa $4\pi \times 10^{-7} \frac{N}{A^2}$.

Sve navedene formule vrijedit će i u slučaju Laplaceove jednadžbe, kada unutar promatranog područja nema slobodnih nosioca naboja to jest kada je $\rho = 0$. Postoji beskonačno mnogo rješenja koja mogu zadovoljiti Poissonovu jednadžbu, iz tog razloga uvode se rubni uvjeti potencijala na rubovima područja nad kojim se vrši proračun. Ovime se osigurava jedinstvenost rješenja potencijala. Da bi mogli odrediti potrebne rubne uvjete koji će osiguravati jedinstvenost rješenja promotrimo sustav statičkog električnog polja opisanog danom slikom.



Slika 4.5. Sustav statičkog električnog polja. Izvor: [15]

Ukoliko se unutar danog volumena V ograničenog površinom S koja se sastoji od više manjih površina S_0, S_1, S_2,..., S_N nalazi homogeni linearni dielektrični materijal dielektričnosti ϵ_0, te slobodni nosioc naboja gustoće ρ. Tada je moguće pretpostaviti postojanje dva različita rješenja za potencijal φ_1 i φ_2 unutar danog volumena prilikom čega mora vrijediti:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_1 &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla^2 \varphi_2 &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Kada bi oduzeli navedene izraze, rješenje bi bilo 0, te bi zadovoljavalo Laplaceovu jednadžbu to jest situaciju kada je $\rho = 0$

$$\nabla^2 \varphi_1 - \nabla^2 \varphi_2 = \nabla^2 (\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \tag{4.26}$$

Prema tome da bi rješenje statičkog električnog polja bilo jedinstveno mora biti zadovoljeno da je razlika potencijala jednaka nuli ili neka konstantna vrijednost unutar promatranog područja V.

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= 0, \\ \varphi_1 - \varphi_2 &= konst. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Kako bi ispitali pod kojim uvjetima vrijede navedene relacije primijenit ćemo prvi Greenov identitet koji glasi:

Teorem 4.2.

$$\oint_S u\frac{\partial v}{\partial n}dS = \int_V [u\nabla^2 v + \nabla u \nabla v]dV. \tag{4.28}$$

Uvrštavanjem sljedeće jednakosti $u = v = \varphi_1 - \varphi_2$ u dani izraz dolazimo do relacije

$$\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2)\frac{\partial(\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial n}dS = \int_V [\nabla(\varphi_1 - \varphi_2)]^2 dV. \tag{4.29}$$

Koja nam govori da bi mogli imati jedinstveno rješenje prema uvjetima opisanim izrazom (4.27), desna strana jednadžbe (4.29) mora biti jednaka nuli tj. mora vrijediti

$$\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2)\frac{\partial(\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial n}dS = 0. \tag{4.30}$$

Dok će lijeva strana jednadžbe (4.29) biti jednaka nuli ukoliko su zadovoljeni sljedeći karakteristični slučajevi:

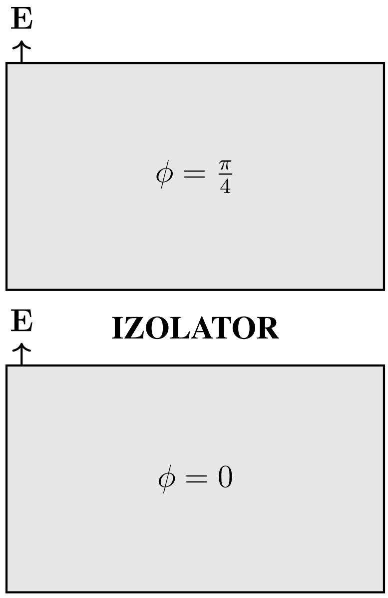
1. Vrijedi $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, tj. $\varphi_1 = \varphi_2$ u svim točkama površine S, pa tako i na cijelom području V.
2. Vrijedi $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 0$, tj. $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$ u svim točkama površine S, tada će i na cijelom području V vrijediti $\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_0$.
3. Vrijedi $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ na jednom dijelu površine S, dok na ostatku površine S vrijedi $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 0$. U ovom slučaju također vrijedi $\varphi_1 = \varphi_2$ na cijelom području V.

Shodno tome rješenja Poissonove jednadžbe bit će jedinstvena, ako i samo ako, su na rubovima zadani uvjeti definirani kroz navedene karakteristične slučajeve. Temeljem toga mogu se razlikovati tri formulacije rubnih uvjeta prilikom rješavanja Poissonove jednadžbe:

1. $Dirichletovi \quad uvjeti$: Poissonova jednadžba imat će jedinstveno rješenje unutar područja V ako se zadani potencijal nalazi na zatvorenoj površini S koja obuhvaća područje V.
2. $Neumannovi \quad uvjeti$:Poissonova jednadžba imat će jedinstveno rješenje unutar područja V ako se zadana parcijalna derivacija potencijala $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ nalazi na zatvorenoj površini S koja obuhvaća područje V.
3. $Miješani \quad uvjeti$: Poissonova jednadžba imat će jedinstveno rješenje unutar područja V ako je na jednom dijelu zatvorene površine S zadan potencijal, a na ostatku parcijalna derivacija potencijala $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$.

Direktna posljedica jedinstvenosti rješenja Poissonove jednadžbe bit će nepromjenjivost potencijala tj. konstantni potencijal u svim točkama polja. Isti uvjeti moraju biti zadovoljeni i ako je $\rho = 0$ tj. kada imamo Laplaceovu jednadžbu. Važnost primjene Poissonove jednadžbe prilikom rješavanja različitih problema unutar elektrostatike primjećuje se na primjeru vodljivih ploča koje su nabijene različitim potencijalom kao što su vakuumske diode i kondenzatori.

Primjer 4.1. *Rješavanja Laplaceove jednadžbe pokazano je na primjeru dviju vodljivih ploča odvojenih izolatorom (vidi sliku 4.6).[17]*



Slika 4.6. Prikaz potencijala na pločama. Izvor: Izrada autora

Ploče su zadane s $\phi = 0$ i $\phi = \frac{\pi}{4}$, s poznatim početnim uvjetima $\varphi(\phi = 0) = 0$ i $\varphi(\phi = \frac{\pi}{4}) = 200V$. S obzirom na to da funkcija φ ovisi samo o ϕ, Laplaceova jednadžba u cilindričnim koordinatama poprima oblik

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\varphi}{d\phi^2} = 0, \tag{4.31}$$

te s obzirom na to da je $\rho = 0$ zbog izolatora koji odvaja ploče, moguće je dodatno pojednostavljenje izraza (4.31) *množenjem sa ρ^2*

$$\frac{d^2\varphi}{d\phi^2} = 0. \tag{4.32}$$

Dvostrukim integriranjem slijedi rješenje

$$\varphi = a\phi + b, \tag{4.33}$$

dok se vrijednost konstanti a i b određuje primjenom početnih uvjeta. Ako je $\varphi(\phi = 0) = 0$ dolazi se do vrijednosti konstante b

$$b = 0. \tag{4.34}$$

Te konstante a *primjenom* $\varphi(\phi = \frac{\pi}{4}) = 200V$

$$a = \frac{\varphi_0}{\phi_0}. \tag{4.35}$$

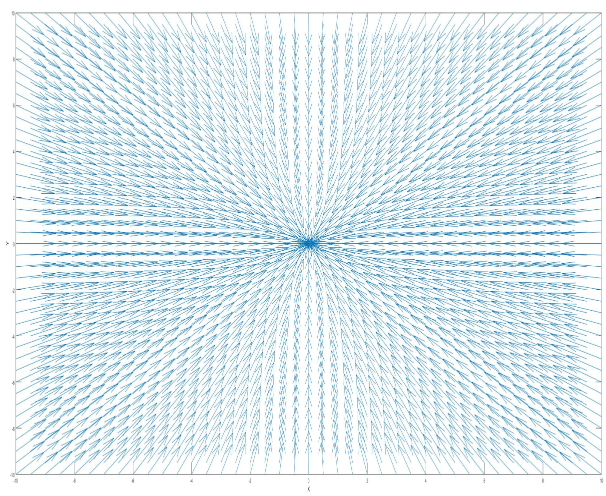
Odakle slijedi rješenje za potencijal na pločama

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{\phi_0}\phi = \frac{800}{\pi}\phi. \tag{4.36}$$

Slika 4.7. Prikaz rješenja električnog potencijala $\varphi(\phi)$ *sa pripadnim ekvipotencijalnim plohama. Izvor: Izrada autora*

[4] *Iz dobivenog rješenja za potencijal na jednostavan način dolazi se do rješenja za električno polje na pločama*

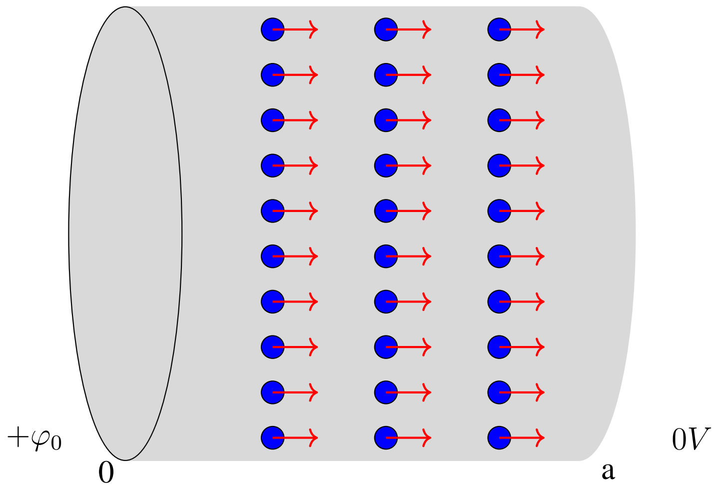
$$E = -\nabla\varphi = -\frac{\varphi_0}{\rho\Phi_0}k_\phi = \frac{800}{\rho\pi}k_\phi \tag{4.37}$$



Slika 4.8. Električno polje na pločama. Izvor: Izrada autora

[4]Ekvipotencijalne plohe prikazuju zamišljene plohe kojima se giba električni potencijal unutar električnog polja, pri čemu su obuhvaćene sve točke prostora u kojima je potencijal električnog polja jednake vrijednosti.

Primjer 4.2. *Rješavanje Poissonove jednadžbe pokazano je na primjeru EHD (električne hidro pumpe)[5] koja se sastoji od visokonaponskih elektroda. Na slici 4.9 prikazan je raspored potencijala na elektrodama s označenim smjerom gibanja. Potrebno je odrediti potencijal i električno polje ako je* $\rho_0 = 30m\frac{C}{m^3}$, $\varphi_0 = 20kV$,$a = 3$ *s poznatim početnim uvjetima* $\varphi(z = 0) = 0$ *i* $\varphi(z = a) = \varphi_0$.*[17]*



Slika 4.9. Prikaz potencijala unutar EHD pumpe. Izvor: Izrada autora

Rješavanje počinje od cilindričnog zapisa Poissonove jednadžbe koji je moguće pojednostaviti s obzirom na to da prema zadanim početnim uvjetima φ *ovisi samo o* z

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}. \tag{4.38}$$

Ukoliko se dobiveni izraz integrira po z *slijedi*

$$\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}z + C, \tag{4.39}$$

ponovnom integracijom slijedi rješenje za φ

$$\varphi = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}z^2 + Cz + D. \tag{4.40}$$

Vrijednost konstanti određuje se primjenom poznatih početnih uvjeta. Ako je $\varphi(z = 0) = \varphi_0$ *dolazi se do vrijednosti konstante D*

$$\varphi_0 = -0 + 0 + D, \quad D = \varphi_0. \tag{4.41}$$

Do konstante C dolazi se primjenom drugog početnog uvjeta $\varphi(z = a) = 0$

$$0 = -\frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0} + Ca + \varphi_0, \tag{4.42}$$

[5] Električna hidro pumpa (eng. Electrohydrodynamic pump) radi na principu interakcije električnih polja koja se sastoje od nabijenih čestica unutar neke dielektrične tekućine vrlo male vodljivosti.

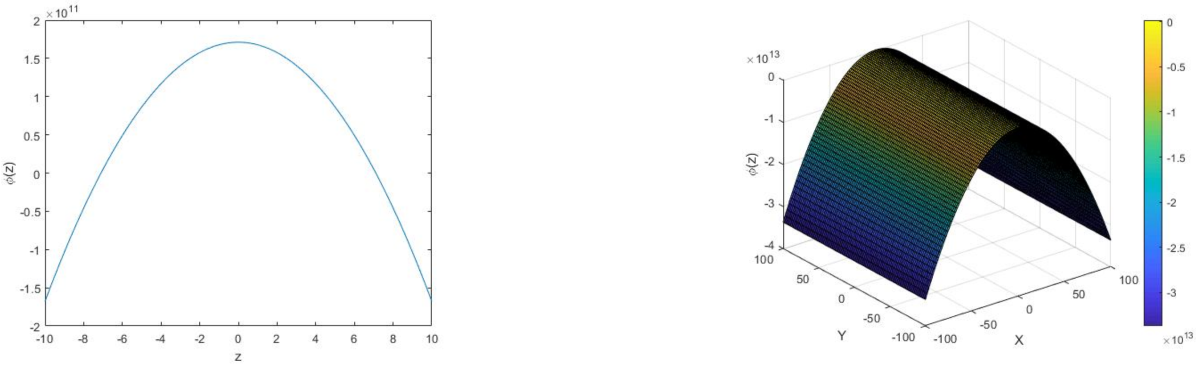
$$C = \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} - \frac{\varphi_0}{a} \tag{4.43}$$

Odakle sada slijedi rješenje za potencijal unutar pumpe

$$\varphi = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} z^2 + \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} - \frac{\varphi_0}{a} z + \varphi_0, \tag{4.44}$$

uvrštavanjem zadanih vrijednosti i vrijednosti za permitivnost vakuuma $\epsilon_0 = 8.85419 \times 10^{-12} \frac{As}{Vm}$ *proizlazi*

$$\varphi = -33.8823 \times 10^8 z^2 - 6.6667 \times 10^3 z + 1.7111 \times 10^{11}. \tag{4.45}$$



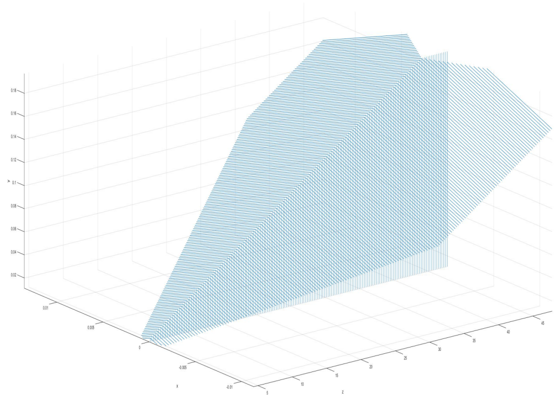
Slika 4.10. Prikaz rješenja električnog potencijala $\varphi(z)$. *Izvor: Izrada autora*

Iz dobivenog rješenja Poissonove jednadžbe proizlazi rješenje za električno polje

$$E = -\nabla\varphi = -\frac{d\varphi}{dz} k_z = \left[\frac{\varphi_0}{a} + \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(z - \frac{a}{2}\right)\right] k_z, \tag{4.46}$$

te uvrštavanjem poznatih vrijednosti slijedi

$$E = \left[6.6667 \times 10^3 + 33.8823 \times 10^8 \big(z - 1.5\big)\right] k_z. \tag{4.47}$$



Slika 4.11. Električno polje na elektrodama EHD pumpe. Izvor: Izrada autora

5. Zaključak

Razumijevanje danas nezaobilaznih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi daje bolji uvid u shvaćanje Poissonove jednadžbe, koja omogućuje izračun potencijala uzrokovanog poznatom raspodjelom naboja. Ovim radom objasnili smo podjelu parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, te naveli neke od najpoznatijih kao što su Laplaceova i Poissonova jednadžba.

Upravo je Poissonova jednadžba tema ovog završnog rada te su kroz poglavlja dani njeni definicija, svojstva i rješenje. Postoji više pristupa analitičkom rješavanju ove jednadžbe, a neki od najčešćih bili bi direktna integracija, separacija varijabli te primjena Greenove funkcije. U praksi se zbog složenosti računa analitičkog postupka danas češće koriste numeričke metode rješavanja kao što su metoda konačnih elemenata, metoda konačnih razlika, metoda konačnih volumena,...

Nadalje detaljnije se bavimo područjem elektrostatike i njenim zakonitostima. Tako je objašnjen Coulombov zakon iz kojeg se dolazi do jakosti električnog polja koji dalje omogućuje razmatranje električnog potencijala. Definirani su osnovni zakoni (diferencijalni i integralni) elektrostatike koji proizlaze iz Gaussova zakona i rotora električnog polja, te je na temelju njih napravljen izvod Poissonove jednadžbe za električni potencijal.

U konačnici kroz nekoliko primjera pokazan je postupak rješavanja različitih vrsta problema unutar elektrostatike koristeći se Poissonovom jednadžbom i gore navedenim metodama rješavanja.

Literatura

[1] "Pierre-Simon Laplace", s Interneta, https://hr.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon Laplace, 7. travnja 2023.

[2] "Pierre-Simon Laplace", s Interneta, https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=35431, 7. travnja 2023.

[3] "Siméon Denis Poisson", s Interneta, https://hr.wikipedia.org/wiki/Siméon-Denis-Poisson, 7. travnja 2023.

[4] "Siméon Denis Poisson", s Interneta, https://wblog.wiki/sh/SimonDenisPoisson, 7. travnja 2022.

[5] "Siméon-Denis Poisson", s Interneta, https://www.britannica.com/biography/Simeon-Denis-Poisson, 7. travnja 2023.

[6] "Diferencijalne jednadžbe, obične-parcijalne", s Interneta, https://tehnika.lzmk.hr/tehnickaenciklopedija/diferencijalne-jednadzbe-parcijalne.pdf, 16. travnja 2023.

[7] "Parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda", s Interneta, http://sim.riteh.hr/folders/11/PDJ1.pdf, 16. travnja 2023.

[8] Krešić-Jurić, S.;"Parcijalne diferencijalne jednadžbe", s Interneta, https://mapmf.pmfst.unist.hr/ skresic/PDJ/Literatura/pdjv5.pdf, 7. svibnja 2023.

[9] "Laplace's and Poisson's equations", s Interneta, http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/laplace.html, 11. svibnja 2023

[10] "Poisson's equation", s Interneta, https://farside.ph.utexas.edu/teaching/em/lectures/node31.html, 11.svibnja 2023.

[11] N.Črnjarić-Žic,S.Maćešić,M.Štefan Trubić;"INŽENJERSKA MATEMATIKA zbirka zadataka", Tehnički fakultet u Rijeci, Rijeka, 2019.

[12] Rukavina, T.;"Greenova funkcija i Poissonova jednadžba", s Interneta, https://www.researchgate.net/publication/304538693GreenovafunkcijaiPoissonovajednadzba, 21. svibnja 2023.

[13] Kreyszig, E; "Advanced Engineering Mathematics", 10th edition, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, 2010.

[14] Zaman, M.; "Numerical solution of the Poisson equation using FDM", s Interneta, https://www.mdpi.com/2079-9292/11/15/2365, 3. lipnja 2023

[15] Berberović, S.;Dadić, M.;"Elektromagnetska polja - Elektrostatika", Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb, 2010.

[16] "Elektrodinamika", s Interneta, http://www.phy.uniri.hr/ vlabinac/files/index/skripte/ele-pregled.pdf, 16. lipnja 2023.

[17] "Electrostatic boundary-value problems", s Interneta, https://www.academia.edu/30700736/ELECTROSTATICBOUNDARYVALUEPROBLEMS, 25. lipnja 2023.

Sažetak i ključne riječi

Unutar ovog završnog rada razmatrana je Poissonova diferencijalna jednadžba, postupak pronalaženja njenog rješenja te njena primjena na području elektrotehnike. Objašnjene su parcijalne diferencijalne jednadžbe te njihova svojstva. Navedena je definicija početnih i rubnih uvjeta te objašnjena njihova važnost za rješavanje diferencijalnih jednadžbi. Pokazan je postupak dolaska do analitičkog i numeričkog rješenja Poissonove jednadžbe. Poissonova jednadžba je na kraju stavljena u kontekst elektrotehnike, konkretno kod problema potencijala.

Ključne riječi: parcijalne diferencijalne jednadžbe, početni rubni uvjeti, Poissonova diferencijalna jednadžba, Laplaceova diferencijalna jednadžba, analitičko rješenje, Greenova funkcija, numeričko rješenje, metoda konačnih razlika, električni potencijal, električno polje, Gaussov zakon

Summary and key words

This final paper discusses Poisson's differential equation, along with its possible solutions, and how it can be used in electrical engineering. Also studied are partial differential equations and their properties, along with initial boundary conditions and their importance in solving differential equations. This paper covers steps for obtaining analytical and numerical solutions to Poisson's equation. Finally, the use of Poisson's equation in electrical engineering is discussed, particularly in relation to solving potential problems.

Keywords: partial differential equations, initial boundary conditions, Poisson's differential equation, Laplace's differential equation, analytical solution, Green's function, numerical solution, finite difference method, electric potential, electric field, Gauss's law