

# Matematički tretman stabilnosti sustava

---

**Mikša, Leonard**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:190:594509>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-12-10**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Engineering](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI

**TEHNIČKI FAKULTET**

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

**MATEMATIČKI TRETMAN STABILNOSTI SUSTAVA**

Rijeka, srpanj 2023.

Leonard Mikša  
0069086808

SVEUČILIŠTE U RIJECI

**TEHNIČKI FAKULTET**

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

**MATEMATIČKI TRETMAN STABILNOSTI SUSTAVA**

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Komentor: doc. dr. sc. Angela Bašić-Šiško

Rijeka, srpanj 2023.

Leonard Mikša  
0069086808

Rijeka, 13. ožujka 2023.

Zavod: **Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike**  
Predmet: **Inženjerska matematika ET**  
Grana: **1.01.07 primijenjena matematika i matematičko modeliranje**

## ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Leonard Mikša (0069086808)**  
Studij: **Sveučilišni prijediplomski studij elektrotehnike**

Zadatak: **Matematički tretman stabilnosti sustava**

### Opis zadatka:

U ovom radu potrebno je definirati dinamički sustav i pojam stabilnosti i asimptotičke stabilnosti sustava. Potrebno je opisati i diskutirati kriterije za ispitivanje stabilnosti sustava. Poseban naglasak potrebno je staviti na stabilnost autonomnih i linearnih sustava.

Obrađene pojmove potrebno je primijeniti u kontekstu analize signala sa specifičnim primjerima u elektrotehnici.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

*Mulić*

Zadatak uručen pristupniku: 20. ožujka 2023.

Mentor:

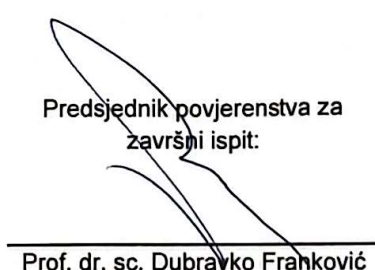


Izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić



Doc. dr. sc. Angela Bašić-Šiško (komentor)

Predsjednik povjerenstva za  
završni ispit:




Prof. dr. sc. Dubravko Franković

## **IZJAVA**

Sukladno članku 7. stavku 1. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku sveučilišnih prijediplomskih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 4. travnja 2023., izjavljujem da sam samostalno izradio završni rad prema zadatku preuzetom dana 20. ožujka 2023.

Rijeka, 10. srpnja 2023.

  
\_\_\_\_\_  
Leonard Mikša

*Zahvaljujem se mentoru izv. prof. dr. sc. Ivanu Dražiću na usmjeravanju, savjetima, sugestijama i izdvojenom vremenu prilikom izrade završnog rada.*

*Veliko hvala i mojim prijateljima Domagoju i Tihomiru koji su mi također davali bezrezervnu podršku tijekom cijelog školovanja.*

*Najviše se zahvaljujem mojim roditeljima koji su mi pružili svu podršku ovog svijeta u najtežim trenucima. Hvala vam što ste bezuvjetno vjerovali u mene i u moj uspjeh, koji bez vaše podrške ne bi bio moguć.*

# Sadržaj

<b>1. Uvod</b>	<b>4</b>
<b>2. Uvod u teoriju sustava</b>	<b>5</b>
2.1. Klasifikacija sustava . . . . .	5
2.1.1. Kontinuirani i diskretni sustavi . . . . .	6
2.1.2. Statički i dinamički sustavi . . . . .	7
2.1.3. Linearni i nelinearni sustavi . . . . .	11
2.1.4. Vremenski nepromjenjivi i vremenski promjenjivi sustavi . . . . .	12
2.1.5. Autonomni i neautonomni sustavi . . . . .	12
<b>3. Laplaceova transformacija</b>	<b>13</b>
3.1. Svojstva Laplaceove transformacije . . . . .	14
3.1.1. Teorem o slici derivacije . . . . .	14
3.1.2. Teorem o slici integrala . . . . .	15
3.2. Laplaceova transformacija eksponencijalne i sinusne funkcije . . . . .	16
3.3. Heavisideova step funkcija i njena Laplaceova transformacija . . . . .	17
<b>4. Impulsni odziv sustava i prijenosna funkcija</b>	<b>19</b>
4.1. Diracova $\delta$ -funkcija . . . . .	19
4.2. Konvolucijski integral . . . . .	20
4.3. Prijenosna funkcija sustava . . . . .	22
4.4. Polovi i nule prijenosne funkcije . . . . .	24
<b>5. Formalni prikaz sustava</b>	<b>27</b>
5.1. Prikaz sustava u vremenskoj domeni . . . . .	27
5.2. Prikaz sustava u frekvencijskoj domeni . . . . .	28
5.2.1. Pravila blokovske algebre . . . . .	28
<b>6. Stabilnost sustava</b>	<b>31</b>
6.1. Unutarnja stabilnost . . . . .	31
6.2. Vanjska stabilnost i potpuna stabilnost . . . . .	36
<b>7. Analiza stabilnosti sustava na primjerima iz prakse</b>	<b>39</b>
7.1. Istosmjerni motor s nezavisnom uzbuđom . . . . .	39

7.2. Idealni LC titrajni krug . . . . .	48
<b>8. Zaključak</b>	<b>55</b>
<b>Bibliografija</b>	<b>56</b>
<b>Sažetak i ključne riječi</b>	<b>57</b>
<b>Summary and key words</b>	<b>58</b>



## 1. Uvod

Sustavi imaju svoju primjenu u raznim granama ljudske djelatnosti. Prilikom projektiranja i modeliranja svakog sustava, bilo da se radi o modelu ili o fizički realiziranom sustavu, treba voditi računa o željenim svojstvima i ta svojstva osigurati. Jedno od temeljnih svojstava svakog sustava je stabilnost, pošto nestabilni sustavi nemaju praktične koristi. Jedina svrha nestabilnih sustava je izučavanje uzroka nestabilnosti. Takvi sustavi se eventualno simuliraju u računalnim programima, kako bi se ona mogla izbjeći prilikom fizičke realizacije sustava.

Sustave možemo klasificirati na mnoštvo načina, a klasifikacija se vrši s obzirom na svojstva sustava. Treba napomenuti da promatrano svojstvo sustava mora vrijediti za sve ulazne signale, što ćemo detaljnije objasniti u idućem poglavlju.

Kako bismo mogli detaljno proučavati i razumijeti koncept stabilnosti, nužno je poznavati naprednije matematičke alate poput Laplaceove transformacije, koje uvelike olakšavaju matematičku, a zatim i fizikalnu interpretaciju stabilnosti, odnosno razumijevanje potencijalnih uzroka nestabilnosti.

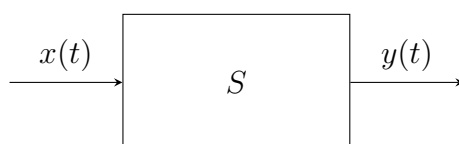
Linearni vremenski nepromjenjivi sustavi su pogodni za matematičku analizu, međutim većina sustava u praksi je nelinearna. Analizu stabilnosti linearnih sustava vršit ćemo preko prijenosnih funkcija koje opisuju samo linearne sustave. Analiza stabilnosti nelinearnih sustava je puno zahtjevnija i kompliciranija, međutim na analizi linearnih sustava možemo vjerno prikazati fizikalne koncepte stabilnosti i što ona u praksi znači.

Poznavajući svojstva sustava, možemo ga matematički modelirati, te zatim izvršiti analizu. Jedno od najznačajnijih svojstava sustava je stabilnost, a u ovom radu ćemo se fokusirati na analizu stabilnosti linearnih vremenski nepromjenjivih sustava. No prije toga, upoznat ćemo se s pojmom Laplaceove transformacije, impulsnog odziva i prijenosne funkcije sustava, te ćemo pokazati kako se pomoću blokovskog prikaza prikazuju jednostavni i složeniji sustavi.

Naposljetku, pokazat ćemo koje uvjete sustav mora zadovoljavati kako bi bio stabilan, te na konkretnim primjerima pokazati značaj stabilnosti sustava.

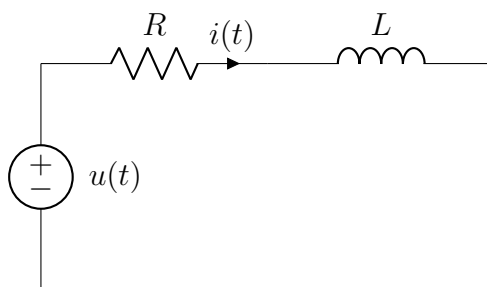
## 2. Uvod u teoriju sustava

Signali prenose informacije, a matematički su modelirani kao funkcije. Postoje razne vrste signala, pa tako signalom možemo smatrati električni napon ili struju, zvučne valove, svjetlosne valove itd. Sustav generira, transformira, prenosi ili pohranjuje signal. Matematički gledano, sustav je najčešće opisan jednom ili više jednadžbi, koje pak opisuju na koji način sustav djeluje na ulazni signal. Najjednostavniji i najpregledniji prikaz sustava je blokovski prikaz, prikazan na slici 2.1.



Slika 2.1. Blokovski prikaz sustava, gdje  $x(t)$  predstavlja ulazni signal,  $S$  funkciju koja opisuje sustav, a  $y(t) = S(x(t))$  izlazni signal, izvor: izrada autora

Jedan konkretan primjer sustava u elektrotehnici prikazan je na slici 2.2. Radi se o strujnom krugu koji se sastoji od naponskog izvora, otpornika i zavojnice. U tom sustavu ulazni signal je napon izvora, izlazni signal je struja u krugu, dok je sustav definiran otporom otpornika i induktivitetom zavojnice. Te ćemo veličine zvati parametrima sustava.



Slika 2.2. Primjer jednostavnog sustava, gdje je  $u(t)$  ulazni signal,  $i(t)$  izlazni signal, a  $R$  i  $L$  su parametri sustava, izvor: izrada autora

U nastavku ćemo navesti neke od najčešćih klasifikacija sustava, s posebnim naglaskom na one koje su važne za temu ovog rada. Ovo poglavlje obradit ćemo prema [1], [2] i [3].

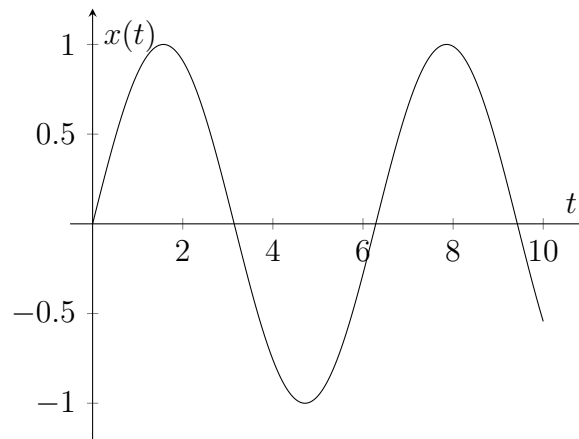
### 2.1. Klasifikacija sustava

Sustave možemo klasificirati prema željenim svojstvima koje zadovoljavaju, pri čemu ta svojstva moraju vrijediti za sve moguće ulazne signale. Sustavi se klasificiraju na razne načine, a

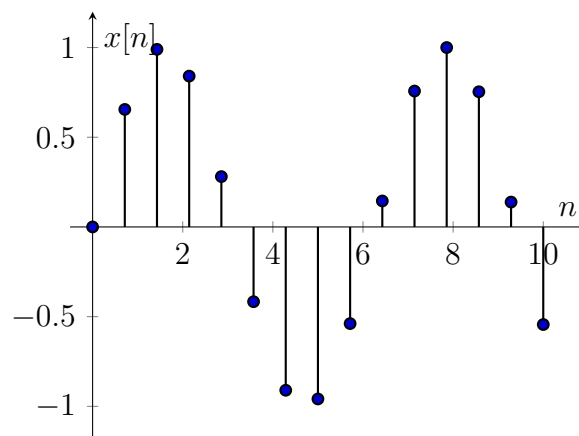
jedna od osnovnih podjela je s obzirom na prirodu signala koji se sustavima obrađuju. Prema svojoj prirodi signali mogu biti kontinuirani i diskretni.

### 2.1.1. Kontinuirani i diskretni sustavi

Kontinuirani signali su neprekinuti u vremenu, odnosno imaju beskonačno mnogo uzoraka u nekom vremenskom intervalu  $t$ , dok diskretni signali imaju konačan broj uzoraka u nekom vremenskom intervalu  $t$ . Na slici 2.3 prikazan je vremenski kontinuiran signal  $x(t) = \sin(t)$ , a na slici 2.4 pripadni diskretni signal, dobiven uzorkovanjem kontinuiranog signala određenom frekvencijom.



Slika 2.3. Vremenski kontinuirani sinusni signal, izvor: izrada autora



Slika 2.4. Vremenski diskretni sinusni signal, izvor: izrada autora

Sada možemo definirati kontinuirane i diskretne sustave.

**Definicija 2.1.** Sustav je kontinuiran ako kontinuirane signale transformira u kontinuirane signale. Kontinuirane sustave obično matematički zapisujemo na sljedeći način:

$$y(t) = S(x(t)), t \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

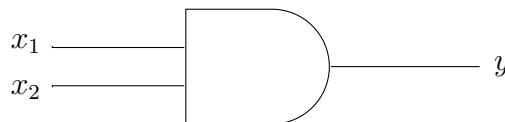
gdje je  $y(t)$  izlazni signal,  $S$  funkcija koja opisuje sustav, a  $x(t)$  ulazni signal.

**Definicija 2.2.** Sustav je diskretan ako diskretne signale transformira u diskretne signale. Diskretne sustave obično matematički zapisujemo na sljedeći način:

$$y[n] = S(x[n]), n \in \mathbb{Z}, \quad (2.2)$$

gdje je  $y[n]$  izlazni signal,  $S$  funkcija koja opisuje sustav, a  $x[n]$  ulazni signal.

Sustav koji smo prikazali na slici 2.2 primjer je kontinuiranog sustava, budući da su i ulazni napon i struja u strujnom krugu kontinuirani signali. Primjer diskretnog sustava prikazan je na slici 2.5, gdje je ulazni signal diskretan budući da može poprimiti samo jednu od vrijednosti iz skupa  $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ . Izlazni signal je također diskretan jer poprima jednu od vrijednosti iz skupa  $\{0, 1\}$ .



Slika 2.5. Logička I vrata - primjer diskretnog sustava, gdje su  $x_1$  i  $x_2$  ulazi u sustav, a  $y$  izlaz iz sustava, izvor: izrada autora

Funkcioniranje sustava sa slike 2.5 dano je tablicom 2.1. U praksi 0 i 1 predstavljaju nisku, odnosno visoku naponsku razinu.

Tablica 2.1. Tablica istine logičkih I vrata

$x_1$	$x_2$	$y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Samo ćemo spomenuti kako postoje i sustavi koji transformiraju kontinuirane signale u diskretne i obratno, poput analogno-digitalnih i digitalno-analognih pretvornika.

### 2.1.2. Statički i dinamički sustavi

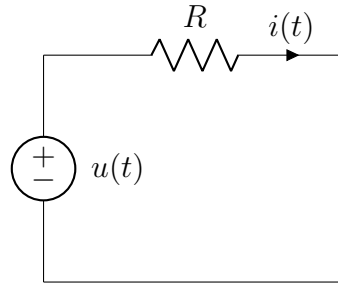
Sustave možemo klasificirati i kao statičke i dinamičke. Statički sustavi nemaju sposobnost pohrane informacije i/ili energije zato što nemaju unutarnju memoriju, odnosno niti jedan element s takvim svojstvom, dok dinamički sustavi imaju. Formalne definicije statičkih i dinamičkih sustava dane su u nastavku.

**Definicija 2.3.** Sustav  $S$  je statički ako njegov odziv u nekom trenutku  $t$  ovisi samo o vrijednosti pobude u tom istom trenutku  $t$ . Drugim riječima, sustav  $S$  je statički ako vrijedi

$$y(t) = S(x(t)), \quad (2.3)$$

gdje je  $x(t)$  pobuda, a  $y(t)$  odziv.

Primjer statičkog sustava je strujni krug s naponskim izvorom i otpornikom, prikazan na slici 2.6.



Slika 2.6. Primjer jednostavnog statičkog sustava, gdje je  $u(t)$  iznos napona naponskog izvora,  $R$  iznos otpora otpornika, a  $i(t)$  struja kroz otpornik, izvor: izrada autora

Jednadžba koja opisuje sustav sa slike 2.6 prema Ohmovom zakonu je:

$$i(t) = \frac{u(t)}{R}, \quad (2.4)$$

gdje je  $u(t)$  ulazni signal,  $i(t)$  izlazni signal, dok je  $R$  parametar sustava.

Iz jednadžbe (2.4) vidljivo je da je vrijednost struje ovisna samo o trenutnoj vrijednosti napona, a ne i o prošlim ili budućim vrijednostima.

**Definicija 2.4.** Sustav  $S$  je dinamički ako njegov odziv u nekom trenutku  $t$ , osim o pobudi u tom istom trenutku  $t$  ovisi i o prošlim i/ili budućim trenucima  $(t_1, t_2, \dots, t_n, \dots)$ , odnosno vrijednostima pobude u tim trenucima. To možemo matematički izraziti na sljedeći način

$$y(t) = S(x(t), t, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots, x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n), \dots)), \quad (2.5)$$

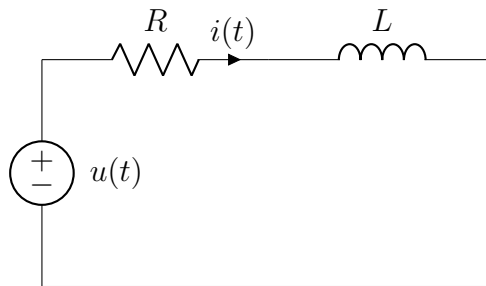
pri čemu je  $x(t)$  pobuda, a  $y(t)$  odziv.

Primjer dinamičkog sustava je serijski RL spoj, prikazan na slici 2.7.

Objasnimo sada zašto se ovdje radi o dinamičkom sustavu. Jednadžba koja opisuje prikazani električni krug po 2. Kirchhoffovom zakonu je

$$u(t) = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt}, \quad (2.6)$$

čime se dobila linearna diferencijalna jednadžba prvog reda.



Slika 2.7. Primjer jednostavnog dinamičkog sustava, gdje je  $u(t)$  iznos vremenski promjenjivog napona naponskog izvora,  $R$  iznos otpora otpornika,  $L$  iznos induktiviteta zavojnice, a  $i(t)$  struja kroz zavojnicu, izvor: izrada autora

Pripadna homogena diferencijalna jednadžba je

$$L \frac{di_h(t)}{dt} + Ri_h(t) = 0. \quad (2.7)$$

Jednažba (2.7) jednostavno se rješava metodom separacije varijabli pri čemu se dobiva:

$$i_h(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t}, \quad (2.8)$$

pri čemu je  $C$  konstanta integracije.

Iz ovog rješenja metodom varijacije konstante sada možemo dobiti rješenje jednadžbe (2.6), drugim riječima pretpostavljamo njeno rješenje u obliku

$$i(t) = C(t)e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (2.9)$$

Sada je

$$i'(t) = C'(t)e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{R}{L}C(t)e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (2.10)$$

Uvrštavanjem ovih izraza u jednadžbu (2.6) slijedi

$$u(t) = C(t)e^{-\frac{R}{L}t}R + C'(t)e^{-\frac{R}{L}t}L - C(t)e^{-\frac{R}{L}t}R, \quad (2.11)$$

odnosno

$$u(t) = C'(t)e^{-\frac{R}{L}t}L. \quad (2.12)$$

Odavde slijedi

$$C(t) = \frac{1}{L} \int u(t)e^{\frac{R}{L}t} dt. \quad (2.13)$$

Jednostavnosti radi možemo pretpostaviti da je ulazni napon konstantan, tj. da vrijedi

$$u(t) = u(0) = u_0. \quad (2.14)$$

Sada je

$$C(t) = \frac{u_0}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} dt = \frac{u_0}{R} e^{\frac{R}{L}t} + K, \quad (2.15)$$

pri čemu je  $K$  konstanta integracije. Konačno dobivamo

$$i(t) = \left( \frac{u_0}{R} e^{\frac{R}{L}t} + K \right) e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{u_0}{R} + K e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (2.16)$$

Vrijednost konstante  $K$  određujemo iz činjenice da u početnom trenutku ( $t = 0$ ) u struja još uvijek ne teče RL spojem, te vrijedi

$$i(0) = \frac{u_0}{R} + K = 0, \quad (2.17)$$

iz čega slijedi

$$K = -\frac{u_0}{R}. \quad (2.18)$$

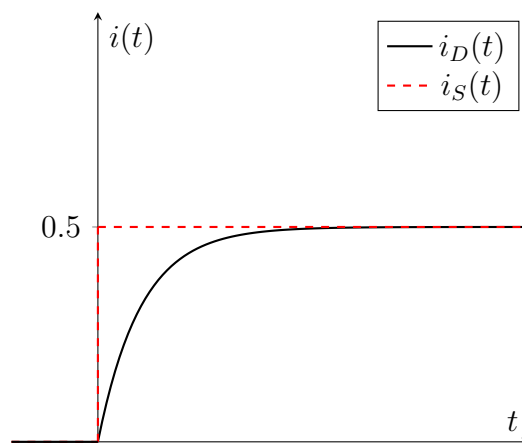
Dakle, struja kroz RL krug je sada jednaka

$$i(t) = \frac{u_0}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}), \quad (2.19)$$

što znači da izlazni signal  $i(t)$  osim o vrijednosti pobude  $u(t)$  ovisi i o  $t$ , drugim riječima promatrani sustav je dinamički. Primjerice, ako u trenutku  $t = 0$  uključimo izvor napona iznosa 5 V uz iznos otpora od 10  $\Omega$  i induktivitet od 10 mH, dobiva se funkcija

$$i(t) = \frac{5}{10} (1 - e^{-\frac{10}{0.01}t}) = \frac{1}{2} (1 - e^{-1000t}) \text{ A}, \quad (2.20)$$

koja je grafički prikazana na slici 2.8.



Slika 2.8. Odziv zadanog dinamičkog i ekvivalentnog statičkog sustava, izvor: izrada autora

Možemo vidjeti da je u početnom trenutku vrijednost struje 0 A, a zatim eksponencijalno raste sve dok se nakon prijelazne pojave ne ustali na 0.5 A. Prisutnost prijelazne pojave objašnjava zašto sustav nije statički, budući da na trenutnu promjenu ulazne vrijednosti, izlaz reagira s određenom tromošću.

Kako smo u uvodnom dijelu naveli, statički sustavi se često nazivaju i bezmemorijski sustavi, a dinamički sustavi memorijski sustavi. Da bi sustav bio dinamički, najmanje jedan njegov element mora imati svojstvo pohrane informacije i/ili energije. U gornjem primjeru, takav element je zavojnica koja u svojoj okolini pohranjuje magnetsku energiju.

### 2.1.3. Linearni i nelinearni sustavi

Za matematičku analizu sustava jedno od poželjnih svojstava je linearnost, pa je jedna od važnijih klasifikacija sustava ona s obzirom na linearnost. U ovom poglavlju definirati ćemo linearne sustave.

**Definicija 2.5.** Za sustav  $S$  reći ćemo da zadovoljava svojstvo homogenosti ako za svaku pobudu  $x$  vrijedi

$$S(cx) = cS(x), \quad (2.21)$$

pri čemu je  $c$  proizvoljna konstanta.

**Definicija 2.6.** Za sustav  $S$  reći ćemo da zadovoljava svojstvo aditivnosti ako za svake dvije pobude  $x_1$  i  $x_2$  vrijedi

$$S(x_1 + x_2) = S(x_1) + S(x_2). \quad (2.22)$$

**Definicija 2.7.** Sustav  $S$  je linearan ako zadovoljava svojstva homogenosti i aditivnosti.

Svojstvo linearnosti može se definirati i korištenjem sljedeće propozicije.

**Propozicija 2.1.** Sustav  $S$  je linearan ako za svake dvije pobude  $x_1$  i  $x_2$  vrijedi

$$S(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1S(x_1) + c_2S(x_2), \quad (2.23)$$

pri čemu su  $c_1$  i  $c_2$  proizvoljne konstante.

Navedimo još jedno važno svojstvo linearnih sustava

**Propozicija 2.2.** Za pobudu  $x = 0$  odziv linearnog sustava uvijek iznosi 0.

Ova tvrdnja jednostavno se dokazuje temeljem svojstva homogenosti. Naime, vrijedi,

$$S(0 \cdot x) = 0 \cdot S(x) = 0. \quad (2.24)$$

U nastavku dajemo matematički primjer linearnog sustava. Promotrimo sustav definiran diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{dy(t)}{dt} - 5y(t) = \frac{2}{t^3}x(t). \quad (2.25)$$

Da bismo provjerili svojstvo linearnosti, moramo analizirati dvije različite pobude  $x_1$  i  $x_2$  te pripadne odzive  $y_1$  i  $y_2$ . Kako pobude i odzivi zadovoljavaju zadanu jednadžbu možemo pisati:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} - 5y_1(t) = \frac{2}{t^3}x_1(t), \quad (2.26)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} - 5y_2(t) = \frac{2}{t^3}x_2(t). \quad (2.27)$$



Kako bismo provjerili svojstvo linearnosti, pomnožit ćemo prvu jednadžbu s konstantom  $c_1$ , a drugu s konstantom  $c_2$ , te ih zbrojiti. Dobivamo:

$$\frac{d}{dt}(c_1y_1(t) + c_2y_2(t)) - 5(c_1y_1(t) + c_2y_2(t)) = \frac{2}{t^3}(c_1x_1(t) + c_2x_2(t)), \quad (2.28)$$

odakle zaključujemo da pobudi  $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$  odgovara odziv  $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$  čime je direktno pokazano svojstvo linearnosti iz pozicije 2.1, odnosno promatrani sustav je linearan.

#### 2.1.4. Vremenski nepromjenjivi i vremenski promjenjivi sustavi

U ovom ćemo poglavlju definirati vremenski nepromjenjive sustave.

**Definicija 2.8.** *Sustav  $S$  je vremenski nepromjenjiv ako nekom proizvoljnom kašnjenju  $\tau$  ulaznog signala  $x(t)$  slijedi identično kašnjenje izlaznog signala  $y(t)$ , odnosno ako vrijedi:*

$$y(t - \tau) = S(x(t - \tau)). \quad (2.29)$$

Ilustrirajmo ovo svojstvo na jednom primjeru. Neka je sustav opisan jednadžbom

$$y(t) = x(t - 1). \quad (2.30)$$

Da bismo provjerili je li sustav vremenski nepromjenjiv uvodimo kašnjenje  $\tau \in \mathbb{R}$ . Dobivamo:

$$x(t - 1 - \tau) = (x - \tau - 1) = y(t - \tau), \quad (2.31)$$

što znači da je sustav vremenski nepromjenjiv.

#### 2.1.5. Autonomni i neautonomni sustavi

U matematici se često promatraju autonomni i neautonomni sustavi diferencijalnih jednadžbi. Kroz prije obrađene primjere vidjeli smo da se sustavi često opisuju diferencijalnim jednadžbama, pa tako sustave koji su opisani autonomnim sustavom diferencijalnih jednadžbi zovemo autonomnim sustavom.

Sustav diferencijalnih jednadžbi je autonoman ako ne ovisi eksplicitno o nezavisnoj varijabli, već samo o trenutnom stanju sustava, odnosno ako se sustav može zapisati u obliku

$$x'(t) = f(x(t)). \quad (2.32)$$

Neautonomni sustav diferencijalnih jednadžbi biti će oblika

$$x'(t) = f(x(t), t). \quad (2.33)$$

Ako je spomenuta nezavisna varijabla vrijeme, autonomni sustavi postaju vremenski nepromjenjivi sustavi opisani u prethodnom potpoglavlju.

### 3. Laplaceova transformacija

U prethodnom poglavlju definirali smo pojam sustava i objasnili neke od najčešćih klasifikacija sustava. Za dodatne analize sustava potreban nam je matematički alat koji se naziva Laplaceova transformacija.

Laplaceova transformacija je jedna od integralnih transformacija koja funkciju realne varijable  $t$  transformira u funkciju kompleksne varijable  $s$ , pri čemu realna varijabla najčešće opisuje vrijeme.

Integralne transformacije općenito služe za transformaciju funkcije iz njezine originalne domene u neku drugu domenu preko integrala. Najčešće se to radi kako bi izvođenje matematičkih operacija na toj funkciji bilo jednostavnije. Jedna od najčešćih primjena Laplaceove transformacije je u području diferencijalnih jednadžbi koje nisu rješive klasičnim metodama. Primjerice, u elektrotehnici se relativno često susrećemo s pravokutnim i pilastim signalima, odnosno signalima koji imaju šiljke. Takvi signali nisu derivabilni i diferencijalne jednadžbe koje uključuje takve funkcije ne mogu se riješiti klasičnim metodama.

Svakako treba spomenuti i izvođenje operacija nad impulsnim signalima koje je u vremenskoj domeni vrlo zahtjevno, a u Laplaceovoj prilično jednostavno. Iz navedenog se može zaključiti kako su Laplaceove transformacije u elektrotehnici nužne za rješavanje problema koji uključuju sve spomenute vrste signala. Međutim, za temu ovog rada najveći značaj Laplaceove transformacije ogledat će se kod definiranja prijenosne funkcije sustava.

Laplaceova transformacija je dobila ime po francuskom matematičaru Pierre-Simon Laplaceu (1749. - 1827.), koji se bavio ne samo matematikom, već i mnogim drugim granama znanosti poput fizike, astronomije, filozofije itd. [5]

Definirajmo sada Laplaceovu transformaciju. Opći oblik integralne transformacije dan je izrazom

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, s) f(t) dt, \quad (3.1)$$

gdje je  $f(t)$  funkcija koja se transformira,  $K(t, s)$  jezgra transformacije, a  $F(s)$  integralna transformacija funkcije  $f(t)$ . Kod Laplaceove transformacije jezgra transformacije dana je s

$$K(t, s) = e^{-st}, \quad (3.2)$$

a pošto ćemo sve funkcije promatrati u vremenskoj domeni, donju granicu integracije možemo postaviti na 0. Uvrštavajući navedeno u opći oblik integralne transformacije dobivamo opći oblik

Laplaceove transformacije:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (3.3)$$

gdje je  $F(s)$  Laplaceova transformacija funkcije  $f(t)$ . Ovo poglavlje i potpoglavlja koja slijede obradit ćemo prema [4].

### 3.1. Svojstva Laplaceove transformacije

Kako bismo mogli efikasno koristiti ovaj, u elektrotehnici nužan matematički aparat, upoznajmo se s nekim od svojstava koje ćemo u ovom radu primjenjivati na praktičnim primjerima. Pošto je Laplaceova transformacija zapravo integral, a integral je linearan operator, slijedi da i Laplaceova transformacija zadovoljava svojstvo linearnosti.

**Teorem 3.1.** *Neka su zadane funkcije  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$ , te proizvoljne realne konstante  $C_1$  i  $C_2$ . Tada vrijedi*

$$\mathcal{L}\{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\} = C_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + C_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}. \quad (3.4)$$

#### 3.1.1. Teorem o slici derivacije

Ovaj teorem je neophodan za transformaciju diferencijalnih jednadžbi bilo kojeg reda u vremenskoj  $t$ -domeni u obične algebarske jednadžbe u kompleksnoj  $s$ -domeni.

**Teorem 3.2.** *Neka je zadana funkcija  $f(t)$  u vremenskoj domeni i neka je  $F(s)$  njezina Laplaceova transformacija u kompleksnoj domeni. Tada vrijedi:*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0), \quad (3.5)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0). \quad (3.6)$$

Ovaj se teorem može dokazati relativno jednostavno. U izraz (3.3) koji definira Laplaceovu transformaciju uvrstimo derivaciju proizvoljne funkcije  $f(t)$ , te dobiveni integral pojednostavimo formulom parcijalne integracije koja glasi:

$$\int_0^{\infty} u dv = uv \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} v du. \quad (3.7)$$

Dobivamo:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = \left| \begin{array}{ll} u = e^{-st} & du = -se^{-st} dt \\ dv = f'(t) dt & v = f(t) \end{array} \right|, \quad (3.8)$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) (-se^{-st}) dt. \quad (3.9)$$

Nakon uvrštavanja granica u prvom članu i sređivanja drugog člana (integrala) slijedi

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f(0) + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (3.10)$$

Možemo primjetiti kako je preostali integral definicija Laplaceove transformacije funkcije  $f(t)$ , stoga je

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0), \quad (3.11)$$

čime je prva tvrdnja dokazana.

Za Laplaceovu transformaciju druge derivacije funkcije  $f(t)$ , pod pretpostavkom postojanja svih navedenih izraza, možemo iskoristiti već dokazanu jednakost (3.11). Slijedi

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = -f'(0) + s\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f'(0) + s(-f(0) + sF(s)), \quad (3.12)$$

odnosno

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \quad (3.13)$$

Time smo pokazali kako izgledaju Laplaceove transformacije derivacija prvog i drugog reda. Ovaj teorem se može generalizirati na derivacije funkcija  $n$ -tog reda, međutim za ovaj rad to neće biti potrebno.

### 3.1.2. Teorem o slici integrala

Pomoću ovog teorema transformiramo integrale iz vremenske domene u kompleksnu domenu, što će biti potrebno u nastavku ovog rada.

**Teorem 3.3.** *Neka je zadana funkcija  $f(t)$  u vremenskoj domeni i neka je njezina Laplaceova transformacija  $F(s)$  u kompleksnoj domeni. Tada vrijedi*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}. \quad (3.14)$$

Za dokaz ovog teorema u izraz (3.3) uvrstimo integral proizvoljne funkcije  $f(t)$ , te dobiveni integral pojednostavimo formulom parcijalne integracije, kao i u prethodnom primjeru. Dobivamo:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \int_0^t f(\tau)d\tau dt = \left| \begin{array}{ll} u = \int_0^t f(\tau)d\tau & du = f(t)dt \\ dv = e^{-st}dt & v = -\frac{1}{s}e^{-st} \end{array} \right|, \quad (3.15)$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \left(-\frac{1}{s}e^{-st} \int_0^t f(\tau)d\tau\right)\Bigg|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s}e^{-st} f(t)dt. \quad (3.16)$$

Uvrštavanjem granica integracije u prvi član dobivamo da je on jednak 0, a sređivanjem drugog člana (integrala) dobivamo

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (3.17)$$

Možemo primjetiti kako je preostali integral definicija Laplaceove transformacije funkcije  $f(t)$ , stoga slijedi

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}. \quad (3.18)$$

### 3.2. Laplaceova transformacija eksponencijalne i sinusne funkcije

Eksponencijalna funkcija često se susreće u elektrotehnici i teoriji signala, tako da će nam za analizu sustava biti važna i njena Laplaceova transformacija. Za izračun Laplaceove transformacije eksponencijalne funkcije polazimo od definicijskog izraza (3.3). Vrijedi

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt, \quad (3.19)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{-(s-a)} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{-(s-a)} (0 - 1), \quad (3.20)$$

pa vrijedi

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}. \quad (3.21)$$

Ovaj izvod podrazumijeva da je  $a > 0$ , no na isti način se može pokazati da izvod vrijedi i ako je  $a < 0$  pri čemu se samo mijenja predznak od  $a$  u konačnom izrazu.

Pokažimo sada kako se Laplaceova transformacija eksponencijalne funkcije koristi za određivanje Laplaceove transformacije sinusne funkcije. Za to će nam trebati Eulerov zapis sinusne funkcije:

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}). \quad (3.22)$$

Korištenjem svojstva linearnosti Laplaceove transformacije iz ovog izraza slijedi

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega} \right) = \frac{1}{2i} \frac{s+i\omega - (s-i\omega)}{(s-i\omega)(s+i\omega)}, \quad (3.23)$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{2i\omega}{2i(s^2 + \omega^2)}, \quad (3.24)$$

te je konačno

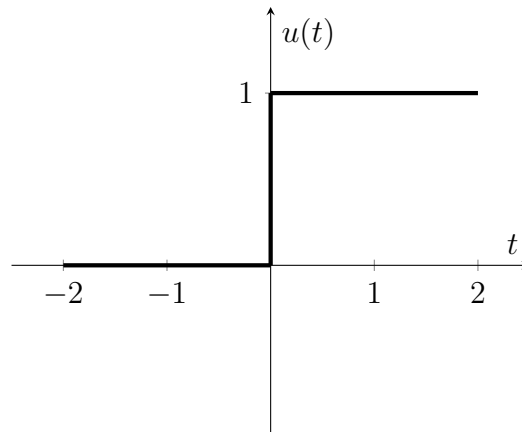
$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (3.25)$$

### 3.3. Heavisideova step funkcija i njena Laplaceova transformacija

Heavisideova step funkcija definirana je izrazom

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0, \end{cases} \quad (3.26)$$

Grafički prikaz step funkcije prikazan je na slici 3.1.



Slika 3.1. Heavisideova step funkcija, izvor: izrada autora

Kao što vidimo, Heavisideova step funkcija ima vrijednost 0 i zatim skokovito poraste na vrijednost 1 (ako je jedinična). Izračunajmo sada njenu Laplaceovu transformaciju.

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt. \quad (3.27)$$

Rješavanjem ovog integrala dobivamo

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} = \frac{0 - 1}{-s} = \frac{1}{s}. \quad (3.28)$$

Korištenjem ove funkcije kao pobude može se modelirati uključenje/isključenje sustava.

U nastavku je dana tablica Laplaceovih transformacija funkcija koje će nam biti potrebne u nastavku ovog rada.

Tablica 3.1. Tablica Laplaceovih transformacija

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t) = 1$	$\frac{1}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$e^{\pm at}$	$\frac{1}{s \mp a}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{\pm at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s \mp a)^2 + \omega^2}$
$e^{\pm at} \cos(\omega t)$	$\frac{s \mp a}{(s \mp a)^2 + \omega^2}$
$t \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \cos(\omega t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$

## 4. Impulsni odziv sustava i prijenosna funkcija

Impulsni odziv sustava je odziv sustava pobuđenog Diracovom  $\delta$ -funkcijom, koja je dobila ime po britanskom fizičaru Paulu Diracu. Ta funkcija nije tipična matematička funkcija i često se tretira kao matematički objekt zbog specifičnih svojstava koje ona ima, pa ćemo joj posvetiti jedno potpoglavlje kako bi ju pobliže opisali. U kasnijim poglavljima shvatit ćemo koliko je ona važna u teoriji sustava.

### 4.1. Diracova $\delta$ -funkcija

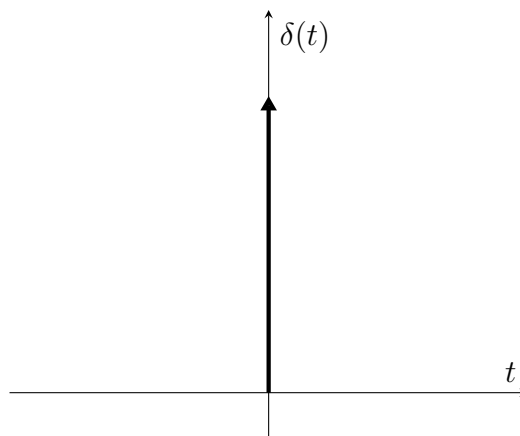
Diracova  $\delta$ -funkcija je definirana jednadžbom (4.1) i ključnim svojstvom definiranim jednadžbom (4.2).

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1 \quad (4.2)$$

Pošto je vrijednost  $\delta$ -funkcije jednaka 0 u svim točkama osim u  $t = 0$ , jednadžbu (4.2) možemo zapisati kao

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t) = 1. \quad (4.3)$$



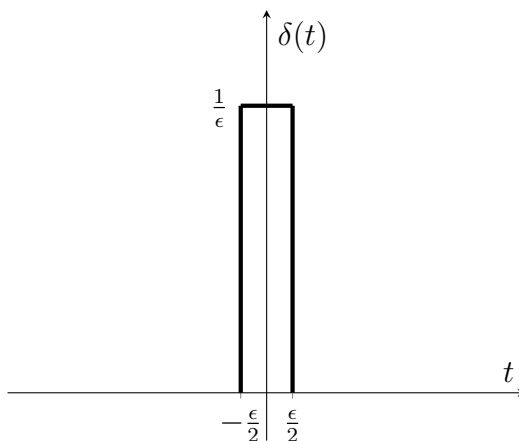
Slika 4.1. Grafički prikaz  $\delta$ -funkcije, izvor: izrada autora

Ovo je idealizirani model impulsne funkcije, koja i nije funkcija u pravom smislu te riječi. Svojstvo definirano jednadžbom (4.3) nam govori da je površina ispod  $\delta$ -funkcije jednaka 1. Međutim, kada bismo površinu računali kao umnožak duljine trajanja  $\delta$ -funkcije i njezine amplitude,



dobili bismo neodređeni oblik  $0 \cdot \infty$ . Zato se koriste različiti modeli aproksimacije, a jedan od najčešćih je prikazan jednačbom (4.4) [2] i slikom 3.2.

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \text{rect} \left( \frac{t}{\epsilon} \right) \quad (4.4)$$

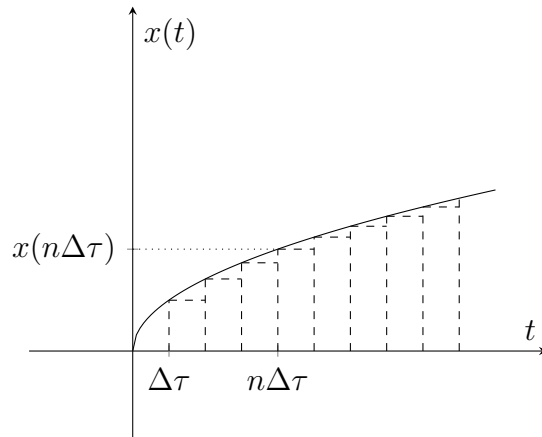


Slika 4.2. Model aproksimacije  $\delta$ -funkcije, izvor: izrada autora

Funkcija *rect* definira jedinični pravokutni signal centriran oko neke točke, u ovom slučaju oko 0, te određenog trajanja, u ovom slučaju trajanja  $\epsilon$ . Možemo vidjeti da umnoškom trajanja ove aproksimacije i njezine amplitude, površina doista iznosi 1.

## 4.2. Konvolucijski integral

Konvolucijskim integralom pokazat ćemo kako izračunati odziv nekog sustava ako nam je poznata pobuda. Kao što je već navedeno, impulsni odziv je odziv sustava pobuđenog  $\delta$ -funkcijom i njega ćemo označavati s  $h(t)$ . Ako polazimo od pretpostavke da je  $h(t)$  odziv sustava na pobudu  $\delta(t)$ , s naglaskom da se radi o linearnom vremenski nepromjenjivom sustavu, na tu početnu pretpostavku možemo primjeniti svojstva koja takvi sustavi imaju.



Slika 4.3. Proizvoljni ulazni signal aproksimiran pravokutnim impulsima, izvor: izrada autora

Polazimo od početne pretpostavke:

$$\delta(t) \longrightarrow h(t). \quad (4.5)$$

Primjenjujući svojstvo vremenske nepromjenjivosti, impulsni odziv će imati kašnjenje identično kašnjenju ulaznog impulsa

$$\delta(t - n\Delta\tau) \longrightarrow h(t - n\Delta\tau). \quad (4.6)$$

Linearni sustavi zadovoljavaju svojstvo homogenosti i aditivnosti, što znači da i ulazni impuls i impulsni odziv možemo pomnožiti s konstantom. Za vrijednost te konstante uzet ćemo površinu aproksimiranog pravokutnog impulsa proizvoljnog signala sa slike 4.3, te zbrojiti za sve  $n \in \mathbb{R}$

$$(x(n\Delta\tau)\Delta\tau)\delta(t - n\Delta\tau) \longrightarrow (x(n\Delta\tau)\Delta\tau)h(t - n\Delta\tau), \quad (4.7)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (x(n\Delta\tau)\Delta\tau)\delta(t - n\Delta\tau) \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x(n\Delta\tau)\Delta\tau)h(t - n\Delta\tau). \quad (4.8)$$

Što je vremenski interval  $\Delta\tau$  manji, to je aproksimacija pravokutnim impulsima bolja. Stoga možemo primjeniti limes kada  $\Delta\tau$  teži u 0 kako bismo dobili najbolju moguću aproksimaciju

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau)\delta(t - n\Delta\tau)\Delta\tau \longrightarrow \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau)h(t - n\Delta\tau)\Delta\tau. \quad (4.9)$$

Sada možemo primjetiti da je jednadžba (4.9) zapravo definicija integrala. Možemo pisati

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad (4.10)$$

Jednadžbom (4.10) prikazani integrali s lijeve i desne strane su definicija konvolucije dva signala. Općenito, konvolucija neka dva signala  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$  se definira kao

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau. \quad (4.11)$$

Promotorimo sada oba izraza iz jednadžbe (4.10). Integral s lijeve strane možemo zapisati kao

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = x(t) * \delta(t). \quad (4.12)$$

Primjetimo da je podintegralna funkcija zapravo impulsna funkcija pomaknuta za  $t$  i skalirana za  $x(\tau)$  (što znači da njezina površina nije jednaka 1, nego  $x(\tau)$ ). Da ne bi došlo do zabune, ovdje valja naglasiti (iako se vidi iz jednadžbi) da su funkcije varijable  $\tau$ . Pošto je  $\delta$ -funkcija definirana samo u jednoj točki (u ovom slučaju  $t$ ), odnosno u svim ostalim točkama je jednaka 0, možemo pisati

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - \tau)d\tau. \quad (4.13)$$

Vrijednost  $x(t)$  je sada u kontekstu ovog integrala konstanta, pa ju možemo zapisati ispred integrala

$$x(t) * \delta(t) = x(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau)d\tau. \quad (4.14)$$

Sada primjetimo da je preostali integral zapravo integral impulsne funkcije, koji po svojoj definiciji iznosi 1. Stoga, možemo zaključiti kako je impulsna funkcija neutralni element kod operacije konvolucije (isto što je 0 u zbrajanju i 1 u množenju)

$$x(t) * \delta(t) = x(t). \quad (4.15)$$

Jednadžbu (4.10) sada možemo zapisati kao

$$x(t) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau, \quad (4.16)$$

odnosno

$$x(t) \longrightarrow x(t) * h(t) = y(t). \quad (4.17)$$

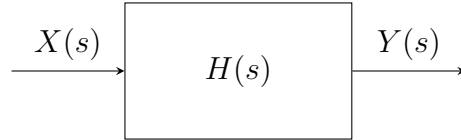
Dakle ako pobudimo linearni vremenski nepromjenjivi sustav ulaznim signalom  $x(t)$ , njegov odziv  $y(t)$  bit će jednak konvoluciji ulaznog signala s impulsnim odzivom sustava. Možemo zaključiti kako impulsni odziv linearnog vremenski nepromjenjivog sustava u potpunosti definira sustav i njegovo ponašanje za sve ulazne signale.

### 4.3. Prijenosna funkcija sustava

Kako bismo vidjeli zašto uopće uvodimo Laplaceove transformacije, pogledajmo Laplaceovu transformaciju u prethodnim poglavljima opisane impulsne funkcije.

$$\delta(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \quad (4.18)$$

Množenjem  $e^{-st}$  s  $\delta$ -funkcijom dobivamo samo  $\delta$ -funkciju jer je ona definirana kao impuls u točki 0 s površinom ispod grafa jednakom 1. Sada ćemo uvesti pojam prijenosne funkcije sustava, koji je ekvivalent impulsnom odzivu. Naime, impulsni odziv egzistira isključivo u vremenskoj domeni, dok prijenosna funkcija egzistira isključivo u Laplaceovoj  $s$  domeni.



Slika 4.4. Blokovski prikaz sustava u  $s$  domeni, gdje je  $X(s)$  ulazni signal u  $s$ -domeni,  $Y(s)$  izlazni signal u  $s$ -domeni, a  $H(s)$  prijenosna funkcija sustava, izvor: izrada autora

Ako je pobuda u gore prikazani sustav Diracova  $\delta$ -funkcija u  $s$  domeni, kao odziv dobit ćemo

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\delta(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t). \quad (4.19)$$

Povučemo li analogiju s jednadžbom (4.15), možemo primjetiti da je impulsna funkcija neutralni element za množenje u Laplaceovoj domeni. Sada ćemo dokazati jedno bitno svojstvo, odnosno poveznicu između vremenske i kompleksne domene.

**Teorem 4.1.** *Neka je  $x(t)$  pobuda u sustav impulsnog odziva  $h(t)$ , a  $y(t)$  odziv tog sustava. Tada vrijedi*

$$Y(s) = \mathcal{L}\{x(t) * h(t)\} = X(s)H(s). \quad (4.20)$$

*Dokaz:*

U definicijsku jednadžbu Laplaceove transformacije (3.3) za  $f(t)$  uvrštavamo konvoluciju dva signala definiranu jednadžbom (4.11)

$$\mathcal{L}\{x(t) * h(t)\} = \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right) e^{-st} dt. \quad (4.21)$$

Uz zamjenu poretka integracije dobivamo

$$\mathcal{L}\{x(t) * h(t)\} = \int_0^{\infty} x(\tau) \left( \int_0^{\infty} h(t-\tau)e^{-st} dt \right) d\tau. \quad (4.22)$$

Sada vršimo supstituciju u drugi integral  $u = t - \tau$ , te dobivamo

$$\mathcal{L}\{x(t) * h(t)\} = \int_0^{\infty} x(\tau) \left( \int_0^{\infty} h(u)e^{-s(u+\tau)} du \right) d\tau, \quad (4.23)$$

$$\mathcal{L}\{x(t) * h(t)\} = \int_0^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau} \left( \int_0^{\infty} h(u)e^{-su} du \right) d\tau, \quad (4.24)$$

$$\mathcal{L}\{x(t) * h(t)\} = \int_0^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau} d\tau \int_0^{\infty} h(u)e^{-su} du. \quad (4.25)$$

Sada možemo primjetiti da smo dobili umnožak dva integrala koji su, usporedbom s jednadžbom (3.3), po svojoj definiciji Laplaceove transformacije.

$$\mathcal{L}\{x(t) * h(t)\} = X(s)H(s) \quad (4.26)$$

Otprije je poznato da je konvolucija ulaznog signala i impulsnog odziva sustava jednaka izlaznom signalu, dakle

$$Y(s) = X(s)H(s). \quad (4.27)$$

Slijedi da je prijenosna funkcija sustava jednaka omjeru Laplaceovih transformacija izlaznog i ulaznog signala

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}. \quad (4.28)$$

Traženi odziv sustava se dobiva primjenom inverzne Laplaceove transformacije na funkciju  $Y(s)$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)X(s)\}. \quad (4.29)$$

Ovdje valja napomenuti kako za određivanje prijenosne funkcije sustava sva početna stanja u sustavu moraju biti jednaka 0. Fizikalno, to znači da svi spremnici energije (npr. zavojnice, kondenzatori, opruge itd.) moraju biti prazni.

#### 4.4. Polovi i nule prijenosne funkcije

Prijenosna funkcija bilo kojeg sustava je racionalna funkcija s polinomom u brojniku i polinomom u nazivniku. Do tog zaključka može se doći primjenom Laplaceove transformacije na linearnu diferencijalnu jednadžbu sustava sa svim početnim uvjetima jednakim 0. Neka je zadana linearna diferencijalna jednadžba koja opisuje vremenski nepromjenjivi i linearni sustav

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_m u^m + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 u' + b_0 u, \quad (4.30)$$

pri čemu su  $a$  i  $b$  proizvoljne realne konstante,  $y$  izlazni signal,  $u$  ulazni signal, a  $n$  i  $m$  predstavljaju derivacije  $m$ -tog, odnosno  $n$ -tog reda.

Primjenjujući Laplaceovu transformaciju na jednadžbu (4.30) imajući na umu da su svi početni uvjeti jednaki 0, te izlučivanjem  $Y(s)$  i  $U(s)$  dobivamo

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) U(s), \quad (4.31)$$

iz čega slijedi opći oblik prijenosne funkcije sustava

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (4.32)$$

Izjednačavanjem polinomâ u brojniku i nazivniku  $s$  nulom dolazimo vrijednosti koje nazivamo polovi i nule prijenosne funkcije. Konkretno, nule prijenosne funkcije su nultočke polinoma u brojniku, a polovi prijenosne funkcije su nultočke polinoma u nazivniku. Iz jednadžbe (4.32) možemo zaključiti da broj polova i nula ovisi o stupnju pripadnog polinoma, koji pak ovisi o redu diferencijalne jednadžbe, a pošto su koeficijenti polinoma  $a$  i  $b$  realni brojevi, slijedi da će se i polovi i nule javljati ili kao realni brojevi ili kao konjugirano-kompleksni par.

Iz navedenog se može zaključiti kako je polove i nule nužno prikazivati u kompleksnoj ravnini, gdje apscisa predstavlja realnu os, a ordinata imaginarnu os. Zaključno, možemo reći kako su nule prijenosne funkcije vrijednosti kompleksnog broja  $s$  za koje će prijenosna funkcija poprimiti vrijednost 0, a polovi prijenosne funkcije vrijednosti kompleksnog broja  $s$  za koje će prijenosna funkcija poprimiti vrijednost  $\infty$ . Položaj polova i nula u kompleksnoj ravnini utječe na ponašanje sustava, odnosno na njegov odziv. U idućim poglavljima ćemo pokazati kako je informacija o položaju polova u kompleksnoj ravnini ključna za analiziranje stabilnosti sustava, pri čemu ćemo polinom nazivnika prijenosne funkcije nazivati karakterističnim polinomom sustava. No, prije toga pokažimo na jednom primjeru na koji način se određuju polovi i nule prijenosne funkcije, te kako se prikazuju grafički u kompleksnoj ravnini. Neka je zadana linearna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima koja opisuje ponašanje nekog sustava

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = dx'(t) + ex(t), \quad (4.33)$$

gdje je  $x(t)$  pobuda sustava,  $y(t)$  njegov odziv, a  $a, b, c, d$  i  $e$  proizvoljne realne konstante, te neka su svi početni uvjeti jednaki 0.

Primjenom Laplaceove transformacije na jednadžbu (4.33) dobivamo

$$a(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + b(sY(s) - y(0)) + cY(s) = d(sX(s) - x(0)) + eX(s). \quad (4.34)$$

S obzirom da su svi početni uvjeti jednaki 0, možemo pisati

$$as^2Y(s) + bsY(s) + cY(s) = dsX(s) + eX(s). \quad (4.35)$$

Izlučivanjem  $X(s)$  i  $Y(s)$  dobivamo

$$Y(s)(as^2 + bs + c) = X(s)(ds + e). \quad (4.36)$$

Slijedi da je prijenosna funkcija  $G(s)$  jednaka

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{ds + e}{as^2 + bs + c}. \quad (4.37)$$

Sada možemo odrediti polove i nule prijenosne funkcije. Izjednačavanjem polinoma u brojniku s 0 dobivamo

$$ds + e = 0, \quad (4.38)$$

iz čega slijedi nula prijenosne funkcije

$$s_o = -\frac{e}{d}. \quad (4.39)$$

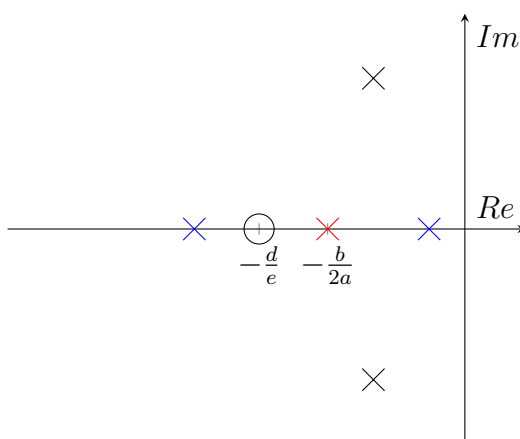
Zaključujemo kako prijenosna funkcija (4.37) ima jednu realnu nulu. Polove dobivamo izjednačavanjem karakterističnog polinoma prijenosne funkcije, odnosno polinoma u nazivniku

$$as^2 + bs + c = 0, \quad (4.40)$$

iz čega slijede polovi prijenosne funkcije

$$s_{p1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (4.41)$$

Ovisno o odnosu konstanti  $a$ ,  $b$  i  $c$  polovi će biti ili realni ili konjugirano-kompleksni par. Prikažimo sada polove i nule grafički, uz napomenu da se nule prijenosne funkcije prikazuju kružićima, a polovi križićima.



Slika 4.5. Raspored polova za prijenosnu funkciju (4.37), izvor: izrada autora

Ako je diskriminanta rješenja kvadratne jednadžbe veća od 0, ona će imati 2 realna rješenja, odnosno dva realna pola, što je na slici 4.5 prikazano plavom bojom. U slučaju negativne diskriminante, polovi će se javljati kao konjugirano-kompleksni par, što je na slici 4.5 prikazano crnom bojom. Naposljetku, ako je diskriminanta jednaka 0, ao rezultat javit će se jedan dvostruki pol prikazan na slici 4.5 crvenom bojom.

Na temelju prijenosne funkcije sustava možemo odrediti pojačanje i fazni pomak odziva na cijelom frekvencijskom spektru, analizirati odziv na bilo koju pobudnu funkciju, parametrirati sustav ovisno o željenim specifikacijama, te ono što nas u ovom radu najviše zanima, analizirati stabilnost sustava. Definirali smo impulsni odziv sustava koji definira sustav u potpunosti u vremenskoj domeni, te prijenosnu funkciju koja ga definira u kompleksnoj  $s$ -domeni. U sljedećem poglavlju pokazat ćemo kako se sustavi prikazuju pomoću podsustava, kako se spajaju i na koji način se određuju prijenosne funkcije složenih sustava.

Ovo poglavlje obrađeno je prema [2], [6] i [7].

## 5. Formalni prikaz sustava

Kada modeliramo sustave, često ih je potrebno podijeliti u manje cjeline, tj. podsustave kako bismo bolje i lakše razumijeli ulogu određenih dijelova sustava. Svakom takvom podsustavu moramo poznavati prijenosnu funkciju kako bismo mogli opisati sustav kao cjelinu. Jednom kada smo (po potrebi) sustav opisali podsustavima, od kojih se svaki prikazuje vlastitim blokom, povezujemo ih strelicama sukladno njihovim funkcijama. Sustave možemo prikazati u vremenskoj domeni, frekvencijskoj domeni i u prostoru stanja. Najpogodniji i najjednostavniji prikaz je blokovski prikaz, kojim se prikazuje prijenosna funkcija sustava.

### 5.1. Prikaz sustava u vremenskoj domeni

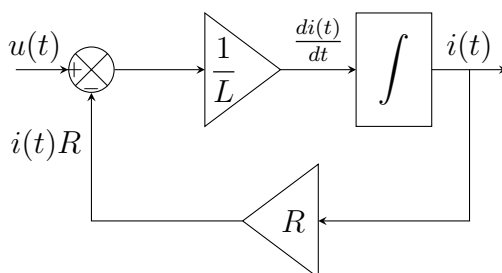
Prikaz sustava u vremenskoj domeni je prikladan kada želimo imati detaljan uvid u sam matematički model sustava. Ovisno o samom sustavu, njega može opisivati jedna ili više linearnih ili diferencijalnih jednadžbi. Jednadžbu koja opisuje sustav zatim izrazimo na način da s jedne strane jednakosti imamo derivaciju izlaza najvišeg reda, a s druge strane sve ostalo. Pokažimo to na primjeru serijskog RL kruga sa slike 2.7 i jednadžbe (2.6) koja ga opisuje

$$u(t) = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt}. \quad (5.1)$$

Jednadžbu izrazimo na način kako je prethodno opisano, te dobivamo

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L}(u(t) - i(t)R). \quad (5.2)$$

Sada sustav možemo prikazati blokovski, imajući na umu da je ulaz u sustav  $u(t)$ , a izlaz  $i(t)$ . Pri crtanju blokovskih shema razlikujemo više oblika blokova ovisno o njihovoj svrsi. Obično se trokutima označavaju blokovi koji predstavljaju nekakva pojačanja, odnosno množenje signala s konstantom, a blokovima pravokutnih oblika blokovi koji vrše neke matematičke operacije nad signalima.



Slika 5.1. Blokovski prikaz serijskog RL spoja u vremenskoj domeni, izvor: izrada autora



## 5.2. Prikaz sustava u frekvencijskoj domeni

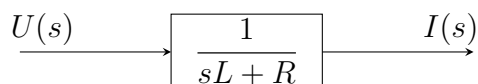
Da bismo mogli prikazati strukturu sustava i ispitivati njegovu stabilnost, najprije ga je potrebno matematički modelirati. U frekvencijskoj domeni, u blokovskom prikazu se prikazuje prijenosna funkcija sustava ili podsustava. Vidjet ćemo da će sljedeći prikaz biti značajno pregledniji. Sada ćemo isti sustav (RL spoj) prikazati u frekvencijskoj domeni prebacivanjem jednadžbe (5.2) u  $s$ -domenu, te dobivamo

$$sI(s) - i(0) = \frac{1}{L}(U(s) - I(s)R). \quad (5.3)$$

Uz početne uvjete jednake nuli, prijenosna funkcija sustava glasi

$$G(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{1}{sL + R}. \quad (5.4)$$

Ovako jednostavnu prijenosnu funkciju prikazujemo pomoću samo jednog bloka, pošto je to elementarna prijenosna funkcija sustava prvog reda.



Slika 5.2. Blokovski prikaz serijskog RL spoja u frekvencijskoj domeni, izvor: izrada autora

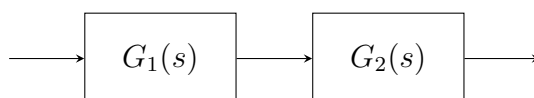
Ovakav prikaz je puno pogodniji za ispitivanje stabilnosti sustava, što će se pokazati u idućem poglavlju.

### 5.2.1. Pravila blokovske algebre

Nakon što smo matematički modelirali sustav i prikazali njegovu blokovsku shemu pomoću povezanih podsustava, korištenjem pravila blokovske algebre cijeli sustav se može prikazati jednom prijenosnom funkcijom koja u potpunosti opisuje njegovo ponašanje. Ekvivalentna prijenosna funkcija serijskog spoja  $n$  prijenosnih funkcija glasi

$$G(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s), \quad (5.5)$$

što znači da serijski povezane prijenosne funkcije množimo kako bismo dobili jednu prijenosnu funkciju. Na slici 5.3 je grafički prikaz serijskog spoja dvije prijenosne funkcije.

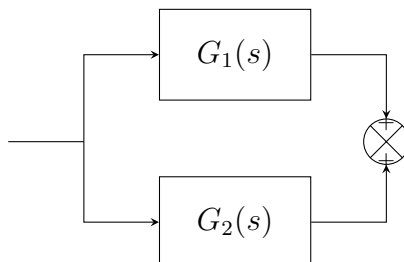


Slika 5.3. Serijski spoj dva podsustava, izvor: izrada autora

Ako su prijenosne funkcije, odnosno blokovi spojeni paralelno, ekvivalentna prijenosna funkcija glasi

$$G(s) = \sum_{i=1}^n G_i(s). \quad (5.6)$$

Dakle, paralelno spojene blokove zbrajamo kako bismo dobili ekvivalentnu prijenosnu funkciju. Na slici 5.4 prikazan je paralelni spoj dvije prijenosne funkcije.



Slika 5.4. Paralelni spoj dva podsustava, izvor: izrada autora

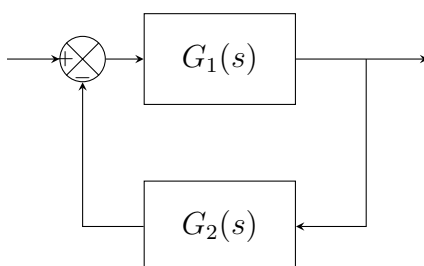
Sustavi u praksi često koriste povratnu vezu čime se postiže djelovanje izlazne veličine sustava na ulaz. Jedna od prednosti sustava s povratnom vezom je i mogućnost stabiliziranja nestabilnog procesa. Razlikujemo pozitivnu povratnu vezu, gdje se izlazna veličina dovodi na ulaz i zbraja s ulaznim signalom, te negativnu povratnu vezu, gdje se izlazni signal oduzima od ulaznog. Ekvivalentna prijenosna funkcija pozitivne povratne veze je

$$G(s) = \frac{G_1}{1 - G_1 G_2}, \quad (5.7)$$

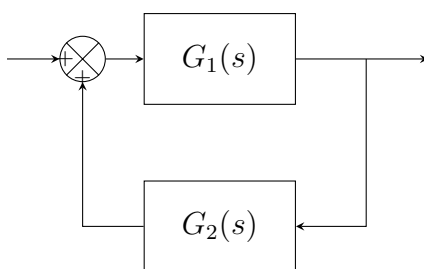
a negativne povratne veze

$$G(s) = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2}. \quad (5.8)$$

Na slikama 5.5 i 5.6 grafički su prikazane negativna i pozitivna povratna veza.



Slika 5.5. Negativna povratna veza, izvor: izrada autora



*Slika 5.6. Pozitivna povratna veza, izvor: izrada autora*

Ovo su četiri najvažnija i najčešće korištena pravila. Ostala uključuju pomicanje sumacijske točke i točke grananja u svrhu pojednostavljenja računa, nakon čega se većina njih svodi na ove četiri. Ovo poglavlje obrađeno je prema [8].

## 6. Stabilnost sustava

Prilikom projektiranja svakog sustava treba voditi računa o željenim svojstvima. Međutim, najvažnije i temeljno svojstvo svakog sustava je stabilnost. Nestabilni sustavi nemaju nikakve praktične koristi jer je njihov odziv nepredvidiv i ne konvergira tijekom vremena, što će gotovo uvijek u nekom trenutku dovesti do fizičkog uništenja sustava (pregrijavanja, eksplozije itd.). Stabilnost se može razmatrati iz više aspekata. Postoje razne vrste i definicije stabilnosti, a mi ćemo obraditi neke koje se najčešće koriste u praksi, s naglaskom na elektrotehniku. Ovo poglavlje obradit ćemo prema [1] i [8].

### 6.1. Unutarnja stabilnost

Unutarnja stabilnost još se naziva i asimptotska stabilnost, a sustavi koji zadovoljavaju ovo svojstvo će se protekom vremena ustabiliti u svom ravnotežnom stanju, čak i ako su prisutne smetnje ili poremećaji. Unutarnju stabilnost provjeravamo sljedećom propozicijom.

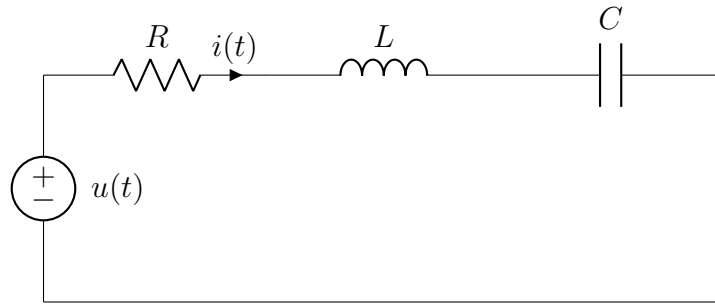
**Propozicija 6.1.** *Sustav zadovoljava kriterij unutarnje stabilnosti ako vrijedi*

$$\operatorname{Re}\{s_{pi}\} < 0, i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.1)$$

gdje su  $s_{pi}$  polovi prijenosne funkcije sustava.

Drugim riječima, sustav je asimptotski stabilan ako su realni dijelovi svih njegovih polova negativni. Fizikalno, to znači da odziv sustava tijekom vremena konvergira u vlastito ravnotežno stanje. Unutarnja stabilnost se provjerava položajem korijena karakterističnog polinoma prijenosne funkcije kojom je opisan sustav, odnosno položajem nultočaka nazivnika prijenosne funkcije. Nultočke nazivnika nazivaju se polovima, a to su vrijednosti u kojima prijenosna funkcija poprima vrijednost  $\infty$ . Ilustrirajmo to na primjeru serijskog RLC kruga.

**Primjer:** *Neka je zadan serijski RLC krug s otpornikom otpora  $10 \Omega$ , zavojnicom induktiviteta  $10\text{mH}$  i kondenzatorom kapaciteta  $1 \text{mF}$  uz sve početne uvjete jednake 0. Provjerimo zadovoljava li zadani sustav svojstvo unutarnje stabilnosti.*



Slika 6.1. Serijski RLC spoj, izvor: izrada autora

Diferencijalna jednačba koja opisuje zadani električni krug, po 2. Kirchhoffovom zakonu, glasi

$$u(t) = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau. \quad (6.2)$$

Napon na kondenzatoru je po svojoj definiciji jednak omjeru naboja između ploča kondenzatora i njegovog kapaciteta, a naboj je po definiciji jednak integralu struje. Varijabla  $\tau$  u podintegralnoj funkciji je vrijeme, samo s drugačijom oznakom, pošto je gornja granica integracije također vrijeme. Sada možemo primjeniti Laplaceovu transformaciju na jednačbu (6.2) koristeći teorem o slici derivacije i teorem o slici integrala

$$U(s) = I(s)R + sLI(s) + \frac{1}{sC}I(s). \quad (6.3)$$

Kako je ulaz u sustav napon, a izlaz struja, određujemo prijenosnu funkciju kao omjer struje i napona u  $s$ -domeni

$$U(s) = I(s) \left( R + sL + \frac{1}{sC} \right) = I(s) \left( \frac{s^2LC + sRC + 1}{sC} \right). \quad (6.4)$$

Prijenosna funkcija (označavat ćemo ju s  $G(s)$ ) glasi

$$G(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{sC}{s^2LC + sRC + 1}. \quad (6.5)$$

Uvrstimo sada zadane vrijednosti

$$G(s) = \frac{0.001s}{0.00001s + 0.01s + 1}. \quad (6.6)$$

Svođenjem na opći oblik prijenosne funkcije drugog reda, gdje je koeficijent uz najveću potenciju polinoma u nazivniku jednak 1, dobivamo

$$G(s) = \frac{100s}{s^2 + 1000s + 100000}. \quad (6.7)$$

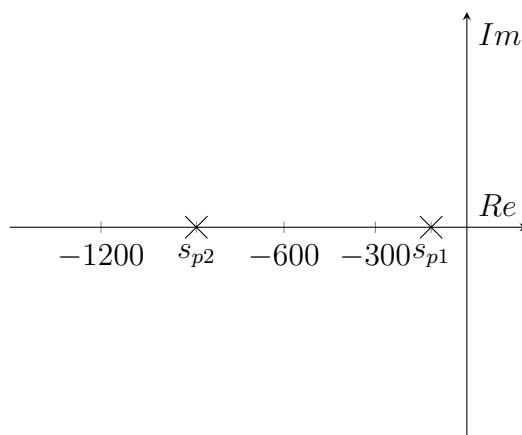
Karakteristični polinom zadanog sustava (označavat ćemo ga s  $A(s)$ ) glasi

$$A(s) = s^2 + 1000s + 100000, \quad (6.8)$$

a njezina rješenja

$$s_{p1} = -112.7, s_{p2} = -887.3 \quad (6.9)$$

Grafički prikaz polova prikazan je na slici 6.2.



Slika 6.2. Raspored polova za prijenosnu funkciju (6.7), izvor: izrada autora

Kako je već navedeno, polovi su vrijednosti kompleksnog broja  $s$  u kojima nazivnik prijenosne funkcije poprima vrijednost 0. Kompleksni broj  $s$  možemo zapisati u obliku  $s = \sigma + j\omega$ , gdje  $\sigma$  predstavlja realnu, a  $\omega$  imaginarnu komponentu. Fizikalno,  $\sigma$  predstavlja prigušenje (eksponencijalnu komponentu) prijenosne funkcije, a imaginarna komponenta  $j\omega$  predstavlja oscilatornu (sinusoidalnu) komponentu prijenosne funkcije. Stoga iz rasporeda polova prijenosne funkcije možemo otprilike reći kakav odziv možemo očekivati. Pošto se polovi prijenosne funkcije (6.7) prikazani na slici 6.2 nalaze na realnoj osi, njihova imaginarna, odnosno oscilatorna komponenta iznosi 0. Sada je i jasnije zašto se polovi moraju nalaziti u lijevoj poluravnini kompleksne ravnine da bi sustav bio stabilan - da je  $\sigma > 0$ , odziv sustava na impulsnu, ali i svaku drugu pobudu bi imao eksponencijalni rast i ne bi konvergirao u svoje ravnotežno stanje. Iz svega navedenog možemo zaključiti kako će impulsni odziv prikazanog sustava imati odziv koji eksponencijalno pada u svoje ravnotežno stanje, odnosno 0. Provjerimo tu tvrdnju matematičkim izračunom, odnosno određivanjem inverzne Laplaceove transformacije prijenosne funkcije sustava

$$G(s) = \frac{100s}{s^2 + 1000s + 100000} = \frac{100s}{(s + 112.7)(s + 887.3)} \quad (6.10)$$

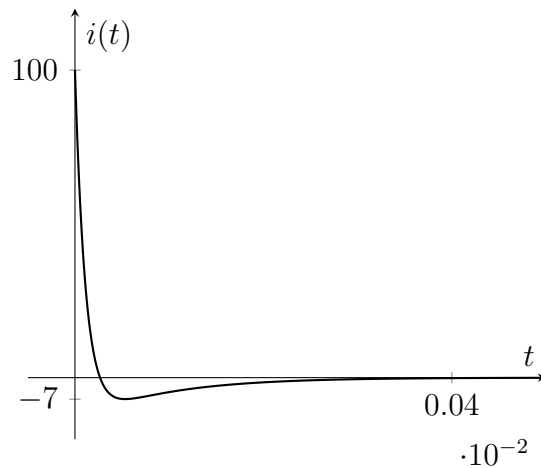
Rastavom na parcijalne razlomke dobivamo

$$G(s) = \frac{114.55}{s + 887.3} - \frac{14.55}{s + 112.7}, \quad (6.11)$$

čime smo dobili zapis koji možemo inverznom Laplaceovom transformacijom prebaciti natrag u vremensku domenu

$$g(t) = 114.55e^{-887.3t} - 14.55e^{-112.7t} \text{ A.} \quad (6.12)$$

Odziv struje na impuls prikazan je na slici 6.3.

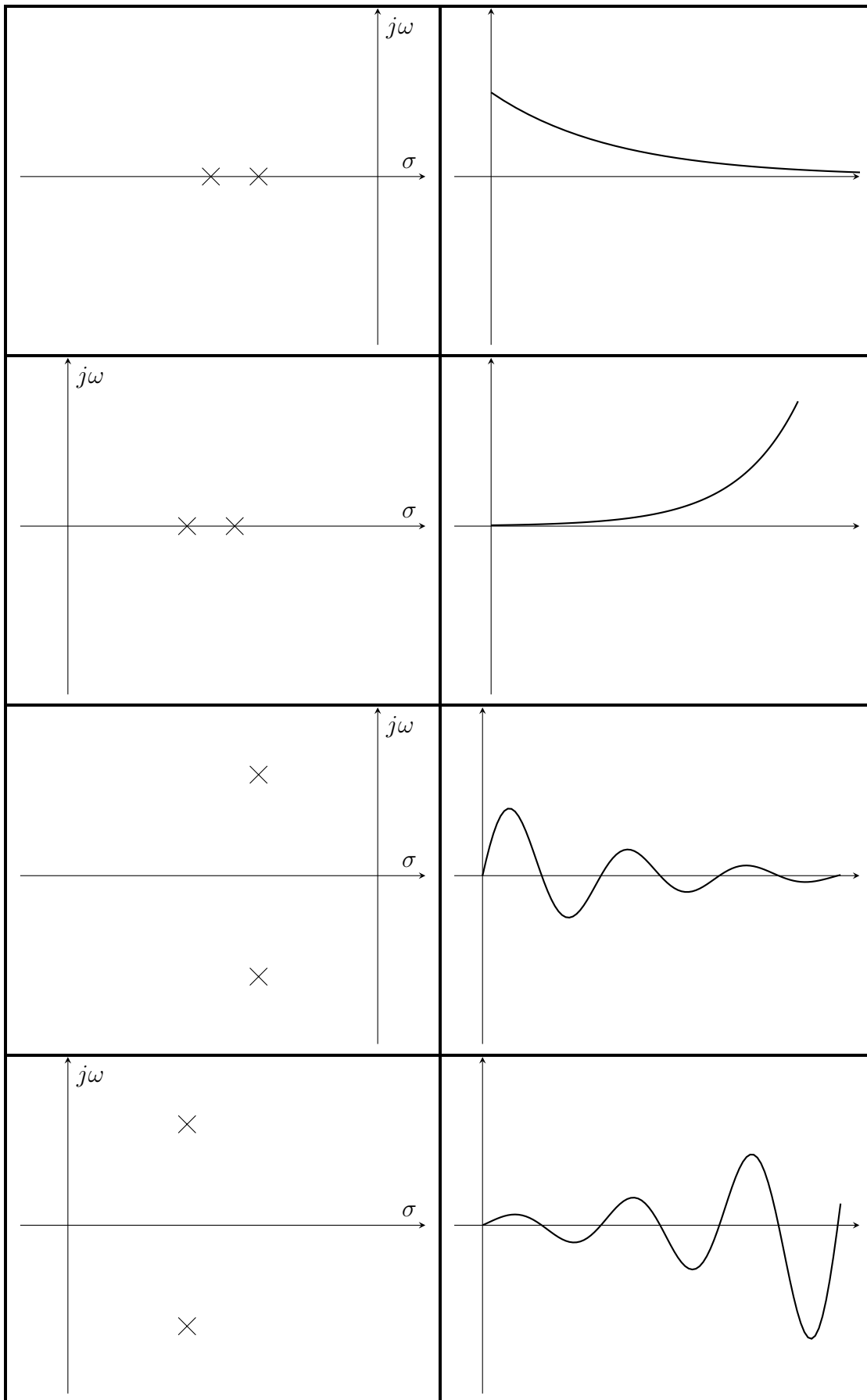


Slika 6.3. Odziv struje na ulazni impuls, izvor: izrada autora

Vidimo da u početnom trenutku kroz strujni krug naglo poteče struja od 100A, zatim eksponencijalno padne na -7A, odnosno poteče u suprotnom smjeru, te se zatim eksponencijalno prigušuje na 0A. Sa stanovišta stabilnosti, impulsni odziv ovog sustava je vrlo zadovoljavajuć, ali struje ovako velikog iznosa su vrlo opasne za ovakav strujni krug, pa bi njegovi elementi morali biti drugačije dimenzionirani. Međutim, mi ćemo se striktno fokusirati na stabilnost, te možemo reći kako smo na primjeru RLC kruga detaljno objasnili koncept unutarnje stabilnosti.

Promotrimo sada kako položaj polova utječe na odziv sustava, ujedno i njegovu stabilnost u tablici 6.1.

Položaj polova	Pripadni odziv



Tablica 6.1. Odziv sustava ovisno o položaju polova prijenosne funkcije



Vidimo da je za unutarnju stabilnost sustava nužno da realna komponenta svih polova prijenosne funkcije ima negativan iznos. Također možemo vidjeti kako odziv sustava ovisi o tome kolika je po iznosu realna, a kolika imaginarna komponenta. Što je realna komponenta veća po apsolutnom iznosu, odziv sustava će se brže prigušivati ili brže eksponencijalno rasti, ovisno o tome je li pozitivna ili negativna. Što je imaginarna komponenta veća, to će sustav imati veće oscilacije. Valja napomenuti kako i nule sustava, odnosno nultočke nazivnika utječu na konačan odziv, ali ne i na njegovu stabilnost. Zaključno, u kontekstu unutarnje stabilnosti mora biti zadovoljen uvjet

$$\operatorname{Re}\{s_i\} < 0, i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.13)$$

gdje su  $s_i$  polovi prijenosne funkcije.

Ako polovi leže na imaginarnoj osi, odnosno ako nemaju realnu komponentu nego su čisto imaginarni, sustav je rubno stabilan, što također najčešće nije željeno radno stanje. Na jednom od primjera u sljedećem poglavlju pokazat ćemo zašto je to tako.

## 6.2. Vanjska stabilnost i potpuna stabilnost

Kod vanjske stabilnosti u obzir se uzimaju i pobude sustava. Vanjska stabilnost naziva se i BIBO stabilnost (*eng. Bounded Input Bounded Output*), a ako sustav zadovoljava uvjet BIBO stabilnosti, onda za sve moguće pobude ograničene po amplitudi i odziv sustava mora biti ograničen po amplitudi.

**Definicija 6.1.** *Sustav je BIBO stabilan ako za amplitudno ograničenu pobudu ima amplitudno ograničen odziv, pri čemu je nužan i dovoljan uvjet*

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt < \infty, \quad (6.14)$$

gdje je  $g(t)$  impulsni odziv sustava.

Provjerimo sada uvjet BIBO stabilnosti RLC kruga sa slike 6.1 opisanog prijenosnom funkcijom (6.7), odnosno impulsnim odzivom (6.12) tako što ćemo izračunati integral modula impulsnog odziva i vidjeti je li on konvergira.

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt = \int_0^{\infty} |114.55e^{-887.3t} - 14.55e^{-112.7t}| dt. \quad (6.15)$$

Za ispitivanje konvergencije integrala koristit ćemo teorem dan u nastavku.

**Teorem 6.1.** Neka su zadane funkcije  $f$  i  $g$  definirane na intervalu  $[0, \infty)$  takve da vrijedi

$$|f(t)| \leq g(t), \quad (6.16)$$

za sve  $t \in [0, \infty)$ . Tada konvergencija integrala

$$\int_0^{\infty} g(t) dt \quad (6.17)$$

povlači konvergenciju integrala

$$\int_0^{\infty} f(t) dt. \quad (6.18)$$

Uz ovaj teorem koristit ćemo i poznatu nejednakost trokuta koja glasi

$$|a \pm b| \leq |a| + |b|. \quad (6.19)$$

Na temelju toga, konvergenciju integrala (6.15) možemo ispitati na način da ispitamo konvergenciju integrala dobivenog primjenom pravila nejednakosti trokuta. Slijedi

$$\int_0^{\infty} |g(t)| \leq \int_0^{\infty} |114.55e^{-887.3t}| dt + \int_0^{\infty} |14.55e^{-112.7t}| dt. \quad (6.20)$$

Pošto su podintegralne funkcije eksponencijalne, možemo pisati

$$\int_0^{\infty} |g(t)| \leq 114.55 \int_0^{\infty} e^{-887.3t} dt + 14.55 \int_0^{\infty} e^{-112.7t} dt. \quad (6.21)$$

Rješavanjem ovog integrala dobivamo

$$\int_0^{\infty} |g(t)| \leq -\frac{114.55}{887.3} e^{-887.3t} \Big|_0^{\infty} - \frac{14.55}{112.7} e^{-112.7t} \Big|_0^{\infty} \quad (6.22)$$

Uvrštavanjem granica integracije dobivamo

$$\int_0^{\infty} |g(t)| \leq -\frac{114.55}{887.3}(0 - 1) - \frac{14.55}{112.7}(0 - 1). \quad (6.23)$$

Slijedi

$$\int_0^{\infty} |g(t)| \leq \frac{114.55}{887.3} + \frac{14.55}{112.7} = 0.258. \quad (6.24)$$

Vidimo da izračunati integral konvergira, što znači da sustav zadovoljava uvjet BIBO stabilnosti i da će za svaku konačnu pobudu imati konačan odziv.

Unutarnja stabilnost predstavlja stroži kriterij na stabilnost, odnosno ako sustav zadovoljava uvjet unutarnje stabilnosti, tada zadovoljava i uvjet vanjske (BIBO) stabilnosti. Dakle, unutarnja stabilnost podrazumijeva i vanjsku, ali vanjska stabilnost ne podrazumijeva i unutarnju.

Kod sustava s više ulaza i/ili više izlaza nije dovoljno odrediti samo jednu prijenosnu funkciju sustava kako bismo zaključivali o njegovoj stabilnosti, već je potrebno ispitati svaku prijenosnu funkciju definiranu kao omjer ulaznog i izlaznog signala. Takvi sustavi moraju zadovoljavati svojstvo potpune stabilnosti.

**Definicija 6.2.** *Sustav je potpuno stabilan ako prijenosna funkcija svih mogućih ulazno-izlaznih parova signala zadovoljava kriterij unutarnje stabilnosti.*

Sada ćemo na praktičnim primjerima pokazati kako se vrši analiza stabilnosti nekog sustava.

## 7. Analiza stabilnosti sustava na primjerima iz prakse

U ovom poglavlju ćemo na dva praktična primjera analizirati stabilnost i rubnu stabilnost, te vidjeti kako rubno stabilni sustavi pod određenim uvjetima mogu imati nestabilan odziv, počevši od matematičkog modeliranja do analize unutarnje, vanjske i potpune stabilnosti svakog od sustava. Ovo poglavlje obradit ćemo prema [9] i [10].

### 7.1. Istosmjerni motor s nezavisnom uzbudom

Istosmjerni motor s nezavisnom uzbudom poslužit će nam kao primjer stabilnog sustava. Da bismo ga mogli matematički modelirati i analizirati njegovo ponašanje, moramo se najprije upoznati s principom rada istosmjernog motora.

Električni strojevi vrše pretvorbu električne energije u mehaničku energiju i obratno. Strojevi koji pretvaraju električnu energiju u mehaničku nazivaju se motori, a strojevi koji pretvaraju mehaničku energiju u električnu generatori. Iz navedenog proizlazi da isti stroj može raditi i kao motor i kao generator, ovisno o tome koji oblik energije dovodimo, a koji odvodimo. Kao što sam naziv govori, istosmjerni stroj je pogonjen istosmjernim električnim veličinama.

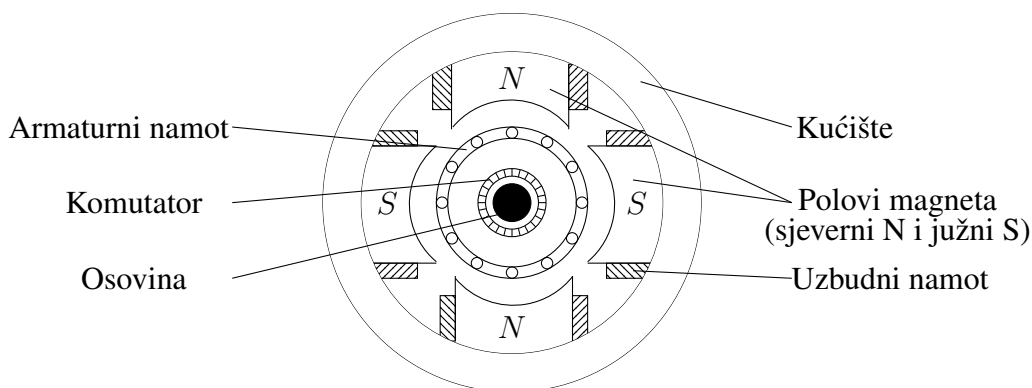
Sam rad električnih strojeva se u principu temelji na svega nekoliko osnovnih fizikalnih zakonitosti. Jedna od njih je induciranje napona na krajevima vodiča koji se nalazi u promjenjivom magnetskom polju što se opisuje izrazom

$$E = Blv, \quad (7.1)$$

gdje je  $E$  inducirani napon,  $B$  magnetska indukcija (omjer jakosti magnetskog toka i površine),  $l$  duljina vodiča koji se nalazi u magnetskom polju, a  $v$  brzina gibanja vodiča. Druga važna zakonitost je pojava sile na vodič u magnetskom polju kroz koji teče struja. Veličina te sile dana je izrazom

$$F = BIl, \quad (7.2)$$

gdje je  $F$  sila na vodič,  $B$  magnetska indukcija,  $I$  jakost struje kroz vodič, a  $l$  duljina vodiča koji se nalazi u magnetskom polju. Sada ćemo se поближе upoznati s načinom kako su te dvije zakonitosti iskorištene u električnim strojevima, konkretno kod istosmjernog stroja. Na slici 7.1 prikazan je poprečni presjek istosmjernog stroja.



Slika 7.1. Poprečni presjek istosmjernog stroja, izvor: izrada autora

U nastavku dajemo fizikalno objašnjenje principa rada istosmjernog stroja na temelju slike 7.1. Uzбудni i armaturni namot su spojeni svaki na zasebni izvor napajanja, pri čemu se za stvaranje uzbudnog magnetskog toka mogu koristiti i permanentni magneti. Uzбудni namot se nalazi na statoru, odnosno nepomičnom dijelu stroja, a armaturni na rotoru, odnosno dijelu stroja koji rotira. Kada kroz uzbudni namot poteče struja, ona stvara uzbudno magnetsko polje. Protjecanjem struje kroz armaturni namot, također se stvara magnetsko polje koje je u interakciji s uzbudnim magnetskim poljem, zbog čega se javlja magnetska sila koja proizvodi moment koji pokreće rotor. Pored navedenog, inducira se i protuelektromotorna sila (napon) koja nastoji poništiti njen uzrok. Detaljnija razmatranja principa rada istosmjernog stroja nam u ovom radu neće biti potrebna.

Sada možemo matematički modelirati električni dio. Armaturni namot je u suštini žica namotana oko rotora, što nam govori da ima određeni induktivitet, ali i električni otpor. Pored navedenog, imamo i induciranu protuelektromotornu silu ovisnu o uzbudu i brzini vrtnje. Pošto ćemo uzбудu u ovom primjeru smatrati konstantnom, ona će ovisiti samo o brzini vrtnje stroja, odnosno o brzini gibanja vodiča unutar magnetskog polja sukladno jednadžbi (7.1).

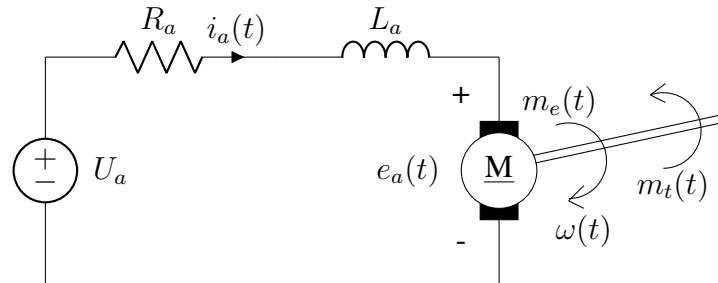
$$e_a(t) = C\omega(t), \quad (7.3)$$

gdje je  $e_a$  inducirana protuelektromotorna sila,  $C$  konstanta ovisna o uzbudu, a  $\omega$  brzina vrtnje izražena u radijanima po sekundi. Što se mehaničkog dijela tiče, prema 2. Newtonovom zakonu moment ubrzanja stroja je jednak zbroju momenata koji djeluju na stroj. Već smo utvrdili kako priključenjem stroja na napon dolazi do stvaranja sile na vodič, odnosno momenta koji pokreće rotor. Taj moment nazivat ćemo elektromagnetskim momentom i označavati  $M_e$ . Elektromagnetski moment će, uz konstantu uzбудu, ovisiti samo i armaturnoj struji sukladno jednadžbi (7.2)

$$m_e(t) = Ci_a(t), \quad (7.4)$$

gdje je  $m_e$  razvijeni elektromagnetski moment stroja,  $C$  konstanta ovisna o uzbudu, a  $i_a$  struja kroz armaturni namot. Pored elektromagnetskog, na motor djeluje i moment tereta, odnosno mase kojom smo opteretili motor, te moment trenja ovisan o brzini vrtnje motora. Iz navedenog možemo

nacrtaati elektromehaničku shemu istosmjernog stroja, prikazanu na slici 7.2. Zadani parametri motora su nazivni napon  $U_a = 400 \text{ V}$ , otpor armaturnog namota  $R_a = 0.5 \Omega$ , induktivitet armaturnog namota  $L_a = 7 \text{ mH}$ , moment inercije  $J = 0.5 \text{ kgm}^2$ , konstanta  $C = 3.5 \text{ Vs}$  i koeficijent trenja  $b = 0.1 \text{ Nm.s}$ .



Slika 7.2. Matematički model istosmjernog stroja s nezavisnom i konstantnom uzбудom, gdje je  $u_a(t)$  napon armature,  $R_a$  električni otpor armaturnog namota,  $L_a$  induktivitet armaturnog namota,  $e_a(t)$  inducirana protuelektromotorna sila,  $m_e(t)$  razvijeni elektromagnetski moment,  $m_t(t)$  moment tereta i  $\omega(t)$  brzina vrtnje motora, izvor: izrada autora

U ovom primjeru, pretpostavit ćemo da je motor neopterećen, tj. da je moment tereta jednak 0, što znači da ćemo promatrati odzive izlaznih veličina u praznom hodu. U terminima teorije sustava, istosmjerni stroj možemo promatrati kao sustav s jednim ulazom (naponom armature  $u_a(t)$ ) i dva izlaza (strujom armature  $i_a(t)$  i brzinom vrtnje  $\omega(t)$ ), dok parametri istosmjernog stroja i njegovo prethodno objašnjeno fizikalno djelovanje predstavljaju sam sustav. Iz navedenog slijedi da za zadovoljanje uvjeta potpune stabilnosti, sve prijenosne funkcije ulazno-izlaznih parova moraju zadovoljavati kriterij unutarnje stabilnosti. Dvije prijenosne funkcije koje tražimo su:

$$G_I(s) = \frac{I_a(s)}{U_a(s)}, \quad (7.5)$$

$$G_\omega(s) = \frac{\omega(s)}{U_a(s)}. \quad (7.6)$$

Sada možemo, na temelju 2. Kirchhoffovog zakona, 2. Newtonovog zakona i slike 7.2, napisati jednadžbe za električni i mehanički dio:

$$u_a(t) = i_a(t)R_a + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e_a(t), \quad (7.7)$$

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = m_e(t) - b\omega(t), \quad (7.8)$$

gdje je  $J$  moment inercije motora, a umnožak momenta inercije i derivacije brzine vrtnje moment ubrzanja. Sada uvrstimo jednadžbe (7.3) i (7.4) u jednadžbe (7.7) i (7.8), te dobivamo

$$u_a(t) = i_a(t)R_a + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + C\omega(t), \quad (7.9)$$

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = C i_a(t) - b\omega(t). \quad (7.10)$$

Primjenom Laplaceove transformacije na gornje jednadžbe dobivamo

$$U_a(s) = I_a(s)R_a + L_a(sI_a(s) - i(0)) + C\omega(s), \quad (7.11)$$

$$J(s\omega(s) - \omega(0)) = CI_a(s) - b\omega(s). \quad (7.12)$$

S obzirom da su svi početni uvjeti jednaki 0, možemo pisati

$$U_a(s) = I_a(s)R_a + L_a s I_a(s) + C\omega(s), \quad (7.13)$$

$$Js\omega(s) = CI_a(s) - b\omega(s). \quad (7.14)$$

Da bismo odredili prijenosnu funkciju kao omjer napona i struje, iz jednadžbe (7.14) izrazimo  $\omega(s)$ :

$$\omega(s) = \frac{C}{Js + b} I_a(s). \quad (7.15)$$

Uvrštavanjem u (7.13) dobivamo

$$U_a(s) = I_a(s)R_a + L_a s I_a(s) + \frac{C^2}{Js + b} I_a(s) = I_a(s) \left( R_a + sL_a + \frac{C^2}{Js + b} \right). \quad (7.16)$$

Svođenjem na zajednički nazivnik i množenjem/dijeljenjem cijelog izraza dobivamo prijenosnu funkciju  $G_I(s)$ :

$$G_I(s) = \frac{I_a(s)}{U_a(s)} = \frac{Js + b}{JL_a s^2 + (JR_a + bL_a)s + bR_a + C^2}. \quad (7.17)$$

Dijeljenjem i brojnika i nazivnika s  $JL_a$  dobivamo:

$$G_I(s) = \frac{\frac{1}{L_a}s + \frac{b}{JL_a}}{s^2 + \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{b}{J}\right)s + \frac{bR_a + C^2}{JL_a}}, \quad (7.18)$$

a uvrštavanjem zadanih vrijednosti slijedi

$$G_I(s) = \frac{142.86s + 28.57}{s^2 + 71.63s + 3514.29}. \quad (7.19)$$

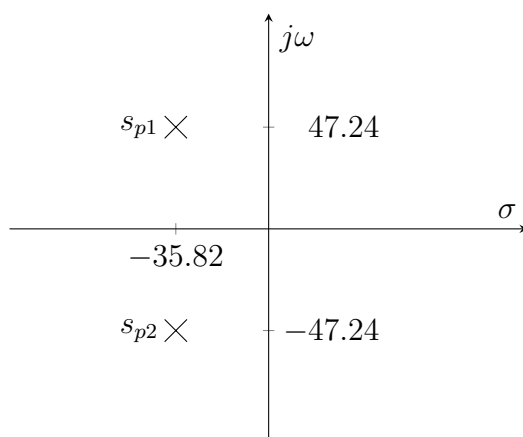
Sada možemo analizirati karakteristični polinom izračunate prijenosne funkcije, odnosno nazivnik ovog razlomka koji glasi

$$A_I(s) = s^2 + 71.63s + 3514.29. \quad (7.20)$$

Rješavanjem pripadne kvadratne jednadžbe dobivamo konjugirano-kompleksni par polova:

$$s_{p1,2} = -35.82 \pm j47.24. \quad (7.21)$$

Grafički prikaz polova prikazan je na slici 7.3, iz kojeg već možemo zaključiti kako će sustav zadovoljavati uvjet unutarnje stabilnosti.



Slika 7.3. Raspored polova za prijenosnu funkciju (7.19), izvor: izrada autora

Izračunajmo sada impulsni odziv struje određivanjem inverzne Laplaceove transformacije prijenosne funkcije (7.19). Prvo sređujemo nazivnik na način da ga svedemo na oblik tablične transformacije

$$G_I(s) = \frac{142.86s + 28.57}{s^2 + 71.63s + 3514.29} = \frac{142.86s + 28.57}{(s + 35.815)^2 + 2231.58}, \quad (7.22)$$

$$G_I(s) = \frac{142.86s}{(s + 35.815)^2 + 2231.58} + \frac{28.57}{(s + 35.815)^2 + 2231.58}. \quad (7.23)$$

Daljnijim sređivanjem uz pažnju na zadržavanje jednakosti cijelog izraza dobivamo

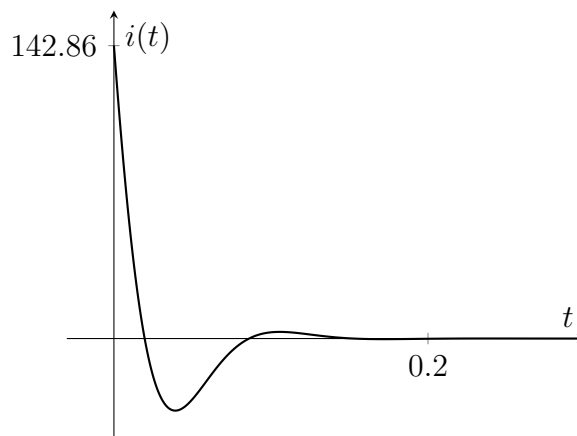
$$G_I(s) = 142.86 \frac{s + 35.815}{(s + 35.815)^2 + 2231.58} - 107.71 \frac{47.24}{(s + 35.815)^2 + 2231.58}, \quad (7.24)$$

čime smo dobili zbroj dviju tabličnih transformacija (pogledati tablicu 3.1).

Slijedi da je impulsni odziv struje jednak

$$g_I(t) = 142.86e^{-35.815t} \cos(47.24t) - 107.71e^{-35.815t} \sin(47.24t). \quad (7.25)$$

Dobiveni impulsni odziv struje prikazan je na slici 7.4.



Slika 7.4. Impulsni odziv struje zadanog sustava, izvor: izrada autora



Izračunajmo sada još i odziv na skokovitu pobudu ulaznog napona na nazivnu vrijednost (400 V). Na taj način ćemo provjeriti ponašanje sustava, odnosno njegovih izlaznih veličina prilikom uključenja. Skokoviti porast pobude modeliramo Heavisideovom funkcijom definiranom u potpoglavlju 3.3. Slijedi da će odziv struje  $S_I$  na skokovitu pobudu biti jednak

$$S_I(s) = \frac{400}{s} \frac{142.86s + 28.57}{s^2 + 71.63s + 3514.29}. \quad (7.26)$$

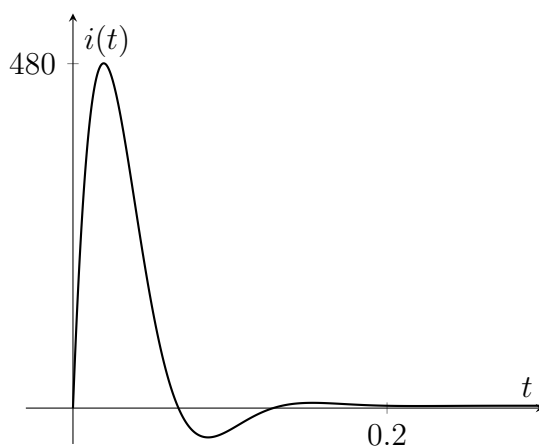
Svođenjem izraza na tablične transformacije dobivamo

$$S_I(s) = \frac{3.25}{s} - 3.25 \frac{s + 35.815}{(s + 35.815)^2 + 2231.58} + 1207.2 \frac{47.24}{(s + 35.815)^2 + 2231.58}. \quad (7.27)$$

Primjenom inverzne Laplaceove transformacije dobivamo odziv struje na skokoviti porast napona s 0 na nazivnu vrijednost u vremenskoj domeni

$$s_I(t) = 3.25u(t) - 3.25e^{-35.815t} \cos(47.24t) + 1207.2e^{-35.815t} \sin(47.24t). \quad (7.28)$$

Grafički prikaz odziva armaturne struje na skokoviti porast pobude na nazivnu vrijednost prikazan je na slici 7.5.



Slika 7.5. Odziv struje na skokovitu pobudu ulaznog napona na nazivnu vrijednost, izvor: izrada autora

Provjerimo sada zadovoljava li dobiveni impulsni odziv uvjet vanjske stabilnosti. Imamo

$$\int_0^{\infty} |g_I(t)| dt = \int_0^{\infty} |142.86e^{-35.815t} \cos(47.24t) - 107.71e^{-35.815t} \sin(47.24t)| dt, \quad (7.29)$$

Konvergenciju ovog integrala odredit ćemo primjenom teorema 6.1 i pravila nejednakosti trokuta definiranog jednadžbom (6.19). Slijedi

$$\int_0^{\infty} |g_I(t)| dt \leq \int_0^{\infty} 142.86|e^{-35.815t}| |\cos(47.24t)| dt + \int_0^{\infty} 107.71|e^{-35.815t}| |\sin(47.24t)| dt. \quad (7.30)$$

Pošto funkcije sin i cos poprimaju vrijednosti na intervalu  $[-1, 1]$  možemo pisati

$$\int_0^{\infty} |g_I(t)| dt \leq \int_0^{\infty} 142.86 |e^{-35.815t}| dt + \int_0^{\infty} 107.71 |e^{-35.815t}| dt. \quad (7.31)$$

Podintegralna funkcija je eksponencijalna, iz čega slijedi

$$\int_0^{\infty} |g_I(t)| dt \leq 142.86 \int_0^{\infty} e^{-35.815t} dt + 107.71 \int_0^{\infty} e^{-35.815t} dt. \quad (7.32)$$

Rješavanjem ovog integrala dobivamo

$$\int_0^{\infty} |g_I(t)| dt \leq \frac{142.86}{-35.815} e^{-35.815t} \Big|_0^{\infty} + \frac{107.71}{-35.815} e^{-35.815t} \Big|_0^{\infty}. \quad (7.33)$$

Uvrštavanjem granica integracije dobivamo konačno rješenje

$$\int_0^{\infty} |g_I(t)| dt \leq 6.996, \quad (7.34)$$

iz čega slijedi da izračunati integral konvergira, što prema teoremu 6.1 povlači konvergenciju integrala (7.29). Zaključujemo kako je uvjet BIBO stabilnosti zadovoljen, odnosno za svaki priključeni napon konačne amplitude odziv struje će također imati konačnu amplitudu.

Iz prethodnih izračuna i grafičkih prikaza možemo zaključiti kako prijenosna funkcija struje i napona zadovoljava uvjet unutarnje i vanjske stabilnosti.

Sada ćemo provjeriti zadovoljava li i druga prijenosna funkcija definirana jednadžbom (7.6) te uvjete. Iz jednadžbe (7.14) izrazimo  $I(s)$ :

$$I_a(s) = \frac{Js + b}{C} \omega(s). \quad (7.35)$$

Uvrštavanjem u (7.13) dobivamo

$$U_a(s) = \frac{JR_a s + bR_a}{C} \omega(s) + \frac{JL_a s^2 + bL_a s}{C} \omega(s) + C\omega(s). \quad (7.36)$$

Izlučivanjem  $\omega(s)$  i svođenjem na zajednički nazivnik slijedi

$$U_a(s) = \omega(s) \left( \frac{JL_a s^2 + (JR_a + bL_a)s + bR_a + C^2}{C} \right), \quad (7.37)$$

pa je prijenosna funkcija  $G_\omega(s)$  dana izrazom

$$G_\omega(s) = \frac{\omega(s)}{U_a(s)} = \frac{C}{JL_a s^2 + (JR_a + bL_a)s + bR_a + C^2}. \quad (7.38)$$

Dijeljenjem i brojnika i nazivnika s  $JL_a$  dobivamo

$$G_\omega(s) = \frac{\frac{C}{JL_a}}{s^2 + \left( \frac{R_a}{L_a} + \frac{b}{J} \right) s + \frac{bR_a + C^2}{JL_a}}. \quad (7.39)$$

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti slijedi

$$G_{\omega}(s) = \frac{1000}{s^2 + 71.63s + 3514.29}. \quad (7.40)$$

Primjećujemo kako je nazivnik ove prijenosne funkcije isti kao i onaj prethodne, što znači da su i karakteristični polinom i polovi prijenosne funkcije isti.

Izračunajmo sada impulsni odziv određivanjem inverzne Laplaceove transformacije prijenosne funkcije (7.40). Prvo sređujemo nazivnik na način da ga svedemo na oblik tablične transformacije:

$$G_{\omega}(s) = \frac{1000}{s^2 + 71.63s + 3514.29} = \frac{1000}{(s + 35.815)^2 + 2231.58}, \quad (7.41)$$

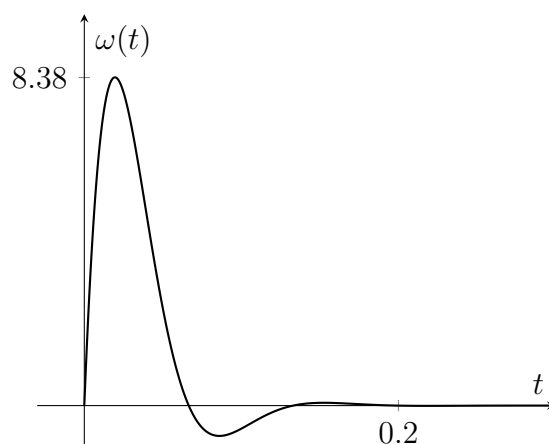
odnosno

$$G_{\omega}(s) = 21.17 \frac{47.24}{(s + 35.815)^2 + 2231.58}, \quad (7.42)$$

čime smo dobili tabličnu transformaciju. Slijedi da je impulsni odziv jednak

$$g_{\omega}(t) = 21.17e^{-35.815t} \sin(47.24t). \quad (7.43)$$

Dobiveni impulsni odziv prikazan je na slici 7.6.



Slika 7.6. Impulsni odziv brzine vrtnje zadanog istosmjernog stroja, izvor: izrada autora

Izračunajmo sada još i odziv na skokovitu pobudu ulaznog napona na nazivnu vrijednost (400V), kao i kod prethodne prijenosne funkcije.

$$S_{\omega}(s) = \frac{400}{s} \frac{1000}{s^2 + 71.63s + 3514.29}. \quad (7.44)$$

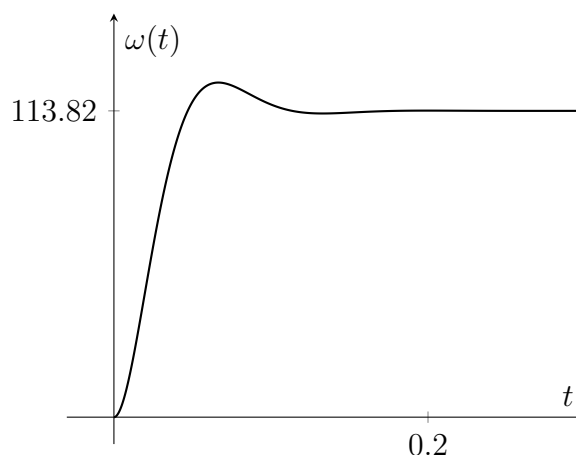
Svođenjem izraza na tablične transformacije dobivamo

$$S_{\omega}(s) = \frac{113.82}{s} - 113.82 \frac{s + 35.815}{(s + 35.815)^2 + 2231.58} - 86.29 \frac{47.24}{(s + 35.815)^2 + 2231.58}. \quad (7.45)$$

Primjenom inverzne Laplaceove transformacije dobivamo odziv brzine vrtnje na skokovitu pobudu u vremenskoj domeni

$$s_\omega(t) = 113.82u(t) - 113.82e^{-35.815t} \cos(47.24t) - 86.29e^{-35.815t} \sin(47.24t). \quad (7.46)$$

Grafički prikaz odziva brzine vrtnje na skokoviti porast pobude na nazivnu vrijednost prikazan je na slici 7.7.



Slika 7.7. Odziv brzine vrtnje na skokovitu pobudu ulaznog napona na nazivnu vrijednost, izvor: izrada autora

Provjerimo sada zadovoljava li i ovaj impulsni odziv uvjet vanjske stabilnosti.

$$\int_0^{\infty} |g_\omega(t)| dt = \int_0^{\infty} |21.17e^{-35.815t} \sin(47.24t)| dt, \quad (7.47)$$

Konvergenciju ovog integrala ispitat ćemo na isti način kao i u prethodnom slučaju, primjenom teorema 6.1 i nejednakosti (6.19). Slijedi

$$\int_0^{\infty} |g_\omega(t)| dt \leq \int_0^{\infty} 21.17 |e^{-35.815t}| |\sin(47.24t)| dt. \quad (7.48)$$

Pošto funkcija sin poprima vrijednosti iz intervala  $[-1, 1]$ , a preostala podintegralna funkcija je eksponencijalna, možemo pisati

$$\int_0^{\infty} |g_\omega(t)| dt \leq 21.17 \int_0^{\infty} e^{-35.815t} dt. \quad (7.49)$$

Rješavanjem ovog integrala dobivamo

$$\int_0^{\infty} |g_\omega(t)| dt \leq \frac{21.17}{-35.815} e^{-35.815t} \Big|_0^{\infty} \quad (7.50)$$

Slijedi rješenje

$$\int_0^{\infty} |g_{\omega}(t)| dt \leq 0.591, \quad (7.51)$$

čime je pokazano da ovaj integral konvergira, što prema teoremu 6.1 povlači i konvergenciju integrala (7.47). Zaključujemo kako će za svaki amplitudno konačan priključeni napon brzina vrtnje također biti ograničena po amplitudi.

Iz prethodnih izračuna i grafičkih prikaza možemo zaključiti kako prijenosna funkcija brzine vrtnje i napona također zadovoljava uvjet unutarnje i vanjske stabilnosti.

Pogledajmo što se fizikalno događa u istosmjernom stroju tijekom zaleta na temelju grafičkih prikaza odziva. Pretpostavit ćemo da je prije uključjenja armaturnog napona uzbudno magnetsko polje već formirano i konstantno, te ono nema utjecaj na dinamiku odziva. Prilikom uključjenja armaturnog napona (u trenutku  $t = 0$ ), rotor i dalje miruje te iznos inducirane protuelektromotorne sile iznosi 0, što znači da će kroz armaturni krug poteći struja višestruko veća od nazivne. U početnom trenutku, shemu istosmjernog stroja možemo modificirati na način da se električni dio sastoji samo od otpora, induktiviteta i naponskog izvora. Razlog zašto se struja ne mijenja skokovito kao i ulazni napon je zavojnica koja se opire promjeni struje po svojoj definiciji. Porastom armaturne struje jača magnetski tok rotora, što uzrokuje pojavu sile odnosno momenta te se brzina vrtnje povećava. Porastom brzine vrtnje (na nazivnu vrijednost) raste iznos induciranog napona čime se smanjuje struja armature, što u konačnici dovodi do izjednačavanja iznosa priključenog napona i induciranog napona. Razlika potencijala je tada približno 0, te kroz armaturni krug teče vrlo mala struja (u relativnom iznosu) potrebna samo za svladavanje momenta trenja. Kada bismo motor opteretili određenim momentom tereta, porasla bi struja potrebna za stvaranje momenta koji će svladavati taj moment tereta, moment motora bi se povećao, a brzina vrtnje smanjila.

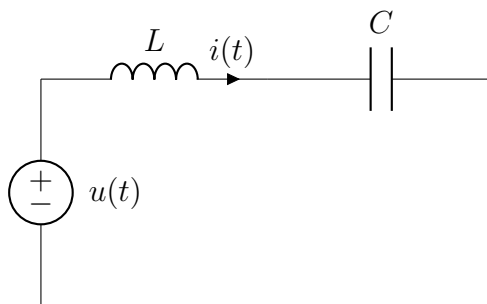
Da prijenosna funkcija struje i napona ne zadovoljava kriterije stabilnosti, struja bi nepredvidivo i nekontrolirano rasla, te bi vrlo brzo došlo do pregrijavanja i topljenja namota u stroju.

Da prijenosna funkcija brzine vrtnje i napona ne zadovoljava kriterije stabilnosti, brzina vrtnje rotora bi neprestano rasla, te bi došlo do mehaničkog oštećenja stroja.

Zaključno možemo reći kako je zadani sustav potpuno stabilan.

## 7.2. Idealni LC titrajni krug

Ovaj jednostavan sustav sastoji se od naponskog izvora, te zavojnice i kondenzatora spojenih u seriju. Pretpostavit ćemo da su vodiči idealni, odnosno da nemaju nikakav električni otpor. Električna shema sustava prikazana je na slici 7.8. Neka su zadani induktivitet zavojnice  $L = 100 \text{ mH}$  i kapacitet kondenzatora  $C = 1 \text{ mF}$ .



Slika 7.8. LC titrajni krug, izvor: izrada autora

Iz 2. Kirchhoffovog zakona slijedi

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau. \quad (7.52)$$

Primjenom Laplaceove transformacije dobivamo

$$U(s) = sLI(s) + \frac{1}{sC}I(s) = I(s)\left(sL + \frac{1}{sC}\right). \quad (7.53)$$

Imajući na umu da je ulaz u sustav napon, a izlaz struja, prijenosnu funkciju dobivamo kao omjer struje i napona u  $s$ -domeni

$$G(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{1}{sL + \frac{1}{sC}}. \quad (7.54)$$

Svođenjem nazivnika na zajednički nazivnik i sređivanjem dvojnog razlomka dobivamo

$$G(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{sC}{s^2LC + 1}. \quad (7.55)$$

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti parametara dobivamo

$$G(s) = \frac{0.001s}{0.0001s^2 + 1} = \frac{10s}{s^2 + 10000}. \quad (7.56)$$

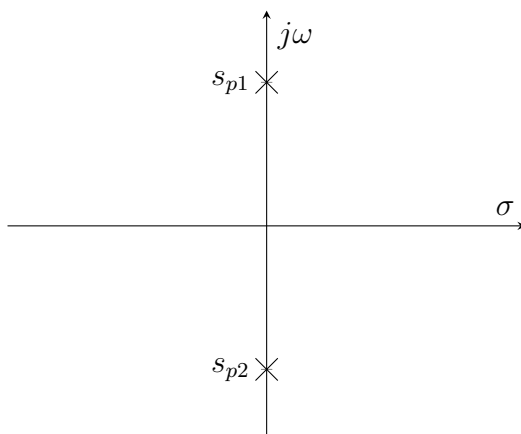
Karakteristični polinom, odnosno nazivnik ove prijenosne funkcije glasi

$$A(s) = s^2 + 10000 \quad (7.57)$$

iz čega slijedi da su polovi

$$s_{p1,2} = \pm 100i. \quad (7.58)$$

Grafički prikaz polova prikazan je na slici 7.9.



Slika 7.9. Raspored polova za prijenosnu funkciju (7.56), izvor: izrada autora

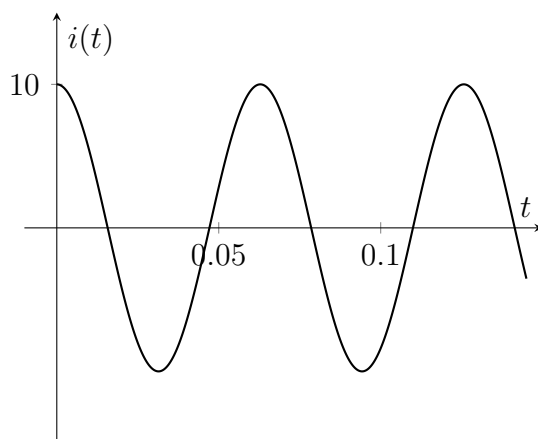
Pošto su polovi smješteni na imaginarnoj osi, možemo zaključiti kako će impulsni odziv imati trajne neprigušene oscilacije, te kako je sustav rubno stabilan. Provjerimo taj zaključak matematičkim izračunom, odnosno inverznom Laplaceovom transformacijom prijenosne funkcije (7.56).

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{10s}{s^2 + 10000} \right\}, \quad (7.59)$$

$$g(t) = 10 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 10000} \right\}, \quad (7.60)$$

$$g(t) = 10 \cos(100t). \quad (7.61)$$

Izračunati odziv je funkcija kosinus koja trajno oscilira. Grafički prikaz impulsnog odziva zadanog sustava prikazan je na slici 7.10.



Slika 7.10. Impulsni odziv zadanog sustava, izvor: izrada autora

Izračunajmo sada još i odziv na jediničnu Heavisideovu step funkciju određivanjem inverzne Laplaceove transformacije umnoška pobude i prijenosne funkcije u  $s$ -domeni, kao što je dokazano u prethodnim poglavljima.

Odziv struje na skokovitu pobudu (označavat ćemo ga s  $s(t)$ ) prijenosne funkcije (7.56) je

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \frac{10s}{s^2 + 10000}\right\}, \quad (7.62)$$

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10s}{s(s^2 + 10000)}\right\}, \quad (7.63)$$

odnosno

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10}{s^2 + 10000}\right\}. \quad (7.64)$$

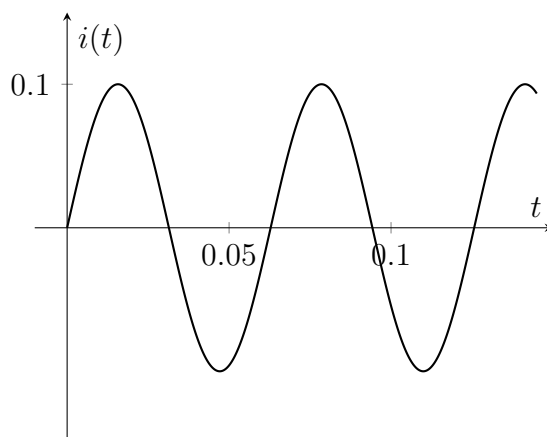
Svođenjem na tabličnu transformaciju funkcije sinus dobivamo

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{10} \frac{100}{s^2 + 10000}\right\}. \quad (7.65)$$

Slijedi da je odziv na step zadanog sustava jednak

$$s(t) = \frac{1}{10} \sin(100t). \quad (7.66)$$

Grafički prikaz odziva na step prikazan je na slici 7.11.



Slika 7.11. Odziv na step zadanog sustava, izvor: izrada autora

Iz prikazanih odziva vidimo da je sustav doista rubno stabilan. Ovdje valja napomenuti kako vodiči kojima su spojeni zavojnica i kondenzator imaju određeni električni otpor koji će uzrokovati određeno prigušenje sustava. Taj otpor će uzrokovati pomicanje polova prijenosne funkcije malo ulijevo od imaginarne osi, što znači da će sustav i dalje biti oscilatoran, ali će se s vremenom ipak prigušivati. Međutim, taj otpor u ovom primjeru zanemarujemo.

Sada možemo provjeriti zadovoljava li ovaj sustav uvjet vanjske stabilnosti izračunom integrala impulsnog odziva.

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt = \int_0^{\infty} |10 \cos(100t)| dt. \quad (7.67)$$



Konvergenciju ovog integrala, kao i u prethodnim primjerima, određujemo prema teoremu 6.1 i nejednakosti (6.19). Pošto funkcija  $\cos$  poprima vrijednosti na intervalu  $[-1, 1]$ , možemo pisati

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt \leq \int_0^{\infty} 10 dt, \quad (7.68)$$

iz čega slijedi rješenje

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt \leq 10t|_0^{\infty} = \infty. \quad (7.69)$$

Idealni LC krug ne zadovoljava uvjet vanjske (BIBO) stabilnosti jer integral apsolutne vrijednosti impulsnog odziva nije konačan broj.

Pogledajmo sada pod kojim uvjetima će ovaj sustav biti nestabilan. Pošto smo utvrdili da u smislu unutarnje stabilnosti sustav nije stabilan, ali niti nestabilan, fokusirat ćemo se na vanjsku stabilnost odnosno pokušati utvrditi za koje pobude će sustav imati nestabilan odziv. Zadani sustav se, osim pobude, sastoji isključivo od zavojnice i kondenzatora. Njihovi električni otpori ovise o iznosu induktiviteta, odnosno kapaciteta, te frekvenciji naponskog izvora. Električni otpor zavojnice, odnosno njena reaktancija, iznosi

$$X_L = 2\pi fL = \omega L, \quad (7.70)$$

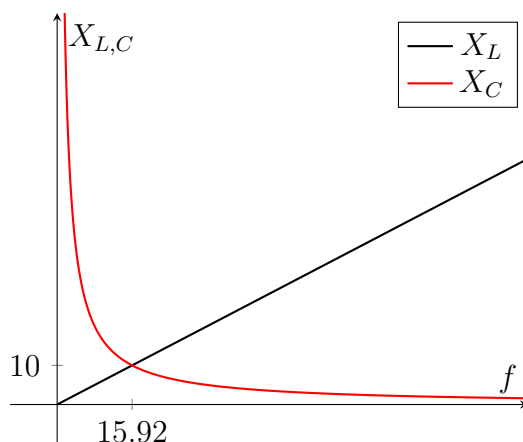
a kondenzatora

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{\omega C}, \quad (7.71)$$

gdje je

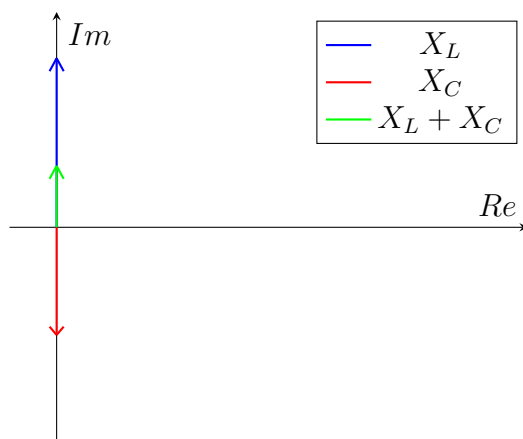
$$\omega = 2\pi f \quad (7.72)$$

kružna frekvencija. Grafički prikaz ovisnosti reaktancija o frekvenciji za zadane vrijednosti induktiviteta i kapaciteta prikazan je na slici 7.12.



Slika 7.12. Ovisnosti reaktancija o frekvenciji za  $L = 100\text{mH}$  i  $C = 1\text{mF}$ , izvor: izrada autora

U slučaju istosmjerne pobude čija je frekvencija  $f = 0 \text{ Hz}$ , nakon prijelaznih pojava zavojnica predstavlja kratki spoj, a kondenzator prazni hod (otvorene stezaljke). Izmjenični strujni krugovi, čije električne veličine imaju određenu frekvenciju, rješavaju se vektorskom reprezentacijom. Po definiciji struja na zavojnici kasni za naponom za četvrtinu periode ( $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ ), a na kondenzatoru napon kasni za strujom za isti iznos. Grafički prikaz vektora reaktancija prikazan je na slici 7.13.



Slika 7.13. Vektori reaktancija u kompleksnoj ravnini, izvor: izrada autora

Rezonantna frekvencija je frekvencija na kojoj su induktivna i kapacitivna reaktancija jednake po iznosu, odnosno ukupna imaginarna komponenta impedancije je jednaka 0. Na primjeru serijskog RLC kruga, to bi značilo da ukupna impedancija spoja ima samo realnu komponentu. Iz navedenog slijedi da rezonantnu frekvenciju možemo izračunati izjednačavanjem izraza (7.70) i (7.71) i uvrštavanjem zadanih vrijednosti. Alternativno, možemo je jednostavno isčitati sa slike 7.12 ili iz rasporeda polova sa slike 7.9. Kao što znamo, polovi su vrijednosti za koje će prijenosna funkcija poprimiti vrijednost  $\infty$ , a pošto se na imaginarnoj osi nalazi samo oscilatorna komponenta možemo zaključiti kako je to ujedno i rezonantna kružna frekvencija iz koje zatim možemo prema izrazu (7.72) izračunati rezonantnu frekvenciju.

Iz navedenog slijedi da je rezonantna frekvencija jednaka

$$f_{rez} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100}{2\pi} = 15.92 \text{ Hz} \quad (7.73)$$

Dakle ako pobudimo zadani sustav izmjeničnom pobudom frekvencije 15.92Hz, ukupna impedancija  $X_L + X_C$  će vektorskim zbrajanjem iznositi 0, što znači da će cijeli sustav zapravo biti kratko spojeni naponski izvor. Potkrijepimo ovu tvrdnju izračunom. Neka je pobuda  $u(t)$  sinusnog oblika amplitude 1 i rezonantne kružne frekvencije  $100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$$u(t) = \sin(100t). \quad (7.74)$$

Njena Laplaceova transformacija je

$$U(s) = \frac{100}{s^2 + 10000}. \quad (7.75)$$

Sada možemo izračunati odziv struje

$$I(s) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{100}{s^2 + 10000} \frac{10s}{s^2 + 10000} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1000s}{(s^2 + 10000)^2} \right\}. \quad (7.76)$$

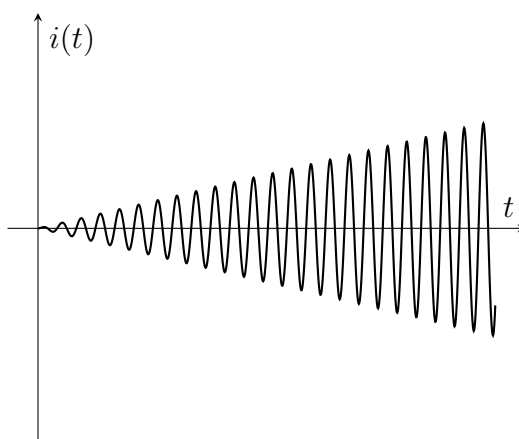
Svođenjem na tabličnu transformaciju dobivamo

$$I(s) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ 5 \frac{2 \cdot 100s}{(s^2 + 10000)^2} \right\}, \quad (7.77)$$

iz čega slijedi odziv struje u vremenskoj domeni

$$i(t) = 5t \sin(100t). \quad (7.78)$$

Grafički prikaz odziva prikazan je na slici 7.14.



Slika 7.14. Odziv LC titrajnog kruga pobuđenog rezonantnom frekvencijom, izvor: izrada autora

Zaključno možemo reći kako zadani sustav ne zadovoljava uvjete stabilnosti. Iz perspektive unutarnje stabilnosti, sustav je rubno stabilan, a iz perspektive vanjske stabilnosti nestabilan. Ovaj sustav bismo mogli "ustabiliti" dodavanjem otpornika; tada bi sustav postao RLC spoj i njegovi polovi bi se nalazili na lijevoj poluravnini kompleksne ravnine. Kada bismo njega pobudili izmjeničnim naponskim izvorom rezonantne frekvencije, ukupna impedancija bi bila jednaka iznosu otpora otpornika. RLC spoj bi se tada ponašao kao rubno stabilan sustav.

## 8. Zaključak

U radu je pokazano na koji način se analizira stabilnost linearnih vremenski nepromjenjivih sustava. Kako bi se mogla matematički i fizikalno interpretirati stabilnost, potreban je opsežan uvod i dobro ovladavanje raznim matematičkim zakonitostima i alatima, poput Laplaceove transformacije i vršenja matematičkih operacija nad signalima. S obzirom da je potrebno vršiti operacije nad signalima koji nisu derivabilni, uvedena je i opisana Laplaceova transformacija i njena najvažnija svojstva, te je pokazano kako je ona nužna za analizu takvih signala.

Zatim je definiran impulsni odziv sustava, te je pokazano kako on u potpunosti definira sustav. Dokazano je da je ekvivalent impulsnom odzivu u vremenskoj domeni, prijenosna funkcija u kompleksnoj  $s$ -domeni, te da smo primjenom Laplaceove transformacije zahtjevnu matematičku operaciju konvolucije zamijenili jednostavnim množenjem. Zatim su definirani polovi i nule prijenosne funkcije, te prikaz sustava u vremenskoj i frekvencijskoj domeni.

Nakon što definiranja svega navedenog, pristupilo se analizi unutarnje i vanjske stabilnosti sustava. Pokazano je kako polovi prijenosne funkcije u potpunosti određuju kriterij unutarnje stabilnosti, te na koji način se provjerava kriterij vanjske stabilnosti preko impulsnog odziva sustava.

Naposljetku, na praktičnim primjerima iz područja elektrotehnike analizirana je stabilnost sustava, krenuvši od matematičkog modeliranja. Primjerima su obrađeni slučajevi stabilnosti, rubne stabilnosti i nestabilnosti, te je fizikalno objašnjeno i matematički dokazano da nestabilni sustavi u konačnici vode k fizičkom uništenju sustava obrađenih u primjerima.

## Bibliografija

- [1] Jeren, B.: "Signali i sustavi", Školska knjiga, Zagreb, 2021.
- [2] Sučić, V.: Predavanja iz kolegija "Signali i sustavi", Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Rijeka, 2022.
- [3] "Autonomous system (mathematics)", s Interneta, [https://en.wikipedia.org/wiki/Autonomous\\_system\\_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Autonomous_system_(mathematics)), 21.03.2023.
- [4] Schiff, J.L.: "The Laplace Transform: Theory and Applications", Springer, New York, 1999.
- [5] "Pierre-Simon Laplace", s Interneta, [https://en.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon\\_Laplace](https://en.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace), 17.4.2023.
- [6] Oppenheim, A.V., Willsky, A.S., Hamid Nawab, S.: "Signals and Systems", Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [7] "Convolution Theorem - an overview", s Interneta, <https://www.sciencedirect.com/topics/computer-science/convolution-theorem>, 01.04.2023.
- [8] Vukić, Z., Kuljača, Lj.: Automatsko upravljanje - analiza linearnih sustava, Kigen, Zagreb, 2005.
- [9] Stojković, N., Naglič, V., Mijat, N.: "Teorija mreža i linija", Sveučilište u Rijeci, Rijeka, 2008.
- [10] de Silva, Clarence W.: "Sensors and Actuators; Control System Instrumentation", CRC Press, 2007.

## Sažetak i ključne riječi

U ovom radu pokazano je na koji način se analizira, te fizikalno i matematički interpretira stabilnost sustava, kao temeljno i ključno svojstvo svakog fizički realiziranog sustava. Definirana je prijenosna funkcija sustava kao omjer ulaznog i izlaznog signala u Laplaceovoj  $s$ -domeni, te na temelju nje analizirana stabilnost sustava, odnosno odzivi sustava na odgovarajuće pobude. Pokazano je da položaj polova prijenosne funkcije u potpunosti određuje stabilnost sustava. Nakon detaljnog matematičkog uvoda i definiranja stabilnosti, na primjerima iz prakse pokazan je i njen fizikalni značaj.

**Ključne riječi:** stabilnost sustava, prijenosne funkcije, impulsni odziv, Laplaceova transformacija, matematičko modeliranje

## Summary and key words

In this paper, it is shown how to analyze and physically and mathematically interpret the stability of the system, as a fundamental and key property of every physically realized system. The transfer function of the system is defined as the ratio of the input and output signal in Laplace's  $s$ -domain, and based on it, the stability of the system is analyzed, i.e., the responses of the system to appropriate inputs. It is shown that the position of the poles of the transfer function completely determines the stability of the system. After a detailed mathematical introduction and definition of stability, its physical significance is also shown on practical examples.

**Keywords:** system stability, transfer functions, impulse response, Laplace transforms, mathematical modelling