Sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi i njihova primjena u elektrotehnici

Kasaić, Laura

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

SUSTAVI OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI I NJIHOVA PRIMJENA U ELEKTROTEHNICI

Rijeka, rujan 2023.

Laura Kasaić

0069079843

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

SUSTAVI OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI I NJIHOVA PRIMJENA U ELEKTROTEHNICI

Mentor: izv. prof. dr. sc.Ivan Dražić

Rijeka, rujan 2023.

Laura Kasaić
0069079843

SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET
POVJERENSTVO ZA ZAVRŠNE ISPITE

Rijeka, 18. ožujka 2022.

Zavod: **Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike**
Predmet: **Inženjerska matematika ET**
Grana: **1.01.07 primijenjena matematika i matematičko modeliranje**

ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Laura Kasaić (0069079843)**
Studij: Sveučilišni prijediplomski studij elektrotehnike

Zadatak: **Sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi i njihova primjena u elektrotehnici**

Opis zadatka:

U radu je potrebno definirati i opisati svojstva sustava običnih diferencijalnih jednadžbi. Poseban osvrt potrebno je napraviti na problem egzistencije i jedinstvenosti pripadnih rješenja sustava. Potrebno je opisati nekoliko metoda rješavanja navedenih problema te ih potkrijepiti primjerima.
U završnom dijelu rada sustave običnih diferencijalnih jednadžbi potrebno je staviti u kontekst različitih primjena u elektrotehnici.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Zadatak uručen pristupniku: 21. ožujka 2022.

Mentor:

Izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Predsjednik povjerenstva za završni ispit:

Prof. dr. sc. Viktor Sučić

IZJAVA

Sukladno članku 7. stavku 1. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku sveučilišnih prijediplomskih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 4.travnja 2023., izjavljujem da sam samostalno izradio završni rad prema zadatku preuzetom dana 18.ožujka 2022.

Rijeka, 11.rujna 2023.

Laura Kasaić

Ovom prilikom prventsveno zahvaljujem mentoru izv. prof. dr. sc.Ivanu Dražiću na uloženom trudu, vremenu, razumijevanju, entuzijastičnom i kreativnom pristupu inženjerskoj matematici.

Također, želim se zahvaliti obitelji. bliskim prijateljima i kolegama na podršci i bodrenju tokom obrazovanja, posebice roditeljima i dragoj prijateljici Nori.

Sadržaj:

1. Uvod

U ovom radu razmatrani su sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi i njihova primjena u elektrotehnici. Obična diferencijalna jednadžba predstavlja jednadžbenu poveznicu funkcije y i njezinih derivacija i kao takva, predstavlja srž matematičke analize. Upotreba sustava diferencijalnih jednadžbi rasprostranjena je u prirodnim, tehničkim, fizikalnim znanostima kao i u primijenjenoj znanosti elektrotehnike.

Prilikom razmatranja običnih diferencijalnih jednadžbi i pripadajućih sustava, prioritet većinom nije na egzaktnom numeričkom rješenju, radije na uvidu u ponašanje sustava kojeg modeliramo sustavima diferencijalnih jednadžbi. Promatramo ponašanje i ishode sustava jednadžbi u odnosu na primijenjene uvjete ili dugoročno ponašanje međusobno zavisnih funkcija. Rješenja sustava diferencijalnih jednadžbi kreiraju podlogu za dublja razmatraju i viši nivo analize promatranog sustava.

Mnogobrojni su načini rješavanja sustava diferencijalnih jednadžbi, a ovim radom obuhvaćene su metode eliminacije, metoda svođenja na diferencijalnu jednadžbu višeg reda te Eulerova metoda. Prioritet je usmjeren na ove metode jer iste najčešće pronalaze svoju primjenu na području elektrotehnike, u vidu analize električnih mreža, pogonske dinamike i razmatranja međusobnog odnosa komponenti kao i njihovog utjecaja na okružje modelirano sustavima diferencijalnih jednadžbi. Kratko se možemo osvrnuti na Runge-Kutta metodu rješavanja, koja predstavlja numeričku metodu. Cilj ove metode aproksimiranje je numeričke vrijednosti sustava diferencijalnih jednadžbi. Predstavlja kvalitetniju metodu rješavanja od Eulerove radi iznimno male greške u aproksimaciji egzaktnih rješenja.

Zadnjim poglavljem ovog rada, definirani su Kirchhoffovi zakoni i njihova osnovna načela. Same jednadžbe, u formi u kojoj se prvotno zapisuju, predstavljaju linearne algebarske jednadžbe. Međutim, u primjeni na električnim mrežama, pretvaraju se u sustave diferencijalnih jednadžbi utjecajem elemenata s memorijom.

2. Obične diferencijalne jednadžbe

U sklopu ovog poglavlja objašnjene su svi teorijski pojmovi i svojstva običnih diferencijalnih jednadžbi nužnih za daljnje analiziranje i razmatranje sustava diferencijalnih jednadžbi. Pojmovi i svojstva definirana ovim poglavljem obrađeni su koristeći reference [1], [2] , [3] i [4]

2.1. Osnovni elementi i svojstva običnih diferencijalnih jednadžbi

Diferencijalnom jednadžbom smatramo onu jednadžbu koja sadrži derivaciju funkcije nepoznate vrijednosti. Matematički gledano, prikazuje brzinu promjene promatrane funkcije. Integralom ili rješenjem diferencijalne jednadžbe smatramo onu funkciju koja zadovoljava diferencijalnu jednadžbu.

2.2. Obične diferencijalne jednadžbe višeg reda

Obična diferencijalna jednadžba (dalje u tekstu:ODJ) prikazuje odnos između neke funkcije $y \to y(x)$ i nezavisnog argumenta x. Obična diferencijalna jednadžba n-tog reda za funkciju $y(x)$ definirana je jednadžbom :

$$F(x,y,y',\ldots,y^{(n)}) = 0, \tag{2.1.}$$

gdje y(n) predstavlja derivaciju najvišeg reda u jednadžbi.

Diferencijalna jednadžba može se zapisati i u eksplicitnom obliku:

$$y^{(n)} = f(x,y,\ldots,y^{(n-1)}), \tag{2.2.}$$

gdje je *n red diferencijalne jednadžbe, y zavisna funkcija, x- argument funkcije.* Red diferencijalne jednadžbe predstavlja najvišu derivaciju prisutni tokom rješavanja diferencijalne jednadžbe i pripadajućih sustava.

TEOREM 1.(Teorem egzistencije) Ako su funkcija f i njezine djelomične derivacije prvog reda, u jednadžbi (2.2), neprekidne u otvorenom intervalu XY-ravnine i koje pri tome sadrže točku T_0,tada u tom intervalu postoji određeno rješenje jednadžbe (2.2) koje zadovoljava uvjete:,

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \qquad (2.3.)$$

Uvjeti pod (2.3) se još nazivaju i početni uvjeti.

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe definira se funkcijom:

$$y(x_1, C\ , C\ , \ldots, C\ ), \qquad (2.4.)$$

gdje su $C_1, C_2, \ldots, C_n$ proizvoljne konstante. Nadalje, $y^{(n)}$ predstavlja n-tu derivaciju funkcije y i definirana je zapisom:

$$y(n) = \frac{(\ )}{\ }, \qquad (2.5.)$$

gdje je: $d^{(n)}$ *derivacija reda n, y zavisna funkcija i dx diferencijal nezavisne varijable x.*

2.2. Linearnost običnih diferencijalnih jednadžbi

Jedna od bitnih podjela diferencijalnih jednadžbi je ona na nelinearne i linearne diferencijalne jednadžbe. Većina nelinearnih pojava u prirodi opisuje se nelinearnim diferencijalnim jednadžbama koje se svode na linearne diferencijalne jednadžbe radi jednostavnijeg rješavanja. Obična diferencijalna jednadžba (2.1.) bit će linearna ukoliko vrijedi da je *F* linearna funkcija varijabli $y, y', \ldots, y^{(n)}$. Odnosno, obična linearna diferencijalna jednadžba n-tog reda definirana je izrazom:

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n\, y = g\ (t). \qquad (2.6.)$$

Sukladno tomu, obična *linearna* diferencijalna jednadžba prvog reda oblika je:

$$A\ (x)y' + A_1(x)y = f(x), \qquad (2.7.)$$

gdje su funkcije A(x), B(x) definirane unutar nekog intervala $\langle \alpha, \beta \rangle$ i nazivamo ih *koeficijentima linearne jednadžbe.*

Ukoliko za funkciju smatramo da je A(x)≠0 na intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$, dijeljenjem jednadžbe dobijemo:

$$y'+p(x)y=q(x), \tag{2.8.}$$

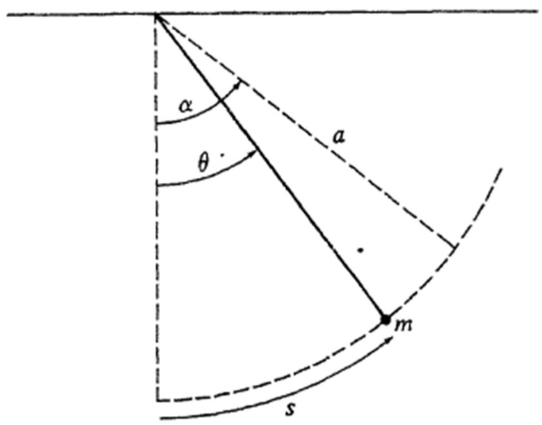
gdje je

$$p(x)=\frac{B(x)}{A(x)},\ q(x)=\frac{f(x)}{A(x)}. \tag{2.9.}$$

<u>TEOREM 2.</u> Za neprekidne funkcije *p(x) i q(x)* na [a,b] ⊆ [α,β], izraz (2.8.) ima jedinstveno rješenje koje zadovoljava početni uvjet $y(x_0) = y_0$, za sve $a < x_0 < b$, $-\infty < y_0 < \infty$.

Dokaz. Izraz (2.8.) možemo izraziti kao $y' = q(x) - p(x)y$. Desna strana jednakosti zadovoljava uvjete neprekidnosti te je derivacija ograničena po y.

<u>Primjer 2.1.</u> Titranje matematičkog njihala oko ravnotežnog položaja.



Slika 2.1. Njihalo s gibanjem oko ravnotežnog položaja [1]

Matematičko njihalo karakterizira materijalna točka mase m pričvršćena na nit duljine L. Na njihalo koje titra oko ravnotežnog položaja, djeluje sila gravitacije *G=mg*. Kut *θ* kojeg titrajuće njihalo duljine L zatvara s vertikalnom osi ravnotežnog položaja titranja zadovoljava jednadžbu:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L}\sin\theta=0.$$

Prisustvo *sinθ* čini ovu diferencijalnu jednadžbu *nelinearnom.* Rješavanje nelinearnih diferencijalnih jednadžbi zahtjeva složenu matematičku analizu čija su rješenja i metode rješavanja manje precizna i elegantna nego ona kod linearnih.

Obzirom na to, većinu nelinearnih jednadžbi možemo aproksimirati linearnim jednadžbama. Postupak svođenja nelinearne diferencijalne jednadžbe na linearnu zove se linearizacija.

2.3. Svojstva homogenosti običnih diferencijalnih jednadžbi

Pojam homogenosti javlja se kod rješavanja i najjednostavnijih diferencijalnih jednadžbi. Promotrimo li općeniti zapis obične diferencijalne jednadžbe prvog reda:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y). \tag{2.10.}$$

Možemo uočiti da ne postoji općenito rješenje koje vrijedi za sve diferencijalne jednadžbe, već im se pristupa individualno. Razdvajanjem varijabli x i y, sada će vrijediti izraz:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=\frac{\mathrm{g(x)}}{\mathrm{h\ (y)}}. \tag{2.11.}$$

Sada diferencijalnu jednadžbu možemo jednostavno riješiti integriranjem unakrsno pomnoženih brojnika i nazivnika *h(y)dy = g(x)dx:*

$$\int h(y)dy= \int g(x)dx+C. \tag{2.12}$$

Diferencijalna jednadžba opisana izrazom:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}+\mathrm{a(t)y=0}, \tag{2.13.}$$

predstavlja *homogenu diferencijalnu jednadžbu* prvog reda. Sukladno tomu, diferencijalna jednadžba zadana izrazom:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}+\mathrm{a(t)y=b(t)}, \tag{2.14.}$$

nehomogena je diferencijalna jednadžba prvog reda, ukoliko je ispunjen uvjet $b \rightarrow b \neq 0$.

Opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe prvog reda definira se izrazom**:**

$$\mathrm{y(t)= C_1e^{\int -a(t)dt}}, \tag{2.15.}$$

gdje je C_1 konstantni faktor integracije.

2.4. Metode rješavanja običnih diferencijalnih jednadžbi

Rješenje obične diferencijalne jednadžbe n-tog reda na intervalu *[a,b]* definirano je funkcijom $y=\varphi(x)$ koja na intervalu [a,b] obuhvaća derivacije od i=1 do, uključivo, n-tog reda diferencijalne jednadžbe. Obične diferencijalne jednadžbe mogu imati nijedno, jedno ili beskonačno mnogo rješenja i grafički se prikazuju integralnim krivuljama.

2.4.1. Laplaceova transformacija

Laplaceova transformacija smatra se operatorskim računom. Traženoj funkciji x(t) realne promjenjive t, pridružuje se funkcija F(s) kompleksne promjenjive s na način da primjenom tog operatora polazna diferencijalna jednadžba prelazi u običnu. Pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi Laplaceovim transformacijama mogu se koristiti gotove tablice(Prilog A).

Definicija. Neka je funkcija f(t) realne promjenjive t definirana na $t \geq 0$ i neka ispunjava uvjete:

i. f(t) je ili neprekidna ili ima konačan broj konačnih prekida;

ii. postoje brojevi A,k > 0, tako da je $|f(t)| < Ae^{\boldsymbol{k}}$, za svaki t od nula do beskonačno.

Funkciji f(t) pridružuje se kompleksnog argumenta $s=a+ib$ definirana kao:

$$F(s) = \quad e^{\;s} f(t)dt, \qquad (2.16.)$$

gdje je F(s) slika funkcije f(t), a funkcija f(t) original. Može se zapisati i kao:

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)\ , \quad \mathscr{L}^{1}\{F(s)\}=f(t)\ . \qquad (2.17.)$$

TEOREM 3. Teorem jedinstvenosti: Ako dvije neprekidne funkcije f(t) i g(t) imaju istu sliku F(s) tada su te funkcije jednake. Za funkciju:

$$G_0(t)= \begin{matrix} 0,\ t<0 \\ 1,\ t\geq 0 \end{matrix}, \qquad (2.18.)$$

poznata kao i Heavisideova funkcija, vrijedi da je slika:

$$L\{G_0(t)\}= {}_{0}^{\infty}\ e^{-st}dt= \frac{1}{s}\ , \quad G_0(t)\leftarrow \frac{1}{s}\ . \qquad (2.19.)$$

TEOREM 4. Svojstvo linearnosti: Laplaceova transformacija je linearna, tj ako su $f_i(t), i=1,2,\ldots n$ zadane funkcije promjenjive t, a $F_i(s),\ i=1,2,\ldots.,n$ njihove slike tada vrijedi:

$$L\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^{n} c_i L\{f(t)\} = \sum_{i=1}^{n} C_i F_i(s), \tag{2.20}$$

gdje su $C_i,\ i=1,2,\ldots,n$ proizvoljne konstante.

TEOREM 5. Teorem sličnosti: Ako je funkcija F(s) slika funkcije f(t), tada je 1/ω F (s/ω) slika funkcije f(ωt). Odnosno, vrijedi izraz:

$$F(s) \to f(t),\ \frac{1}{\omega} F\left(\frac{s}{\omega}\right) \to f(\omega t). \tag{2.21.}$$

TEOREM 6. Teorem o derivaciji slike: Ako je F(s) slika funkcije f(t), tada je:

$$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s), \tag{2.22.}$$

slika funkcije $t^n f(t)$, tj vrijedi:

$$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \to t^n f(t). \tag{2.23.}$$

2.5. Primjena običnih diferencijalnih jednadžbi u elektrotehnici

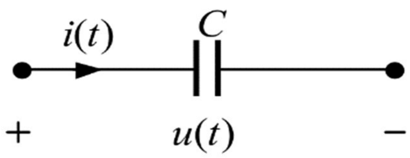
Prilikom rješavanja i proučavanja diferencijalnih jednadžbi i njezinih rješenja, manje je bitno samo rješenje diferencijalne jednadžbe i njenih sustava obzirom da nam rješenja nam pružaju uvid u odnos pojedinih elemenata proučavanog. Tokom analize mnogih pojava i funkcionalnosti unutar grane elektrotehnike, javlja se potreba za korištenjem diferencijalnih jednadžbi.

Razlog tomu je pojava vremenski promjenjivih vrijednosti *napona (u(t)), struje (i(t)), magnetskog toka (Φ), naboja(Q(t)) ili* neke druge vrijednosti, ovisno o svojstvima sustava kojim se bavimo. Takve vrste elemenata, čije su konačne vrijednosti u proizvoljnom vremenu t ovisne o promjenjivoj veličini, su kapaciteti (C) i induktiviteti (L). Ovi dvopoli imaju mogućnost skladištenja energije i time predstavljaju krucijalne elemente mreže. Nazivamo ih još i *elementima s memorijom.* Ovo potpoglavlje obrađeno je koristeći referencu [5] ,[6], [10] i [12].

2.5.1. Definicija elemenata s memorijom i pripadajuće diferencijalne jednadžbe

Kapacitet (C)

Ovaj se element u električnim krugovima crta kako prikazuje slika 2.2. Polaritet je označen po međunarodnom dogovoru.



Slika 2.2. Shematski prikaz kapaciteta C [5]

Vrijede strujne i naponske jednadžbe:

$$i(t)=C\frac{d\,u(t)}{dt}, \tag{2.24.}$$

$$u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,(\tau)d\tau, \tag{2.25.}$$

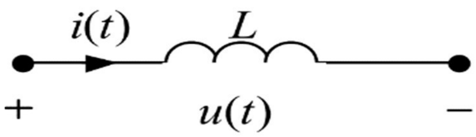
gdje je *du(dt) derivacija* napona na induktivitetu, a *i(τ)dτ struja koja prolazi kroz kapacitet.* Odnosno, strujni odziv na kapacitetu proporcionalan je brzini promjene napona na kapacitetu, što je opisano diferencijalom napona prvog reda.

Ukoliko je mreža pobuđena (naponskim ili strujnim signalom) u vremenu minus beskonačno, a prethodno je bila bez energije, promjenu u promatranom sustavu označit ćemo s nultim vremenom, $t \rightarrow t=0$. Kapacitet će zadržati zaprimljenu energiju i njome djelovati na električnu mrežu, nakon trenutka promjene. Označava se kao $u_c(0)$.). Napon na kapacitetu sada će biti:

$$u_C(t)=u_C(0)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau. \qquad (2.26.)$$

<u>Induktivitet L</u>

Ovaj se element u električnim krugovima crta kako prikazuje slika 2.3. Polaritet je označen po međunarodnom dogovoru.



Slika 2.3. Shematski prikaz induktiviteta L [5]

Vrijede strujno-naponske jednadžbe:

$$u(t)=L\frac{di(t)}{dt}, \qquad (2.27.)$$

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau. \qquad . (2.28.)$$

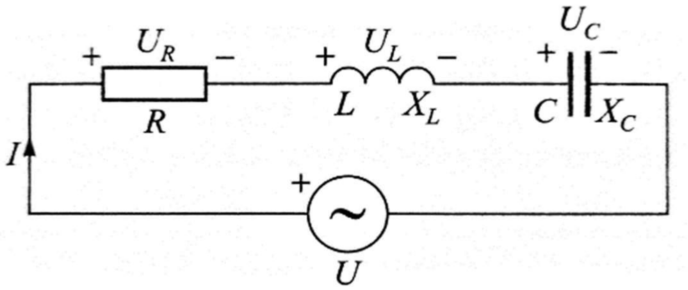
Ukoliko, kao i za kapacitet, uzmemo u obzir početna stanja na induktivitetu, strujna jednadžba zapisuje se kao:

$$i(t)=i_L(0)+\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau.$$

2.5.2. RLC krugovi opisani diferencijalnim jednadžbama

RLC (resistor-inductor-capacitor) krugovi temelj su većine električnih mreža danas. Ovisno o načinu i vrsti komponenta koje spajamo u krug, ponašaju se kao niskopropusni (NP), visokopropusni (VP), pojasnopropusn (PP) filtri ili pojasne brane (PB).

Modeliranje serijskog RLC kruga



Slika 2.4. Shema serijskog RLC spoja [12]

Slika 2.4. prikazuje shemu serijskog RLC spoja s naznačenim pripadnim napona polariteta po dogovoru. Uzimajući u obzir izraze (2.26.) (2.28.), naponske jednadžbe strujnog kruga po II. Kirchhoffovom zakonu definiraju se kao:

$$u_R + u_C + u_L = U, \tag{2.29.}$$

gdje je u_R *napon otpornika,* u_C *napon na kapacitetu i* u_L *napon na induktivitetu.*

Homogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda za naponske prilike u mreži izražena je kao:

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{1}{LC}U. \tag{2.30.}$$

Homogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda za strujne prilike u mreži izražena je kao:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{i(t)}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0. \tag{2.31.}$$

Rješenje ove diferencijalne jednadžbe strujna je jednadžba i(t) koja zadovoljava diferencijalnu jednadžbu drugog reda. Rješenje se traži u eksplicitnom obliku, $i(t) = e^{rt}$, dok je opći oblik rješenja:

$$i(t) = A_1e^{r1t} + A_2e^{r2t}. \tag{2.32.}$$

Radi se o kvadratnoj jednadžbi čija su rješenja:

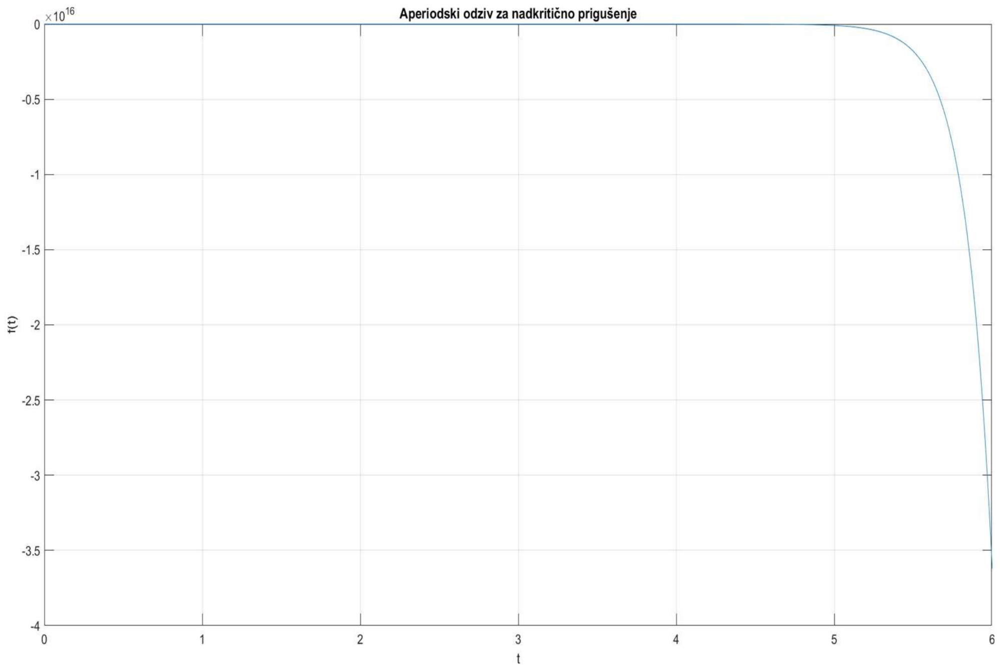
$$r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \beta. \tag{2.33.}$$

Postoje tri opća rješenja *i(t)*.

Nadkritično prigušenje – aperiodski odziv

Ukoliko je izraz ispod korijena veći od nule, rješenje kvadratne jednadžbe je *realno* i stvara aperiodski (bezoscilatorni) odziv RLC kruga, Funkcija struje na početku pojave ima nagli skok, ali s porastom vremena *t*, aperiodski se smanjuje.

Korištenjem programskog paketa MATLAB, simuliran je aperiodski odziv struje za nadkritično prigušenje:



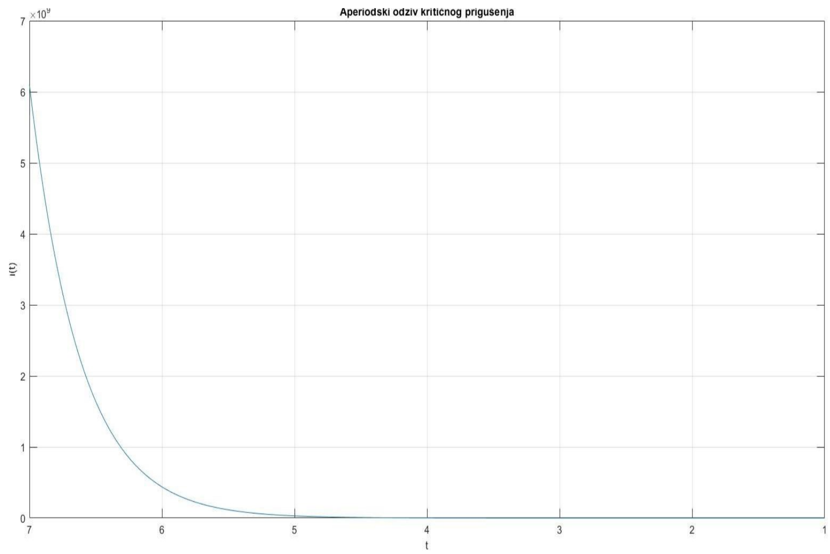
Slika 2.5. Graf aperiodskog strujnog odziva za područje nadkritičnog prigušenja[izrađeno od strane autora]

```
t=0: 0.01: 6;
ft=420.*t.*(exp(2.45.*t));
plot(t,ft); grid;
xlabel('t');...
    ylabel('i(t)'); title('Aperiodski odziv kritičnog prigušenja')
xticklabels([1:10])
    set ( gca, 'xdir', 'reverse' )
```

Slika 2.6. Matlab kod korišten za dobivanje nadkritičnog prigušenja RLC kruga [izrađeno od strane autora]

Kritično prigušenje – aperiodski odziv

Ukoliko je izraz ispod korijena jednak nuli, rješenje kvadratne jednadžbe je *realno* i stvara aperiodski (bezoscilatorni) odziv RLC kruga. Odziv struje je dakle aperiodski - nema oscilacija u vremenu t. Korištenjem programskog paketa MATLAB, simuliran je aperiodski odziv struje za kritično prigušenje:

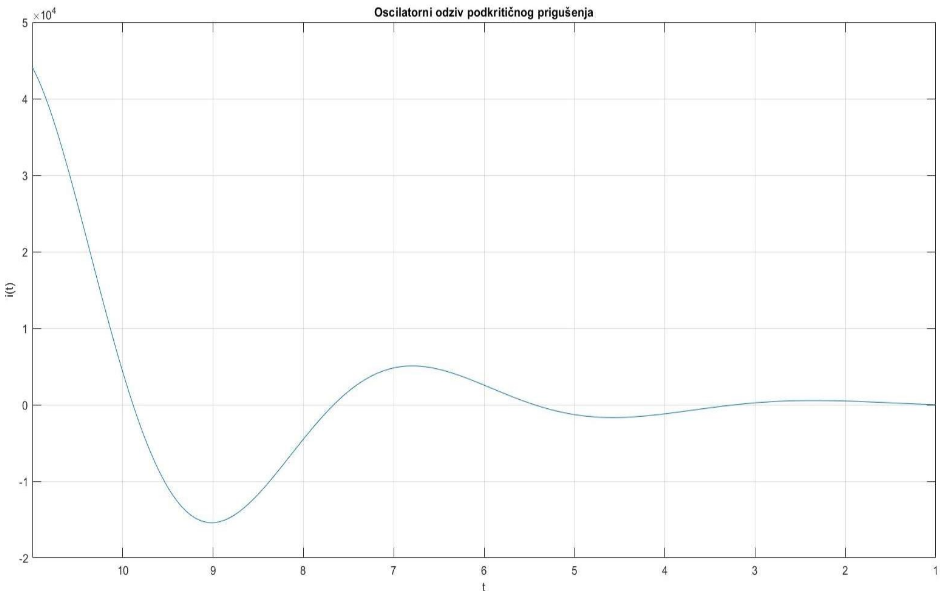


Slika 2.7. Graf aperiodskog strujnog odziva za područje kritičnog prigušenja [izrađeno od strane autora]

```
t=0: 0.01: 6;
ft=420.*t.*(exp(2.45.*t));
plot(t,ft); grid;
xlabel('t');...
    ylabel('i(t)'); title('Aperiodski odziv kritičnog prigušenja')
xticklabels([1:10])
    set ( gca, 'xdir', 'reverse' )
```

Slika 2.8. Matlab kod korišten za dobivanje kritičnog prigušenja RLC kruga[izrađeno od strane autora]

Ukoliko je izraz ispod korijena manji od nule, rješenje kvadratne jednadžbe je *kompleksno* i stvara oscilatorni odziv RLC kruga. Odziv struje je oscilatorni (titrajni) u odnosu na vrijeme t – početkom uzbude sinusnog je karaktera, međutim povećanjem vremena *t*, prigušuje se ka nuli. Korištenjem programskog paketa MATLAB, simuliran je oscilatorni odziv struje za podkritično prigušenje:

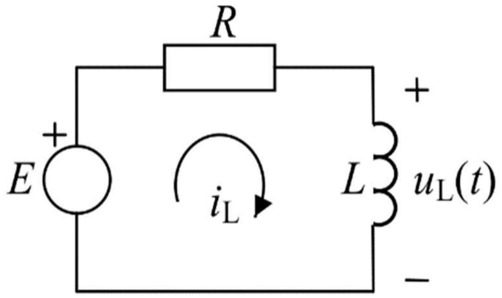


Slika 2.9. Graf oscilatornog strujnog odziva za područje podkritičnog prigušenja

```
t=0: 0.01: 10;
ft=210.*sqrt(2).*(exp(0.5.*t)).*sin(sqrt(2).*t);
plot(t,ft);
grid; xlabel('t');...
    ylabel('i(t)'); title('Oscilatorni odziv podkritičnog prigušenja')
xticklabels([1:10])
    set ( gca, 'xdir', 'reverse' )
```

Slika 2.10. Matlab kod korišten za dobivanje kritičnog prigušenja RLC kruga

Modeliranje serijskog RL kruga



Slika 2.11. Serijska RL mreža [5]

Slika 2.11. prikazuje shemu serijskog RL spoja s naznačenim pripadnim napona polariteta po dogovoru. Analizom kruga koristeći obične diferencijalne jednadžbe, dobiva se uvid u ponašanje mreže i njezine prijelazne karakteristike.

Pobuda mreže je istosmjerna, *E*. Homogena diferencijalna jednadžba za strujne prilike u mreži oblika je:

$$R\mathrm{i_L(t)}+\mathrm{L}\frac{\mathrm{di_L(t)}}{\mathrm{dt}}=0. \tag{2.34.}$$

Uvrstivši pretpostavljeno rješenje homogene diferencijalne jednadžbe $i_n=A_1e^{rt}$:

$$\mathrm{L}\cdot\mathrm{A_1}\cdot\mathrm{e^{rt}}+\mathrm{R}\cdot\mathrm{A_1}\cdot\mathrm{e^{rt}}=0,$$

$$\mathrm{L}\cdot\mathrm{r}+\mathrm{R}=0.$$

Pretpostavljeno rješenje homogene diferencijalne jednadžbe sada slijedi:

$$\mathrm{i_h(t)}=\mathrm{A_1e^{-\frac{R}{L}t}} \tag{2.35.}$$

Rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe dobit će se ukoliko se pretpostavljeno rješenje postavi u obliku pobude. Uvrštavanjem i algebarskim rješavanjem, dobiju se iznosi konstanta A_1 i A_2

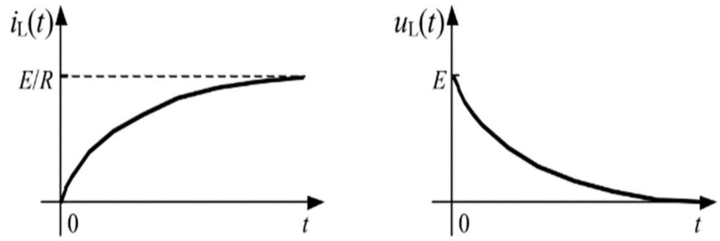
$$\mathrm{A_2}=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}$$

$$\mathrm{A_1}=-\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}.$$

Konačno, jednadžba struje u serijskog RL mreži sada glasi:

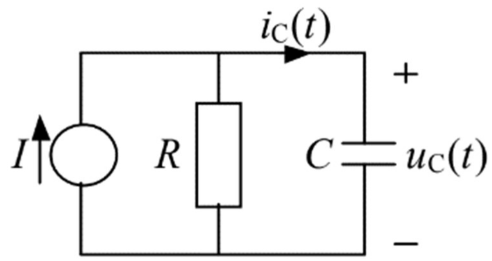
$$i_L(t)=\frac{E}{R}-\frac{E}{R}\boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{t}}=\frac{E}{R}[1-\boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{t}}] \tag{2.36.}$$

Grafički prikazana rješenja za diferencijalne jednadžbe struje i napona na induktivitetu dana su na slici 2.12.



Slika 2.12. Odzivi napona i struje na serijskoj RL mreži za istosmjernu pobudu [5]

Modeliranje paralelnog RC kruga



Slika 2.13. Paralelna RC mreža [5]

Slika 2.13. prikazuje shemu paralelnog RC spoja s naznačenim pripadnim napona polariteta po dogovoru. Analizom kruga, koristeći obične diferencijalne jednadžbe, dobivamo uvid u ponašanje mreže i njezine prijelazne karakteristike. Mreža je pobuđena istosmjernim strujnim izvorom, *I.* Homogena diferencijalna jednadžba za naponske prilike u mreži glasi:

$$\frac{1}{R}u_C(t)+C\frac{du_C(t)}{dt}=0 \tag{2.37.}$$

Rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe dobit će se ukoliko se pretpostavljeno rješenje postavi u obliku pobude. Uvrštavanjem i algebarskim rješavanjem, dobiju se iznosi konstanta A_1 i A_2

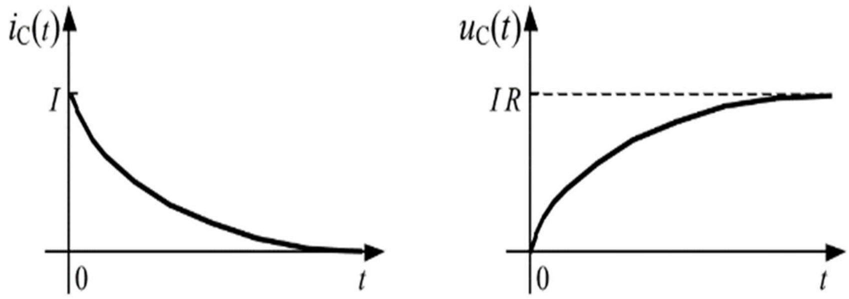
$$A_2 = -I \cdot R$$

$$A_1 = I \cdot R$$

Konačno, jednadžba napona u paralelnoj RC mreži sada glasi:

$$u_C(t) = IR - IRe^{-\frac{1}{RC}t} = IR[1 - e^{-\frac{1}{RC}t}] \qquad (2.38.)$$

Grafički prikazana rješenja za diferencijalne jednadžbe struje i napona na kapacitetu dana su na slici 2.14.



Slika 2.14. Odzivi napona i struje na paralelnoj RC mreži za istosmjernu pobudu [5]

Promatranjem RLC krugova i njihovih izvedenica, uviđamo važnost u primjeni diferencijalnih jednadžbi. Diferencijalne jednadžbe i pripadajuća rješenja istih, daju nam vrlo informativan i poučan uvid u ponašanje sustava koji sadrže elemente s memorijom kao i međusoban odnos pojedinih elemenata te njihov utjecaj na konačan odziv. Pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi, samo numeričko rješenje nije prioritetno, obzirom na to da opća homogena i nehomogena rješenja opisuju *ponašanje mreže* za datu pobudu. Ova pojava omogućava modeliranje RLC krugova ka željenom odzivu, odnosno, podešavanje parametara kako bi RLC krug poprimio svojstva i funkcionalnosti filtra potrebitog za sustav u kojem se upotrebljava.

3. Sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi

Mnoge su fizikalne pojave sačinjene od više međusobno povezanih elemenata koje promatramo sveobuhvatno, kao složeni sustav. Ovu karakteristiku, na primjer, imaju električne mreže, pojave unutar pogonske dinamike, mehanike i ostalih područja. Sukladno navedenom, odgovarajući matematički problemi za spomenute pojave, sastoje se od *sustava* dviju ili više diferencijalnih jednadžbi, koje se uvijek mogu zapisati kao obične diferencijalne jednadžbe prvog reda. Ovim poglavljem obuhvaćeni su sustavi običnih, linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda s konstantnim koeficijentima. Reference korištene za definiranje svojstava i metoda rješavanja u sklopu poglavlja su [1], [2],[3],[4],[7], [8] i [10].

3.1. Opći pojmovi

Sustav običnih diferencijalnih jednadžbi je skup diferencijalnih jednadžbi u kojima se javlja jedna nezavisna, promjenjiva t i odgovarajuće nepoznate funkcije $x_1(t), x_2(t), \ldots$ i njihove derivacije. Kao što je spomenuto u uvodu ovog poglavlja, svaki se sustav jednadžbi proizvoljnog, n-tog reda može svesti na sustav jednadžbi prvog reda.

U primjeni sustava običnih diferencijalnih jednadžbi, najčešće nailazimo na *kanonski* ili *normalni sustav*. Kanonski sustav onaj je sustav u kojem su nepoznate funkcije $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, a povezane su na način:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{3.1.}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad , \tag{3.2.}$$

odnosno,

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad . \tag{3.3.}$$

3.1.1. Linearnost sustava običnih diferencijalnih jednadžbi

Ukoliko je svaka funkcija $f_1,\ldots,f_n$ izraza 3.1. linearna funkcija zavisne varijable $x_1,\ldots,x_n$, sustav diferencijalnih jednadžbi također *je linearan*. U protivnome, *smatramo ga nelinearnim*.

Sustav ODJ možemo zapisati i kao:

$$\frac{dx}{dt}=F(t,x,y)$$
$$\frac{dy}{dt}=G(t,x,y), \tag{3.4.}$$

gdje je *t nezavisna varijabla*, a *x i y zavisne su varijable*. Izbor oznaka je proizvoljan.

Sukladno izrazu (3.1.), *linearni sustav ODJ* možemo zapisati kao:

$$\frac{dx}{dt}=a_1(t)x+b_1(t)y+f_1(t)$$
$$\frac{dy}{dt}=a_2(t)x+b_2(t)y+f_2(t). \tag{3.5.}$$

Za potrebe ovog rada, pretpostavit ćemo da su funkcije $a_i(t)$, $b_i(t)$ i $f_i(t)$, gdje je i = 1,2, kontinuirane na zatvorenom intervalu [a,b] na osi t.

3.1.2. Homogenost sustava običnih diferencijalnih jednadžbi

Za sustav opisan jednadžbama

$$\frac{dx_1}{dt}=f_1(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)\ , \tag{3.6.}$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=g_2(t,x_1,x_2,\ldots,x_n), \tag{3.7.}$$

odnosno za n-tu derivaciju funkcije:

$$\frac{d^nx_1}{dt^n}=g_n(t,x_1,x_2,\ldots,x_n), \tag{3.8.}$$

vrijedi da, ako je svaka funkcija $g_1(t),\ldots,g_n(t)$ *nula* unutar cijelog intervala *I*, onda se sustav smatra *homogenim*, u protivnome je sustav *nehomogen*.

3.1.3. Opća rješenja sustava običnih diferencijalnih jednadžbi

Opće rješenje jednadžbe dane izrazom (3.9.):

$$F \quad t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{d^n x_1}{dt^n} \quad =0, \tag{3.9.}$$

zadovoljeno je nekom funkcijom x_1 unutar intervala I: $\alpha < t < \beta$, za koju vrijedi:

$$x_1=\varphi_1(t,C_1,C_2,\ldots,C_n). \tag{3.10.}$$

Tokom rješavanja i analize sustava, javlja se i pojam početnih uvjeta. Početni uvjeti definirani su kao:

$$x_1(t_0)=x_1^0,\ x_2(t_0)=x_2^0, \ldots,\ x_n(t_0)=x_n^0, \tag{3.11.}$$

gdje je t_0 određena vrijednost t unutar intervala I, $a\ x\ , \ldots, x\ ,$ odgovarajući pripadni brojevi.

3.1.4. Istaknuti teoremi za sustave običnih diferencijalnih jednadžbi

Ovim potpoglavljem obuhvaćeni su istaknuti teoremi koji se primjenjuju prilikom rješavanja sustava običnih diferencijalnih jednadžbi, predstavlja bitna svojstva i karakteristike sustava ODJ i pružaju elegantniju matematičku analizu.

<u>TEOREM 7.</u> Ukoliko se t_0 nalazi unutar intervala [a,b] i x_0 *i* y_0 definirani su kao brojevi, onda izraz (3.12.) ima samo jedno rješenje:

$$\begin{aligned} x&=x(t)\\ y&=y(t), \end{aligned} \quad , \tag{3.12.}$$

valjano unutar intervala [a,b], tako da vrijedi $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$.

Uklanjanjem funkcija f_1 i f_2 iz izraza (3.5.), sustav jednadžbi ODJ dan izrazom (3.5.) bit će zadovoljen trivijalnim rješenjem:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=a_1(t)x+b_1(t)y\\ \frac{dy}{dt}&=a_2(t)x+b_2(t)y. \end{aligned} \tag{3.13.}$$

3.2. Svojstva sustava običnih diferencijalnih jednadžbi

Homogeni linearni sustavi s konstantnim koeficijentima

Za jednostavni sustav diferencijalnih jednadžbi definiran u eksplicitnom obliku kao:

$$x=Ae^{mt} \qquad (3.14.)$$
$$y=Ae^{mt}.$$

Realni korijeni. Vrijedi da za sve m_1 i m_2 koji su realni brojevi, opće rješenje za izraz(3.14.) može se definirati kao:

$$x=c_1A_1e^{m1t}+c_2A_2e^{m2t}$$
$$y=c_1B_1e^{m1t}+c_2B_2e^{m2t}. \qquad (3.15.)$$

Primjer 3.1. Za sustav običnih diferencijalnih jednadžbi, odredit ćemo parametre m_1 i m_2 i zapisati rješenja u eksplicitnom obliku.

$$\frac{dx}{dt}=x+y$$
$$\frac{dy}{dt}=4x-2y.$$

Vrijedi linearni algebarski sustav:

$$(1-m)A-B=0,$$

$$4A+(-2-m)B=0.$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe $m \ + m - 6 = 0$,dobivaju se vrijednosti $m_1=-3, m_2=2$. Rješavanjem jednadžbe za $m = -3$, dobivaju se vrijednosti A = 1 i B = -4. Eksplicitna rješenja sada su:

$$x=e^{-3t}$$
$$y=-4e^{-3t}.$$

Rješavanjem jednadžbe za m = 2:dobivaju se vrijednosti A = 1 i B = 1. Eksplicitna rješenja sada su:

$$x=e^{2t}$$
$$y=e^{2t}.$$

Vrijedi da je opće rješenje:

$$x=c_1e^{-3t}+c_2e^{2t}$$
$$y=-4c_1e^{-3t}+c_2e^{2t}.$$

Jednaki korijeni. Ukoliko su vrijednosti m_1 i m_2, onda imamo samo jedno rješenje i ono glasi:

$$x=Ae^{mt}$$
$$y=Be^{mt}. \tag{3.16.}$$

Sukladno tomu, opće rješenje definirano je kao:

$$x=c_1Ae^{mt}+c_2(A_1+A_2t)e^{mt}$$
$$x=c_1Be^{mt}+c_2(B_1+B_2t)e^{mt}. \tag{3.17.}$$

3.3. Algebarska svojstva sustava običnih diferencijalnih jednadžbi

Ovim potpoglavljem, ukratko su pokrivena osnovna algebarska svojstva koja se javljaju tokom rješavanja i proučavanja sustava običnih diferencijalnih jednadžbi.

Ukoliko je svaka funkcija $f_1, f_2, \ldots, f_n$ izraza (3.6.) linearna funkcija varijable $x_1, x_2, \ldots x_n$, onda se sustav jednadžbi smatra linearnim. Sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi n-tog reda, ima opći zapis:

$$\frac{dx_1}{dt}=a_{11}(t)x_1+\ldots+a_{1n}(t)x_n+g_1(t), \tag{3.18.}$$

.
.
.

$$\frac{dx_n}{dt}=a_{n1}(t)x_1+\ldots+a_{nn}(t)x_n+g_n(t). \tag{3.19.}$$

4. Metode rješavanja sustava običnih diferencijalnih jednadžbi

Mnogobrojne su metode i pristupi rješavanju sustava obični diferencijalnih jednadžbi i njihova primjena ovisi o problematici kojom se bavimo. Poglavlje obuhvaća eliminacije (operatora), Eulerovu metodu i metodu svođenja na jednu diferencijalnu jednadžbu višeg reda.

Valja spomenuti Runge-Kutta numeričku metodu. Smatra se najpreciznijom metodom aproksimacije rješenja sustava ODJ. Runge-Kutta metoda je od četiri stadija naprednog računanja. Nedostatak metode je mogućnost varijacije točnosti unutar promatranog intervala. Za opis svojstava, funkcionalnosti i metoda rješavanja sustava koriste se reference [1], [2], [3], [4] , [8], [9] i [11]

4.1. Metoda eliminacije (operatora*)*

Teorijska načela linearnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda također se mogu koristiti za rješavanje sustava dviju diferencijalnih jednadžbi *prvog reda*. Metoda sustavne eliminacije za rješavanje sustava diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima zasniva se na algebarskom principu eliminacije varijabli. Promotrimo prikazani sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda.

$$x'=\frac{dx}{dt}=a(t)x+b(t)y+f(t), \tag{4.1.}$$

$$y'=\frac{dy}{dt}=c(t)x+d(t)y+g(t). \tag{4.2.}$$

Princip metode zasniva se na eliminaciji varijabli, na primjer varijable *y*, gdje se onda pronalazi *x* koji predstavlja rješenje obične diferencijalne jednadžbe drugog reda.

Primjer 4.1. Za sustav dani diferencijalnih jednadžbi, prikazano je rješavanje *metodom eliminacije.*

$$x'=2x+y+t, \tag{4.3.}$$

$$y'=x+3y+1. \tag{4.4.}$$

Iz prve jednadžbe zapisat ćemo izraz za *y* koji se potom derivira, pa vrijedi:

$$y=x'-2x-t,$$

$$y'=x''-2x'-t.$$

Uvrstivši derivirani izraz za *y* u drugu jednadžbu, dobije se:

$$x''-5x'+5x=2-3t.$$

Jednadžba sada predstavlja linearnu jednadžbu drugog reda čije je rješenje:

$$x(t)=e^{\frac{5t}{2}}\quad c_1e^{\frac{\sqrt{5}t}{2}}+c_2e^{-\frac{\sqrt{5}t}{2}}\quad -\frac{1-3t}{5}. \tag{4.4.}$$

Metoda eliminacije može se, svakako, primijeniti i na sustav običnih diferencijalnih jednadžbi n-tog reda. Pristup rješavanju je isti kao i kod sustava ODJ prvog reda, s iznimkom *operatora* koji se upotrebljava radi lakšeg rješavanja. Temelji se na principu upotrebe diferencijalnog operatora prilikom rješavanja običnih linearnih jednadžbi, čiji oblik možemo zapisati kao:

$$a^n\, y^n+ a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\, y' + a_0y=g(t). \tag{4.5.}$$

Uz konstante a_i, i=1,2,…,n, diferencijalni operator možemo izraziti kao:

$$a_nD_n + a_{n-1}D_{n-1} + \cdots + a_1D + a_0. \tag{4.6.}$$

Primjer 4.2.

Sustav jednadžbi oblika:

$$x''+2x'+y''=x+3y+sint,$$

$$x'+y'=4x+2y+\boldsymbol{e^{-t}},$$

možemo zapisati pomoću operatora *D*. Potrebno je zapis izraziti tako da se sve zavisne varijable nalaze na lijevoj strani:

$$x''+2x'-x+y''-3y=sint$$

$$x'-4x+y'-2y=\boldsymbol{e^{-t}}$$

Izraz za sustav pomoću operatora temeljem izraza (4.6.), može sada se zapisati kao:

$$D^2+2D-1\;\; x+(D^2-3)y=sint,$$

$$(D-4)x+(D-2)y=\boldsymbol{e^{-t}}.$$

Rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi sastoji se od zavisnih funkcija za koje vrijedi $x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$, $z=\varphi_3(t)$ *koje* zadovoljavaju svaku jednadžbu sustava na nekom intervalu *I*.

4.2. Eulerova metoda

Ovim potpoglavljem obuhvaćeno je rješavanje sustava diferencijalnih jednadžbi prvog reda pomoću Eulerove metode.

Eulerova metoda temelji se na zapisu pretpostavljenog rješenja homogenog sustava diferencijalnih jednadžbi u obliku:

$$y(x)=e^{\lambda s}\boldsymbol{C}, \tag{4.7.}$$

gdje je matrica C definirana kao:

$$C=\begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ \mathbf{C_n} \end{matrix}. \tag{4.8.}$$

<u>Primjer 4.3.</u> Homogeni sustav diferencijalnih jednadžbi dan je kao :

$$y'(x)= -2y(x)-4z(x), \tag{4.9.}$$

$$z'(x)= -y(x)+z(x).$$

Preko izraza (4.7.) i (4.8.) dobije se:

$$\begin{matrix} y(x) \\ z(x) \end{matrix} = \boldsymbol{e^{\lambda s}} \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \end{matrix}. \tag{4.10.}$$

. Rješavanjem kvadratne jednadžbe $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ homogenog algebarskog sustava jednadžbi, dobiju se vrijednosti $\lambda_1=2$ i $\lambda_2=-3$, za $\lambda_1=2$. Sada, za $\lambda_1=2$, vektor **C** ima vrijednosti:

$$\mathbf{C}= \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix},$$

odnosno za $\lambda_2=-3$, dobije se vektor C:

$$\mathbf{C}= \begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{matrix},$$

gdje je rješenje homogenog sustava dano izrazom:

$$x= e^t \ c_1 cos\sqrt{2}t+c_2 sin\sqrt{2}t \ +\frac{2}{3}, \tag{4.11.}$$

$$y(x)= C_1 e^{2s}+C_2 e^{-3s}, \tag{4.12.}$$

$$z(x)= -C_1 e^{2s}+\frac{1}{4} \ C_2 e^{-3s}. \tag{4.13.}$$

4.3. Metoda svođenja na jednu diferencijalnu jednadžbu višeg reda

Metoda rješavanja sustava običnih diferencijalnih jednadžbi svođenjem na jednu diferencijalnu jednadžbu višeg reda temelji se na operaciji uzastopnog deriviranja.

Rezultat operacije uzastopnog deriviranja eliminacija je nepoznatih funkcija osim jedne funkcije n-tog reda koja se potom rješava kao obična diferencijalna jednadžba.

Primjer 4.4. Za zadani sustav odredit ćemo opće rješenje svođenjem na jednu diferencijalnu jednadžbu općeg reda.

$$y'(x)= -2y(x)-4z(x)+1+x, \tag{4.14.}$$

$$z'(x)= -y(x)+z(x)+x. \tag{4.15.}$$

Izvlačenjem *z(x)* iz prve jednadžbe, deriviranjem *(z'(x))* i uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobije se izraz:

$$y''(x)+y'(x)-6y(x)= -6x^2-4x+3.$$

Opće rješenje zapisati ćemo kao:

$$y(x)= C_1 e^{2s}+C_2 e^{-3s}+x+x^2, \tag{4.16.}$$

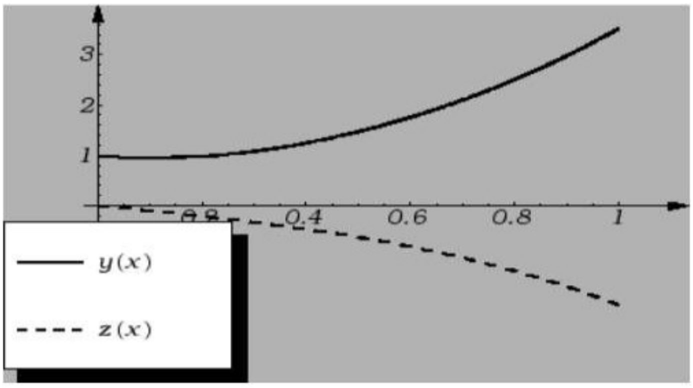
$$z(x)= -C_1 e^{2s}+\frac{1}{4} \ C_2 e^{-3s}-\frac{1}{2}x^2. \tag{4.17.}$$

Ako su početni uvjeti definirani kao y(0) =1 i z(0) =0, uvrstivši u izraze (4.16.) i (4.17.) dobiju se numeričke vrijednosti koeficijenata $C_1= 1/5$ *i* $C_2= 4/5$, pa vrijedi da je rješenje:

$$y(x)=\frac{1}{5}e^{2s}+\frac{4}{5}e^{-3s}+x+x^2 \qquad (4.18.)$$

$$z(x)=-\frac{1}{5}e^{2s}+\frac{1}{5}e^{-3s}-\frac{1}{2}x^2 \qquad (4.19.)$$

Slika 4.1. grafički prikazuje rješenja uz zadane početne uvjete.

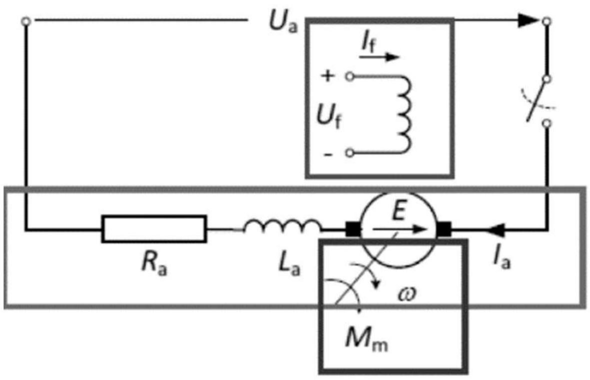


Slika 4.1. Grafički prikaz općih rješenja y(x) i z(x)[8]

5. Primjena metoda rješavanja sustava diferencijalnih jednadžbi u elektrotehnici

Obzirom na čestu pojavu diferencijalnih jednadžbi u elektrotehnici, logično je da se metode obrađene ovim poglavljem često primjenjuju pri rješavanju problematike u određenim granama elektrotehnike. Pogonska dinamika jedan je od primjera gdje se javlja potreba za implementacijom metoda rješavanja sustava diferencijalnih jednadžbi. Prijelaznom pojavom, poput dodavanja opterećenja, elektromotorni pogon ulazi u dinamičko stanje rada. Istovremeno, više komponenti vremenski su promjenjive. Pojmovi dinamike, električnih mreža i prisutnost sustava diferencijalnih jednadžbi obrađena su koristeći reference [5], [6],[8], [9] i [11],

5.1. Analitičko promatranje dinamičkog stanja elektromotornog pogona rješavanjem sustava diferencijalnih jednadžbi (električkog i mehaničkog stanja)



Slika 5.1. Nezavisno uzbuđeni motor u dinamičkom, prijelaznom stanju [9]

U bilo kojem trenutku vrijede jednadžbe za strujni krug armature i mehaničko gibanje [20]:

$$U_a = i_a R_a + L_a \frac{di_a}{dt} + c\omega, \tag{5.1.}$$

$$M_m - M_t = J\frac{d\omega}{dt}, \tag{5.2.}$$

gdje je i_a , R_a *– struja, napon i otpor armaturnog kruga,* L_a *– induktivitet armature, c- konstanta,* ω *-kutna brzina,* M_m *– elektromagnetski moment motora,* M_t *– moment opterećenja.*

Za struju i_f vrijedi da je konstantna. U praznom hodu (odspojene stezaljke), vrijede jednadžbe:

$$M_m = ci_a = J\frac{d\omega}{dt},\ M_t = 0\ ,\ \frac{di_a}{dt} = \frac{J}{c}\frac{d^2\omega}{dt^2}. \tag{5.3.}$$

Uvrštavanjem izraza za prvu derivaciju struje i_a u izraz za moment M_m, dobije se obična diferencijalna jednadžba drugog reda:

$$\frac{U}{c}=\frac{L_a J}{c^2}\frac{d^2\omega}{dt^2}+\frac{R_a J}{c^2}\frac{d\omega}{dt}+\omega.$$

Odnosno vrijedi diferencijalna jednadžba za promjenu kutne brzine vrtnje:

$$\omega_0= T_{em}T_{el}\frac{d^2\omega}{dt^2}+\frac{R_a J}{c^2}\frac{d\omega}{dt}+\omega, \tag{5.4.}$$

gdje su T_{em} – *elektromagnetska konstanta i* T_{el} – *električna konstanta*. Rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe dano je izrazom (5.5.):

$$\omega = \omega + A\ \boldsymbol{e^{p1t}} + A\ \boldsymbol{e^{p2t}}, \tag{5.5.}$$

gdje je ω_0 *kutna brzina idealnog praznog hoda*. Vrijedi karakteristična jednadžba:

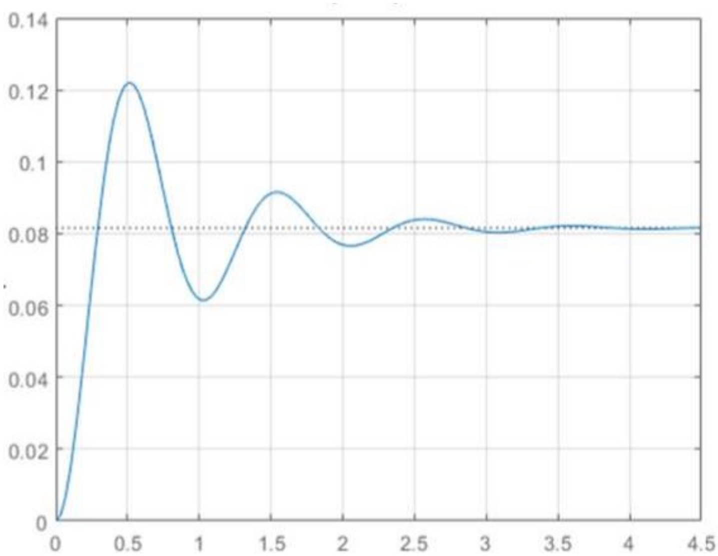
$$1+pT_{em}+p^2T_{em}T_{el}=0,$$

gdje su A_1 *i* A_2 *konstante iz početnih uvjeta*. Rješenje karakteristične kvadratne jednadžbe sada je:

$$p_{1,2}=-\frac{1}{2T_{el}}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{4T_{el}}{T_{em}}}\right). \tag{5.6.}$$

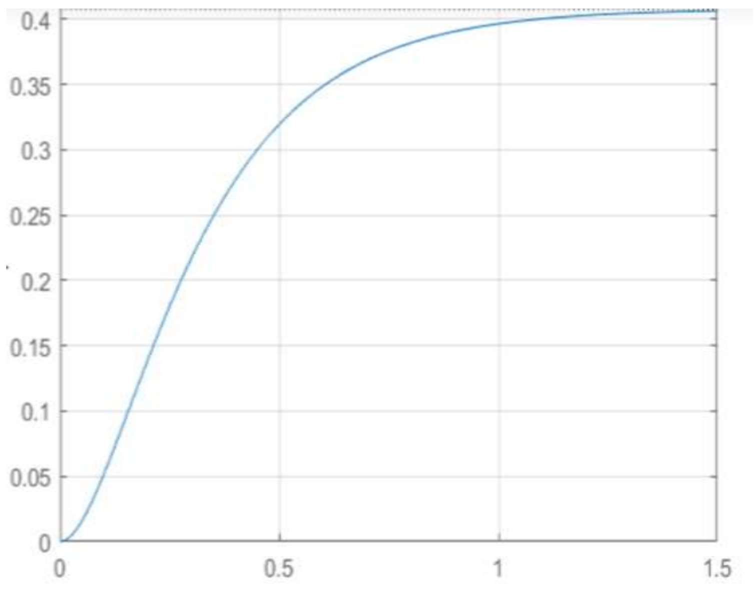
Karakter prijelazne pojave sada će biti određen odnosim vremenskih konstanti T_{em} i T_{el} pod korijenom rješenja karakteristične jednadžbe, $p_{1,2}$. Tri su slučaja :

1. Za $T_{em} < 4T_{el}$, korijeni će biti kompleksni. Postoje uvjeti za titranje u elektromotornom pogonu. Odziv kutne brzine oscilatorni je, što znači da za vrijeme t = 0 ima sinusni odziv koji teži ka konačnoj vrijednosti za t, t→∞. Prikaz odziva nalazi se na slici 5.2.



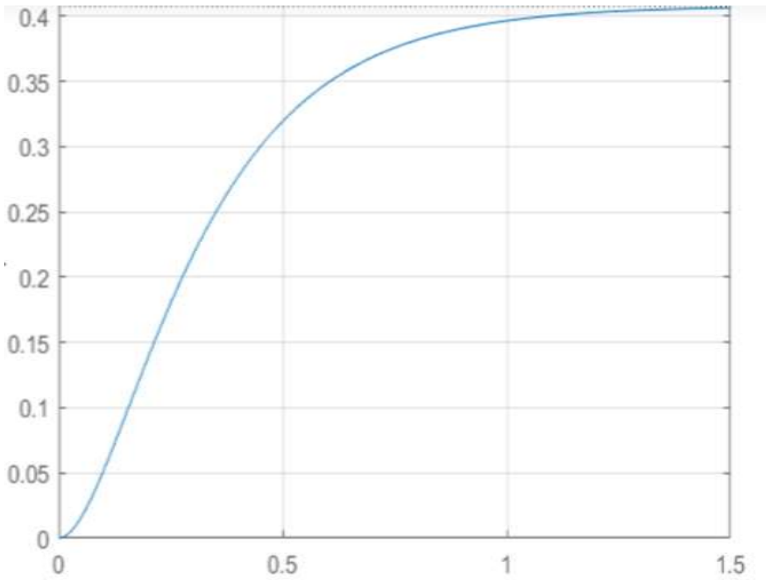
Slika 5.2. Prikaz oscilatornog odziva kutne brzine za kompleksne korijene u Matlab-u[8]

2. Za $T_{em} > 4T_{el}$, korijeni će biti realni. Ne postoje uvjeti za titranje u elektromotornom pogonu. Odziv kutne brzine aperiodski je, što znači da za vrijeme t = 0 ima nagli porast koji teži ka konačnoj vrijednosti za t, t→∞. Prikaz odziva nalazi se na slici 5.3.



Slika 5.3. Prikaz aperiodskog odziva kutne brzine za realne korijene u Matlab okruženju [8]

3. Za Tem = 4Tel, korijeni će biti realni. Ne postoje uvjeti za titranje u elektromotornom pogonu. Odziv kutne brzine aperiodski je, što znači da za vrijeme t = 0 ima nagli porast koji teži ka konačnoj vrijednosti za t, t→∞. Prikaz odziva nalazi se na slici 5.4.



Slika 5.4. Prikaz aperiodskog odziva kutne brzine za realne korijene u Matlab okruženju [8]

5.2. Električne mreže i sustavi diferencijalnih jednadžbi

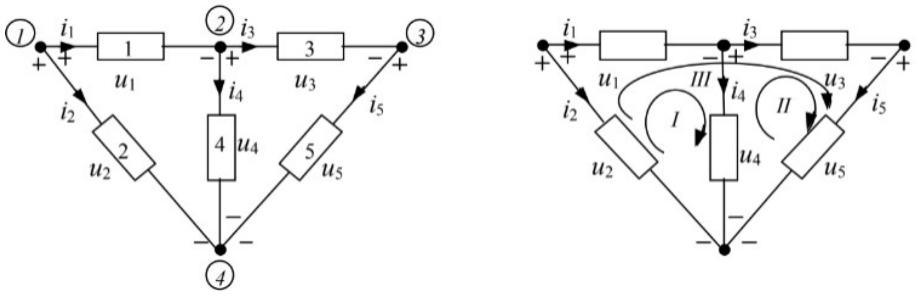
Riješiti električnu mrežu znači odrediti traženu veličinu: napon na elementu ili grani, struju kroz element ili granu. Određuje se sustav s n-jednadžbi s n-nepoznanica za promatranu mrežu. Zadatak je odrediti sustav jednadžbi i matematičkom analizom doći do numeričkih rješenja, poštujući električne zakonitosti.

Kirchhoffovi zakoni

Gustav Robert Kirchhoff (1824. -1887.) bio je njemački fizičar koji je svojim radom pridonio temeljnom razumijevanju električnih krugova i spektralne analize. 1845. razvio je *Kirchhoffove zakone* koji omogućavaju određivanje struje, napona i vrijednosti elemenata električnih mreža. Zakoni predstavljaju produženje na teoriju njemačkog znanstvenika Georg-a Simon-a Ohm. Generalizirao je opisne jednadžbe protoka struje primjenom na električne vodiče u tri dimenzije. [11]

Slika 5.5. Gustav Robert Kirchhoff (1824. -1887.) [11]

Promotrimo električnu mrežu s ucrtanim čvorovima (lijevi prikaz) i strujnim petljama (desni prikaz) na slici (5.6.).



Slika 5.6. Električna mreža s ucrtanim čvorovima i petljama [5]

Unutar električne mreže javljaju se varijable napona i struje koje, kao takve, predstavljaju sastavni dio jednadžbi Kirchhoffovih zakona. Čvorovi su točke označene zaokruženim *italic* brojevima 1,2,3 i 4. Grane mreže povezuju čvorove i sadrže elemente mreže. Skup grana koje čine zatvoreni sustav naziva se *petlja* i one su označene *italic* rimskim brojevima I,II i III. Po dogovoru, plus polaritet napona grane je na čvoru iz kojeg struja izlazi.

Pravila zapisa Kirchhoffovih zakona [5]

I. **Kirchhoffov zakon.** Prvi Kirchhoffov zakon, takozvani Kirchhoffov zakon za struje (KZS), uvjetuje da je algebarska suma svih struja grana koje su vezane na neki čvor jednaka nuli. Pri tome, ulazne i izlaze struje određene su suprotnim predznacima. Za električnu mrežu sa slike sukladno KZS vrijedi:

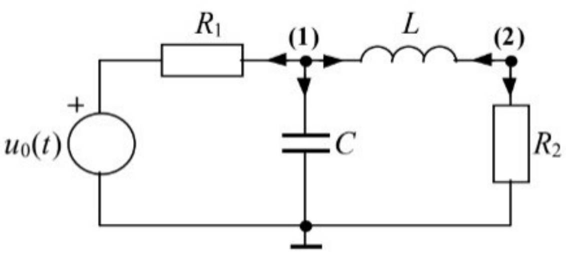
$$(1)\ i_1+i_2=0,$$
$$(2)\ -i_1+i_3+i_4=0,$$
$$(3)\ -i_3+i_5=0,$$
$$(4)\ -i_2-i_4-i_5=0. \qquad (5.7.)$$

II. **Kirchhoffov zakon.** Drugi Kirchhoffov zakon, takozvani Kirchhoffov zakon za napone (KZN), uvjetuje da je algebarska suma svih napona grana sadržanih u nekoj petlji jednaka nuli. Pri tome, porasti i padovi napona određeni su suprotnim predznacima. Porast napona smatra se napon kod kojeg prvo nailazimo na minus polaritet prilikom obilaska petlja, a zatim na plus. Za pad napona vrijedi obrnuto. Za električnu mrežu sa slike sukladno KZN vrijedi:

$$\begin{aligned}&(I)u_1+u_4-u_2=0,\\&(II)\ u_3+u_5-u_4,\\&(III)u_1+u_3+u_5-u_2=0.\end{aligned}\tag{5.8.}$$

Dobiven je sustav 5 linearno nezavisnih jednadžbi s 10 nepoznanica. Općenito vrijedi da je broj nezavisnih jednadžbi koje proizlaze pisanjem KZS jednak broju čvorova – 1, dok je broj nezavisnih jednadžbi koje proizlaze pisanjem KZN jednak broju grana – broj čvorova + 1.

<u>Primjer 5.1.</u> Za mrežu prikazanu na slici (5.7.) prikazat ćemo zapis jednadžbi po I.Kirchhoffovom zakonu za struje. Jednadžbe čvorova strujne su jednadžbe čijim se rješavanjem dobiju naponi čvorova.



Slika 5.7. Električna mreža s ucrtanim čvorom [5]

Slijede zapisi:

$$(1)\,\frac{u_1(t)-u_0(t)}{R_1}+C\frac{du_1}{dt}+\frac{1}{L}\int_0^T[u_1(\tau)-u_2(\tau)]d\tau=0,\tag{5.9.}$$

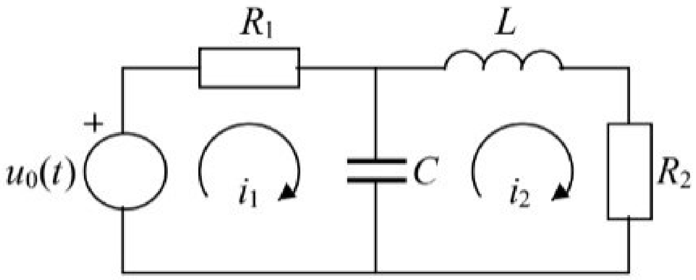
$$(2)\,\frac{1}{L}\int_0^T[u_1(\tau)-u_2(\tau)]d\tau+\frac{u_2(t)}{R_2}=0.\tag{5.10.}$$

Donja granica integrala je nula obzirom na pretpostavku da se do trenutka t=0 u mreži nisu događale nikakve prijelazne pojave. Primjenom Laplaceove transformacije na jednadžbe, slijedi zapis jednadžbi čvorova u frekvencijskoj domeni:

$$U_1(s)-\frac{1}{R_1}+sC+\frac{1}{sL}\;\;-U_2(s)\frac{1}{sL}=\frac{U_0(s)}{R_1} \tag{5.11.}$$

$$-U_1(s)\;\frac{1}{sL}\;\;-U_2(s)\;\;\frac{1}{sL}+\frac{1}{R_2}\;\;=0 \tag{5.12.}$$

<u>Primjer 5.2.</u> Za mrežu prikazanu na slici (5.7.) prikazat ćemo zapis jednadžbi po II.Kirchhoffovom zakonu za napone. Jednadžbe petlji naponske su jednadžbe čijim se rješavanjem dobiju struje petlji.



Slika 5.7. Električna mreža s ucrtanim petljama [5]

Slijedi zapis:

$$(1)\,u_0(t)=i_1(t)R_1+\frac{1}{C}\int_0^T[i_1(\tau)-i_2(\tau)]d\tau, \tag{5.13.}$$

$$(2)\,\frac{1}{C}\int_0^T[i_1(\tau)-i_2(\tau)]d\tau+L\frac{di_2(t)}{dt}=0. \tag{5.14.}$$

Donja granica integrala je nula obzirom na pretpostavku da se do trenutka t=0 u mreži nisu događale nikakve prijelazne pojave. Primjenom Laplaceove transformacije na jednadžbe, slijedi zapis jednadžbi čvorova u frekvencijskoj domeni:

$$(1)U_1(s)\ \ \frac{1}{R_1}+sC+\frac{1}{sL}\ \ -U_2(s)\frac{1}{sL}=\frac{U_0(s)}{R_1}, \tag{5.15.}$$

$$(2)\text{-}U_1(s)-\frac{1}{sL}\ \ -U_2(s)\ \ \frac{1}{sL}+\frac{1}{R_2}\ \ +i_2(t)R_2=0. \tag{5.16.}$$

6. Zaključak

Ovim radom obuhvaćene su obične diferencijalne jednadžbe, prvog i viših redova kao i njihove pripadne metode rješavanja. Istaknute su linearne i homogene diferencijalne jednadžbe i njihova opća rješenja. Kao metoda rješavanja diferencijalnih jednadžbi, istaknuta je integralna, Laplaceova transformacija i pripadajuća svojstva. Laplaceova transformacija primjenjiva je za bilo koji odziv sustava. Često se javlja potreba za korištenjem Laplaceovih transformacija kod matematičke analize u grani elektrotehnike radi pojednostavljivanja kompleksnije problematike.

Obrađeni su sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi, definirana algebarska svojstva i istaknuti teoremi primjenjivi tokom rješavanja. Grafičkim prikazima u Matlab okruženju pojašnjen je utjecaj homogenih rješenja sustava diferencijalnih jednadžbi na ponašanje modeliranog sustava i dugoročne ishode iz područja stabilnosti.

Primjenom diferencijalnog računa na sustave s memorijskim elementima, dokazan je značaj razmatranja električnih i elektromagnetskih sustava kroz homogena rješenja diferencijalnih sustava. Programskim paketom Matlab, prikazani su stvarni odzivi RLC i dinamičkog pogonskog sustava sukladno vremenskim konstantama prisutnim u homogenim rješenjima promjenjivih veličina.

Konačno, definirane su Kirchhoffove zakonitosti pisanja strujno-naponskih jednadžbi električnih mreža koje se, ovisno o elementima mreže za koju se pišu, pretvaraju u sustave diferencijalnih jednadžbi.

Razmatranjem primjene diferencijalnog računa na električne i elektromagnetske pojave, uočava se utjecaj rješenja sustava diferencijalnih jednadžbi na predikciju i aproksimaciju trenutnog i potencijalnog ponašanja promatranog sustava.

Literatura

[1] Simmons, George F.; ″Differential Equations: With Applications and Historical Notes″, ,New York, McGraw-Hill Book Company, 1972.

[2] Braun, M.;″Differential Equations and Their Applications An Introduction to Applied Mathematics″, 4th ed.,New York City, Springer Publishing, 1993.

[3] Boyce, W. E., DiPrima ,R. C.; ″Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems″, 9th ed., New York, J. Wiley, 2009.

[4] Kamenarović, I.; ″Matematika III. ″, Rijeka, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, 1981.

[5] Stojković, N., et al.; ″Teorija Mreža i Linija ″, Rijeka, Fintrade ˛& tours d.o.o., 2008.

[6] Karris, S.T.; ″Circuit analysis I : with MATLAB applications″, Fremont, Calif., Orchard Publications, 2003.

[7] Suljagic, S.; "Sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi", s Interneta, http://www.grad.hr/nastava/matematika/mat3_99_00/node9.html#six, 13.8.2023.

[8] Matika, D.; "Elektromotorni pogoni", Zagreb, Tehničko veleučilište u Zagrebu, 2022.

[9] Predavanja iz kolegija Elektomotorni pogoni, prof.dr.sc. Neven Bulić, Tehnički fakultet Rijeka, 2011.

[10] Škopljanac-Mačina ,F., Felja I.;"Prijelazne pojave · RLC serija spojena na istosmjerni izvor", s Interneta, https://osnove.tel.fer.hr/vjezbeoe/PP_3.htm?x=174, 15.8.2023.

[11] Uredništvo enciklopedije Britannica: "Gustav Kirchhoff, German physicist", s Interneta, https://www.britannica.com/science/Kirchhoffs-radiation-law, 15.8.2023.

[12] Tehnička i industrijska škola Ruđera Boškovića u Sinju; "Jednostavni RLC-spojevi", s Interneta, "http://edit.trema.hr/projekti/2021/srednjiJS/Osnove%20elektrotehnike/RLC.html, 20.08.2023.

Sažetak i ključne riječi

Ovim radom definirana su svojstva običnih diferencijalnih jednadžbi, sustava diferencijalnih jednadžbi i pripadajućih homogenih i općih rješenja. Analizirana je linearnost sustava diferencijalnih jednadžbi i primjenjivost u matematičkoj analizi inženjerskih problema. Definirane su metode rješavanja sustava, s osvrtom na metode najčešće korištene u matematičkom računu koji se primjenjuje u elektrotehnici. Na matematičkim i egzaktnim primjerima prikazani su tokovi rješavanja navedenih metoda. U zadnjem poglavlju, sustavi diferencijalnih jednadžbi stavljeni su u kontekst različitih primjena u elektrotehnici u vidu RLC krugova i pogonske dinamike.

Ključne riječi: obične diferencijalne jednadžbe, sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi, strujno-naponske prilike, RLC krug, pogonska dinamika, napon, struja, elektrotehnika, pojave.

Summary and key words

This paper defines the properties of ordinary differential equations, systems of differential equations and associated homogeneous and general solutions. The linearity of the system of differential equations and its applicability in the mathematical analysis of engineering problems are analyzed. The methods of solving the system are defined, with reference to the methods most often used in the mathematical calculations applied in electrical engineering. Mathematical and exact examples are used to show the solution processes of the mentioned methods. In the last chapter, systems of differential equations are placed in the context of various applications in electrical engineering in the form of RLC circuits and electrical drive dynamics.

.

Keywords: ordinary differential equations, systems of ordinary differential equations, current-voltage conditions, RLC circuit, driving dynamics, voltage, current, electrical engineering, phenomena.

A Tablica Laplaceovih transformacija

Tablica A1. Tablica Laplaceovih transformacija

$f\,(t)$	$F\,(s)$	$f\,(t)$	$F\,(s)$
$u\,(t) = 1$	$\frac{1}{s}$	$e^{\pm at}$	$\frac{1}{s \pm a}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh\omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$\cosh\omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$e^{\pm at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s\pm a)^2+\omega^2}$	$e^{\pm at}\cos\omega t$	$\frac{s\pm a}{(s\pm a)^2+\omega^2}$
$e^{\pm at}\sinh\omega t$	$\frac{\omega}{(s\pm a)^2-\omega^2}$	$e^{\pm at}\cosh\omega t$	$\frac{s\pm a}{(s\pm a)^2-\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^n+1}$	$te^{\pm at}$	$\frac{1}{(s\pm a)^2}$
$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega s}{(s\ \ +\omega^2)^2}$	$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s\pm a)^2+\omega^2}$
$t\sinh\omega t$	$\frac{2\omega s}{(s\ \ -\omega^2)^2}$	$t\cosh\omega t$	$\frac{s^2+\omega^2}{(s\pm a)^2-\omega^2}$
$\delta(t)$	***1***	$\delta(t\text{-}a)$	$e^{\pm as}$