

# Sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi i njihova primjena u elektrotehnici

---

**Kasaić, Laura**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:190:923245>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-05**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Engineering](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI

**TEHNIČKI FAKULTET**

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

**SUSTAVI OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI I  
NJIHOVA PRIMJENA U ELEKTROTEHNICI**

Rijeka, rujan 2023.

Laura Kasaić

0069079843

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

**SUSTAVI OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI I  
NJIHOVA PRIMJENA U ELEKTROTEHNICI**

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Rijeka, rujan 2023.

Laura Kasać

0069079843

Rijeka, 18. ožujka 2022.

Zavod: **Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike**  
Predmet: **Inženjerska matematika ET**  
Grana: **1.01.07 primijenjena matematika i matematičko modeliranje**

## ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Laura Kasaić (0069079843)**  
Studij: **Sveučilišni prijediplomski studij elektrotehnike**

Zadatak: **Sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi i njihova primjena u elektrotehnici**

Opis zadatka:

U radu je potrebno definirati i opisati svojstva sustava običnih diferencijalnih jednadžbi. Poseban osvrt potrebno je napraviti na problem egzistencije i jedinstvenosti pripadnih rješenja sustava. Potrebno je opisati nekoliko metoda rješavanja navedenih problema te ih potkrijepiti primjerima.

U završnom dijelu rada sustave običnih diferencijalnih jednadžbi potrebno je staviti u kontekst različitih primjena u elektrotehnici.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Zadatak uručen pristupniku: 21. ožujka 2022.

Mentor:



Izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Predsjednik povjerenstva za  
završni ispit:



Prof. dr. sc. Viktor Sučić

## IZJAVA

Sukladno članku 7. stavku 1. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku sveučilišnih prijediplomskih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 4.travnja 2023., izjavljujem da sam samostalno izradio završni rad prema zadatku preuzetom dana 18.ožujka 2022.

Rijeka, 11.rujna 2023.



---

Laura Kasaić

*Ovom prilikom prventsveno zahvaljujem mentoru izv. prof. dr. sc.Ivanu Dražiću na uloženom trudu, vremenu, razumijevanju, entuzijastičnom i kreativnom pristupu inženjerskoj matematici.*

*Također, želim se zahvaliti obitelji. bliskim prijateljima i kolegama na podršci i bodrenju tokom obrazovanja, posebice roditeljima i dragoj prijateljici Nori.*

## Sadržaj:

<b>1.Uvod</b>	<b>3</b>
<b>2. Obične diferencijalne jednađbe</b>	<b>4</b>
2.1. Osnovni elementi i svojstva običnih diferencijalnih jednađbi .....	4
2.2. Obične diferencijalne jednađbe višeg reda .....	4
2.3. Linearnost običnih diferencijalnih jednađbi.....	5
2.4. Metode rješavanja običnih diferencijalnih jednađbi .....	8
2.4.1. Laplaceova transformacija .....	8
2.5. Primjena običnih diferencijalnih jednađbi u elektrotehnici .....	10
2.5.1. Definicija elemenata s memorijom i pripadajuće diferencijalne jednađbe .....	10
2.5.2. RLC krugovi opisani diferencijalnim jednađbama .....	12
<b>3. Sustavi običnih diferencijalnih jednađbi</b>	<b>19</b>
3.1. Opći pojmovi .....	19
3.1.1. Linearnost sustava običnih diferencijalnih jednađbi.....	20
3.1.2. Homogenost sustava običnih diferencijalnih jednađbi .....	20
3.1.3. Opća rješenja sustava običnih diferencijalnih jednađbi .....	21
3.1.4. Istaknuti teoremi za sustave običnih diferencijalnih jednađbi .....	21
3.2. Svojstva sustava običnih diferencijalnih jednađbi .....	22
3.3. Algebarska svojstva sustava običnih diferencijalnih jednađbi.....	23
<b>4. Metode rješavanja sustava običnih diferencijalnih jednađbi</b>	<b>24</b>
4.1. Metoda eliminacije (operatora).....	24
4.2. Eulerova metoda .....	26
4.3. Metoda svođenja na jednu diferencijalnu jednađbu višeg reda .....	27
<b>5. Primjena metoda rješavanja sustava diferencijalnih jednađbi u elektrotehnici</b>	<b>29</b>
5.1. Analitičko promatranje dinamičkog stanja elektromotornog pogona.....	29
5.2. Električne mreže i sustavi diferencijalnih jednađbi .....	33
<b>6. Zaključak</b>	<b>38</b>

<b>Literatura</b>	<b>39</b>
<b>Sažetak i ključne riječi</b>	<b>40</b>
<b>Summary and key words</b>	<b>41</b>
<b>Dodatak A Tablica Laplaceovih transformacija</b>	<b>42</b>



## 1. Uvod

U ovom radu razmatrani su sustavi običnih diferencijalnih jednačbi i njihova primjena u elektrotehnici. Obična diferencijalna jednačba predstavlja jednačbenu poveznicu funkcije  $y$  i njezinih derivacija i kao takva, predstavlja srž matematičke analize. Upotreba sustava diferencijalnih jednačbi rasprostranjena je u prirodnim, tehničkim, fizikalnim znanostima kao i u primijenjenoj znanosti elektrotehnike.

Prilikom razmatranja običnih diferencijalnih jednačbi i pripadajućih sustava, prioritet većinom nije na egzaktnom numeričkom rješenju, radije na uvidu u ponašanje sustava kojeg modeliramo sustavima diferencijalnih jednačbi. Promatramo ponašanje i ishode sustava jednačbi u odnosu na primijenjene uvjete ili dugoročno ponašanje međusobno zavisnih funkcija. Rješenja sustava diferencijalnih jednačbi kreiraju podlogu za dublja razmatranja i viši nivo analize promatranog sustava.

Mnogobrojni su načini rješavanja sustava diferencijalnih jednačbi, a ovim radom obuhvaćene su metode eliminacije, metoda svođenja na diferencijalnu jednačbu višeg reda te Eulerova metoda. Prioritet je usmjeren na ove metode jer iste najčešće pronalaze svoju primjenu na području elektrotehnike, u vidu analize električnih mreža, pogonske dinamike i razmatranja međusobnog odnosa komponenti kao i njihovog utjecaja na okruženje modelirano sustavima diferencijalnih jednačbi. Kratko se možemo osvrnuti na Runge-Kutta metodu rješavanja, koja predstavlja numeričku metodu. Cilj ove metode aproksimiranje je numeričke vrijednosti sustava diferencijalnih jednačbi. Predstavlja kvalitetniju metodu rješavanja od Eulerove radi iznimno male greške u aproksimaciji egzaktnih rješenja.

Zadnjim poglavljem ovog rada, definirani su Kirchhoffovi zakoni i njihova osnovna načela. Same jednačbe, u formi u kojoj se prvotno zapisuju, predstavljaju linearne algebarske jednačbe. Međutim, u primjeni na električnim mrežama, pretvaraju se u sustave diferencijalnih jednačbi utjecajem elemenata s memorijom.

## 2. Obične diferencijalne jednačbe

U sklopu ovog poglavlja objašnjene su svi teorijski pojmovi i svojstva običnih diferencijalnih jednačbi nužnih za daljnje analiziranje i razmatranje sustava diferencijalnih jednačbi. Pojmovi i svojstva definirana ovim poglavljem obrađeni su koristeći reference [1], [2], [3] i [4]

### 2.1. Osnovni elementi i svojstva običnih diferencijalnih jednačbi

Diferencijalnom jednačbom smatramo onu jednačbu koja sadrži derivaciju funkcije nepoznate vrijednosti. Matematički gledano, prikazuje brzinu promjene promatrane funkcije. Integralom ili rješenjem diferencijalne jednačbe smatramo onu funkciju koja zadovoljava diferencijalnu jednačbu.

### 2.2. Obične diferencijalne jednačbe višeg reda

*Obična diferencijalna jednačba (dalje u tekstu: ODJ)* prikazuje odnos između neke funkcije  $y \rightarrow y(x)$  i nezavisnog argumenta  $x$ . Obična diferencijalna jednačba  $n$ -tog reda za funkciju  $y(x)$  definirana je jednačbom :

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2.1.)$$

gdje  $y^{(n)}$  predstavlja derivaciju najvišeg reda u jednačbi.

Diferencijalna jednačba može se zapisati i u eksplicitnom obliku:

$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}), \quad (2.2.)$$

gdje je  $n$  red diferencijalne jednačbe,  $y$  zavisna funkcija,  $x$ - argument funkcije. Red diferencijalne jednačbe predstavlja najvišu derivaciju prisutni tokom rješavanja diferencijalne jednačbe i pripadajućih sustava.

**TEOREM 1.** (Teorem egzistencije) Ako su funkcija  $f$  i njezine djelomične derivacije prvog reda, u jednačbi (2.2), neprekidne u otvorenom intervalu  $XY$ -ravnine i koje pri tome sadrže točku  $T_0$ , tada u tom intervalu postoji određeno rješenje jednačbe (2.2) koje zadovoljava uvjete:

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \quad (2.3.)$$

Uvjeti pod (2.3) se još nazivaju i početni uvjeti.

Opće rješenje diferencijalne jednačbe definira se funkcijom:

$$y(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (2.4.)$$

gdje su  $C_1, C_2, \dots, C_n$  proizvoljne konstante. Nadalje,  $y^{(n)}$  predstavlja  $n$ -tu derivaciju funkcije  $y$  i definirana je zapisom:

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}, \quad (2.5.)$$

gdje je:  $d^{(n)}$  derivacija reda  $n$ ,  $y$  zavisna funkcija i  $dx$  diferencijal nezavisne varijable  $x$ .

## 2.2. Linearnost običnih diferencijalnih jednačbi

Jedna od bitnih podjela diferencijalnih jednačbi je ona na nelinearne i linearne diferencijalne jednačbe. Većina nelinearnih pojava u prirodi opisuje se nelinearnim diferencijalnim jednačbama koje se svode na linearne diferencijalne jednačbe radi jednostavnijeg rješavanja. Obična diferencijalna jednačba (2.1.) bit će linearna ukoliko vrijedi da je  $F$  linearna funkcija varijabli  $y, y', \dots, y^{(n)}$ . Odnosno, obična linearna diferencijalna jednačba  $n$ -tog reda definirana je izrazom:

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = g(t). \quad (2.6.)$$

Sukladno tomu, obična *linearna* diferencijalna jednačba prvog reda oblika je:

$$A(x)y' + A_1(x)y = f(x), \quad (2.7.)$$

gdje su funkcije  $A(x), B(x)$  definirane unutar nekog intervala  $\langle \alpha, \beta \rangle$  i nazivamo ih *koeficijentima linearne jednačbe*.

Ukoliko za funkciju smatramo da je  $A(x) \neq 0$  na intervalu  $(\alpha, \beta)$ , dijeljenjem jednačbe dobijemo:

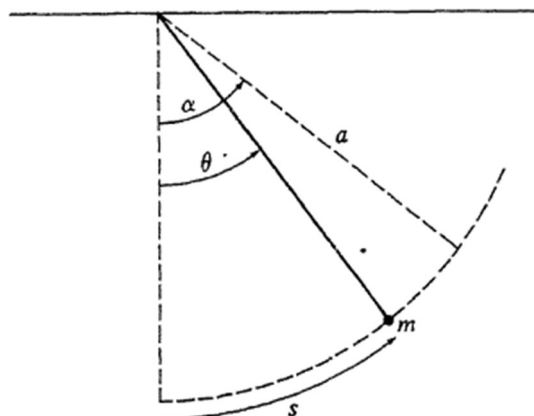
$$y' + p(x)y = q(x), \quad (2.8.)$$

gdje je 
$$p(x) = \frac{B(x)}{A(x)}, \quad q(x) = \frac{f(x)}{A(x)}. \quad (2.9.)$$

**TEOREM 2.** Za neprekidne funkcije  $p(x)$  i  $q(x)$  na  $[a, b] \subseteq [\alpha, \beta]$ , izraz (2.8.) ima jedinstveno rješenje koje zadovoljava početni uvjet  $y(x_0) = y_0$ , za sve  $a < x_0 < b$ ,  $-\infty < y_0 < \infty$ .

*Dokaz.* Izraz (2.8.) možemo izraziti kao  $y' = q(x) - p(x)y$ . Desna strana jednakosti zadovoljava uvjete neprekidnosti te je derivacija ograničena po  $y$ .

**Primjer 2.1.** Titranje matematičkog njihala oko ravnotežnog položaja.



Slika 2.1. Njihalo s gibanjem oko ravnotežnog položaja [1]

Matematičko njihalo karakterizira materijalna točka mase  $m$  pričvršćena na nit duljine  $L$ . Na njihalo koje titra oko ravnotežnog položaja, djeluje sila gravitacije  $G = mg$ . Kut  $\theta$  kojeg titrajuće njihalo duljine  $L$  zatvara s vertikalnom osi ravnotežnog položaja titranja zadovoljava jednačbu:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0.$$

Prisustvo  $\sin \theta$  čini ovu diferencijalnu jednačbu *nelinearnom*. Rješavanje nelinearnih diferencijalnih jednačbi zahtjeva složenu matematičku analizu čija su rješenja i metode rješavanja manje precizna i elegantna nego ona kod linearnih.

Obzirom na to, većinu nelinearnih jednačbi možemo aproksimirati linearnim jednačbama. Postupak svođenja nelinearne diferencijalne jednačbe na linearnu zove se linearizacija.

### 2.3. Svojstva homogenosti običnih diferencijalnih jednažbi

Pojam homogenosti javlja se kod rješavanja i najjednostavnijih diferencijalnih jednažbi. Promotrimo li općeniti zapis obične diferencijalne jednažbe prvog reda:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (2.10.)$$

Možemo uočiti da ne postoji općenito rješenje koje vrijedi za sve diferencijalne jednažbe, već im se pristupa individualno. Razdvajanjem varijabli  $x$  i  $y$ , sada će vrijediti izraz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}. \quad (2.11.)$$

Sada diferencijalnu jednažbu možemo jednostavno riješiti integriranjem unakrsno pomnoženih brojnika i nazivnika  $h(y)dy = g(x)dx$ :

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + C. \quad (2.12.)$$

Diferencijalna jednažba opisana izrazom:

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0, \quad (2.13.)$$

predstavlja *homogenu diferencijalnu jednažbu* prvog reda. Sukladno tomu, diferencijalna jednažba zadana izrazom:

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t), \quad (2.14.)$$

*nehomogena je diferencijalna jednažba* prvog reda, ukoliko je ispunjen uvjet  $b \rightarrow b \neq 0$ .

*Opće rješenje* homogene diferencijalne jednažbe prvog reda definira se izrazom:

$$y(t) = C_1 e^{\int -a(t)dt}, \quad (2.15.)$$

gdje je  $C_1$  konstantni faktor integracije.

## 2.4. Metode rješavanja običnih diferencijalnih jednačbi

Rješenje obične diferencijalne jednačbe n-tog reda na intervalu  $[a,b]$  definirano je funkcijom  $y=\varphi(x)$  koja na intervalu  $[a,b]$  obuhvaća derivacije od  $i=1$  do, uključivo, n-tog reda diferencijalne jednačbe. Obične diferencijalne jednačbe mogu imati nijedno, jedno ili beskonačno mnogo rješenja i grafički se prikazuju integralnim krivuljama.

### 2.4.1. Laplaceova transformacija

Laplaceova transformacija smatra se operatorskim računom. Traženoj funkciji  $x(t)$  realne promjenjive  $t$ , pridružuje se funkcija  $F(s)$  kompleksne promjenjive  $s$  na način da primjenom tog operatora polazna diferencijalna jednačba prelazi u običnu. Pri rješavanju diferencijalnih jednačbi Laplaceovim transformacijama mogu se koristiti gotove tablice( Prilog A).

**Definicija.** Neka je funkcija  $f(t)$  realne promjenjive  $t$  definirana na  $t \geq 0$  i neka ispunjava uvjete:

- i.  $f(t)$  je ili neprekidna ili ima konačan broj konačnih prekida;
- ii. postoje brojevi  $A, k > 0$ , tako da je  $|f(t)| < Ae^{kt}$ , za svaki  $t$  od nula do beskonačno.

Funkciji  $f(t)$  pridružuje se kompleksnog argumenta  $s=a+ib$  definirana kao:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (2.16.)$$

gdje je  $F(s)$  slika funkcije  $f(t)$ , a funkcija  $f(t)$  original. Može se zapisati i kao:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s), \quad \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t). \quad (2.17.)$$

**TEOREM 3.** Teorem jedinstvenosti: Ako dvije neprekidne funkcije  $f(t)$  i  $g(t)$  imaju istu sliku  $F(s)$  tada su te funkcije jednake. Za funkciju:

$$G_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}, \quad (2.18.)$$

poznata kao i Heavisideova funkcija, vrijedi da je slika:

$$L\{G_0(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad G_0(t) \leftarrow \frac{1}{s}. \quad (2.19.)$$

TEOREM 4. Svojstvo linearnosti: Laplaceova transformacija je linearna, tj ako su  $f_i(t), i=1, 2, \dots, n$  zadane funkcije promjenjive t, a  $F_i(s), i=1, 2, \dots, n$  njihove slike tada vrijedi:

$$L \sum_{i=1}^n c_i f_i(t) = \sum_{i=1}^n c_i L\{f_i(t)\} = \sum_{i=1}^n C_i F_i(s), \quad (2.20)$$

gdje su  $C_i, i=1, 2, \dots, n$  proizvoljne konstante.

TEOREM 5. Teorem sličnosti: Ako je funkcija  $F(s)$  slika funkcije  $f(t)$ , tada je  $1/\omega F(s/\omega)$  slika funkcije  $f(\omega t)$ . Odnosno, vrijedi izraz:

$$F(s) \rightarrow f(t), \quad \frac{1}{\omega} F\left(\frac{s}{\omega}\right) \rightarrow f(\omega t). \quad (2.21.)$$

TEOREM 6. Teorem o derivaciji slike: Ako je  $F(s)$  slika funkcije  $f(t)$ , tada je:

$$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s), \quad (2.22.)$$

slika funkcije  $t^n f(t)$ , tj vrijedi:

$$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \rightarrow t^n f(t). \quad (2.23.)$$

## 2.5. Primjena običnih diferencijalnih jednadžbi u elektrotehnici

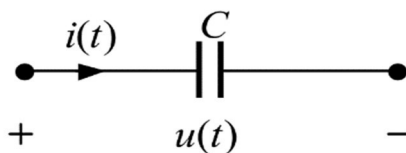
Prilikom rješavanja i proučavanja diferencijalnih jednadžbi i njezinih rješenja, manje je bitno samo rješenje diferencijalne jednadžbe i njenih sustava obzirom da nam rješenja nam pružaju uvid u odnos pojedinih elemenata proučavanog. Tokom analize mnogih pojava i funkcionalnosti unutar grane elektrotehnike, javlja se potreba za korištenjem diferencijalnih jednadžbi.

Razlog tomu je pojava vremenski promjenjivih vrijednosti *napona* ( $u(t)$ ), *struje* ( $i(t)$ ), *magnetskog toka* ( $\Phi$ ), *naboja* ( $Q(t)$ ) ili neke druge vrijednosti, ovisno o svojstvima sustava kojim se bavimo. Takve vrste elemenata, čije su konačne vrijednosti u proizvoljnom vremenu  $t$  ovisne o promjenjivoj veličini, su kapaciteti ( $C$ ) i induktiviteti ( $L$ ). Ovi dvopoli imaju mogućnost skladištenja energije i time predstavljaju ključne elemente mreže. Nazivamo ih još i *elementima s memorijom*. Ovo potpoglavlje obrađeno je koristeći referencu [5], [6], [10] i [12].

### 2.5.1. Definicija elemenata s memorijom i pripadajuće diferencijalne jednadžbe

#### Kapacitet ( $C$ )

Ovaj se element u električnim krugovima crta kako prikazuje slika 2.2. Polaritet je označen po međunarodnom dogovoru.



Slika 2.2. Shematski prikaz kapaciteta  $C$  [5]

Vrijede strujne i naponske jednadžbe:

$$i(t) = C \frac{d u(t)}{dt}, \quad (2.24.)$$

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau, \quad (2.25.)$$

gdje je  $du/dt$  derivacija napona na induktivitetu, a  $i(\tau)d\tau$  struja koja prolazi kroz kapacitet. Odnosno, strujni odziv na kapacitetu proporcionalan je brzini promjene napona na kapacitetu, što je opisano diferencijalom napona prvog reda.

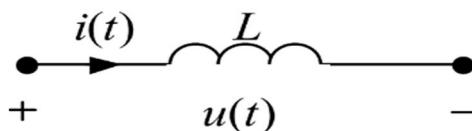


Ukoliko je mreža pobuđena (naponskim ili strujnim signalom) u vremenu minus beskonačno, a prethodno je bila bez energije, promjenu u promatranom sustavu označit ćemo s nulnim vremenom,  $t \rightarrow t=0$ . Kapacitet će zadržati zaprimljenu energiju i njome djelovati na električnu mrežu, nakon trenutka promjene. Označava se kao  $u_C(0)$ . Napon na kapacitetu sada će biti:

$$u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau. \quad (2.26.)$$

### Induktivitet L

Ovaj se element u električnim krugovima crta kako prikazuje slika 2.3. Polaritet je označen po međunarodnom dogovoru.



Slika 2.3. Shematski prikaz induktiviteta L [5]

Vrijede strujno-naponske jednačbe:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \quad (2.27.)$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau. \quad (2.28.)$$

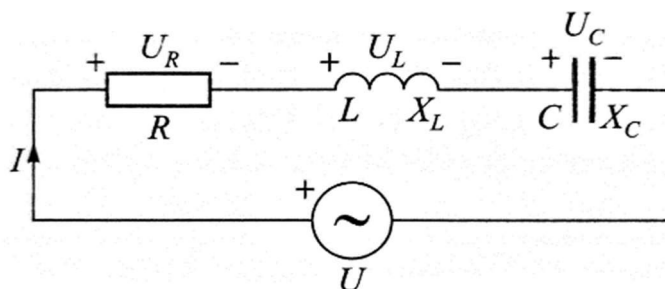
Ukoliko, kao i za kapacitet, uzmemo u obzir početna stanja na induktivitetu, strujna jednačba zapisuje se kao:

$$i(t) = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau.$$

### 2.5.2. RLC krugovi opisani diferencijalnim jednađbama

RLC (resistor-inductor-capacitor) krugovi temelj su većine električnih mreža danas. Ovisno o načinu i vrsti komponenta koje spajamo u krug, ponašaju se kao niskopropusni (NP), visokopropusni (VP), pojasnopropusni (PP) filtri ili pojasne brane (PB).

#### Modeliranje serijskog RLC kruga



Slika 2.4. Shema serijskog RLC spoja [12]

Slika 2.4. prikazuje shemu serijskog RLC spoja s naznačenim pripadnim napona polariteta po dogovoru. Uzimajući u obzir izraze (2.26.) (2.28.), naponske jednađbe strujnog kruga po II. Kirchhoffovom zakonu definiraju se kao:

$$u_R + u_C + u_L = U, \quad (2.29.)$$

gdje je  $u_R$  napon otpornika,  $u_C$  napon na kapacitetu i  $u_L$  napon na induktivitetu.

Homogena linearna diferencijalna jednađba drugog reda za naponske prilike u mreži izražena je kao:

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{1}{LC} U. \quad (2.30.)$$

Homogena linearna diferencijalna jednađba drugog reda za strujne prilike u mreži izražena je kao:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0. \quad (2.31.)$$

Rješenje ove diferencijalne jednačbe strujna je jednačba  $i(t)$  koja zadovoljava diferencijalnu jednačbu drugog reda. Rješenje se traži u eksplisicnom obliku,  $i(t) = e^{rt}$ , dok je opći oblik rješenja:

$$i(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}. \quad (2.32.)$$

Radi se o kvadratnoj jednačbi čija su rješenja:

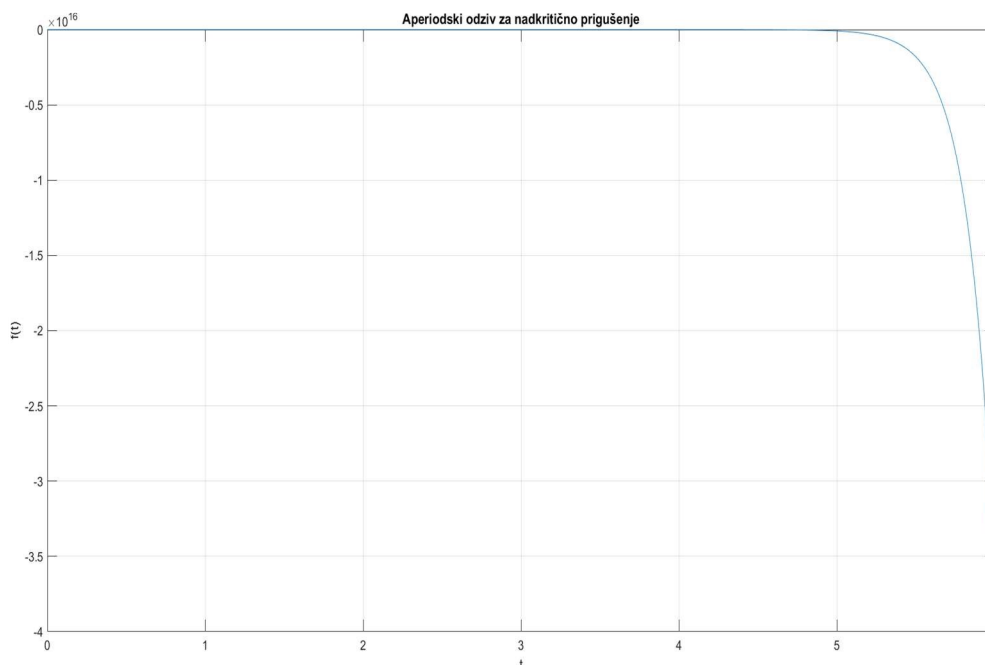
$$r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \beta. \quad (2.33.)$$

Postoje tri opća rješenja  $i(t)$ .

### Nadkritično prigušenje – aperiodski odziv

Ukoliko je izraz ispod korijena veći od nule, rješenje kvadratne jednačbe je *realno* i stvara aperiodski (bezoscilatorni) odziv RLC kruga, Funkcija struje na početku pojave ima nagli skok, ali s porastom vremena  $t$ , aperiodski se smanjuje.

Korištenjem programskog paketa MATLAB, simuliran je aperiodski odziv struje za nadkritično prigušenje:



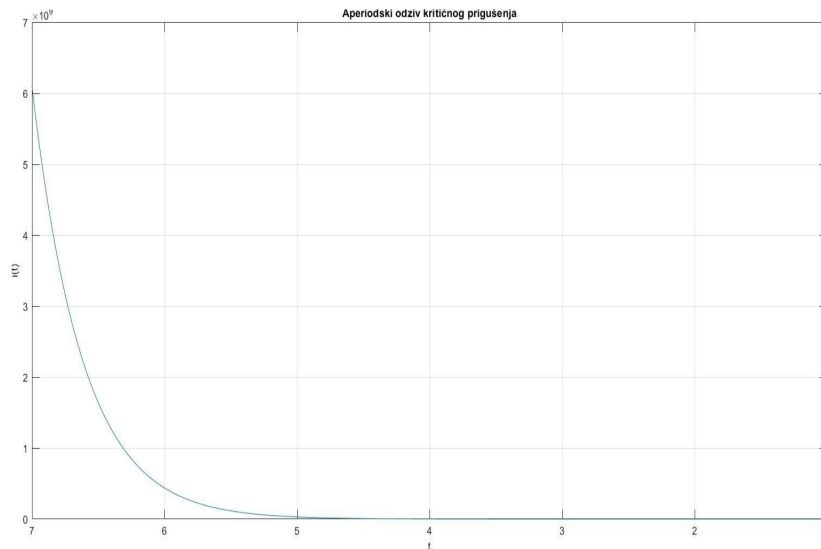
Slika 2.5. Graf aperiodskog strujnog odziva za područje nadkritičnog prigušenja [izrađeno od strane autora]

```
t=0: 0.01: 6;
ft=420.*t.*(exp(2.45.*t));
plot(t,ft); grid;
xlabel('t');...
ylabel('i(t)'); title('Aperiodski odziv kritičnog prigušenja')
xticklabels([1:10])
set ( gca, 'xdir', 'reverse' )
```

Slika 2.6. Matlab kod korišten za dobivanje nadkritičnog prigušenja RLC kruga  
[izrađeno od strane autora]

### Kritično prigušenje – aperiodski odziv

Ukoliko je izraz ispod korijena jednak nuli, rješenje kvadratne jednadžbe je *realno* i stvara aperiodski (bezoscilatorni) odziv RLC kruga. Odziv struje je dakle aperiodski - nema oscilacija u vremenu  $t$ . Korištenjem programskog paketa MATLAB, simuliran je aperiodski odziv struje za kritično prigušenje:

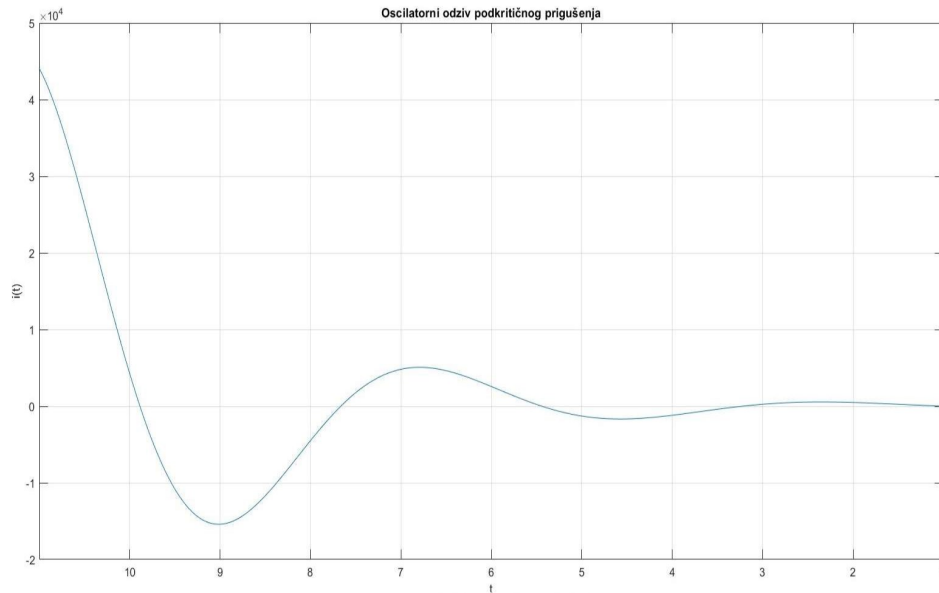


Slika 2.7. Graf aperiodskog strujnog odziva za područje kritičnog prigušenja [izrađeno od strane autora]

```
t=0: 0.01: 6;
ft=420.*t.*(exp(2.45.*t));
plot(t,ft); grid;
xlabel('t');...
ylabel('i(t)'); title('Aperiodski odziv kritičnog prigušenja')
xticklabels([1:10])
set ( gca, 'xdir', 'reverse' )
```

Slika 2.8. Matlab kod korišten za dobivanje kritičnog prigušenja RLC kruga [izrađeno od strane autora]

Ukoliko je izraz ispod korijena manji od nule, rješenje kvadratne jednačbe je *kompleksno* i stvara oscilatorni odziv RLC kruga. Odziv struje je oscilatorni (titrajni) u odnosu na vrijeme  $t$  – početkom uzbude sinusnog je karaktera, međutim povećanjem vremena  $t$ , prigušuje se ka nuli. Korištenjem programskog paketa MATLAB, simuliran je oscilatorni odziv struje za podkritično prigušenje:

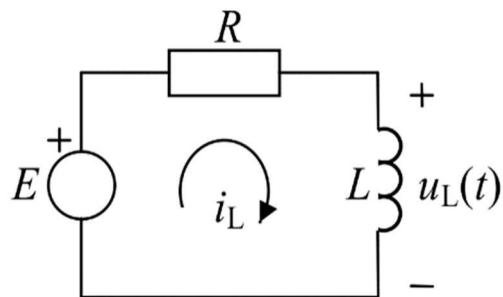


Slika 2.9. Graf oscilatornog strujnog odziva za područje podkritičnog prigušenja

```
t=0: 0.01: 10;
ft=210.*sqrt(2).*(exp(0.5.*t)).*sin(sqrt(2).*t);
plot(t,ft);
grid; xlabel('t');...
    ylabel('i(t)'); title('Oscilatorni odziv podkritičnog prigušenja')
xticklabels([1:10]) |
    set ( gca, 'xdir', 'reverse' )
```

Slika 2.10. Matlab kod korišten za dobivanje kritičnog prigušenja RLC kruga

## Modeliranje serijskog RL kruga



Slika 2.11. Serijska RL mreža [5]

Slika 2.11. prikazuje shemu serijskog RL spoja s naznačenim pripadnim napona polariteta po dogovoru. Analizom kruga koristeći obične diferencijalne jednačbe, dobiva se uvid u ponašanje mreže i njezine prijelazne karakteristike.

Pobuda mreže je istosmjerna,  $E$ . Homogena diferencijalna jednačba za strujne prilike u mreži oblika je:

$$Ri_L(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} = 0. \quad (2.34.)$$

Uvrstivši pretpostavljeno rješenje homogene diferencijalne jednačbe  $i_h = A_1 e^{rt}$ :

$$L \cdot A_1 \cdot e^{rt} + R \cdot A_1 \cdot e^{rt} = 0,$$

$$L \cdot r + R = 0.$$

Pretpostavljeno rješenje homogene diferencijalne jednačbe sada slijedi:

$$i_h(t) = A_1 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (2.35.)$$

Rješenje nehomogene diferencijalne jednačbe dobit će se ukoliko se pretpostavljeno rješenje postavi u obliku pobude. Uvrštavanjem i algebarskim rješavanjem, dobiju se iznosi konstanta  $A_1$  i  $A_2$

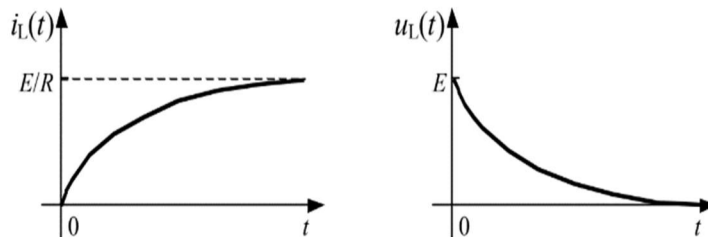
$$A_2 = \frac{E}{R}$$

$$A_1 = -\frac{E}{R} \cdot$$

Konačno, jednađzba struje u serijskog RL mreži sada glasi:

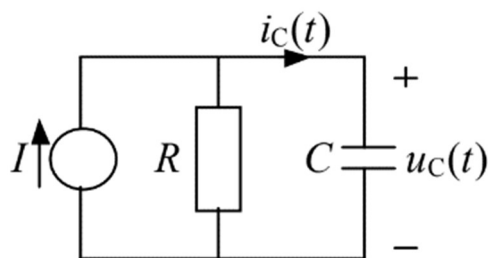
$$i_L(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R} [1 - e^{-\frac{R}{L}t}] \quad (2.36.)$$

Grafički prikazana rješenja za diferencijalne jednađzbe struje i napona na induktivitetu dana su na slici 2.12.



Slika 2.12. Odzivi napona i struje na serijskoj RL mreži za istosmjernu pobudu [5]

### Modeliranje paralelnog RC kruga



Slika 2.13. Paralelna RC mreža [5]

Slika 2.13. prikazuje shemu paralelnog RC spoja s naznačenim pripadnim napona polariteta po dogovoru. Analizom kruga, koristeći obične diferencijalne jednađzbe, dobivamo uvid u ponašanje mreže i njezine prijelazne karakteristike. Mreža je pobuđena istosmjernim strujnim izvorom,  $I$ . Homogena diferencijalna jednađzba za naponske prilike u mreži glasi:

$$\frac{I}{R} u_C(t) + C \frac{du_C(t)}{dt} = 0 \quad (2.37.)$$

Rješenje nehomogene diferencijalne jednačbe dobit će se ukoliko se pretpostavljeno rješenje postavi u obliku pobude. Uvrštavanjem i algebarskim rješavanjem, dobiju se iznosi konstanta  $A_1$  i  $A_2$

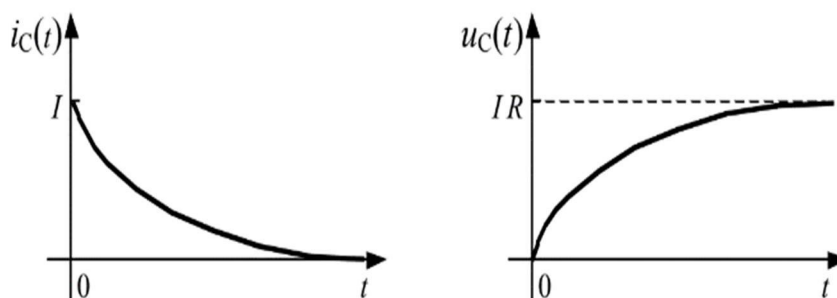
$$A_2 = -I \cdot R$$

$$A_1 = I \cdot R$$

Konačno, jednačba napona u paralelnoj RC mreži sada glasi:

$$u_C(t) = IR - IR e^{-\frac{t}{RC}} = IR [1 - e^{-\frac{t}{RC}}] \quad (2.38.)$$

Grafički prikazana rješenja za diferencijalne jednačbe struje i napona na kapacitetu dana su na slici 2.14.



Slika 2.14. Odzivi napona i struje na paralelnoj RC mreži za istosmjernu pobudu [5]

Promatranjem RLC krugova i njihovih izvedenica, uviđamo važnost u primjeni diferencijalnih jednačbi. Diferencijalne jednačbe i pripadajuća rješenja istih, daju nam vrlo informativan i poučan uvid u ponašanje sustava koji sadrže elemente s memorijom kao i međusoban odnos pojedinih elemenata te njihov utjecaj na konačan odziv. Pri rješavanju diferencijalnih jednačbi, samo numeričko rješenje nije prioritetno, obzirom na to da opća homogena i nehomogena rješenja opisuju *ponašanje mreže* za datu pobudu. Ova pojava omogućava modeliranje RLC krugova ka željenom odzivu, odnosno, podešavanje parametara kako bi RLC krug poprimio svojstva i funkcionalnosti filtra potrebitog za sustav u kojem se upotrebljava.



### 3. Sustavi običnih diferencijalnih jednačbi

Mnoge su fizikalne pojave sačinjene od više međusobno povezanih elemenata koje promatramo sveobuhvatno, kao složeni sustav. Ovu karakteristiku, na primjer, imaju električne mreže, pojave unutar pogonske dinamike, mehanike i ostalih područja. Sukladno navedenom, odgovarajući matematički problemi za spomenute pojave, sastoje se od *sustava* dviju ili više diferencijalnih jednačbi, koje se uvijek mogu zapisati kao obične diferencijalne jednačbe prvog reda. Ovim poglavljem obuhvaćeni su sustavi običnih, linearnih diferencijalnih jednačbi prvog reda s konstantnim koeficijentima. Reference korištene za definiranje svojstava i metoda rješavanja u sklopu poglavlja su [1], [2],[3],[4],[7], [8] i [10].

#### 3.1. Opći pojmovi

Sustav običnih diferencijalnih jednačbi je skup diferencijalnih jednačbi u kojima se javlja jedna nezavisna, promjenjiva  $t$  i odgovarajuće nepoznate funkcije  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,... i njihove derivacije. Kao što je spomenuto u uvodu ovog poglavlja, svaki se sustav jednačbi proizvoljnog,  $n$ -tog reda može svesti na sustav jednačbi prvog reda.

U primjeni sustava običnih diferencijalnih jednačbi, najčešće nailazimo na *kanonski* ili *normalni sustav*. Kanonski sustav onaj je sustav u kojem su nepoznate funkcije  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,...,  $x_n(t)$ , a povezane su na način:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.1.)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad , (3.2.)$$

odnosno,

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad . \quad (3.3.)$$

### 3.1.1. Linearnost sustava običnih diferencijalnih jednadžbi

Ukoliko je svaka funkcija  $f_1, \dots, f_n$  izraza 3.1. linearna funkcija zavisne varijable  $x_1, \dots, x_n$ , sustav diferencijalnih jednadžbi također je *linearan*. U protivnome, *smatramo ga nelinearnim*.

Sustav ODJ možemo zapisati i kao:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(t, x, y),\end{aligned}\tag{3.4.}$$

gdje je  $t$  nezavisna varijabla, a  $x$  i  $y$  zavisne su varijable. Izbor oznaka je proizvoljan.

Sukladno izrazu (3.1.), *linearni sustav ODJ* možemo zapisati kao:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_1(t)x + b_1(t)y + f_1(t) \\ \frac{dy}{dt} &= a_2(t)x + b_2(t)y + f_2(t).\end{aligned}\tag{3.5.}$$

Za potrebe ovog rada, pretpostavit ćemo da su funkcije  $a_i(t)$ ,  $b_i(t)$  i  $f_i(t)$ , gdje je  $i = 1, 2$ , kontinuirane na zatvorenom intervalu  $[a, b]$  na osi  $t$ .

### 3.1.2. Homogenost sustava običnih diferencijalnih jednadžbi

Za sustav opisan jednadžbama

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\tag{3.6.}$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\tag{3.7.}$$

odnosno za  $n$ -tu derivaciju funkcije:

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\tag{3.8.}$$

vrijedi da, ako je svaka funkcija  $g_1(t), \dots, g_n(t)$  nula unutar cijelog intervala  $I$ , onda se sustav smatra *homogenim*, u protivnome je sustav *nehomogen*.

### 3.1.3. Opća rješenja sustava običnih diferencijalnih jednačbi

Opće rješenje jednačbe dane izrazom (3.9.):

$$F\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^n x_1}{dt^n}\right) = 0, \quad (3.9.)$$

zadovoljeno je nekom funkcijom  $x_1$  unutar intervala  $I: \alpha < t < \beta$ , za koju vrijedi:

$$x_1 = \varphi_1(t, C_1, C_2, \dots, C_n). \quad (3.10.)$$

Tokom rješavanja i analize sustava, javlja se i pojam početnih uvjeta. Početni uvjeti definirani su kao:

$$x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0, \quad (3.11.)$$

gdje je  $t_0$  određena vrijednost  $t$  unutar intervala  $I$ , a  $x_1, \dots, x_n$ , odgovarajući pripadni brojevi.

### 3.1.4. Istaknuti teoremi za sustave običnih diferencijalnih jednačbi

Ovim potpoglavljem obuhvaćeni su istaknuti teoremi koji se primjenjuju prilikom rješavanja sustava običnih diferencijalnih jednačbi, predstavlja bitna svojstva i karakteristike sustava ODJ i pružaju elegantniju matematičku analizu.

**TEOREM 7.** Ukoliko se  $t_0$  nalazi unutar intervala  $[a, b]$  i  $x_0$  i  $y_0$  definirani su kao brojevi, onda izraz (3.12.) ima samo jedno rješenje:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t), \end{aligned} \quad (3.12.)$$

valjano unutar intervala  $[a, b]$ , tako da vrijedi  $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$ .

Uklanjanjem funkcija  $f_1$  i  $f_2$  iz izraza (3.5.), sustav jednačbi ODJ dan izrazom (3.5.) bit će zadovoljen trivijalnim rješenjem:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1(t)x + b_1(t)y \\ \frac{dy}{dt} &= a_2(t)x + b_2(t)y. \end{aligned} \quad (3.13.)$$

### 3.2. Svojstva sustava običnih diferencijalnih jednadžbi

#### Homogeni linearni sustavi s konstantnim koeficijentima

Za jednostavni sustav diferencijalnih jednadžbi definiran u eksplicitnom obliku kao:

$$\begin{aligned}x &= Ae^{mt} \\ y &= Ae^{mt}.\end{aligned}\tag{3.14.}$$

**Realni korijeni.** Vrijedi da za sve  $m_1$  i  $m_2$  koji su realni brojevi, opće rješenje za izraz(3.14.) može se definirati kao:

$$\begin{aligned}x &= c_1 A_1 e^{m_1 t} + c_2 A_2 e^{m_2 t} \\ y &= c_1 B_1 e^{m_1 t} + c_2 B_2 e^{m_2 t}.\end{aligned}\tag{3.15.}$$

**Primjer 3.1.** Za sustav običnih diferencijalnih jednadžbi, odredit ćemo parametre  $m_1$  i  $m_2$  i zapisati rješenja u eksplicitnom obliku.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x+y \\ \frac{dy}{dt} &= 4x-2y.\end{aligned}$$

Vrijedi linearni algebarski sustav:

$$(1-m)A-B=0,$$

$$4A+(-2-m)B=0.$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe  $m^2 + m - 6 = 0$ , dobivaju se vrijednosti  $m_1 = -3$ ,  $m_2 = 2$ .

Rješavanjem jednadžbe za  $m = -3$ , dobivaju se vrijednosti  $A = 1$  i  $B = -4$ . Eksplicitna rješenja sada su:

$$\begin{aligned}x &= e^{-3t} \\ y &= -4e^{-3t}.\end{aligned}$$

Rješavanjem jednadžbe za  $m = 2$ : dobivaju se vrijednosti  $A = 1$  i  $B = 1$ . Eksplicitna rješenja sada su:

$$\begin{aligned}x &= e^{2t} \\ y &= e^{2t}.\end{aligned}$$

Vrijedi da je opće rješenje:

$$\begin{aligned}x &= c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} \\ y &= -4c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}.\end{aligned}$$

**Jednaki korijeni.** Ukoliko su vrijednosti  $m_1$  i  $m_2$ , onda imamo samo jedno rješenje i ono glasi:

$$\begin{aligned}x &= A e^{mt} \\ y &= B e^{mt}.\end{aligned}\tag{3.16.}$$

Sukladno tomu, opće rješenje definirano je kao:

$$\begin{aligned}x &= c_1 A e^{mt} + c_2 (A_1 + A_2 t) e^{mt} \\ x &= c_1 B e^{mt} + c_2 (B_1 + B_2 t) e^{mt}.\end{aligned}\tag{3.17.}$$

### 3.3. Algebarska svojstva sustava običnih diferencijalnih jednažbi

Ovim potpoglavljem, ukratko su pokrivena osnovna algebarska svojstva koja se javljaju tokom rješavanja i proučavanja sustava običnih diferencijalnih jednažbi.

Ukoliko je svaka funkcija  $f_1, f_2, \dots, f_n$  izraza (3.6.) linearna funkcija varijable  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , onda se sustav jednažbi smatra linearnim. Sustav linearnih diferencijalnih jednažbi  $n$ -tog reda, ima opći zapis:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + g_1(t),\tag{3.18.}$$

.

.

.

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + g_n(t).\tag{3.19.}$$

## 4. Metode rješavanja sustava običnih diferencijalnih jednačbi

Mnogobrojne su metode i pristupi rješavanju sustava obični diferencijalnih jednačbi i njihova primjena ovisi o problematici kojom se bavimo. Poglavlje obuhvaća eliminacije (operatora), Eulerovu metodu i metodu svođenja na jednu diferencijalnu jednačbu višeg reda.

Valja spomenuti Runge-Kutta numeričku metodu. Smatra se najpreciznijom metodom aproksimacije rješenja sustava ODJ. Runge-Kutta metoda je od četiri stadija naprednog računanja. Nedostatak metode je mogućnost varijacije točnosti unutar promatranog intervala. Za opis svojstava, funkcionalnosti i metoda rješavanja sustava koriste se reference [1], [2], [3], [4], [8], [9] i [11]

### 4.1. Metoda eliminacije (operatora)

Teorijska načela linearnih diferencijalnih jednačbi drugog reda također se mogu koristiti za rješavanje sustava dviju diferencijalnih jednačbi *prvog reda*. Metoda sustavne eliminacije za rješavanje sustava diferencijalnih jednačbi s konstantnim koeficijentima zasniva se na algebarskom principu eliminacije varijabli. Promotrimo prikazani sustav diferencijalnih jednačbi prvog reda.

$$x' = \frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)y + f(t), \quad (4.1.)$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = c(t)x + d(t)y + g(t). \quad (4.2.)$$

Princip metode zasniva se na eliminaciji varijabli, na primjer varijable  $y$ , gdje se onda pronalazi  $x$  koji predstavlja rješenje obične diferencijalne jednačbe drugog reda.

**Primjer 4.1.** Za sustav dani diferencijalnih jednačbi, prikazano je rješavanje *metodom eliminacije*.

$$x' = 2x + y + t, \quad (4.3.)$$

$$y' = x + 3y + 1. \quad (4.4.)$$

Iz prve jednačbe zapisat ćemo izraz za  $y$  koji se potom derivira, pa vrijedi:

$$y = x' - 2x - t,$$

$$y' = x'' - 2x' - t.$$

Uvrstivši derivirani izraz za  $y$  u drugu jednadžbu, dobije se:

$$x'' - 5x' + 5x = 2 - 3t.$$

Jednadžba sada predstavlja linearnu jednadžbu drugog reda čije je rješenje:

$$x(t) = e^{\frac{5t}{2}} \left( c_1 e^{\frac{\sqrt{5}t}{2}} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{5}t}{2}} \right) - \frac{1-3t}{5}. \quad (4.4.)$$

Metoda eliminacije može se, svakako, primijeniti i na sustav običnih diferencijalnih jednadžbi  $n$ -tog reda. Pristup rješavanju je isti kao i kod sustava ODJ prvog reda, s iznimkom *operatora* koji se upotrebljava radi lakšeg rješavanja. Temelji se na principu upotrebe diferencijalnog operatora prilikom rješavanja običnih linearnih jednadžbi, čiji oblik možemo zapisati kao:

$$a^n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(t). \quad (4.5.)$$

Uz konstante  $a_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , diferencijalni operator možemo izraziti kao:

$$a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0. \quad (4.6.)$$

Primjer 4.2.

Sustav jednadžbi oblika:

$$x'' + 2x' + y'' = x + 3y + \sin t,$$

$$x' + y' = 4x + 2y + e^{-t},$$

možemo zapisati pomoću operatora  $D$ . Potrebno je zapis izraziti tako da se sve zavisne varijable nalaze na lijevoj strani:

$$x'' + 2x' - x + y'' - 3y = \sin t$$

$$x' - 4x + y' - 2y = e^{-t}$$

Izraz za sustav pomoću operatora temeljem izraza (4.6.), može sada se zapisati kao:

$$D^2 + 2D - 1 \ x + (D^2 - 3)y = \sin t,$$

$$(D - 4)x + (D - 2)y = e^{-t}.$$

Rješenje sustava diferencijalnih jednačbi sastoji se od zavisnih funkcija za koje vrijedi  $x=\varphi_1(t)$ ,  $y=\varphi_2(t)$ ,  $z=\varphi_3(t)$  koje zadovoljavaju svaku jednačbu sustava na nekom intervalu  $I$ .

## 4.2. Eulerova metoda

Ovim potpoglavljem obuhvaćeno je rješavanje sustava diferencijalnih jednačbi prvog reda pomoću Eulerove metode.

Eulerova metoda temelji se na zapisu pretpostavljenog rješenja homogenog sustava diferencijalnih jednačbi u obliku:

$$y(x)=e^{\lambda s} C, \quad (4.7.)$$

gdje je matrica  $C$  definirana kao:

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}. \quad (4.8.)$$

Primjer 4.3. Homogeni sustav diferencijalnih jednačbi dan je kao :

$$y'(x) = -2y(x) - 4z(x), \quad (4.9.)$$

$$z'(x) = -y(x) + z(x).$$

Preko izraza (4.7.) i (4.8.) dobije se:

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = e^{\lambda s} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}. \quad (4.10.)$$

. Rješavanjem kvadratne jednačbe  $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$  homogenog algebarskog sustava jednačbi, dobiju se vrijednosti  $\lambda_1=2$  i  $\lambda_2=-3$ , za  $\lambda_1=2$ . Sada, za  $\lambda_1=2$ , vektor  $C$  ima vrijednosti:

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

odnosno za  $\lambda_2=-3$ , dobije se vektor  $C$ :

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$



gdje je rješenje homogenog sustava dano izrazom:

$$x = e^t c_1 \cos \sqrt{2}t + c_2 \sin \sqrt{2}t + \frac{2}{3}, \quad (4.11.)$$

$$y(x) = C_1 e^{2s} + C_2 e^{-3s}, \quad (4.12.)$$

$$z(x) = -C_1 e^{2s} + \frac{1}{4} C_2 e^{-3s}. \quad (4.13.)$$

### 4.3. Metoda svodenja na jednu diferencijalnu jednadžbu višeg reda

Metoda rješavanja sustava običnih diferencijalnih jednadžbi svodenjem na jednu diferencijalnu jednadžbu višeg reda temelji se na operaciji uzastopnog deriviranja.

Rezultat operacije uzastopnog deriviranja eliminacija je nepoznatih funkcija osim jedne funkcije  $n$ -tog reda koja se potom rješava kao obična diferencijalna jednadžba.

Primjer 4.4. Za zadani sustav odredit ćemo opće rješenje svodenjem na jednu diferencijalnu jednadžbu općeg reda.

$$y'(x) = -2y(x) - 4z(x) + 1 + x, \quad (4.14.)$$

$$z'(x) = -y(x) + z(x) + x. \quad (4.15.)$$

Izvlačenjem  $z(x)$  iz prve jednadžbe, deriviranjem ( $z'(x)$ ) i uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobije se izraz:

$$y''(x) + y'(x) - 6y(x) = -6x^2 - 4x + 3.$$

Opće rješenje zapisati ćemo kao:

$$y(x) = C_1 e^{2s} + C_2 e^{-3s} + x + x^2, \quad (4.16.)$$

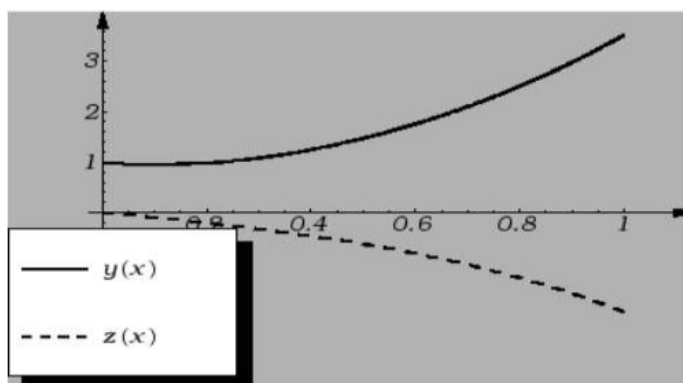
$$z(x) = -C_1 e^{2s} + \frac{1}{4} C_2 e^{-3s} - \frac{1}{2} x^2. \quad (4.17.)$$

Ako su početni uvjeti definirani kao  $y(0) = 1$  i  $z(0) = 0$ , uvrstivši u izraze (4.16.) i (4.17.) dobiju se numeričke vrijednosti koeficijenata  $C_1 = 1/5$  i  $C_2 = 4/5$ , pa vrijedi da je rješenje:

$$y(x) = \frac{1}{5} e^{2s} + \frac{4}{5} e^{-3s} + x + x^2 \quad (4.18.)$$

$$z(x) = -\frac{1}{5} e^{2s} + \frac{1}{5} e^{-3s} - \frac{1}{2} x^2 \quad (4.19.)$$

Slika 4.1. grafički prikazuje rješenja uz zadane početne uvjete.

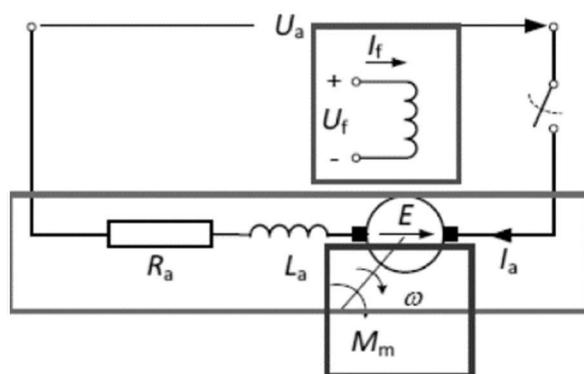


Slika 4.1. Grafički prikaz općih rješenja  $y(x)$  i  $z(x)$ [8]

## 5. Primjena metoda rješavanja sustava diferencijalnih jednadžbi u elektrotehnici

Obzirom na čestu pojavu diferencijalnih jednadžbi u elektrotehnici, logično je da se metode obrađene ovim poglavljem često primjenjuju pri rješavanju problematike u određenim granama elektrotehnike. Pogonska dinamika jedan je od primjera gdje se javlja potreba za implementacijom metoda rješavanja sustava diferencijalnih jednadžbi. Prijelaznom pojavom, poput dodavanja opterećenja, elektromotorni pogon ulazi u dinamičko stanje rada. Istovremeno, više komponenti vremenski su promjenjive. Pojmovi dinamike, električnih mreža i prisutnost sustava diferencijalnih jednadžbi obrađena su koristeći reference [5], [6],[8], [9] i [11],

### 5.1. Analitičko promatranje dinamičkog stanja elektromotornog pogona rješavanjem sustava diferencijalnih jednadžbi (električkog i mehaničkog stanja)



Slika 5.1. Nezavisno uzbuđeni motor u dinamičkom, prijelaznom stanju [9]

U bilo kojem trenutku vrijede jednadžbe za strujni krug armature i mehaničko gibanje [20]:

$$U_a = i_a R_a + L_a \frac{di_a}{dt} + c\omega, \quad (5.1.)$$

$$M_m - M_t = J \frac{d\omega}{dt}, \quad (5.2.)$$

gdje je  $i_a$ ,  $R_a$  – struja, napon i otpor armaturnog kruga,  $L_a$  – induktivitet armature,  $c$ - konstanta,  $\omega$  -kutna brzina,  $M_m$  – elektromagnetski moment motora,  $M_t$  – moment opterećenja.

Za struju  $i_f$  vrijedi da je konstantna. U praznom hodu (odspojene stezaljke), vrijede jednadžbe:

$$M_m = c i_a = J \frac{d\omega}{dt}, \quad M_t = 0, \quad \frac{di_a}{dt} = \frac{J}{c} \frac{d^2\omega}{dt^2}. \quad (5.3.)$$

Uvrštavanjem izraza za prvu derivaciju struje  $i_a$  u izraz za moment  $M_m$ , dobije se obična diferencijalna jednačina drugog reda:

$$\frac{U}{c} = \frac{L_a J}{c^2} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{R_a J}{c^2} \frac{d\omega}{dt} + \omega.$$

Odnosno vrijedi diferencijalna jednačina za promjenu kutne brzine vrtnje:

$$\omega_0 = T_{em} T_{el} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{R_a J}{c^2} \frac{d\omega}{dt} + \omega, \quad (5.4.)$$

gdje su  $T_{em}$  – *elektromagnetska konstanta* i  $T_{el}$  – *električna konstanta*. Rješenje nehomogene diferencijalne jednačine dano je izrazom (5.5.):

$$\omega = \omega_0 + A e^{p_1 t} + A e^{p_2 t}, \quad (5.5.)$$

gdje je  $\omega_0$  *kutna brzina idealnog praznog hoda*. Vrijedi karakteristična jednačina:

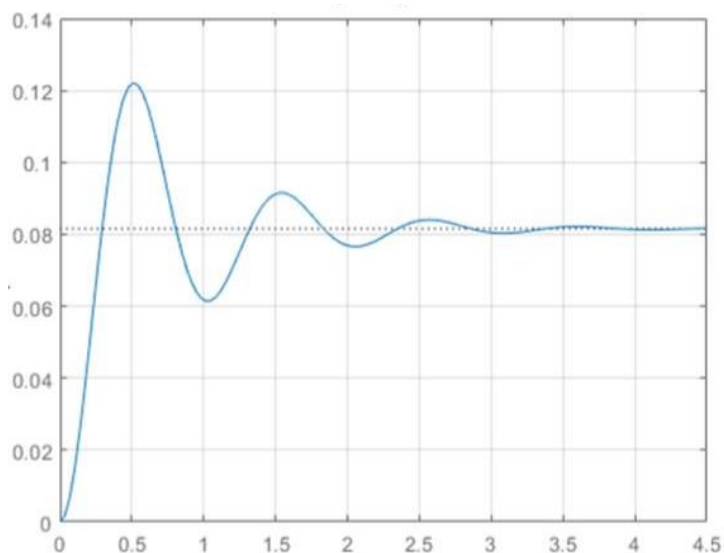
$$1 + p T_{em} + p^2 T_{em} T_{el} = 0,$$

gdje su  $A_1$  i  $A_2$  *konstante iz početnih uvjeta*. Rješenje karakteristične kvadratne jednačine sada je:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2T_{el}} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4T_{el}}{T_{em}}} \right). \quad (5.6.)$$

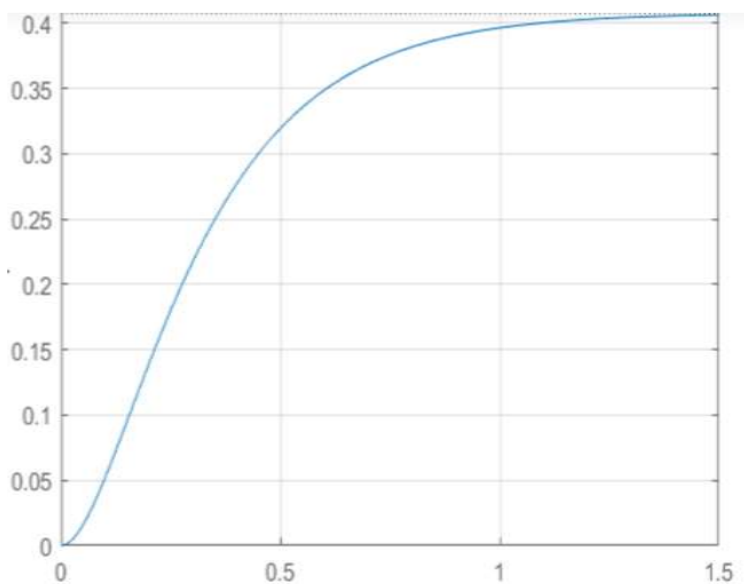
Karakter prijelazne pojave sada će biti određen odnosim vremenskih konstanti  $T_{em}$  i  $T_{el}$  pod korijenom rješenja karakteristične jednadžbe,  $p_{1,2}$ . Tri su slučaja :

1. Za  $T_{em} < 4T_{el}$ , korijeni će biti kompleksni. Postoje uvjeti za titranje u elektromotornom pogonu. Odziv kutne brzine oscilatorni je, što znači da za vrijeme  $t = 0$  ima sinusni odziv koji teži ka konačnoj vrijednosti za  $t, t \rightarrow \infty$ . Prikaz odziva nalazi se na slici 5.2.



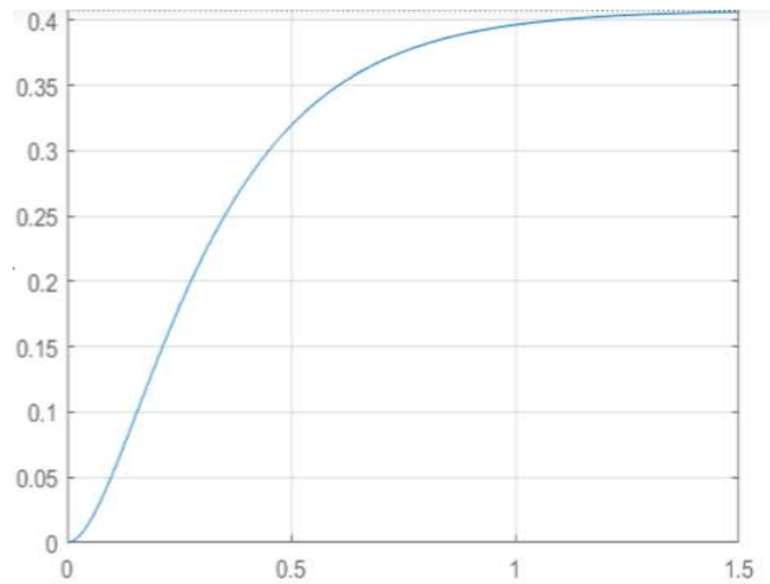
Slika 5.2. Prikaz oscilatornog odziva kutne brzine za kompleksne korijene u Matlab-u[8]

2. Za  $T_{em} > 4T_{el}$ , korijeni će biti realni. Ne postoje uvjeti za titranje u elektromotornom pogonu. Odziv kutne brzine aperiodski je, što znači da za vrijeme  $t = 0$  ima nagli porast koji teži ka konačnoj vrijednosti za  $t, t \rightarrow \infty$ . Prikaz odziva nalazi se na slici 5.3.



Slika 5.3. Prikaz aperiodskog odziva kutne brzine za realne korijene u Matlab okruženju [8]

3. Za  $T_{em} = 4T_{el}$ , korijeni će biti realni. Ne postoje uvjeti za titranje u elektromotornom pogonu. Odziv kutne brzine aperiodski je, što znači da za vrijeme  $t = 0$  ima nagli porast koji teži ka konačnoj vrijednosti za  $t, t \rightarrow \infty$ . Prikaz odziva nalazi se na slici 5.4.



Slika 5.4. Prikaz aperiodskog odziva kutne brzine za realne korijene u Matlab okruženju [8]

## 5.2. Električne mreže i sustavi diferencijalnih jednažbi

Riješiti električnu mrežu znači odrediti traženu veličinu: napon na elementu ili grani, struju kroz element ili granu. Određuje se sustav s  $n$ -jednažbi s  $n$ -nepoznanica za promatranu mrežu. Zadatak je odrediti sustav jednažbi i matematičkom analizom doći do numeričkih rješenja, poštujući električne zakonitosti.

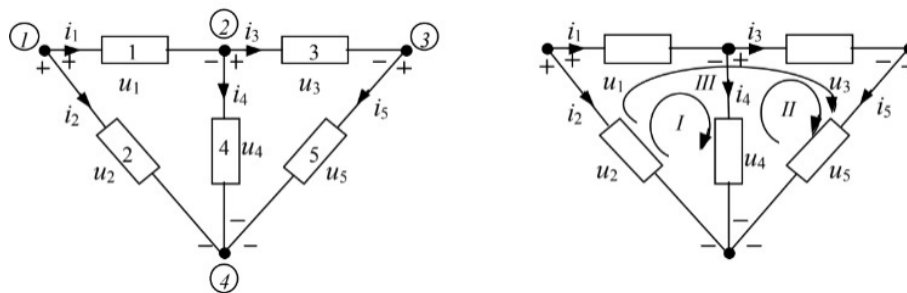
### Kirchhoffovi zakoni

Gustav Robert Kirchhoff (1824. -1887.) bio je njemački fizičar koji je svojim radom pridonio temeljnom razumijevanju električnih krugova i spektralne analize. 1845. razvio je *Kirchhoffove zakone* koji omogućavaju određivanje struje, napona i vrijednosti elemenata električnih mreža. Zakoni predstavljaju produženje na teoriju njemačkog znanstvenika Georg-a Simon-a Ohm. Generalizirao je opisne jednažbe protoka struje primjenom na električne vodiče u tri dimenzije. [11]



*Slika 5.5. Gustav Robert Kirchhoff (1824. -1887.) [11]*

Promotrimo električnu mrežu s ucrtanim čvorovima (lijevi prikaz) i strujnim petljama (desni prikaz) na slici (5.6.).



Slika 5.6. Električna mreža s ucrtanim čvorovima i petljama [5]

Unutar električne mreže javljaju se varijable napona i struje koje, kao takve, predstavljaju sastavni dio jednadžbi Kirchhoffovih zakona. Čvorovi su točke označene zaokruženim *italic* brojevima 1,2,3 i 4. Grane mreže povezuju čvorove i sadrže elemente mreže. Skup grana koje čine zatvoreni sustav naziva se *petlja* i one su označene *italic* rimskim brojevima I,II i III. Po dogovoru, plus polaritet napona grane je na čvoru iz kojeg struja izlazi.

#### Pravila zapisa Kirchhoffovih zakona [5]

I. **Kirchhoffov zakon.** Prvi Kirchhoffov zakon, takozvani Kirchhoffov zakon za struje (KZS), uvjetuje da je algebarska suma svih struja grana koje su vezane na neki čvor jednaka nuli. Pri tome, ulazne i izlaze struje određene su suprotnim predznacima. Za električnu mrežu sa slike sukladno KZS vrijedi:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & i_1 + i_2 = 0, \\
 (2) \quad & -i_1 + i_3 + i_4 = 0, \\
 (3) \quad & -i_3 + i_5 = 0, \\
 (4) \quad & -i_2 - i_4 - i_5 = 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.7.}$$

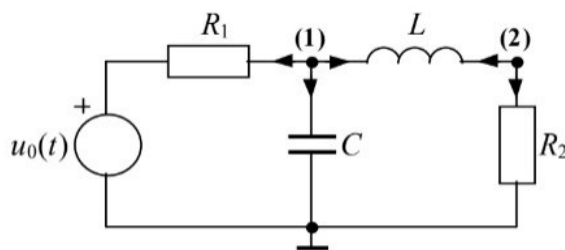


**II. Kirchhoffov zakon.** Drugi Kirchhoffov zakon, takozvani Kirchhoffov zakon za napone (KZN), uvjetuje da je algebarska suma svih napona grana sadržanih u nekoj petlji jednaka nuli. Pri tome, porasti i padovi napona određeni su suprotnim predznacima. Porast napona smatra se napon kod kojeg prvo nailazimo na minus polaritet prilikom obilaska petlja, a zatim na plus. Za pad napona vrijedi obrnuto. Za električnu mrežu sa slike sukladno KZN vrijedi:

$$\begin{aligned} (I) u_1 + u_4 - u_2 &= 0, \\ (II) u_3 + u_5 - u_4 &, \\ (III) u_1 + u_3 + u_5 - u_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.8.)$$

Dobiven je sustav 5 linearno nezavisnih jednadžbi s 10 nepoznanica. Općenito vrijedi da je broj nezavisnih jednadžbi koje proizlaze pisanjem KZS jednak broju čvorova – 1, dok je broj nezavisnih jednadžbi koje proizlaze pisanjem KZN jednak broju grana – broj čvorova + 1.

**Primjer 5.1.** Za mrežu prikazanu na slici (5.7.) prikazat ćemo zapis jednadžbi po I. Kirchhoffovom zakonu za struje. Jednadžbe čvorova strujne su jednadžbe čijim se rješavanjem dobiju naponi čvorova.



Slika 5.7. Električna mreža s ucrtanim čvorom [5]

Slijede zapisi:

$$(1) \frac{u_1(t) - u_0(t)}{R_1} + C \frac{du_1}{dt} + \frac{1}{L} \int_0^T [u_1(\tau) - u_2(\tau)] d\tau = 0, \quad (5.9.)$$

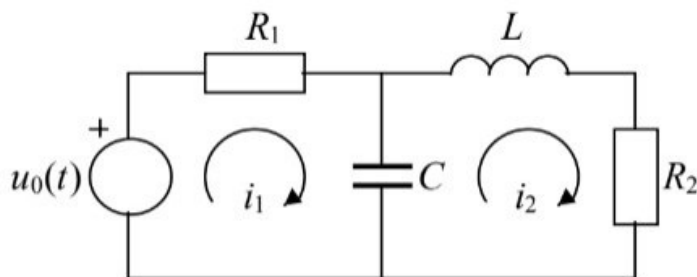
$$(2) \frac{1}{L} \int_0^T [u_1(\tau) - u_2(\tau)] d\tau + \frac{u_2(t)}{R_2} = 0. \quad (5.10.)$$

Donja granica integrala je nula obzirom na pretpostavku da se do trenutka  $t=0$  u mreži nisu događale nikakve prijelazne pojave. Primjenom Laplaceove transformacije na jednadžbe, slijedi zapis jednadžbi čvorova u frekvencijskoj domeni:

$$U_1(s) - \frac{I}{R_1} + sC + \frac{I}{sL} - U_2(s) \frac{I}{sL} = \frac{U_0(s)}{R_1} \quad (5.11.)$$

$$-U_1(s) \frac{I}{sL} - U_2(s) \frac{I}{sL} + \frac{I}{R_2} = 0 \quad (5.12.)$$

**Primjer 5.2.** Za mrežu prikazanu na slici (5.7.) prikazat ćemo zapis jednadžbi po II. Kirchhoffovom zakonu za napone. Jednadžbe petlji naponske su jednadžbe čijim se rješavanjem dobiju struje petlji.



Slika 5.7. Električna mreža s ucrtanim petljama [5]

Slijedi zapis:

$$(1) u_0(t) = i_1(t)R_1 + \frac{1}{C} \int_0^T [i_1(\tau) - i_2(\tau)] d\tau, \quad (5.13.)$$

$$(2) \frac{1}{C} \int_0^T [i_1(\tau) - i_2(\tau)] d\tau + L \frac{di_2(t)}{dt} = 0. \quad (5.14.)$$

Donja granica integrala je nula obzirom na pretpostavku da se do trenutka  $t=0$  u mreži nisu događale nikakve prijelazne pojave. Primjenom Laplaceove transformacije na jednađbe, slijedi zapis jednađbi čvorova u frekvencijskoj domeni:

$$(1) U_1(s) \frac{1}{R_1} + sC + \frac{1}{sL} - U_2(s) \frac{1}{sL} = \frac{U_0(s)}{R_1}, \quad (5.15.)$$

$$(2) -U_1(s) \frac{1}{sL} - U_2(s) \frac{1}{sL} + \frac{1}{R_2} + i_2(t)R_2 = 0. \quad (5.16.)$$

## 6. Zaključak

Ovim radom obuhvaćene su obične diferencijalne jednačbe, prvog i viših redova kao i njihove pripadne metode rješavanja. Istaknute su linearne i homogene diferencijalne jednačbe i njihova opća rješenja. Kao metoda rješavanja diferencijalnih jednačbi, istaknuta je integralna, Laplaceova transformacija i pripadajuća svojstva. Laplaceova transformacija primjenjiva je za bilo koji odziv sustava. Često se javlja potreba za korištenjem Laplaceovih transformacija kod matematičke analize u grani elektrotehnike radi pojednostavljivanja kompleksnije problematike.

Obrađeni su sustavi običnih diferencijalnih jednačbi, definirana algebarska svojstva i istaknuti teoremi primjenjivi tokom rješavanja. Grafičkim prikazima u Matlab okruženju pojašnjen je utjecaj homogenih rješenja sustava diferencijalnih jednačbi na ponašanje modeliranog sustava i dugoročne ishode iz područja stabilnosti.

Primjenom diferencijalnog računa na sustave s memorijskim elementima, dokazan je značaj razmatranja električnih i elektromagnetskih sustava kroz homogena rješenja diferencijalnih sustava. Programskim paketom Matlab, prikazani su stvarni odzivi RLC i dinamičkog pogonskog sustava sukladno vremenskim konstantama prisutnim u homogenim rješenjima promjenjivih veličina.

Konačno, definirane su Kirchhoffove zakonitosti pisanja strujno-naponskih jednačbi električnih mreža koje se, ovisno o elementima mreže za koju se pišu, pretvaraju u sustave diferencijalnih jednačbi.

Razmatranjem primjene diferencijalnog računa na električne i elektromagnetske pojave, uočava se utjecaj rješenja sustava diferencijalnih jednačbi na predikciju i aproksimaciju trenutnog i potencijalnog ponašanja promatranog sustava.

## Literatura

- [1] Simmons, George F.; "Differential Equations: With Applications and Historical Notes", ,New York, McGraw-Hill Book Company, 1972.
- [2] Braun, M.;"Differential Equations and Their Applications An Introduction to Applied Mathematics", 4th ed.,New York City, Springer Publishing, 1993.
- [3] Boyce, W. E., DiPrima ,R. C.; "Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems", 9th ed., New York, J. Wiley, 2009.
- [4] Kamenarović, I.; "Matematika III. ", Rijeka, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, 1981.
- [5] Stojković, N., et al.; "Teorija Mreža i Linija ", Rijeka, Fintrade , & tours d.o.o., 2008.
- [6] Karris, S.T.; "Circuit analysis I : with MATLAB applications", Fremont, Calif., Orchard Publications, 2003.
- [7] Suljagic, S.; "Sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi", s Interneta, [http://www.grad.hr/nastava/matematika/mat3\\_99\\_00/node9.html#six](http://www.grad.hr/nastava/matematika/mat3_99_00/node9.html#six), 13.8.2023.
- [8] Matika, D.; "Elektromotorni pogoni“, Zagreb, Tehničko veleučilište u Zagrebu, 2022.
- [9] Predavanja iz kolegija Elektomotorni pogoni, prof.dr.sc. Neven Bulić, Tehnički fakultet Rijeka, 2011.
- [10] Škopljanac-Maćina ,F., Felja I.;"Prijelazne pojave · RLC serija spojena na istosmjerni izvor“, s Interneta, [https://osnove.tel.fer.hr/vjezbeoe/PP\\_3.htm?x=174](https://osnove.tel.fer.hr/vjezbeoe/PP_3.htm?x=174), 15.8.2023.
- [11] Uredništvo enciklopedije Britannica: "Gustav Kirchhoff, German physicist“, s Interneta, <https://www.britannica.com/science/Kirchhoffs-radiation-law>, 15.8.2023.
- [12] Tehnička i industrijska škola Ruđera Boškovića u Sinju; "Jednostavni RLC-spojevi“, s Interneta, "http://edit.trema.hr/projekti/2021/srednjiJS/Osnove%20elektrotehnike/RLC.html, 20.08.2023.

## Sažetak i ključne riječi

Ovim radom definirana su svojstva običnih diferencijalnih jednačbi, sustava diferencijalnih jednačbi i pripadajućih homogenih i općih rješenja. Analizirana je linearnost sustava diferencijalnih jednačbi i primjenjivost u matematičkoj analizi inženjerskih problema. Definirane su metode rješavanja sustava, s osvrtom na metode najčešće korištene u matematičkom računu koji se primjenjuje u elektrotehnici. Na matematičkim i egzaktnim primjerima prikazani su tokovi rješavanja navedenih metoda. U zadnjem poglavlju, sustavi diferencijalnih jednačbi stavljeni su u kontekst različitih primjena u elektrotehnici u vidu RLC krugova i pogonske dinamike.

Ključne riječi: obične diferencijalne jednačbe, sustavi običnih diferencijalnih jednačbi, strujno-naponske prilike, RLC krug, pogonska dinamika, napon, struja, elektrotehnika, pojave.

## Summary and key words

This paper defines the properties of ordinary differential equations, systems of differential equations and associated homogeneous and general solutions. The linearity of the system of differential equations and its applicability in the mathematical analysis of engineering problems are analyzed. The methods of solving the system are defined, with reference to the methods most often used in the mathematical calculations applied in electrical engineering. Mathematical and exact examples are used to show the solution processes of the mentioned methods. In the last chapter, systems of differential equations are placed in the context of various applications in electrical engineering in the form of RLC circuits and electrical drive dynamics.

Keywords: ordinary differential equations, systems of ordinary differential equations, current-voltage conditions, RLC circuit, driving dynamics, voltage, current, electrical engineering, phenomena.

## A Tablica Laplaceovih transformacija

Tablica A1. Tablica Laplaceovih transformacija

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$u(t) = 1$	$\frac{1}{s}$	$e^{\pm at}$	$\frac{1}{s \pm a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$	$\cosh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
$e^{\pm at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s \pm a)^2 + \omega^2}$	$e^{\pm at} \cos \omega t$	$\frac{s \pm a}{(s \pm a)^2 + \omega^2}$
$e^{\pm at} \sinh \omega t$	$\frac{\omega}{(s \pm a)^2 - \omega^2}$	$e^{\pm at} \cosh \omega t$	$\frac{s \pm a}{(s \pm a)^2 - \omega^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$te^{\pm at}$	$\frac{1}{(s \pm a)^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \sinh \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 - \omega^2)^2}$	$t \cosh \omega t$	$\frac{s^2 + \omega^2}{(s^2 - \omega^2)^2}$
$\delta(t)$	$1$	$\delta(t-a)$	$e^{\pm as}$