

Fourierova transformacija diskretnog signala

Tomljanović, Iva

Undergraduate thesis / Završni rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:190:308788>

Rights / Prava: [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-08-26**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Engineering](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

FOURIEROVA TRANSFORMACIJA DISKRETNOG SIGNALA

Rijeka, rujan 2023.

Iva Tomljanović
0069080825

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

FOURIEROVA TRANSFORMACIJA DISKRETNOG SIGNALA

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Rijeka, rujan 2023.

Iva Tomljanović
0069080825

Rijeka, 18. ožujka 2022.

Zavod: **Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike**
Predmet: **Inženjerska matematika ET**
Grana: **1.01.07 primijenjena matematika i matematičko modeliranje**

ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Iva Tomljanović (0069080825)**
Studij: **Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike**

Zadatak: **Fourierova transformacija diskretnog signala // Fourier transform of a discrete signal**

Opis zadatka:

U radu je potrebno definirati diskretnu Fourierovu transformaciju te opisati njena matematička svojstva. Posebnu pažnju treba posvetiti postupku izračunavanja diskretne Fourierove transformacije te komentirati potrebu za razvojem pripadnih algoritama.

Diskretnu Fourierovu transformaciju treba staviti u povijesni kontekst te u kontekst primjene u teoriji signala.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Iva Tomljanović

Zadatak uručen pristupniku: 21. ožujka 2022.

Mentor:



Doc. dr. sc. Ivan Dražić

Predsjednik povjerenstva za
završni ispit:



Prof. dr. sc. Viktor Sučić

IZJAVA

Sukladno članku 7. stavku 1. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku sveučilišnih prijediplomskih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 4. travnja 2023., izjavljujem da sam samostalno izradio završni rad prema zadatku preuzetom dana 21. ožujka 2022.

Rijeka, 11. rujna 2023.

Iva Tomljanović
Iva Tomljanović

Ovim putem željela bih se zahvalit svojim roditeljima na pružanju mogućnosti visokog obrazovanja te na bezuvjetnoj podršci kroz dobre i loše dane cijelog školovanja.

Veliku zahvalnost dugujem meni posebnoj i značajnoj osobi, mojoj Zori.

Hvala mojim prijateljima i najbližim ljudima na motivaciji, kao i kolegama na nesebičnoj pomoći uvijek kada je to bilo potrebno.

Posebno hvala izv. prof. dr. sc. Ivanu Dražiću na prihvaćanju uloge mentora te na pomoći prilikom pisanja ovog završnog rada.

Hvala Vam!

Sadržaj

1. Uvod	3
2. Matematički zapis signala	4
2.1. Klasifikacija signala	5
2.2. Energija i snaga signala	7
2.3. Operacije sa signalima	9
2.4. Modeli diskretnih signala	10
3. Diskretna Fourierova transformacija	14
3.1. Svojstva diskretne Fourierove transformacije	17
3.1.1. Linearnost	17
3.1.2. Periodičnost	18
3.1.3. Kružni pomak vremenskog niza	19
3.1.4. Kružni pomak spektra	20
3.1.5. Svojstvo vremenskog obrata	21
3.1.6. Svojstva simetrije	22
3.1.7. Transformacija kompleksno konjugiranog niza	24
3.1.8. Kružna konvolucija u vremenskoj domeni	24
3.1.9. Zbroj i razlika nizova	25
3.1.10. Dodavanje nula u niz	26
3.1.11. Parsevalov teorem	26
3.2. DFT u dvije dimenzije	27
3.3. Brza Fourierova transformacija (FFT)	28
4. Primjena diskretne Fourierove transformacije	29
5. Zaključak	32
Bibliografija	33
Sažetak i ključne riječi	34
Summary and key words	35

Dodatak A Matlab kodovi

1. Uvod

Matematika, kao znanost, primjenjuje se u mnogim područjima života te predstavlja osnovno sredstvo za rješavanje raznih inženjerskih zadataka i projekata.

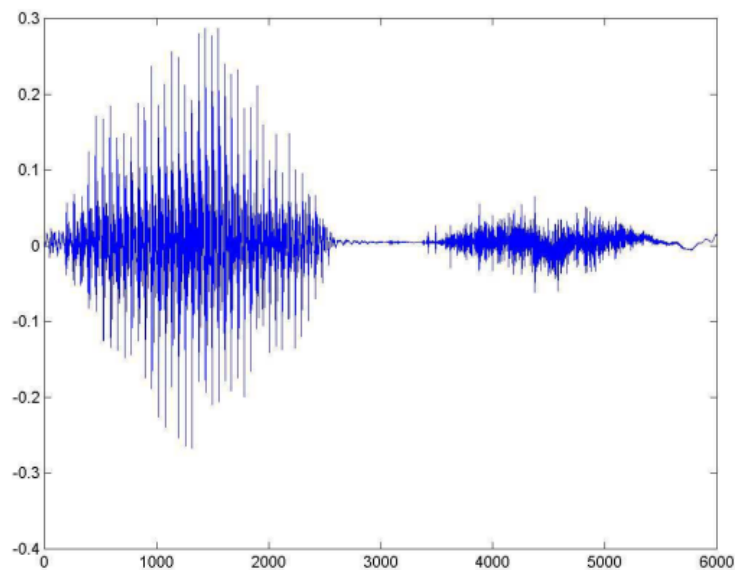
Tema ovog rada je Fourierova transformacija diskretnih signala, čija je osnovna zadaća prebacivanje signala iz vremenske u frekvencijsku domenu. Diskretna Fourierova transformacija ima široku primjenu u obradi signala, a najčešće se koristi za obradu digitalnih signala pomoću algoritma brze Fourierove transformacije, FFT (Fast Fourier Transform, engl.). Fourierova transformacija, poznata nam je zahvaljujući francuskom fizičaru i matematičaru Jean-Baptiste Joseph Fourieru. Njegov objavljeni rad o protoku topline, pruža nam temelj za ono što danas predstavlja Fourierovu transformaciju. Navedena transformacija temelji se na ideji, da svaku periodičku funkciju možemo prikazati kao sumu sinusnih funkcija različitih amplituda.

Prije opisa diskretne Fourierove transformacije upoznat ćemo se s definicijom i klasifikacijom signala te pojedinim obilježjima i osnovnim modelima diskretnih signala. U nastavku rada, detaljnije opisujemo i izvodimo diskretnu Fourierovu transformaciju te ju prikazujemo kroz jednostavne matematičke primjere. Nadalje, definiramo njezina matematička svojstva, poput linearnosti, periodičnosti, simetrije, itd.

Diskretna Fourierova transformacija ima široku primjenu u raznim područjima života. Po mnogima, jedna od najvažnijih djelatnosti gdje se primjenjuje, je medicina. Sam kraj ovog rada, donosi nekoliko primjera njezine primjene u medicinskoj dijagnostici.

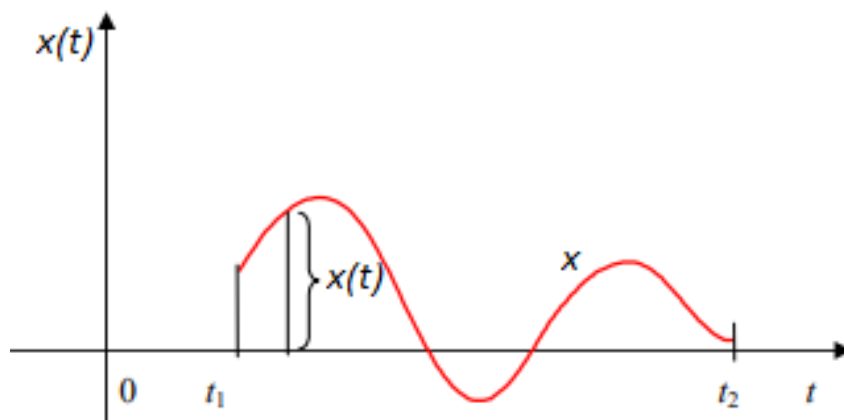
2. Matematički zapis signala

Na svakom koraku susrećemo se sa signalima, bili oni prirodnog ili umjetnog podrijetla. Obično se signali definiraju kao funkcija po nezavisnoj varijabli, najčešće prostora ili vremena, koja sadrži informacije promatranog fenomena. Signali, u vremenskoj domeni, s kojima se često susrećemo su brzina, temperatura, tlak, napon, struja, sila te govor, kao najčešće korišteni oblik signala u životu. Jednostavnije, signal je skup podataka ili informacija.



Slika 2.1. Grafički prikaz govora kao signala, izvor: [1]

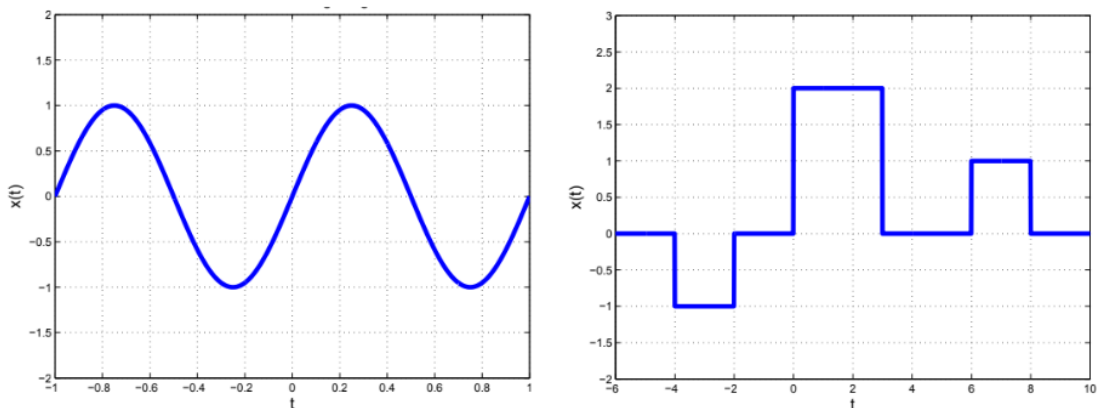
Signal, prikazan na slici 2.2., možemo matematički jednostavno definirati kao $x(t)$, s čime označavamo trenutnu vrijednost signala x u trenutku t . t se proteže preko cijele vremenske osi $t \in \mathbf{R}$, osim ako nije posebno naznačeno. \mathbf{R} predstavlja skup realnih brojeva, iz čega zaključujemo, da domena signala pripada skupu realnih brojeva. [9]



Slika 2.2. Grafički prikaz signala $x(t)$, izvor:[9]

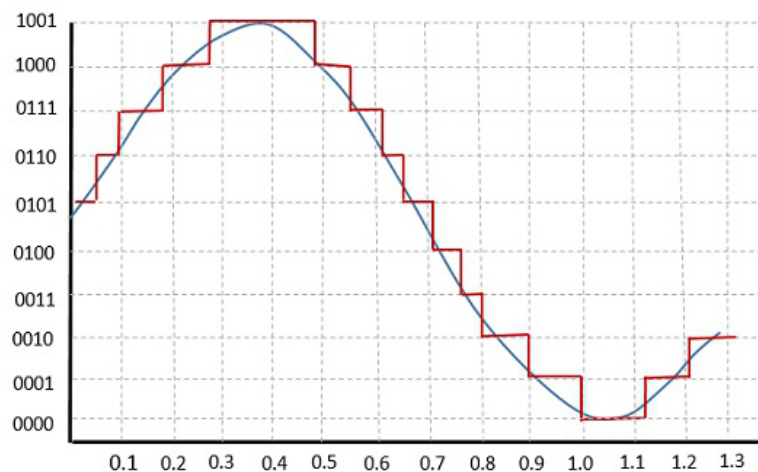
2.1. Klasifikacija signala

U svakodnevnom životu susrećemo se s analognim i digitalnim signalima, čiji prikaz možemo vidjeti na slici 2.3. Najčešće prisutni oblici analognog signala u svakodnevnicu su temperatura, zvuk i tlak zraka, dok su stanje prekidača (uključen/isključen) i binarni kod u računalima (0,1) primjeri digitalnog signala. Razlika između ove dvije vrste signala temelji se na načinu prijenosa informacija. Analogni signali mogu poprimiti beskonačno mnogo različitih vrijednosti amplitude, za razliku od digitalnih, koji mogu poprimiti samo konačan broj vrijednosti amplitude. Zbog svoje pouzdanosti i lakše obrade, digitalni signali su češće korišteni, što ne znači da analogni signali nemaju i dalje važnu ulogu u mnogim aplikacijama.



Slika 2.3. Prikaz analognog i digitalnog signala, izvor:[1]

Prijelaz iz analognog u digitalni signal naziva se kvantizacija, što je prikazano na slici 2.4. Proces kvantizacije važan je korak u digitalizaciji analognih signala i ključan je za prijenos i obradu signala u digitalnom formatu.

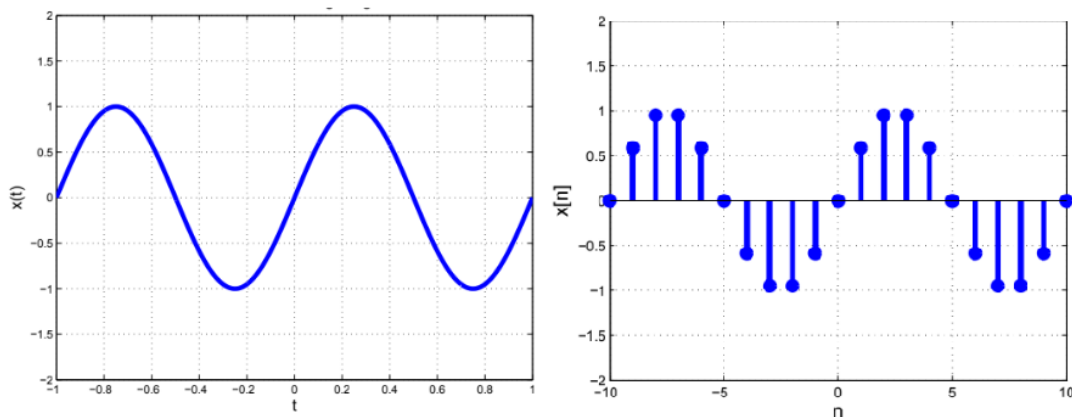


Slika 2.4. Prikaz kvantizacije signala, izvor:[3]

Ukoliko signal ima neprekidnu domenu, $t \in \mathbf{R}$, radi se o kontinuiranom signalu, čiju vrijednost u trenutku t označavamo s $x(t)$.

U slučaju da signal ima diskretnu domenu, govorimo o diskretnom signalu, čiju vrijednost označavamo s $x[n]$.

Kontinuirani signali ne moraju biti neprekidni, ali ih je za njihovu digitalnu obradu neophodno diskretizirati. Diskretizacija, tj. metoda dobivanja diskretnog signala prikazana je na slici 2.5.



Slika 2.5. Prikaz diskretizacije signala, izvor:[1]

Diskretnan signal $x[n]$ dobivamo uzorkovanjem neprekidnog signala $x_c(t)$ prema formuli:

$$x[n] = x_c(nT), -\infty < n < \infty, \quad (2.1)$$

gdje T predstavlja period uzorkovanja, a njegova recipročna vrijednost je frekvencija uzorkovanja koja iznosi:

$$f_s = \frac{1}{T}. \quad (2.2)$$

Frekvenciju uzorkovanja možemo prikazati i kao:

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.3)$$

Važna podjela signala vrši se na determinističke i stohastičke ili slučajne signale. Mnogi realni signali koriste kombinaciju determinističke i stohastičke komponente. Za primjer možemo uzeti glazbeni signal, koji može imati određene determinističke komponente, poput melodije i stohastičke komponente, kao što je šum. Ukoliko odziv signala u trenutku t ovisi isključivo o pobudi prije tog trenutka, govorimo o kauzalnom signalu za koji vrijedi:

$$x(t) = 0, t < 0, \quad (2.4)$$

tj. ako vrijedi da je:

$$x(t) = 0, t \geq 0, \quad (2.5)$$

onda je signal antikauzalan. Postoji i nekauzalan signal, koji počinje prije trenutka $t = 0$. Signale možemo još podijeliti na periodičke i neperiodičke signale, čiji primjer vidimo na slici 2.3.

Signal $x(t)$ je periodičan, ako za konstantu $T_0 > 0$ vrijedi:

$$x(t) = x(t + T_0). \quad (2.6)$$

2.2. Energija i snaga signala

Veličina nekog signala izražava se njegovom energijom ili snagom. Signale energije označavat ćemo s velikim slovom E , a signale snage s velikim slovom P . Energija signala E predstavlja mjeru ukupne energije, koju signal sadrži ili prenosi tijekom nekog vremena te je uvijek pozitivna vrijednosti. Snaga signala P predstavlja koliko energije signal nosi u prosjeku tijekom nekog vremena.

Ako je snaga signala jednaka nuli ($P = 0$), a $0 < E < \infty$, onda je riječ o signalu energije.

Definicija 2.1. Energija kontinuiranog signala definirana je izrazom:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt, \quad (2.7)$$

gdje x^* predstavlja konjugat signala.

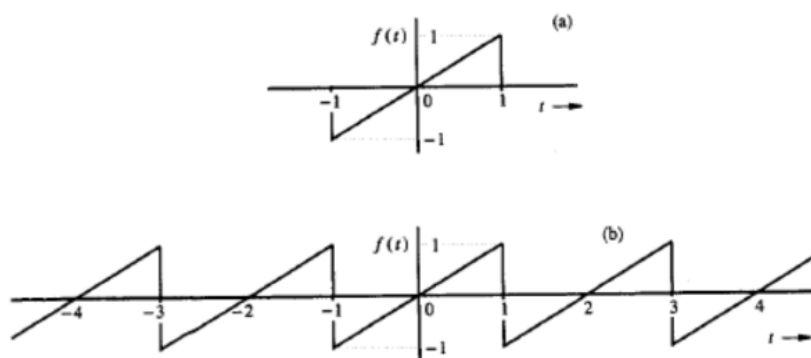
Ako je energija signala beskonačna ($E = \infty$), a $0 < P < \infty$, onda je riječ o signalu snage.

Definicija 2.2. Snaga kontinuiranog signala definirana je izrazom:

$$P = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} x(t)x(t)^* dt = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} |x(t)|^2 dt, \quad (2.8)$$

gdje L predstavlja interval unutar kojeg računamo snagu signala.

Primjer 2.1. Vremenski kontinuirani signali prikazani su na slici 2.6. Odredimo odgovarajuće mjere signala. Primjer je preuzet iz [1]. Energiju signala za a) dio zadatka možemo izračunati



Slika 2.6. Vremenski kontinuirani signali, izvor:[1]

prema izrazu:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}. \quad (2.9)$$

Snagu signala možemo izračunati prema izrazu:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\int_{-1}^1 t^2 dt \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{3T} = 0 \quad (2.10)$$

Zadani signal je neperiodičan signal. Možemo zaključiti da je zadani signal, signal energije, što smo analitički i dokazali ($P = 0$).

Za b) dio zadatka energija signala $E \rightarrow \infty$ pošto je signal periodičan te se srednja snaga periodičnog signala može izračunati prema izrazu:

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{1}{2} \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) \right) = \frac{1}{3}. \quad (2.11)$$

Možemo zaključiti da je zadani signal, signal snage ($E \rightarrow \infty$)

Osim energije i snage vremenski kontinuiranog signala, definirat ćemo energiju i snagu vremenski diskretnog signala.

Definicija 2.3. Energija vremenski diskretnog signala $x[n]$ definirana je izrazom:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2. \quad (2.12)$$

Definicija 2.4. Snaga vremenski diskretnog signala $x[n]$ definirana je izrazom:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2. \quad (2.13)$$

Primjer 2.2. Izračunajmo energiju i snagu signala $x[n]$, prikazanog na slici 2.8. Primjer je preuzet iz [5].

Energija signala može se izračunati prema izrazu:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-3}^3 |x[n]|^2 \quad (2.14)$$

$$= |-9|^2 + |-6|^2 + |-3|^2 + |3|^2 + |6|^2 + |9|^2 = 252. \quad (2.15)$$

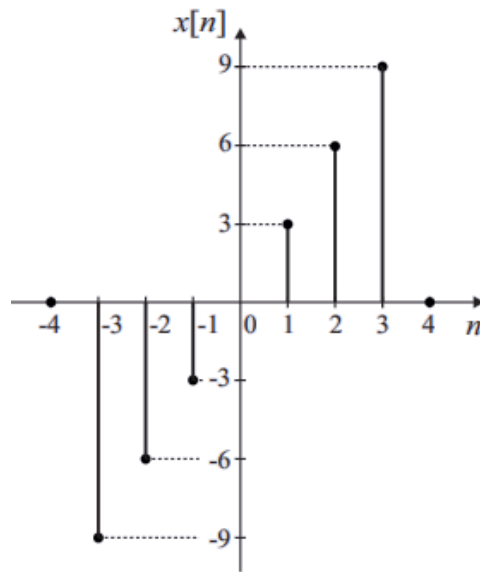
Snaga signala može se izračunati prema izrazu:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-3}^3 |x[n]|^2 \quad (2.16)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{252}{2N+1} \rightarrow 0, \quad (2.17)$$

čime zaključujemo da je zadani signal, signal energije ($P = 0$).

Signali mogu biti ili signali energije ili signali snage. Periodični i stohastički signali su najčešće signali snage, dok su neperiodični i deterministički signali najčešće signali energije.



Slika 2.7. Prikaz diskrenog signala $x[n]$, izvor:[5]

2.3. Operacije sa signalima

U ovom poglavlju, definirat ćemo osnovne operacije signala, kao što su vremenski pomak i skaliranje signala. Navedene operacije detaljnije ćemo objasniti i opisati primjenjujući literaturu [1] i [2].

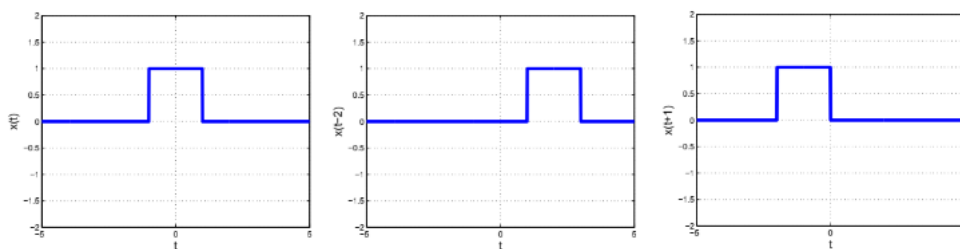
Signale možemo skalirati ili pomicati za neki iznos, a da im pri tome osnovni oblik ostane isti.

Definicija 2.5. Vremenski pomak signala $y(t)$ definira se prema izrazu:

$$y(t) = x(t - t_0), t_0 \in \mathbb{R}, \quad (2.18)$$

pri čemu za $t_0 > 0$ originalni signal pomičemo udesno, a za $t_0 < 0$ originalni signal pomičemo ulijevo.

Primjer 2.3. Vremenski pomak signala prikazan je na slici 2.8. Slika lijevo prikazuje originalni signal $y(t)$. Na slici u sredini imamo prikaz originalnog signala $y(t)$ pomaknutog za 2 udesno, dok slika desno prikazuje pomak originalnog signala $y(t)$ za 1 ulijevo.



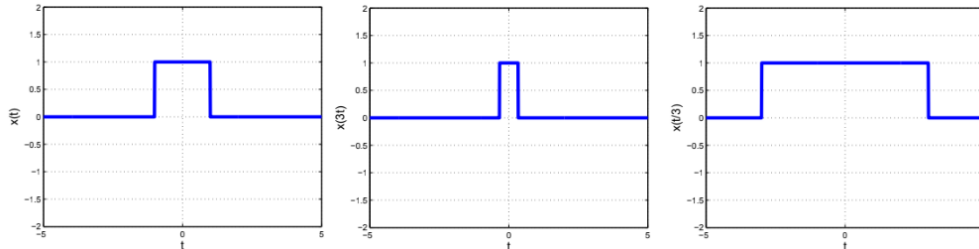
Slika 2.8. Vremenski pomak signala, izvor:[1]

Osim vremenskog pomaka signala, definirati ćemo i operaciju skaliranja signala.

Definicija 2.6. Skaliranje signala $y(t)$ definira se kao:

$$y(t) = x(at), a \in \mathbb{R}, \quad (2.19)$$

gdje za $a > 1$ imamo stezanje ili kompresiju originalnog signala $y(t)$, a za $a < 1$ imamo rastezanje ili ekspanziju originalnog signala $y(t)$.



Slika 2.9. Signali: $y(t)$, $y(3t)$, $y(t/3)$, izvor:[1]

2.4. Modeli diskretnih signala

Važnu ulogu u analiziranju signala i sustava imaju osnovni signali, kao što su jedinična stepenica, jedinična kosina, jedinični impuls i eksponencijalni signal.

U nastavku ćemo detaljnije opisati neke od osnovnih diskretnih signala, od kojih su jedinični impuls i jedinična stepenica najznačajniji.

Vrlo često korišteni signal je jedinična stepenica (Heavisideova funkcija), koja ima amplitudu jednaku jedinici u izvoru, a inače joj je vrijednosti jednaka nuli. Drugim riječima, ova funkcija "skoči" s vrijednosti 0 na 1 u trenutku $t = 0$. Navedena funkcija se koristi za definiranje kauzalnih signala i signala, koji se uključuju u određeno vrijeme i ostaju uključeni neodređeno vrijeme.

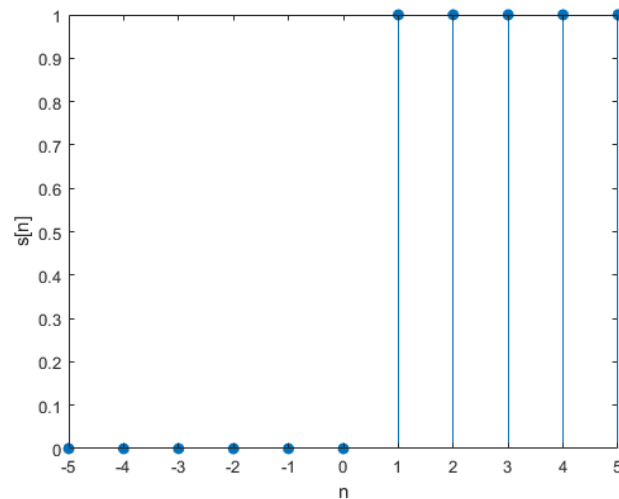
Definicija 2.7. Vremenski diskretnu jediničnu stepenicu $s[n]$ definiramo kao:

$$s[n] = \begin{cases} 1, & \text{za } n \geq 0 \\ 0, & \text{za } n < 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

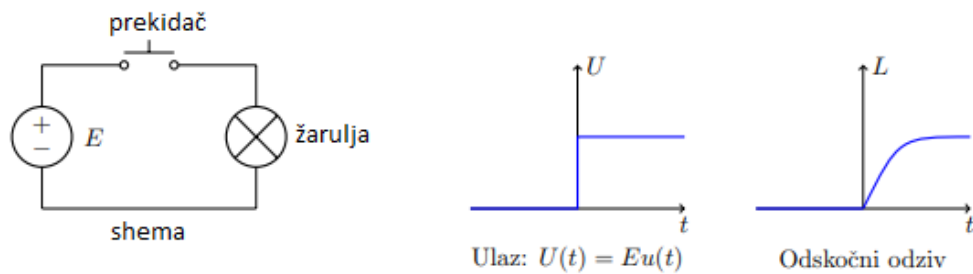
Na slici 2.10. vidimo grafički prikaz jedinične stepenice, tj. step funkcije, generiran u programskom jeziku "Matlab".

Primjer 2.4. Ukoliko promatramo žarulju s nepoznatim unutrašnjim sklopom spojenu u strujni krug s baterijom, napona E , napon na žarulji može se promatrati kao ulazni signal sustava, a intezitet svjetla L koji žarulja emitira kao izlazni signal. U tom slučaju, napon možemo smatrati Heavisideovom funkcijom amplitude E , pri čemu trenutak $t = 0$ predstavlja uključenje prekidača. Ovaj primjer prikazan je na slici 2.11.

Pomoću jedinične stepenice, možemo definirati vremenski diskretnu jediničnu kosinu prikazanu na slici 2.12.



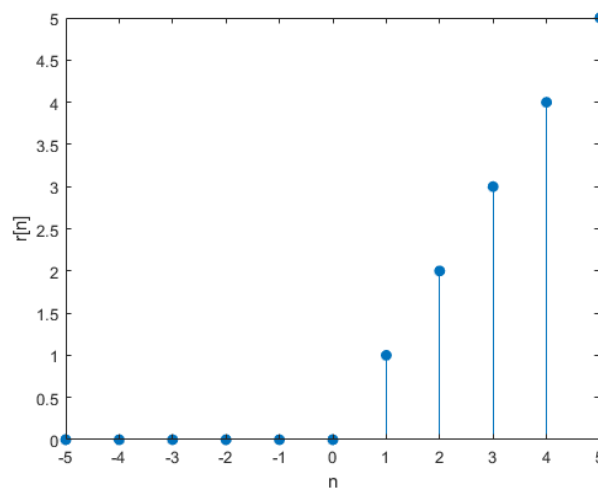
Slika 2.10. Diskretna jedinična stepenica, izvor: Izradio autor



Slika 2.11. Prikaz sheme žarulje i njezin odskočni odziv, izvor:[10]

Definicija 2.8. Jedinična kosina $r[n]$ definira se kao:

$$r[n] = n \cdot s[n] = \begin{cases} n, & \text{za } n \geq 0 \\ 0, & \text{za } n < 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

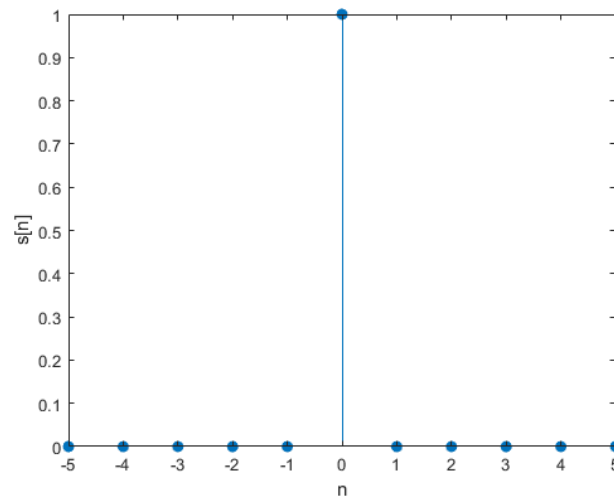


Slika 2.12. Diskretna jedinična kosina, izvor: Izradio autor

Za funkcije koje se javljaju u vrlo kratkim vremenskim intervalima kao što je udar groma, koristi se Diracova δ funkcija (jedinični impuls). Ova funkcija u ishodištu ima amplitudu jednaku jedinici, a inače joj je vrijednost jednaka nuli.

Definicija 2.9. δ funkcija prikazana na slici 2.14. definirana je kao:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & \text{za } n = 0 \\ 0, & \text{za } n \neq 0 \end{cases} \quad (2.22)$$



Slika 2.13. Jedinični impuls, izvor: Izradio autor

Osim prethodno navedenih i definiranih modela diskretnih signala, definirat ćemo još kompleksnu eksponencijalu prema literaturi. [12]

Pobuda kompleksnom eksponencijalom koristi se za analizu sustava u frekvencijskoj domeni. Definirajmo najprije kompleksnu eksponencijalu kao:

$$x(t) = e^{st}, \quad (2.23)$$

gdje s predstavlja slobodnu realnu komponentu.

Definicija 2.10. Općeniti oblik diskretne kompleksne eksponencijale dobiva se otipkavanjem kontinuirane kompleksne eksponencijale s periodom otipkavanja T_s :

$$x[n] = x(nT_s) = e^{sT_s n}. \quad (2.24)$$

Otipkavanje u obradi signala predstavlja pretvaranje kontinuirane veličine u diskretnu. Ako uvrstimo u izraz (2.24) da je kompleksna frekvencija $s = \sigma + j\omega$ dobijemo:

$$x[n] = e^{(\sigma + j\omega)T_s n} = e^{\sigma T_s n} e^{j\omega T_s n} \quad (2.25)$$

$$= e^{\sigma T_s n} (\cos \omega T_s n + j \sin \omega T_s n). \quad (2.26)$$

Ovisno o kompleksnoj frekvenciji s imamo slučajeve konstantnog ($s = 0$), eksponencijalnog ($\omega = 0$) i harmonijskog signala ($\sigma = 0$).

Ako je $\sigma=0$ dobivamo diskretnu kompleksnu eksponencijalu:

$$x[n] = e^{j\omega T_s n} = e^{j\Omega n} = \cos \Omega n + j \sin \Omega. \quad (2.27)$$

gdje je $\Omega = \omega T_s$, [rad/s].

Primjer 2.5. Odredimo realni i imaginarni dio kompleksnog eksponencijalnog signala ako je $s = 0,5 + j2\pi$. Primjer je preuzet iz [12]. Kompleksna eksponencijala je oblika:

$$x(t) = e^{st} = e^{0,5+j2\pi} = e^{0,5t}(\cos 2\pi t + j \sin 2\pi t), \quad (2.28)$$

iz čega slijedi:

$$R_e\{x(t)\} = e^{0,5t} \cos 2\pi t, \quad (2.29)$$

$$I_m\{x(t)\} = e^{0,5t} \sin 2\pi t. \quad (2.30)$$

Budući da je $\sigma = 0$, amplitude sinusa i kosinusa rastu s vremenom.

3. Diskretna Fourierova transformacija

Ljudsko uho razdvaja dolazne zvučne valove na njihove sastavne frekvencije mehaničkim putem iskorištavajući prirodne rezonancije. Naime, različiti živčani završeci u našim ušima osjetljivi su na različite frekvencije. Ali također je moguće matematički analizirati zvuk kako bi se odredile njegove sastavne frekvencije. To se može učiniti zahvaljujući metodi koju je osmislio francuski matematičar i fizičar iz 18. stoljeća po imenu Jean-Baptiste Joseph Fourier, poznatij kao Fourierova transformacija.



Slika 3.1. Jean-Baptiste Joseph Fourier, izvor: [4]

Fourier je zaključio da se svaki valoviti signal, bez obzira koliko složen, može prikazati zbrajanjem mnogo različitih valova. Drugim riječima, komplicirane periodične funkcije, bilo kontinuirane ili diskontinuirane, mogu se proširiti i napisati kao jednostavni valovi matematički predstavljeni sinusima i kosinusima.

Stoga, diskretna Fourierova transformacija je jedan od najvažnijih algoritama danas. Pripada u podvrstu Fourierove analize te se koristi kada promatrani signal nije vremenski kontinuirani, već diskretan. Jednostavnije rečeno, kako bismo dobili diskretni signal, kontinuirani signal u vremenskoj domeni se uzorkuje na nekom intervalu s N uzoraka kako bismo dobili diskretni signal, a zatim pomoću DFT taj signal prebacujemo u frekvencijsku domenu.

DFT ima široku primjenu u obradi signala te se koristi za kompresiju slike i zvuka, kao i za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačini.

Analizirajmo sada diskretnu Fourierovu transformaciju.

DFT je zapravo transformacija skupa od N uzoraka i nije kontinuirana funkcija, te predstavlja uzorke spektra $X(e^{j\omega})$ u točkama $\omega = \frac{2k\pi}{N}$, koji se ponavljaju s $2\pi r$. Kao što ćemo primjetiti Fourierov red periodičkog niza, predstavljen je DFT-om konačnog niza.

Uzmimo periodičan niz $[x_p(n)]$ s periodom N tako, da je $x_p(n) = x_p(n + r \cdot N)$, gdje je r bilo koji cijeli broj. Fourierov red zapravo predstavlja zbroj harmonijskih eksponencijalnih skupova, koji su cijelobrojni višekratnici osnovne frekvencije $\frac{2\pi}{N}$ periodičnog niza $[x_p(n)]$. Stoga se, periodičan niz $x_p(n)$ može izraziti konačnim Fourierovim redom.

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (3.1)$$

gdje je $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$, k je cijeli broj, a $X_p(k)$ označava spektar periodičnog niza $x_p(n)$. Ako želimo izračunati koeficijente $X_p(k)$ Fourierovog reda iz samog periodičnog niza $x_p(n)$ to možemo učiniti standardnim postupkom, odnosno nakon množenja izraza (3.1) s $e^{-j\frac{2\pi r}{N}n}$, a nakon sumacije od 0 do $N - 1$ dobivamo:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi r}{N}n} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}. \quad (3.2)$$

Nakon promjene redosljeda zbrajanja dobivamo:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi r}{N}n} = \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) \cdot \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} \right]. \quad (3.3)$$

Ovaj izraz je pojednostavljen u slučajevima podudarnosti signala s fazorom $e^{-j\frac{2\pi r}{N}n}$, kada je:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} = \begin{cases} 1 & \text{za } kr = mn, m, n \text{ cijeli brojevi} \\ 0, & \text{za } inae \end{cases} \quad (3.4)$$

Gornji izraz je pojednostavljen:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi r}{N}n} = X_P(r). \quad (3.5)$$

Budući da smo zbog općenitosti i periodičnosti uveli konstantu r možemo koeficijente $X_p(k)$ (u jednadžbi (3.1)) Fourierovog reda izračunati iz $x_p(n)$ koristeći izraz:

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}. \quad (3.6)$$

Skup koeficijenata Fourierovog reda $X_p(k)$ stoga je periodičan s periodom N .

Ovi koeficijenti su određeni za konačne nizove u skladu s jednadžbom (3.6) za $k = 0$ do $N - 1$, van toga, njihova vrijednost je 0. Iz svega ovoga vidimo dualnost između vremenske i frekvencijske

domene u definiranju Fourierovog reda periodičnog niza. Jednadžbe (3.1) i (3.6) su stoga par i nazivamo ih parom diskretnog Fourierovog reda periodičnog niza. Obično, radi jednostavnosti, kompleksni eksponent označavamo s:

$$W_n = e^{-j\frac{2\pi}{N}}. \quad (3.7)$$

Stoga možemo jednostavnije zapisati kao:

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot (W_n)^{kn}, \quad (3.8)$$

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) \cdot W_n^{-kn}. \quad (3.9)$$

Primjer 3.1. Odredimo diskretnu Fourierovu transformaciju sljedećih signala duljine $N = 4$. Primjer je preuzet iz [13].

$$x(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), n = 0, 1, 2, 3, \quad (3.10)$$

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad (3.11)$$

Za prvi signal krećemo od formule za diskretnu Fourierovu transformaciju diskretnog signala koja glasi:

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}. \quad (3.12)$$

Duljina signala jen zadana u zadatku i iznosi $N = 4$, pa je traženi spektar:

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^3 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} = 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}k \cdot 0} + 0 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}k \cdot 1} - 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}k \cdot 2} + 0 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}k \cdot 3}. \quad (3.13)$$

Koeficijenti spektra iznose:

$$X_p(0) = 0, X_p(1) = 2, X_p(2) = 0, X_p(3) \quad (3.14)$$

$$= 1 - 1 \cdot e^{-j\pi k} = 1 - (-1)^k, k = 0, 1, 2, 3. \quad (3.15)$$

Na slici 3.2. prikazan je amplitudni i fazni spektar ovog signala.

Kod drugog dijela zadatka vrijedi:

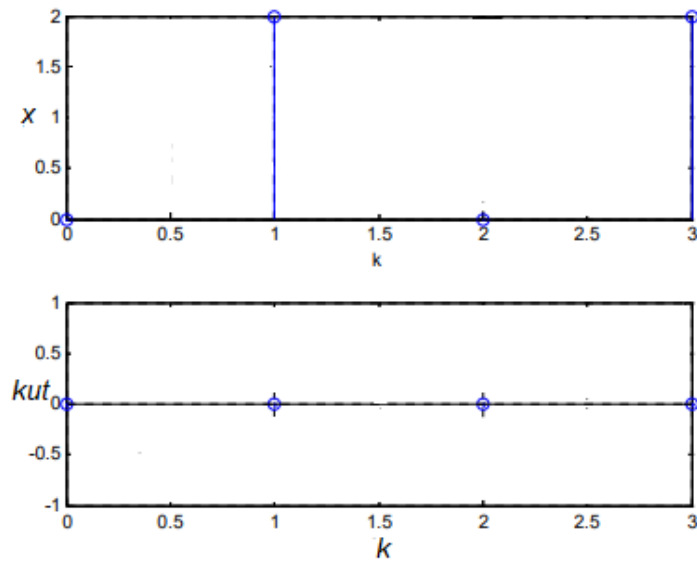
$$X_p(k) = \sum_{n=0}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} \quad (3.16)$$

$$= 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}k \cdot 0} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{4}k \cdot 1} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{2\pi}{4}k \cdot 2} + \frac{1}{8}e^{-j\frac{2\pi}{4}k \cdot 3}. \quad (3.17)$$

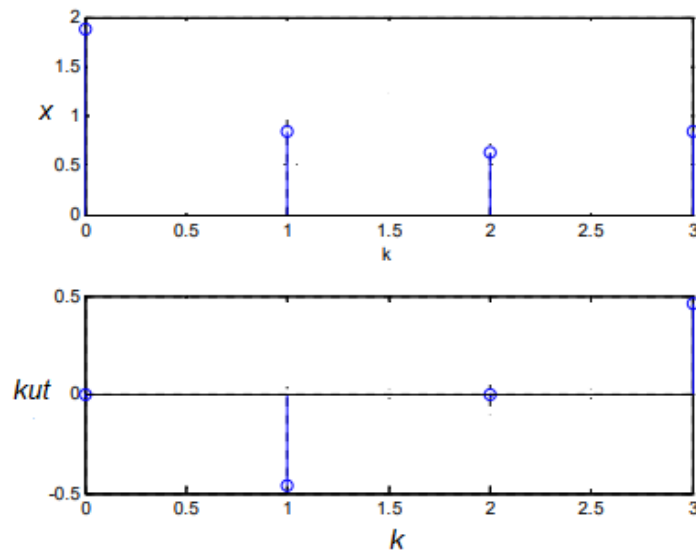
Uvršavanjem moguće varijable k , koeficijenti spektra su sljedeći:

$$X_p(0) = \frac{15}{8}, X_p(1) = \frac{3}{4} - \frac{3}{8}j, X_p(2) = \frac{5}{8}, X_p(3) = \frac{3}{4} + \frac{3}{8}j. \quad (3.18)$$

Na slici 3.3. prikazan je amplitudni i fazni spektar ovog signala.



Slika 3.2. Prikaz amplitudnog i faznog spektra za prvi dio zadatka, izvor:[13]



Slika 3.3. Prikaz amplitudnog i faznog spektra za drugi dio zadatka, izvor:[13]

3.1. Svojstva diskretne Fourierove transformacije

Diskretna Fourierova transformacija ima široku primjenu zbog dobrih matematičkih svojstava. U nastavku su opisana i dokazana njezina osnovna svojstva. Detaljniji opis svojstava može se pronaći u literaturi [7] prema kojoj je obrađeno ovo poglavlje.

3.1.1. Linearnost

Svojstvo linearnosti vrijedi u frekvencijskoj i vremenskoj domeni te podrazumijeva da je DFT linearne kombinacije određenog broja signala, jednaka linearnoj kombinaciji DFT pojedinačnih signala.

Teorem 3.1. *Neka su zadana dva vremenski diskretna signala $u(n)$ i $v(n)$ jednakih duljina. Tada vrijedi da je:*

$$DFT\{gu(n) + hv(n)\} \Leftrightarrow gU(k) + hV(k). \quad (3.19)$$

U slučaju da $u(n)$ i $v(n)$ nisu jednakih duljina, pretpostavlja se da im je pridružen dovoljan broj nula kako bi im duljine bile jednake.

Dokaz. Diskretna Fourierova transformacija izraza $gu(n) + hv(n)$, gdje u i v predstavljaju realne ili kompleksne konstante glasi:

$$DFT\{gu(n) + hv(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} (gu(n) + hv(n))e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (3.20)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} gu(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + \sum_{n=0}^{N-1} hv(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (3.21)$$

Koeficijente g i h možemo izvući izvan sume:

$$g \sum_{n=0}^{N-1} u(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + h \sum_{n=0}^{N-1} v(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad (3.22)$$

te dobijemo početnu jednakost (3.19). □

3.1.2. Periodičnost

Teorem 3.2. *Funkcija $y(n)$ je periodična s periodom N ako je $y(n) = y(n + N)$.*

Pretpostavlja se da su ulazni signali i njihove DFT periodične. Diskretan kompleksni eksponent $e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$, periodičan je s periodom N .

Dokaz. Krećemo od izraza za DFT:

$$DFT\{y(n)\} = Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}. \quad (3.23)$$

Uvrstimo li da je $k = k + N$ dobijemo:

$$Y(k + N) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+N)n} \quad (3.24)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} y(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = Y(k), \quad (3.25)$$

gdje je $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

Ako u izraz:

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) e^{j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad (3.26)$$

uvrstimo da je $n = n + N$ dobijemo:

$$y(n + N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) e^{j \frac{2\pi}{N} (n+N)k} \quad (3.27)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) e^{j \frac{2\pi}{N} nk} e^{j \frac{2\pi}{N} Nk}. \quad (3.28)$$

Prema Euleru vrijedi da je:

$$e^{j2\pi k} = \cos(2\pi k) + j \sin(2\pi k) = 1 \quad (3.29)$$

te dobijemo:

$$y(n + N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) e^{j \frac{2\pi}{N} Nk} = y(n). \quad (3.30)$$

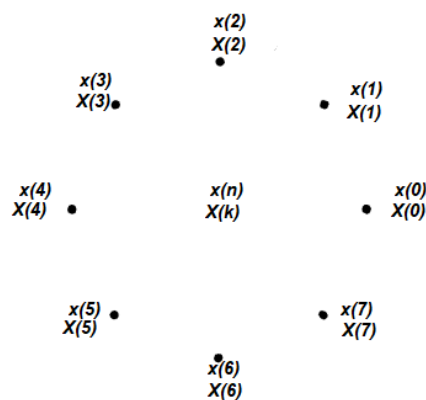
□

3.1.3. Kružni pomak vremenskog niza

Ako promatramo niz,

$$x(n) = \{x(0), x(1), x(2), x(3), x(4), x(5), x(6), x(7)\}, \quad (3.31)$$

prikazan na slici 3.4.

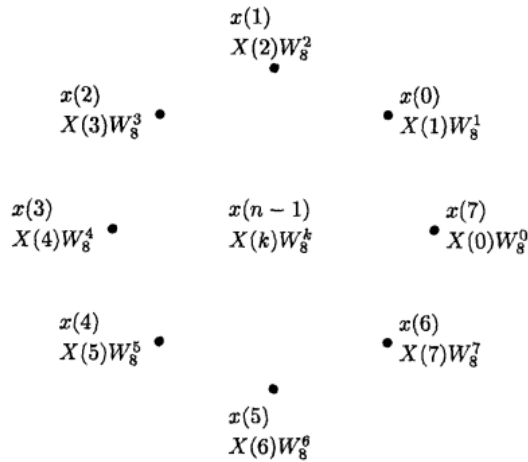


Slika 3.4. Vremenski niz $x(n)$ i njegov DFT $X(k)$ s periodom 8, izvor:[7]

Kružni pomak niza kako bi se dobio pomaknuti niz

$$x(n - 1) = \{x(7), x(0), x(1), x(2), x(3), x(4), x(5), x(6)\} \quad (3.32)$$

znači rotaciju kruga za jedan pomak u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu kako je prikazano na slici 3.5.



Slika 3.5. Pomaknuti niz $x(n-1)$, izvor:[7]

Niz $x(n+m)$ može se dobiti rotiranjem kruga na slici 3.4. u smjeru kazaljke na satu za m položaja. Ako postoji N vrijednosti u nizu, tada su mogući samo $N-1$ jedinstveni pomaci. Signal $x(n-m)$ je signal koji kasni za m uzoraka i $x(n+m)$ je signal koji prethodi za m uzoraka u odnosu na signal $x(n)$. Zamjenom $n = n-m$ u IDFT dobivamo:

$$x(n-m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} (n-m)k} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi}{N} mk} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad (3.33)$$

$x(n)$ i $e^{j \frac{2\pi}{N} nk}$ su periodične funkcije, gdje je $n = 0, 1, \dots, N-1$, te vrijedi:

$$x(n \pm m) \Leftrightarrow e^{\pm j \frac{2\pi}{N} mk} X(k). \quad (3.34)$$

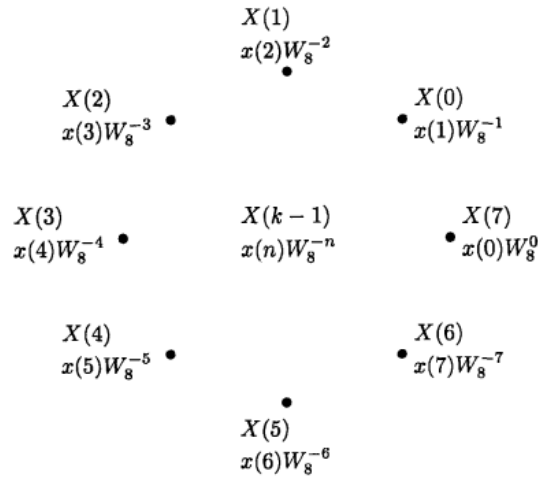
Pri pomicanju valnog oblika, njegov oblik i amplituda ostaju nepromijenjeni, stoga pomak rezultira samo promjenom faznog pomaka u frekvencijskoj domeni. Kašnjenje signala $x(n)$ za m uzoraka stvara fazni pomak od $-\frac{2\pi}{N} mk$ ($\frac{2\pi}{N} mk$) radijana.

3.1.4. Kružni pomak spektra

Suprotnost prethodnog svojstava kojeg smo definirali je da ako se signal u vremenskoj domeni pomnoži kompleksnom eksponencijalnom funkcijom da bi se dobio novi signal u vremenskoj domeni, tada je spektar novog signala jednak originalnom signalu koji je kružno pomaknut za m pozicija.

$$e^{\pm j \frac{2\pi}{N} mn} \Leftrightarrow X(k \pm m) \quad (3.35)$$

Slika 3.6. prikazuje spektar koji je pomaknut za jednu poziciju u smjeru suprotnom od smjera



Slika 3.6. Zakašnjeli DFT niz $X(k-1)$, izvor:[7]

kazaljke na satu.

Zamjenimo li $k = k - m$ sa u DFT, dobivamo:

$$X(k - m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} n(k-m)} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{j \frac{2\pi}{N} nm} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad (3.36)$$

$k = 0, 1, \dots, N - 1$.

3.1.5. Svojstvo vremenskog obrata

Vremenski obrat niza

$$x(n) = \{x(0), x(1), x(2), x(3), x(4), x(5), x(6), x(7)\}, \quad (3.37)$$

je

$$x(8 - n) = \{x(0), x(7), x(6), x(5), x(4), x(3), x(2), x(1)\} \quad (3.38)$$

što je prikazano na slici 3.7., gdje su vrijednosti niza postavljene u smjeru kazaljke na satu počevši od $x(0)$. Ako je $x(n)$ niz u vremenskoj domeni, njegova Fourierova transformacija u frekvencijskoj domeni jednaka je $X(k)$ te vrijedi:

$$x(N - n) \Leftrightarrow X(N - k). \quad (3.39)$$

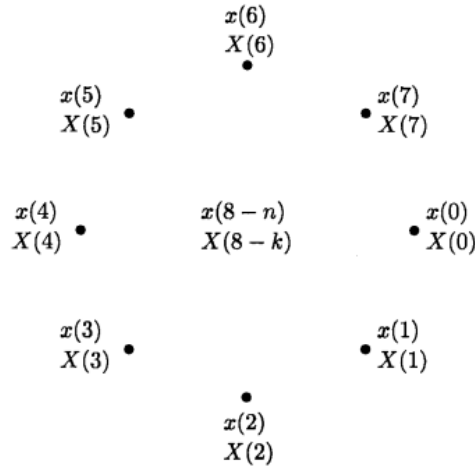
Promjenom indeksa frekvencije $k = N - k$ u jednadžbi (3.6) dobivamo:

$$X(N - k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} n(N-k)} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (3.40)$$

Suma umnožaka $x(n) e^{j \frac{2\pi}{N} nk}$ jednaka je sumi $X(N - n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}$, stoga je:

Teorem 3.3.

$$X(N - k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(N - n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}. \quad (3.41)$$



Slika 3.7. Vremenski obrat, $x(8-n)$, niza $x(n)$ i njegov DFT $X(8-k)$, izvor:[7]

Primjer 3.2. Pogledajmo DFT par:

$$x(n) = \{2 - j1, 2 + j3, 2 - j2, 4 - j2\} \Leftrightarrow X(k) = \{10 - j4, 5 + j3, -2 - j4, -5 - j1\}, \quad (3.42)$$

vrijedi:

$$x(4-n) = \{2 - j1, 4 - j2, 2 - j2, 2 + j3\} \Leftrightarrow X(4-k) = \{10 - j4, -5 - j1, -2 - j4, 5 + j3\} \quad (3.43)$$

3.1.6. Svojstva simetrije

Svojstva simetrije koriste se za smanjivanje potrebne memorije, te u svrhu olakšavanja proračuna pri prikazu i manipulaciji signala. Prije nego što opišemo ovo svojstvo, definirat ćemo neke vrste simetričnosti periodičnog niza $x(n)$, s periodom N .

Niz je parno-simetričan ako je:

$$x(n) = x(N - n). \quad (3.44)$$

Za parni N , primjer parno-simetričnog niza je $\{9, 1, 5, 3, 7, 3, 5, 1\}$. Vrijednost $x(0)$ i $x(\frac{N}{2})$ mogu biti proizvoljne, dok su ostale vrijednosti parno-simetrične u odnosu na te dvije pozicije ($x(0)$, $x(\frac{N}{2})$).

Niz je neparno-simetričan ako je:

$$x(n) = -x(N - n). \quad (3.45)$$

Za parni N , primjer neparno-simetričnog niza je $\{0, 1, 4, 3, 0, -3, -4, -1\}$. Vrijednosti $x(0)$ i $X(\frac{N}{2})$ moraju biti jednake nuli, dok su ostale vrijednosti neparno-simetrične u odnosu na te dvije pozicije ($x(0)$, $x(\frac{N}{2})$).

Periodički niz je poluvalno parno simetričan ako je:

$$x(n) = x(n \pm \frac{N}{2}), \quad (3.46)$$

dok je periodički niz poluvalno neparno simetričan ako je:

$$x(n) = -x(n \pm \frac{N}{2}). \quad (3.47)$$

Konjugirana ili hermitska simetrija dana je izrazom:

$$x(n) = x^*(N - n), \quad (3.48)$$

gdje * označava operaciju kompleksne konjugacije, što znači sa su realne vrijednosti parno simetrične, a imaginarne neparno- simetrične.

Kod antihremitske simetrije koja je dana izrazom:

$$x(n) = -x^*(N - n), \quad (3.49)$$

realne vrijednosti su neparno simetrične, a imaginarne vrijednosti su parno simetrične.

Teorem 3.4. Prilikom ispitivanja simetričnosti signala definiciju DFT pogodno je raspisati na realne i imaginarne dijelove kao:

Dokaz.

$$X_{Re}(k) + jX_{Im}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} (x_{Re}(n) + jx_{Im}(n)) \left(\cos \frac{2\pi}{N}nk - j \sin \frac{2\pi}{N}nk \right). \quad (3.50)$$

Ako je $x(n)$ realan, njegovi imaginarni dijelovi jednaki su nuli. Zatim se izraz (3.50) pojednostavljuje:

$$X_{Re}(k) + jX_{Im}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_{Re}(n) \left(\cos \frac{2\pi}{N}nk - j \sin \frac{2\pi}{N}nk \right). \quad (3.51)$$

Zamjenom $k = N - k$ dobivamo:

$$X_{Re}(N - k) + jX_{Im}(N - k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_{Re}(n) \left(\cos \frac{2\pi}{N}(N - k)n - j \sin \frac{2\pi}{N}(N - k)n \right). \quad (3.52)$$

Konjugiranjem jednadžbe s obje strane i pojednostavljenjem dobivamo:

$$X_{Re}(N - k) + jX_{Im}(N - k) = \sum_{n=0}^{N-1} (x_{Re}(n)) \left(\cos \frac{2\pi}{N}nk - j \sin \frac{2\pi}{N}nk \right) \quad (3.53)$$

$$= X_{Re}(k) + jX_{Im}(k). \quad (3.54)$$

Prema tome je,

$$X_{Re}(k) = X_{Re}(N - k), \quad (3.55)$$

$$X_{Im}(k) = -X_{Im}(N - k). \quad (3.56)$$

□

Zamjenom $k = \frac{N}{2} - k$, dobivamo:

$$X_r = \left(\frac{N}{2} - k \right) = X_r = \left(\frac{N}{2} + k \right), \quad (3.57)$$

$$X_i = \left(\frac{N}{2} - k \right) = -X_i = \left(\frac{N}{2} + k \right), \quad (3.58)$$

iz čega slijedi:

$$\text{realni } x(n) \Leftrightarrow \text{hermitski } X(k). \quad (3.59)$$

3.1.7. Transformacija kompleksno konjugiranog niza

Operacija konjugacije reflektira vektor predstavljen kompleksnim brojem oko realne osi, odnosno negira njegov imaginarni dio.

Konjugiranjem obje strane izraza (3.6) dobivamo:

$$X^*(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(N-n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}. \quad (3.60)$$

Uvođenjem supstitucije izraz (3.60) $k = N - k$, poprima sljedeći oblik:

$$X^*(N-k) = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.61)$$

Primjer 3.3. Ako je zadan sljedeći transformacijski par $x(n) \Leftrightarrow X(k)$:

$$\{2 + jl, 3 + j2, l - jl, 2 - j3\} \Leftrightarrow \{8 - jl, 6 + il, -2 + jl, -4 + j3\}, \quad (3.62)$$

njegove konjugirane vrijednosti $x^*(n) \Leftrightarrow X^*(4-k)$ iznose:

$$\{2 - jl, 3 - j2, l + jl, 2 + j3\} \Leftrightarrow \{8 + jl, -4 - j3, -2 - j1, 6 - j1\} \quad (3.63)$$

3.1.8. Kružna konvolucija u vremenskoj domeni

Uz transformacijske parove:

$$x(n) \Leftrightarrow X(k), \quad (3.64)$$

$$h(n) \Leftrightarrow H(k), n, k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.65)$$

Kružna konvolucija signala $x(n)$ i $h(n)$ dana je izrazom:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M-1} x(m)h(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)H(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}. \quad (3.66)$$

Dokaz. Zamjenom $X(k)$ i $H(k)$ sa odgovarajućim izrazima za DFT možemo dokazati da se kružna konvolucija dva niza iz vremenske domene može postići izračunom IDFT produkata frekvencijskih koeficijenata pojedinih nizova:

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} \cdot \sum_{l=0}^{N-1} h(l) e^{-j\frac{2\pi}{N}lk} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}. \quad (3.67)$$

Promjenom redosljeda sumacije dobivamo:

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} x(m)h(l) \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(n-l-m)k}. \quad (3.68)$$

Sumacija brojave $e^{j\frac{2\pi}{N}(n-l-m)k} = e^{j\frac{2\pi}{N}[n-(l+m)]k}$ jednaka je N za $n = l + m$. Ako je $l \neq n - m$ izraz je jednak nuli pa slijedi da je:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n-m). \quad (3.69)$$

□

Kružna novolucija dva niza iz frekvencijske domene, podijeljena s N dobiva se izracunom DFT produkata inverznih transformacija pojedinih nizova:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)h(n)e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m)H(k-m) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} H(m)X(k-m) = \frac{Y(k)}{N}. \quad (3.70)$$

Kružna korelacija dva niza u vremenskoj domeni, $x(n)$ i $h(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, dana je izrazom:

$$y_{xh}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x^*(m)h(n+m), n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.71)$$

gdje $x^*(m)$ predstavlja kompleksni konjugat od $x(m)$. Izraz (3.70) može se zapisati u obliku operacije konvolucije kao:

$$y_{xh}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x^*(N-m)h(n-m), n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.72)$$

gdje je $x^*(N-m)$ IDFT od $X^*(k)$. Dakle, kružna korelacija dva niza u vremenskoj domeni može se dobiti izračunom produkata IDFT kompleksno konjugiranje diskretne Fourierove transformacije prvog i drugog niza.

$$y_{xh}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)H(k) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad (3.73)$$

$$y_{hx}(n) = y_{xh}^*(N-n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H^*X(k) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}. \quad (3.74)$$

3.1.9. Zbroj i razlika nizova

Teorem 3.5. Za $k = 0$, sve vrijednosti $e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ jednake su jedinici, a vrijednost koeficijenta $Y(0)$ jednaka je zbroju vrijednosti ulaznog niza $y(n)$:

$$Y(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n). \quad (3.75)$$

Za paran N i $k = \frac{N}{2}$, vrijednosti ulaznog niza se naizmjenično množe sa 1 i -1 . Stoga,

$$Y\left(\frac{N}{2}\right) = \sum_{n=0,2}^{N-2} y(n) - \sum_{n=1,3}^{N-1} y(n). \quad (3.76)$$

Primjer 3.4. Za transformacijski par $x(n) = \{2, 1, 3, 4\} \Leftrightarrow X(k) = \{10, -1 + j3, 0, -1 - j3\}$, vrijedi:

$$X(0) = 2 + 1 + 3 + 4, \quad (3.77)$$

$$X(2) = (2 + 3) - (1 + 4) = 0 \quad (3.78)$$

U slučaju IDFT:

$$x(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k), \quad (3.79)$$

te za parni N vrijedi:

$$x\left(\frac{N}{2}\right) = \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0,2}^{N-2} X(k) - \sum_{k=1,3}^{N-1} X(k) \right). \quad (3.80)$$

3.1.10. Dodavanje nula u niz

Ako promatramo signal s neparnom vrijednosti periode N , radi lakšeg izračuna DFT, pogodno je dodati nule u ulazni niz kako bi perioda signala bila parna. Ako dodamo nule na kraj niza $x(n)$ dobijemo niz $y(n)$, $n = 0, 1, \dots, mN - 1$, gdje m predstavlja pozitivan cijeli broj.

$y(n)$ definira se kao:

$$y(n) = \begin{cases} 1, & \text{za } n = 0, 1, \dots, N - 1 \\ 0, & \text{za } n \text{ inače} \end{cases} \quad (3.81)$$

DFT signala $y(n)$ dana je izrazom:

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{mN-1} y(n) e^{-j \frac{2\pi}{mN} nk}, \quad k = 0, 1, \dots, mN - 1. \quad (3.82)$$

Kako je $y(n)$ jednak nuli za $n > N - 1$, dobijemo:

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) e^{-j \frac{2\pi}{mN} nk}, \quad k = 0, 1, \dots, mN - 1. \quad (3.83)$$

Zamjenom mk sa k , dobivamo:

$$Y(mk) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = X(k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (3.84)$$

3.1.11. Parsevalov teorem

Ovaj teorem se koristi za izračun snage signala.

Teorem 3.6. Neka su zadana dva vremenski diskretna signala $x_1(n)$ i $x_2(n)$ te neka je

$$F\{x_1(n)\} = X_1(k), \quad (3.85)$$

$$F\{x_2(n)\} = X_2(k), \quad (3.86)$$

vrijedi:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1(k)X_2^*. \quad (3.87)$$

x_2^* i X_2^* predstavljaju konjugate kompleksnih signala.

Dokaz. Dokaz izvodimo tako da krenemo od definicije inverzne DFT

$$x_2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_2(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}. \quad (3.88)$$

prema tome vrijedi:

$$x_2^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_2^*(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}. \quad (3.89)$$

uvrštavanjem $x_2^*(n)$ vrijedi:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2^*(n) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_2^*(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}. \quad (3.90)$$

Sređivanjem gornjeg izraza dobijemo

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_2^*(k) \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad (3.91)$$

iz čega vidimo da je

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = X_1(k). \quad (3.92)$$

□

3.2. DFT u dvije dimenzije

Teorija 2-D signala je zapravo proširenje teorije 1-D signala. U ovom poglavlju 2-D signal promatran u vremenskoj domeni nazivamo slikom.

2-D DFT slike dimenzija $N \times N$, definira se kao:

Definicija 3.1.

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} x(n_1, n_2) W_N^{n_1 \cdot k_1} \cdot W_N^{n_2 \cdot k_2}, \quad k_1, k_2 = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.93)$$

2-D inverzba DFT definira se kao:

Definicija 3.2.

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{N^2} \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} X(k_1, k_2) W_N^{-n_1 \cdot k_1} \cdot W_N^{-n_2 \cdot k_2}, n_1, n_2 = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.94)$$

3.3. Brza Fourierova transformacija (FFT)

Termin brza Fourierova transformacija koristi se kao skupni naziv za razne algoritme koji nam omogućuju znatno brži izračun diskretne Fourierove transformacije, u odnosu kada bismo izračun provodili direktno primjenjujući izraz (3.6). Želja za smanjenjem računskih operacija prilikom izračuna DFT pojavila se davno, te se prvi učinkovitim algoritmom može smatrati Cooley-Turkey algoritam. Cooley-Tukey algoritam je najčešće korišten algoritam za izračunavanje brze Fourierove transformacije. Cooley-Turkey algoritam razlaže DFT na manje dijelove. Radix-2 DIT je i najčešće upotrebljavani Cooley-Tukey algoritam.

Izvod krećemo od definicije DFT:

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}. \quad (3.95)$$

Radix-2 prvo računa DFT signala s parnim indeksima $x_{2a} = x_0, x_2, x_4, \dots, x_{N-2}$ i DFT signala s neparnim indeksima $x_{2a+1} = x_1, x_3, x_5, \dots, x_{N-1}$. Zatim kombinacijom ta dva rezultata dolazimo do izraza za izračuna DFT. Radix-2 algoritam razdvaja DFT od funkcije $x_p(k)$ na dva dijela:

$$X_p(k) = \sum_{a=0}^{N/2-1} x_{2a} e^{-j \frac{2\pi}{N} (2a)k} + \sum_{a=0}^{N/2-1} x_{2a+1} e^{-j \frac{2\pi}{N} (2a+1)k}. \quad (3.96)$$

Ako u sumi neparnih ineksa izlučimo $e^{-j \frac{2\pi k}{N}}$, gornji izraz poprima oblik:

$$X_p(k) = \sum_{a=0}^{N/2-1} x_{2a} e^{-j \frac{2\pi}{N/2} mk} + e^{-j \frac{2\pi}{N} k} \sum_{a=0}^{N/2-1} x_{2a+1} e^{-j \frac{2\pi}{N/2} mk} = E_k + e^{-j \frac{2\pi}{N} k} Q_k, \quad (3.97)$$

gdje E_k označava DFT signala x_p s parnim indeksima, a Q_k označava DFT signala x_p s neparnim indeksima.

Kompleksni eksponencijal $e^{j2\pi}$ je periodična veličina pa možemo odrediti $X_{k+\frac{N}{2}}$:

$$X_{k+\frac{N}{2}} = \sum_{a=0}^{N/2-1} x_{2a} e^{-j \frac{2\pi}{N/2} m(k+\frac{N}{2})} + e^{-j \frac{2\pi}{N} (k+\frac{N}{2})} \sum_{a=0}^{N/2-1} x_{2a+1} e^{-j \frac{2\pi}{N/2} m(k+\frac{N}{2})}, \quad (3.98)$$

$$X_{k+\frac{N}{2}} = \sum_{a=0}^{N/2-1} x_{2a} e^{-j \frac{2\pi}{N/2} mk} e^{-j2\pi m} + e^{-j \frac{2\pi}{N} k} e^{-j\pi} \sum_{a=0}^{N/2-1} x_{2a+1} e^{-j \frac{2\pi}{N/2} mk} e^{-j2\pi m}, \quad (3.99)$$

$$X_{k+\frac{N}{2}} = \sum_{a=0}^{N/2-1} x_{2a} e^{-j \frac{2\pi}{N/2} mk} - e^{-j \frac{2\pi}{N} k} \sum_{a=0}^{N/2-1} x_{2a+1} e^{-j \frac{2\pi}{N/2} mk}, \quad (3.100)$$

$$X_{k+\frac{N}{2}} = E_k - e^{-j \frac{2\pi}{N} k} Q_k. \quad (3.101)$$

4. Primjena diskretne Fourierove transformacije

Fourierova transformacija je temeljni matematički alat koji se široko koristi u analizi signala, kao što smo već spomenuli u uvodu. Sveprisutna je u mnogim granama medicine pa je tako sastavni dio formiranja medicinskih slika, kao što su rendgenski snimci, MR, CT, te ultrazvuk. Prilikom snimanja MR slike, pacijent je izložen jakom magnetskom polju, što uzrokuje da atomi prelaze u određene energetske razine. Ovi atomi se "ozračuju" emitiranjem radiovalnih signala, kad se izlože određenoj radiovalnoj frekvenciji. Signale, koje emitiraju atomi, sadrže informacije o raspodjeli atomske gustoće u tijelu. Ovi signali prikupljaju se kao funkcija vremena i oblikuju 2D ili 3D prostornu domenu, zatim se primjenom DFT prelazi iz vremenske u frekvencijsku domenu. Kada se signali prebace u frekvencijsku domenu, provodi se inverzna DFT (IDFT) kako bi se dobila MR slika. Ova slika prikazuje prostornu raspodjelu signala i omogućava vizualizaciju unutarnjih struktura tijela. Informacije iz frekvencijske domene daju nam podatke o amplitudama i fazama signala. Amplitude su povezane s intenzitetom signala, dok faze pružaju informacije o položaju i raspodjeli atoma u tijelu. Ovaj postupak omogućava liječnicima da dobiju detaljne uvide u unutarnju strukturu ljudskog tijela.

Ova transformacija primjenjuje se još u mnogim granama medicine, a osim MR slike, često se koristi za analizu srčanog ritma, tj. elektrokardiograma (EKG). Elektrokardiogram je analogni signal dobiven otkucajima ljudskog srca te pomoću DFT identificiraju se ritmički uzorci srčane aktivnosti. Dobiveni signal potrebno je diskretizirati, kao što smo objasnili u poglavlju 2.1. te primjenom DFT razložimo signal na njegove sinusne i kosinusne komponente različitih frekvencija. Moramo napomenuti da se u stvarnim primjenama često koriste puno brži algoritmi za računanje diskretne Fourierove transformacije kako bi se skratio proces analize i obrade EKG signala. Jedan od bržih algoritama je FFT algoritam, koji je izveden u prethodnom poglavlju. FFT algoritam zahtjeva $2N \log_2 N$ koraka transformacije, dok DFT zahtjeva $2N^2$ koraka transformacije.

Diskretna Fourierova transformacija predstavlja ključan alat za analizu medicinskih podataka jer omogućava prebacivanje vremenskih signala u frekvencijsku domenu, što znatno olakšava otkrivanje dijagnoze bolesti.

Uklanjanje i filtriranje šuma iz signala još je jedno područje primjene FFT algoritma.

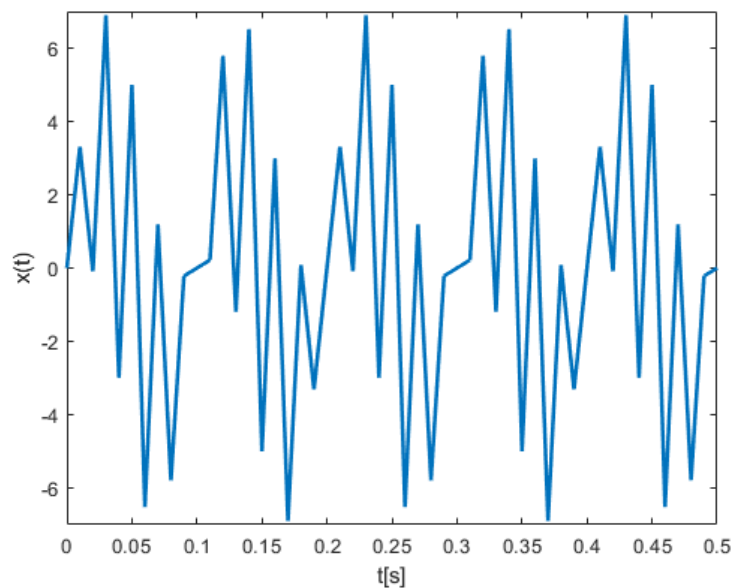
Primjer 4.1. *Skicirajmo signal $x(t)$ pomoću programskog paketa 'Matlab', koji je zadan izrazom:*

$$x(t) = 3 \sin(2\pi 10t) + 5 \sin(2\pi 45t). \quad (4.1)$$

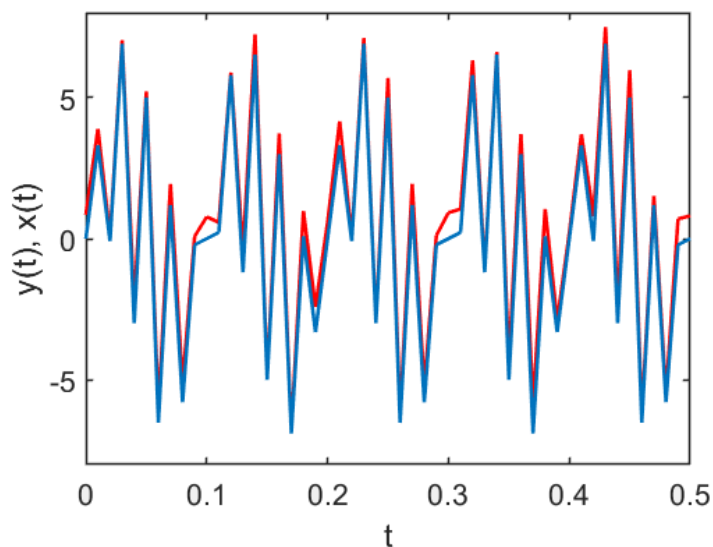
Iz zadanog zbroja signala možemo očitati frekvenciju prvoj i drugog signala:

$$f_1 = 10H_z, f_2 = 45H_z \quad (4.2)$$

Dodavanjem nasumičnog šuma izvornom signalu, dobijemo prikaz kao na slici 6.2.



Slika 4.1. Prikaz zadanog signala $x(t)$, izvor: Izradio autor

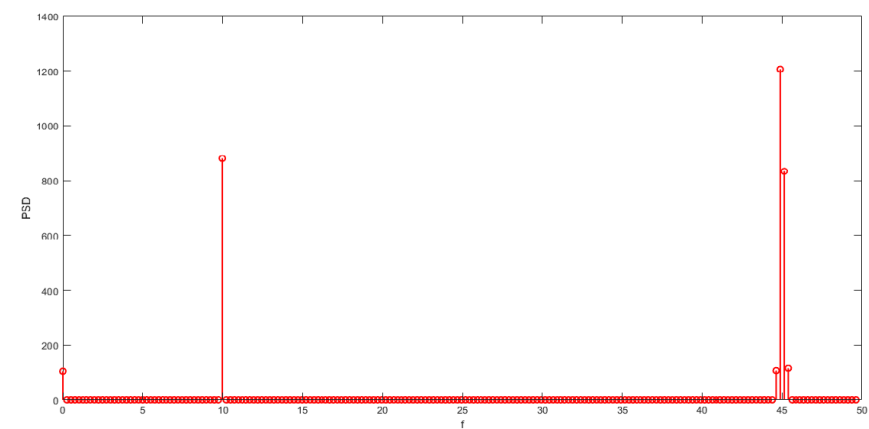


Slika 4.2. Prikaz izvornog signala $x(t)$ i zašumljenog signala $y(t)$, izvor: Izradio autor

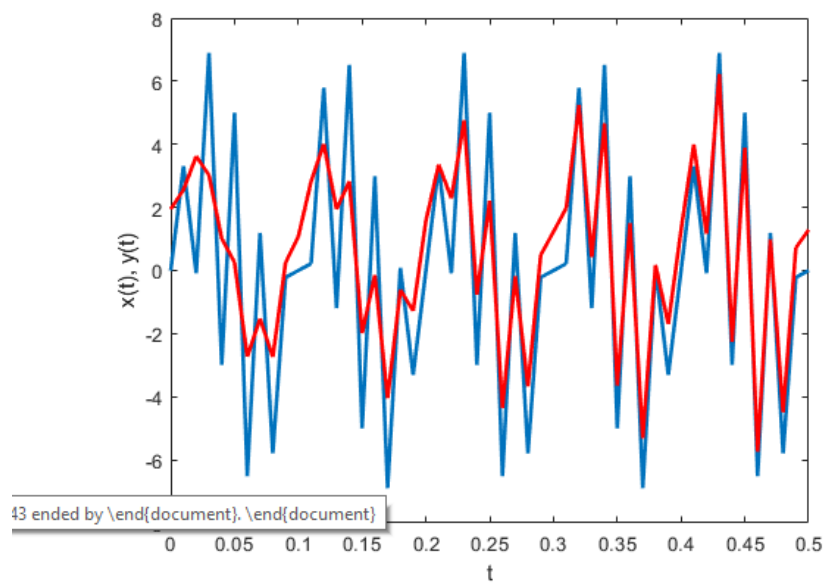
Nakon diskretizacije i prebacivanja zašumljenog signala u frekvencijsku domenu pomoću FFT, dobivamo prikaz eliminiranog šuma na slici 6.3.

Na frekvencijama f_1 i f_2 koje smo očitali iz zadanog signala, obično se pojavljuje znatno nadvišenje. To nadvišenje zapravo predstavlja naš originalni signal $x(t)$, a sve ostalo je šum koji treba ukloniti.

Nakon eliminacije šuma, pomoću IFFT vraćamo se u frekvencijsku domenu, te grafički prikazujemo rekonstruirani signal $y(t)$, označen crvenom bojom, te originalni signal $x(t)$, označen plavom bojom.



Slika 4.3. Prikaz eliminiranog šuma, izvor: Izradio autor



Slika 4.4. Prikaz originalnog signala $x(t)$ i rekonstruiranog signala $y(t)$, izvor: Izradio autor

5. Zaključak

Ovaj rad opisuje diskretnu Fourierovu transformaciju, opisanu na temelju njezinih karakteristika, primjene i važnosti.

Diskretna Fourierova transformacija predstavlja ključan algoritam za obradu i analizu signala. Koristi se kada promatrani signal nije kontinuiran, već diskretan, tj. pomoću diskretne Fourierove transformacije, diskretan signal prebacujemo u frekvencijsku domenu.

Prije detaljnijeg opisa diskretne Fourierove transformacije, na početku rada kratko smo opisali signale, gdje smo dali primjer matematičkog zapisa signala te primjere signala u svakodnevnom životu. Zatim smo opisali proces diskretizacije signala, što je neophodno za provođenje diskretne Fourierove transformacije.

Matematički zapis diskretne Fourierove transformacije opisan je u trećem poglavlju, kao i njezin inverz (IDFT). IDFT je korisna za rekonstrukciju signala jer omogućava povratak iz frekvencijske u vremensku domenu.

Diskretna Fourierova transformacija ima dobra matematička svojstva poput linearanosti, periodičnosti te Parsevalovog teorema, koji služi za izračun energije i snage signala.

Algoritam za brži izračun diskretne Fourierove transformacije, poznat kao brza Fourierova transformacija (FFT), opisan je u četvrtom poglavlju rada. Brzina i efikasnost brze Fourierove transformacije čine ju neizostavnim algoritmom u znanosti, tehnologiji i inženjeringu.

DFT i FFT imaju široku primjenu u mnogim djelatnostima. Na samom kraju rada stavljen je fokus na primjenu ovih algoritama u medicini.

Svaka tehnika pa tako i DFT ima svoje dobre i loše strane. Zbog svoje osnovne zadaće, možemo analizirati komponente signala u smislu frekvencija. Njezin brži izračun, poznat kao FFT, omogućuje nam praktičnu analizu digitalnih signala, kao i brži proračun kod velikih signala ili aplikacija. Rezultati dobiveni izračunom DFT mogu biti kompleksni brojevi, što znači da imamo informacije o amplitudi i fazi svake frekvencijske komponente.

Na kraju možemo zaključiti da je DFT moćan alat s brojim primjenama.

Bibliografija

- [1] Sučić, V.: Predavanje "Signali: klasifikacija i svojstva" iz kolegija Signali i sustavi, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Rijeka, 2018.
- [2] Sučić, V.: Predavanje "Signali: osnovni signali i modeli signala" iz kolegija Signali i sustavi, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Rijeka, 2018.
- [3] s Interneta, https://www.tutorialspoint.com/digital_communication/digital_communication_quantization.htm, 05.06.2023.
- [4] s Interneta, https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Fourier, 05.06.2023.
- [5] Volarić, I.: "Signali i sustavi - Auditorna vježba 1, Klasificiranje i osnovna svojstva signala", Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Rijeka, 2022.
- [6] Tasić J. F.: "Postopki digitalne obdelave signalov", Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko, 2002.
- [7] Sundararajan. D.: "The Discrete Fourier Transform," World Scientific, Singapur, 2001.
- [8] s Interneta, <https://www.aps.org/publications/apsnews/201003/physicshistory.cfm>, 05.06.2023.
- [9] Babić, H.: "Signali i sustavi", Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb, 1996.
- [10] Đokić, D.: Signali i sustavi, s Interneta, Prva Kragujevačka Gimnazija, Kragujevac, 2016.
- [11] Jeren, B.: Signali i sustavi, Školaska knjiga, Zagreb, 2021.
- [12] Vrankić, M.: "Signali i sustavi, zbirka riješenih zadataka," Graphis, Zagreb, 2016.
- [13] s Interneta: https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/8tjedan_zzv_rjesenja%5B2%5D.pdf, 05.06.2023.

Sažetak i ključne riječi

U ovom radu obrađuje se diskretna Fourierova transformacija, navode se njena matematička svojstva i primjena. U uvodnom dijelu rada objašnjen je matematički tretman signala i njihova klasifikacija te su navedeni neki klasični modeli signala. Poseban naglasak stavljen je na modele diskretnih signala. U glavnom dijelu rada opisana su sva bitna svojstva diskretne Fourierove transformacije te algoritam FFT koji koristimo za njeno računanje. U završnom dijelu rada opisane su neke primjene diskretne Fourierove transformacije.

Ključne riječi: signal, domena, Fourierova transformacija, diskretna Fourierova transformacija, brza Fourierova transformacija, primjena

Summary and key words

This paper deals with discrete Fourier transformation, its mathematical properties and application are stated. In the introductory part of the paper, the mathematical treatment of signals and their classification is explained, and some classic signal models are listed. Special emphasis is placed on discrete signal models. In the main part of the paper, all the essential properties of the discrete Fourier transform and the FFT algorithm we use for its calculation are described. In the final part of the paper, some applications of discrete Fourier transformation are described.

Keywords: Signal, domain, Fourier transform, discrete Fourier transform, fast Fourier transform, application

A Matlab kodovi

Jedinični impuls:

```
n=-5:5;
delta=(n==0);
stem(n,delta, 'filled');
xlabel('n');
ylabel('s[n]');
```

Jedinična stepenica:

```
n=-5:5;
u_step=(n>0);
stem(n,u_step, 'filled');
xlabel('n');
ylabel('s[n]');
```

Jedinična kosina:

```
n=-5:5;
ramp=n.*(n>=0);
stem(n,ramp, 'filled');
xlabel('n');
ylabel('r[n]');
```

Pomaknuta jedinična kosina:

```
n=-5:15;
x=(n-5).*((n-5)>=0);
stem(n,x,'filled');
xlabel('n');
ylabel('r[n]');
```

Uklanjanje šuma:

```
clear all;
close all;
clc;
dt=0.01;
t=0:dt:4;
x=3*sin(2*pi*10*t) + 5*sin(2*pi*45*t);
figure(1); %grafički prikaz signala
```

```

plot(t,x,'LineWidth',2);
xlabel('t[s]');
ylabel('x(t)');
xlim([0 0.5]);
ylim([-7 7]);

```

```

    y=x+rand(size(t)); %generirani šum
figure(2);
plot(t,y,'r','LineWidth',2);
hold on; %prikaz dva ili više signala na istom grafu
plot(t,x,'LineWidth',2);
xlim([0 0.5]);
ylim([-8 8]);
xlabel('t');
ylabel('y(t), x(t)');
set(gca,'LineWidth',1.2,'FontSize',16); %prilagođavanje parametara grafa

```

```

    figure(3);
stem(t,y,'r','LineWidth',1.2); %diskretizacija signala
xlabel('t');
ylabel('y(t)');

```

```

    N = length(t); %definiranje N uzoraka po cijeloj vremenskoj osi (N=1000)
Y = fft(y,N); %računanje brze Fourierove transformacije
PSD = Y.*conj(Y)/N; %PSD=YYhat/N
f = 1/(dt*N)*(0:N); %frekvencija
L = 1:floor(N/2); %prikaz pola ukupnog raspona frekvencije
figure(4);
stem(f(L),PSD(L),'r','LineWidth',1.5);
xlabel('f');
ylabel('PSD');
set(gca,'LineWidth',1.2,'FontSize',16);
koef = PSD>100;
PSDc = PSD.*koef; %eliminiranje ostalih frekvencija

```

```

    figure(5);
stem(f(L),PSDc(L),'r','LineWidth',1.5);
xlabel('f');

```

```
ylabel('PSD');  
Y = koef.*Y;  
y = ifft(Y);
```

```
figure(6);  
stem(t,y,'r','LineWidth',1.5);  
xlim([0 0.5]);  
ylim([-8 8]);  
xlabel('t');  
ylabel('y(t)');
```

```
figure(7);  
plot(t,x,'LineWidth',2);  
hold on;  
plot(t,y,'r','LineWidth',2);  
xlim([0 0.5]);  
ylim([-8 8]);  
xlabel('t');  
ylabel('x(t), y(t)');
```