

# FOURIEROVA METODA ZA RJEŠAVANJE JEDNADŽBE PROVOĐENJA TOPLINE

---

Stupar, Natalie

Undergraduate thesis / Završni rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:190:507799>

Rights / Prava: [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-18**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Engineering](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI

**TEHNIČKI FAKULTET**

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

**FOURIEROVA METODA ZA RJEŠAVANJE JEDNADŽBE  
PROVOĐENJA TOPLINE**

Rijeka, rujan 2023.

Natalie Stupar  
0069082060

SVEUČILIŠTE U RIJECI

**TEHNIČKI FAKULTET**

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

**FOURIEROVA METODA ZA RJEŠAVANJE JEDNADŽBE  
PROVOĐENJA TOPLINE**

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Komentor: prof. dr. sc. Viktor Sučić

Rijeka, rujan 2023.

Natalie Stupar  
0069082060

Rijeka, 3. ožujka 2021.

Zavod: **Zavod za matematiku fiziku, strane jezike i kineziologiju**  
Predmet: **Inženjerska matematika ET**  
Grana: **2.03.01 elektroenergetika**

## ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Natalie Stupar (0069082060)**  
Studij: **Preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike**

Zadatak: **Fourierova metoda za rješavanje jednadžbe provođenja topline // Fourier method and its application to the heat equation**

Opis zadatka:

U radu je potrebno izvesti i opisati jednadžbu provođenja topline te pripadne inidjalno rubne probleme u jednoj, dvije i tri dimenzije te u polarnom, dlindričnom i sfernom koordinatnom sustavu. Na sve navedene slučajeve potrebno je primijeniti Fourirerovu metodu nalaženja analitičkog rješenja inidjalno-rubnog parabolikog problema i provesti analizu svojstava dobivenih rješenja. Sva dobivena rješenja potrebno je grafički prikazati i staviti ih u kontekst primjene u elektrotehniid.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Zadatak uručen pristupniku: 15. ožujka 2021.

Mentor:

Doc. dr. sc. Ivan Dražić

Predsjednik povjerenstva za  
završni ispit:

Prof. dr. sc. Viktor Sučić

Prof. dr. sc. Viktor Sučić (komentor)

## IZJAVA

Sukladno članku 7. stavku 1. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku sveučilišnih prijediplomskih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 4. travnja 2023., izjavljujem da sam samostalno izradila završni rad prema zadatku preuzetom dana 15. ožujka 2021.

Rijeka, 06.09.2023.

  
Natalie Stupar

*Zahvaljujem svom mentoru izv. prof. dr. sc. Ivanu Dražiću na vodstvu, strpljenju i pomoći pri izradi završnog rada. Također veliko hvala svim profesorima i asistentima Tehničkog fakulteta na trudu i prenesenom znanju. Hvala svim kolegama i prijateljima koji su za vrijeme trajanja prijediplomskog studija bili podrška i oslonac. Najveće i najznačajnije hvala ide svim članovima moje obitelji, posebno roditeljima na bezuvjetnoj podršci i razumijevanju. Hvala što ste uvijek uz mene.*

## Sadržaj

<b>1. Uvod</b>	<b>3</b>
<b>2. Toplina u kontekstu fizike i povijesni pregled istraživanja topline</b>	<b>4</b>
2.1. Povijesni pregled istraživanja topline . . . . .	4
2.2. Joseph Fourier . . . . .	8
<b>3. Fourierova metoda</b>	<b>11</b>
3.1. Fourierov red . . . . .	11
3.2. Fourierov integral . . . . .	15
<b>4. Parcijalne diferencijalne jednačbe</b>	<b>17</b>
4.1. Rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi . . . . .	18
<b>5. Jednačba provođenja topline i njeno rješavanje Fourierovom metodom</b>	<b>23</b>
5.1. Jednačba provođenja topline . . . . .	23
5.2. Primjena Fourierove metode u rješavanju jednačbe provođenja topline . . . . .	24
5.2.1. Jednodimenzionalna jednačba provođenja topline . . . . .	25
5.2.2. Dvodimenzionalna jednačba provođenja topline . . . . .	27
5.2.3. Primjena Fourierova integrala kod rješavanja jednačbe provođenja topline	29
5.2.4. Trodimenzionalna jednačba provođenja topline . . . . .	32
<b>6. Jednačba provođenja topline u različitim koordinatnim sustavima</b>	<b>34</b>
6.1. Jednačba u polarnom sustavu . . . . .	35
6.2. Jednačba u cilindričnom sustavu . . . . .	36
6.3. Jednačba u sfernom sustavu . . . . .	37
<b>7. Primjene u elektrotehnici</b>	<b>39</b>
7.1. Toplinska analiza na primjeru transformatora . . . . .	39
7.2. Termalno upravljanje u visokonaponskim transformatorima . . . . .	41
7.3. Termalna simulacija električnih sklopova . . . . .	42
7.4. Termalna analiza električnih motora . . . . .	42
7.5. Simulacija termalne difuzije u mikroelektronici . . . . .	43
<b>8. Zaključak</b>	<b>44</b>

<b>Literatura</b>	<b>45</b>
<b>Sažetak i ključne riječi</b>	<b>47</b>
<b>Summary and key words</b>	<b>48</b>



## 1. Uvod

Fourierova metoda rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednažbi jedan je od važnijih matematičkih alata u proučavanju procesa prijenosa topline, a koristi se za analizu i rješavanje jednažbe provođenja topline. Rješavanje jednažbe provođenja topline ključno je za razumijevanje i predviđanje raspodjele temperature u različitim sustavima.

Prije nego što uđemo u detalje Fourierove metode, važno je razumjeti osnovne koncepte provođenja topline. Prijenos topline odvija se kroz materijal kada postoji temperaturna razlika između dviju točaka. Jednažba provođenja topline opisuje promjenu temperature u prostoru i vremenu i obično se izražava kao parcijalna diferencijalna jednažba. Fizikalni aspekt provođenja topline obrađen je u idućem poglavlju rada, gdje smo dali i kratki povijesni pregled najvažnijih radova i istraživanja vezanih za toplinu od antike pa do današnjeg vremena.

Fourierova metoda temelji se na ideji da se bilo koja funkcija koja zadovoljava određene uvjete može izraziti kao zbroj sinusnih i kosinusnih funkcija. Ova tehnika omogućuje rješavanje jednažbe provođenja topline razdvajanjem varijabli i prevođenjem parcijalne diferencijalne jednažbe u skup običnih diferencijalnih jednažbi. Ova ideja bit će objašnjena u trećem poglavlju, dok će se u četvrtom poglavlju prikazati primjena Fourierove metode na konkretno rješavanje jednažbe provođenja topline.

U petom poglavlju rada dati ćemo formu jednažbe u različitim koordinatnim sustavima, a u šestom poglavlju ćemo istaknuti kontekst primjene dobivenih rješenja u elektrotehnici, gdje su procesi prijenosa topline od velike važnosti.

Cilj ovog rada je pružiti temeljno razumijevanje Fourierove metode za rješavanje jednažbe provođenja topline te prikazati primjenu dobivenih rješenja u elektrotehnici. To nam omogućuje proučavanje i predviđanje raspodjele temperature u materijalima te razumijevanje toplinskih procesa povezanih s elektrotehnikom.

## 2. Toplina u kontekstu fizike i povijesni pregled istraživanja topline

Ovaj ćemo rad započeti kraćom fizikalnom definicijom topline. Toplina je znanstveni koncept koji je igrao ključnu ulogu u razumijevanju prirode i njezinih zakonitosti tijekom povijesti. Proučavanje topline prošlo je kroz značajan razvoj, a otkrića i istraživanja koja su se provodila u tom području omogućila su dublje razumijevanje termičkih procesa i stvaranje termodinamike kao discipline.

Toplina, označena simbolom  $Q$ , je fizikalna veličina koja opisuje energiju koja se prenosi s toplijeg tijela na hladnije. Mjerna jedinica topline je džul ( $J$ ), dok je stara jedinica kalorija ( $cal$ ) koja iznosi  $4,186 J$ . Količina topline koja se razmjenjuje kada se dva tijela različitih temperatura dodiruju ovisi o toplinskom kapacitetu tijela  $C$ , koji je određen masom  $m$  i specifičnim toplinskim kapacitetom  $c$  tvari od koje je tijelo sačinjeno, te temperaturnoj razlici  $\Delta T$ . Stoga se može izraziti kao

$$Q = C\Delta T \quad (2.1)$$

ili

$$Q = cm\Delta T. \quad (2.2)$$

Jedan džul definiran je kao količina energije koja je potrebna da bi se obavio rad od jednog newton-metra. Može se izraziti i kao količina energije koja se prenosi kroz provodnik kada se na njemu vrši rad od jednog vata tijekom jedne sekunde.

Toplina se temelji na kinetičkoj energiji čestica unutar tijela ili sustava. Kada se tijelo zagrijava, unutarnja kinetička energija čestica povećava se, što rezultira porastom temperature. Kada se tijela nalaze na različitim temperaturama, toplina se spontano prenosi iz tijela veće temperature na tijelo niže temperature sve dok ne postignu ravnotežu.

Termodinamika je grana fizike koja se bavi proučavanjem topline i njezinih učinaka na tijela i sustave. Ona se temelji na osnovnim zakonima o očuvanju energije i entropiji te pruža matematički okvir za opisivanje termičkih procesa. [1]

### 2.1. Povijesni pregled istraživanja topline

Nakon što smo objasnili što je toplina, možemo se upoznati i s osobama koje su, svaka na svoj način pridonijele razumijevanju termodinamike.

Još u antičkoj Grčkoj, filozofi su razmišljali o prirodi vatre i procesima zagrijavanja. Heraklit, grčki filozof koji je živio oko 500. pr. Kr., vjerovao je da je vatra osnovna supstancija svijeta. Smatrao je da je vatra rezultat stalnih promjena i kretanja. Demokrit, filozof iz istog razdoblja,

također se bavio proučavanjem prirode vatre. On je smatrao da je vatra posljedica kretanja i sudara atoma. [4]

U Rimskom Carstvu, inženjer Hero iz Aleksandrije (10.-70. n. e.) proveo je istraživanja o primjeni pare. Hero je opisao principe parnog stroja i parnog tlaka te je koristio paru kao izvor topline za pokretanje mehaničkih uređaja.

Srednji vijek donio je napredak u proučavanju toplinskih fenomena, posebno među islamskim znanstvenicima. Al-Kindi (9. stoljeće) proučavao je termodinamiku pare i primijetio je da se para može koristiti za pokretanje mehaničkih uređaja. Alhazen (965.-1039.) proučavao je lom svjetlosti i primijetio da svjetlost može generirati toplinu.

U doba renesanse, znanstvenici su nastavili istraživati toplinske fenomene. Leonardo da Vinci (1452.-1519.) eksperimentirao je s prijenosom topline kroz provođenje i konvekciju.

Galileo Galilei (1564.-1642.) proučavao je širenje topline i promjene volumena tvari pri promjeni temperature. Jedan od Galileovih doprinosa bio je njegov rad na eksperimentima s toplinom i širenjem tvari. Promatrajući promjene u volumenu tvari pri različitim temperaturama, primijetio je da se tvari šire kada se zagriju i skupljaju kada se ohlade. Ovi eksperimenti doprinijeli su razumijevanju veze između temperature i promjena u fizičkim svojstvima tvari.

Galileo je također istraživao širenje tekućina, posebno vode, pri promjeni temperature. Opažajući da se voda širi kada se zagrije i skuplja kada se hladi, dao je važan doprinos razumijevanju toplinskog širenja i koncepta toplinskog volumena.

Pojam temperature također se može pripisati Galileu. Smatrao je da je temperatura mjerilo topline tijela i da se može kvantitativno izraziti. Ovaj koncept temperature bio je temelj za daljnji razvoj termodinamike i proučavanje toplinskih svojstava tvari.

U 18. stoljeću, razvoj proučavanja topline bio je obilježen značajnim otkrićima i napretkom u razumijevanju toplinskih procesa. Kalorička teorija bila je jedna od ključnih teorija toga razdoblja, koja je pokušavala objasniti prirodu topline i njezin prijenos.

Jedan od važnih znanstvenika tog razdoblja bio je Joseph Black (1728.-1799.), koji je proveo istraživanja o grijanju tvari i promjenama temperatura. On je uveo pojam latentne topline, koji se odnosi na toplinu koja je potrebna za promjenu agregatnog stanja tvari bez mijenjanja temperature. Blackova istraživanja bila su ključna za razumijevanje toplinskih svojstava materije.

Nadalje, Benjamin Thompson (1753.-1814.), poznat i kao grof Rumford, bio je znanstvenik čija su istraživanja doprinijela razumijevanju prijenosa topline. Njegovi eksperimenti s bušenjem toplovodnih cijevi doveo su do otkrića da se toplina može generirati trenjem. Rumfordova otkrića suprotstavila su se kaloričkoj teoriji i sugerirala da toplina nije materijalna tvar, već oblik energije.

U isto vrijeme, Henry Cavendish (1731.-1810.) pridonio je proučavanju termokemije, istražujući kemijske reakcije koje proizvode toplinu. Njegova istraživanja o kemijskim reakcijama i toplinskim promjenama pridonijela su daljnjem razumijevanju veze između kemijskih procesa i

topline.

Kalorička teorija, koja je prevladavala u 18. stoljeću, tvrdila je da toplina predstavlja tvar koja se prenosi između tijela. Prema ovoj teoriji, toplina se prenosi putem tvari koju su nazivali "kaloric". Kalorička teorija pokušavala je objasniti procese grijanja, hlađenja i mijenjanja temperatura na temelju prijenosa kalorika. [4]

Međutim, tijekom 18. stoljeća, s razvojem eksperimentalnih tehnika i daljnjim istraživanjima, počele su se javljati sumnje u kaloričku teoriju. Krajem 18. i početkom 19. stoljeća, termodinamika je postala sveobuhvatnije područje koje je revidiralo i nadmašilo kaloričku teoriju, nudeći novi pristup razumijevanju toplinskih procesa i energije.

U 19. stoljeću, proučavanje topline doživjelo je značajan napredak, a znanstvenici su nastavili istraživati i razumijevati prirodu toplinskih fenomena. U ovom razdoblju dolazi do velikog razvoja. Termodinamika je postala ključno područje proučavanja topline, a posebno su se istaknula trojica znanstvenika. Sadi Carnot, francuski inženjer, formulirao je temelje termodinamike u svom radu naziva "Razmišljanja o motornoj snazi vatre" 1824. godine. Carnot je istraživao rad parnih strojeva i proučavao njihovu učinkovitost. U svom radu, Carnot je postavio temelje za koncept termodinamičkog ciklusa i uveo pojam idealnog termodinamičkog stroja, koji se naziva Carnotov stroj. Njegove ideje postavile su temelje za razumijevanje maksimalne učinkovitosti toplinskih strojeva. [4]

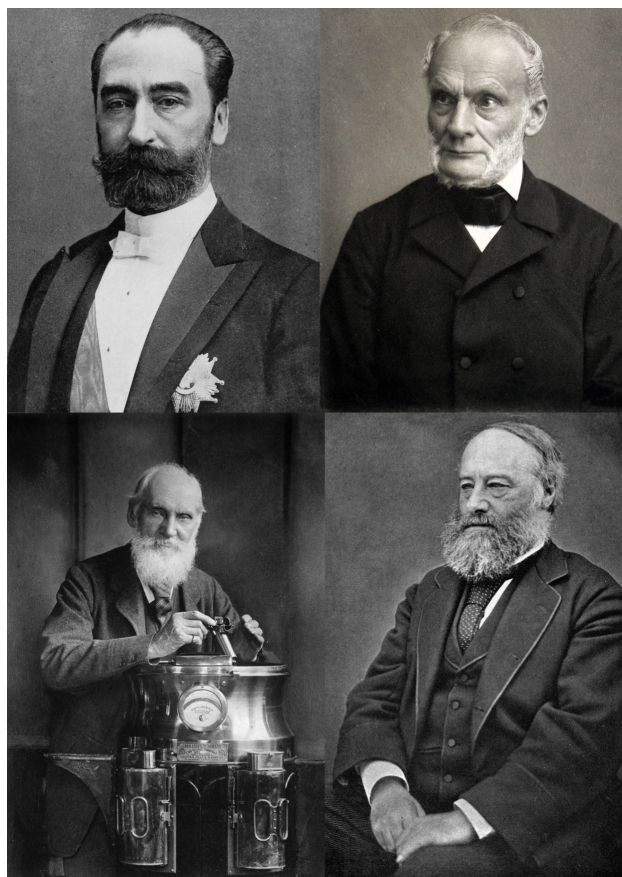
Rudolf Clausius, njemački fizičar, bio je ključni znanstvenik koji je razvio matematički formalizam termodinamike. On je formirao drugi zakon termodinamike, poznat kao Clausiusov zakon, koji je dao kvantitativni opis prijenosa topline između tijela različitih temperatura. Clausius je uveo koncept entropije kao mjeru disperzije energije i definirao je entropiju kao mjeru ireverzibilnosti u termodinamičkim procesima.

William Thomson, poznat kao Lord Kelvin, također je pridonio razvoju termodinamike. On je predložio termodinamičku ljestvicu apsolutne temperature, poznatu kao Kelvinova ljestvica, koja je postala temelj modernog mjerenja temperature. Kelvin je također dao svoj doprinos razumijevanju termodinamičke ravnoteže i proučavanju termodinamičkih procesa u sustavima s niskom temperaturom.

Naravno, treba spomenuti i čovjeka po kojem je nazvana sama mjerna jedinica za toplinu - James Joule, engleski fizičar, proveo je značajna istraživanja koja su povezala toplinu i mehaniku. Njegov eksperimentalni rad otkrio je vezu između rada i topline, što je rezultiralo formulom poznatom kao Jouleov zakon. Joule je pokazao da se energija može pretvarati između mehaničkog rada i topline te je eksperimentalno potvrdio zakon o očuvanju energije.

Na slici 2.1 s lijeva na desno nalaze se, kao i u redu pojavljivanja u ovom tekstu Sadi Carnot, Rudolf Clausius, Lord Kelvin i James Joule.

U drugoj polovici 19. stoljeća, James Clerk Maxwell, škotski fizičar, ostvario je značajan napredak u razumijevanju veze između elektromagnetizma i topline. Maxwell je formulirao skup



*Slika 2.1. Znanstvenici iz 18. stoljeća, izvor: [18]*

jednadžbi poznatih kao Maxwellove jednadžbe, koje su objedinile električne i magnetske fenomene u jedan skup jednadžbi. Ove jednadžbe, objavljene 1865. godine, predstavljaju temelj elektromagnetne teorije.

Maxwellove jednadžbe opisuju elektromagnetske valove koji se mogu širiti i prenositi energiju kroz prostor. Maxwell je pokazao da elektromagnetsko zračenje, uključujući vidljivu svjetlost, ima valnu prirodu te se može interpretirati kao oblik energije koji se prenosi putem elektromagnetskog polja. Ovo otkriće je bilo ključno za razumijevanje kako se toplina može prenositi elektromagnetskim zračenjem.

Maxwellove jednadžbe su postavile temelje za daljnji razvoj elektromagnetizma i omogućile su razumijevanje elektromagnetskih fenomena u kontekstu toplinske energije. Ova otkrića imala su velik utjecaj na razvoj optike, elektrotehnike i telekomunikacija.

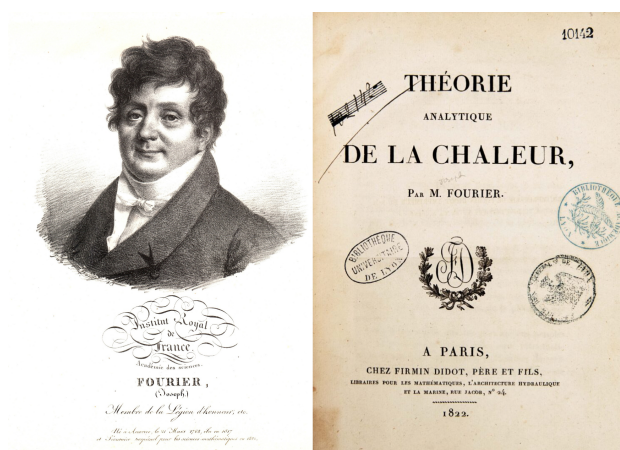
Uz Maxwella, drugi fizičari poput Heinricha Hertza i Henrika Lorentza pridonijeli su razvoju elektromagnetizma i objašnjavanju veze između elektromagnetskog zračenja i topline. Njihovi eksperimenti i teorije dodatno su proširili naše razumijevanje elektromagnetizma i doprinijeli su razvoju moderne fizike i primjene elektromagnetskog zračenja u tehnologiji.

Kasnije u 19. stoljeću i ranih 20. stoljeća, razvoj kvantne mehanike značajno je utjecao na naše razumijevanje toplinskih fenomena na mikroskopskoj razini. Znanstvenici poput Maxa Plan-

cka, Alberta Einsteina i Nielsa Bohra pridonijeli su razvoju kvantne mehanike i objasnili kako se energija apsorbira i ispušta u diskretnim kvantama, što je imalo implikacije na toplinske procese i elektromagnetsko zračenje.

## 2.2. Joseph Fourier

Jean-Baptiste Joseph Fourier rođen je 21. ožujka 1768. godine u Auxerreu, malom gradiću u Burgundiji u današnjoj Francuskoj. Bio je deveto dijete u obitelji, a otac mu je bio krojač. Rano je ostao bez oba roditelja (postoje razni izvori, ali svaki navodi dob ispod 10 godina), ali zahvaljujući izvanrednom talentu za matematiku i mehaniku kojeg je pokazivao već u ranoj dobi uspio je nastaviti školovanje. Upisao je u osnovnu školu Pallais u Auxerreu, gdje je učio iz latinski i francuski jezik. Međutim, njegovi matematički talenti bili su izvanredni te se mladi Fourier odlučuje izobrazbu posvetiti znanosti. U dobi od 13 godina, već je izučio svih šest svezaka matematičkog djela "Cours de mathématique" Étiennea Bézouta. Njegove matematičke sposobnosti prepoznate su, te je u dobi od 15 godina osvojio prvu nagradu za proučavanje mehanike.



Slika 2.2. Joseph Fourier i naslovnica prvog izdanja "Analitičke teorije topline", izvor: [18, 19]

Sa samo 18 godina, predstavio je svoj istraživački rad o algebarskim jednadžbama u Francuskoj kraljevskoj akademiji znanosti. Kasnije je upisao studij teologije u benediktinskoj opatiji Saint-Benoît-sur-Loire, ali je ubrzo shvatio da je njegova strast ipak u znanosti. Prebacio se na École Royale Militaire kako bi studirao matematiku i posvetio se znanstvenom i obrazovnom radu.

Nakon završetka školovanja, Fourier se vratio u Auxerre, gdje je postao profesor matematike u Benedictine Collegeu i istovremeno je nastavio raditi na svojim istraživanjima. No, život u Auxerreu bio je obilježen burnim političkim događajima tijekom Francuske revolucije. Fourier je isprva aktivan sudionik u lokalnom Revolucionarnom odboru Auxerreu, privučen egalitarnim idejama revolucije. Međutim, kasnije se razočarao u revoluciju zbog velike količine nasilja koju je prouzročila te se neuspješno pokušao povući s političke scene. Ipak, uhićen je 1794. godine zbog optužbi za revolucionarne i terorističke aktivnosti. Nakon što je Robespierre smaknut, Fourier je oslobođen.

Njegova želja za istraživanjem odvela ga je u Egipat, gdje je sudjelovao u Napoleonovoj egipatskoj ekspediciji kao znanstveni savjetnik. Tijekom svog boravka u Egiptu, Fourier se bavio matematičkim istraživanjima, ali i aktivno sudjelovao u administraciji i arheološkim istraživanjima. Ovo iskustvo pružilo mu je priliku za istraživanje i dokumentiranje egipatske kulture i povijesti, što je rezultiralo objavljivanjem njegova remek-djela "Opis Egipta".

Nakon povratka iz Egipta, Fourier se vratio u Pariz gdje je nastavio svoju znanstvenu i akademsku karijeru. U Parizu tog vremena Fourier je s imao priliku surađivati s vodećim matematičkim umovima tog doba poput Lagrangea, Laplacea i Mongea. Godine 1797. postao je profesor analize i mehanike na École Polytechnique. Tijekom svoje karijere, Fourier je ostvario značajne doprinose u matematici i fizici, posebno u području toplinskih i valnih fenomena.

Joseph Fourier umro je 16. svibnja 1830. godine, ostavivši iza sebe nasljeđe koje se proteže i izvan znanstvenih krugova. Njegovo rano školovanje i mladost obilježeni su iznimnim matematičkim talentom i strašću za istraživanje. Fourierov životni put od siromašnog djeteta do priznatog znanstvenika i sudionika povijesnih događaja čini ga jednim od najzanimljivijih i inspirativnih likova u svijetu znanosti.

Fourierova opsesija toplinom protezala se i na njegov osobni život. Čvrsto je vjerovao da je toplina ključna za održavanje dobrog zdravlja, pa je neprestano pregrijavao svoj stan i nosio slojeve odjeće. Nažalost, preminuo je nakon pada niz stepenice, iako nije dokazano da je to bilo povezano s njegovim navikama održavanja topline. Važno je napomenuti da se ova događaj često spominje u vezi s njegovim sklonostima pretjeranog zagrijavanja, ali ne postoje izravni dokazi koji povezuju njegov pad s time [4]. Još jedna zanimljivost vezana uz njega koja ilustrira koliko je cijenjen u vlastitoj zemlji je i činjenica je jedan od 72 učenjaka (francuski Savant, može se smatrati grupom znanstvenika, inženjera itd.) čija su imena ugravirana na Eiffelovom tornju.

Fourierova "Analitička teorija topline" je monumentalno djelo Josepha Fouriera koje je objavljeno 1822. godine. Ova knjiga predstavlja prekretnicu u razumijevanju topline i revolucionarno djelo u matematici, fizici i općenito inženjerstvu.

U ovoj knjizi, Fourier je razvio matematički formalizam za analizu provođenja topline. Vjerojato najveći doprinos predstavljen u ovoj knjizi je Fourierov red, koji omogućuje rastavljanje bilo koje periodične funkcije na sumu sinusnih i kosinusnih funkcija. Ova tehnika se koristi za reprezentaciju periodičnih fenomena, kao što su oscilacije temperature, zvuka i elektromagnetskog vala.

Uz njega, u knjizi je također predstavljen koncept Fourierove transformacije, matematičke metode koja omogućuje analizu i sintezu funkcija u kontinuiranom vremenskoj ili prostornoj domeni. Taj koncept se i danas koristi u disciplinama kao što su obrada signala, slikovna analiza, komunikacije, kvantna mehanika, ...

Kako sve ne bi ostalo na matematičkim metodama (koje su kasnije primijenjene i na mnogo drugih prirodnih fenomena i fizikalnih pojava) Fourier je primijenio svoje matematičke metode

primijenio na svoje proučavanje i analizu toplinskih fenomena. Fourierova analiza toplinske provodljivosti u materijalima postavila je temelje za razumijevanje prijenosa topline. Njegovi zakoni toplinske provodljivosti i diferencijalne jednačbe topline koriste se za proučavanje termičkih svojstava materijala, projektiranje sustava za grijanje i hlađenje te optimizaciju toplinskih procesa. Fourier je također proučavao prijenos topline kroz površine, uključujući radijaciju, konvekciju i provođenje. Njegove teorije o prijenosu topline su temelj moderne termičke analize i primjenjuju se u područjima kao što su izolacija zgrada, dizajn termalnih sustava, energetska učinkovitost i druga područja vezana uz toplinske procese.



### 3. Fourierova metoda

Nakon kratkog pregleda povijesnog razvoja topline, koja će biti tema ovog završnog rada, potrebno je predstaviti neke osnovne matematičke metode koje je ranije spomenuti J. Fourier postavio i koje su, kao što smo napomenuli postale jedan od najvažnijih alata u različitim inženjerskim područjima.

#### 3.1. Fourierov red

Fourierova red je beskonačan red koji predstavlja periodične funkcije pomoću kosinusnih i sinusnih funkcija. Da bismo mogli definirati Fourierovu red, potrebno je definirati nekoliko ključnih pojmova.

Periodička funkcija je funkcija koja se ponavlja s istim oblikom i svojstvima tijekom određenog intervala koji se naziva period. Drugim riječima vrijedi

$$f(x + p) = f(x), \quad (3.1)$$

za neko  $p > 0$  i sve realne  $x$ .

Najčešći primjer periodičke funkcije je trigonometrijska funkcija poput kosinusa ili sinusa. Ove funkcije imaju period  $2\pi$ , što znači da se njihov oblik ponavlja svakih  $2\pi$  jedinica na realnoj osi. Tangens i kotangens također su periodičke funkcije s periodom ponavljanja  $\pi$ . Periodičke funkcije su od velike važnosti u mnogim područjima, kao što su elektrotehnika, fizika, glazba i analiza signala jer omogućuju modeliranje i opisivanje ponavljajućih fenomena i uzoraka u stvarnom svijetu.

Iz (3.1) lako je dokazati da će funkcija s periodom  $p$  imati i period  $2p$ , a nadalje i periode  $np$  za svaki cijeli broj  $n = 1, 2, 3, \dots$

S obzirom da znamo da su trigonometrijske funkcije periodičke možemo definirati trigonometrijski red s:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \dots \\ = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

gdje su  $a_0, a_1, b_1, \dots$  koeficijenti reda.

Uzmimo da je funkcija  $f(x)$  također periodička s periodom  $2\pi$  i kao takva se može zapisati uz pomoć reda (3.2) koji konvergira. Tada vrijedi:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (3.3)$$

i taj se red naziva naziva Fourierov red funkcije  $f(x)$ . Koeficijenti ove funkcije nazivaju se Fourierovi koeficijenti funkcije te za njih vrijedi:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (3.4)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.5)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.6)$$

Ovi izrazi odnose se na trigonometrijske funkcije s periodom  $2\pi$ , a moguće ih je primijeniti na bilo koju periodičku funkcije s periodom  $p = 2L$  promjenom mjerila na  $x$ -osi, pri čemu je:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right), \quad (3.7)$$

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad (3.8)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.9)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.10)$$

U određenim slučajevima moguće je daljnje pojednostavljenje s obzirom na parnost, odnosno neparnost funkcije.

Parne funkcije su funkcije kod kojih vrijedi  $f(-x) = f(x)$  i njihov se Fourierov red svodi na

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x, \quad (3.11)$$

kojeg nazivamo Fourierov kosinusni red. Njegovi koeficijenti su:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_0^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.12)$$

Za neparne funkcije pak vrijedi  $f(-x) = -f(x)$  i njih se svodi na Fourierov sinusni red:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (3.13)$$

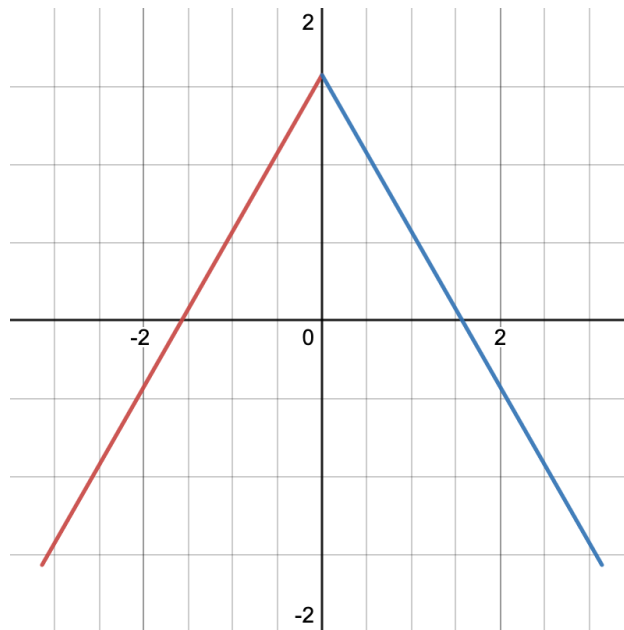
$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (3.14)$$

Sada ćemo na primjeru jedne jednostavne funkcije prikazati razvoj funkcije u Fourierov red.

Funkcija koju ćemo razviti zadana je s:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{\pi}{2} - x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

i opisana je na intervalu  $[-\pi, \pi]$ , čiji je grafički prikaz dan na sljedećoj slici.



Slika 3.1. Graf funkcije  $f(x)$

Prvo tražimo konstantu  $a_0$  uz pomoć prethodno navedenog izraza:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Uvrštavanjem zadane funkcije dobivamo:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 \left( \frac{\pi}{2} + x \right) dx + \int_0^{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) dx \right],$$

što rješavanjem integrala prelazi u

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[ \left( \frac{\pi}{2}x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-\pi}^0 + \left( \frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{\pi} \right] = 0.$$

Idući korak je traženje koeficijenata  $a_n$  i  $b_n$ . Prvo koristimo izraz za  $a_n$ , odnosno:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

Uvrštavamo funkciju  $f(x)$  i sređujemo izraz. Dobivamo:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 \left( \frac{\pi}{2} + x \right) \cos nx dx + \int_0^{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 \frac{\pi}{2} \cos nx dx + \int_{-\pi}^0 x \cos nx dx + \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} \cos nx dx - \int_0^{\pi} x \cos nx dx \right] \end{aligned}$$

Dobiveni izraz pojednostavljujemo integrirajući po dijelovima, primjenjujući formulu

$$\int x \cos nx dx = \frac{x \sin nx}{n} - \int \frac{x \sin nx}{n} dx = \frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2},$$

pa dobivamo izraz:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{\sin nx}{n} \right) \Big|_{-\pi}^0 + \left( \frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right) \Big|_{-\pi}^0 + \frac{\pi}{2} \left( \frac{\sin nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi} - \left( \frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right) \Big|_0^{\pi} \right].$$

Dalje slijedi:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi n^2} [(\cos nx) \Big|_{-\pi}^0 - (\cos nx) \Big|_0^{\pi}] \\ &= \frac{1}{\pi n^2} [\cos 0 - \cos(-\pi n) - \cos \pi n + \cos 0] = \frac{2}{\pi n^2} [1 - \cos \pi n] \\ &= \frac{2}{\pi n^2} [1 - (-1)^n]. \end{aligned}$$

Možemo primijetiti da je za svaki parni  $n$ ,  $a_n$  jednak nuli zbog desnog člana. Ostaje nam proučavati samo neparne  $n$ -ove, odnosno  $n = 2k + 1$  jer oni ne daju trivijalan rezultat. Zato pišemo i uzimamo u obzir samo

$$a_{2k+1} = \frac{4}{\pi(2k+1)^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Također, vidimo da je funkcija  $f(x)$  parna, odnosno da vrijedi  $f(x) = f(-x)$ , a isto se može vidjeti i ako pogledamo sliku 3.1 zbog simetričnosti po  $y$ -osi. Za parne funkcije koeficijenti  $b_n$  su nula pa ih nije potrebno tražiti.

Dakle, razvoj Fourierovog red za navedenu funkciju  $f(x)$  je:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

Na idućem grafu pokazat ćemo kako se dobiveni red ponaša za različiti broj uključenih članova.

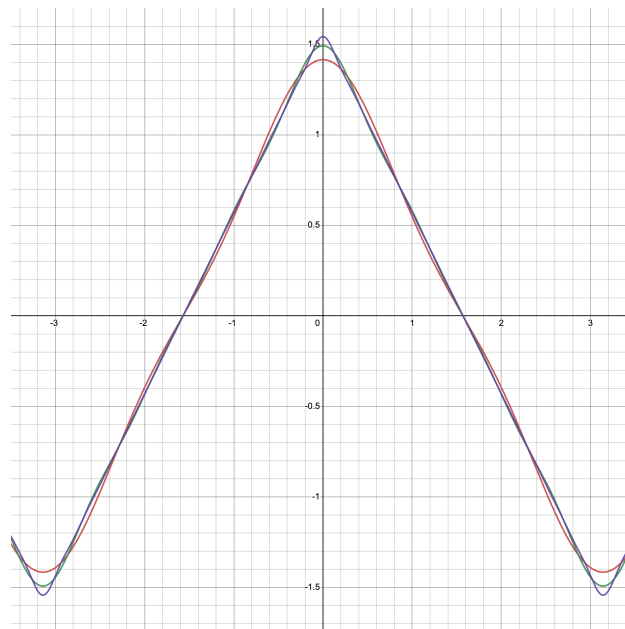
Linijom crvene bojom označena je funkcija za  $n = 1$ , tj.

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^1 \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

Zapravo nalazimo parcijalnu sumu:

$$S_1 = \frac{4}{\pi} + \frac{\cos(x)}{(1)^2} + \frac{\cos(3x)}{(3)^2} = \frac{4}{\pi} + \cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9}.$$

Zelenom bojom označena je parcijalna suma za  $n = 3$ , a ljubičastom za  $n = 10$ . Ovim grafom prikazujemo nekoliko aproksimacija funkcije preko njezinog Fourierovog reda.

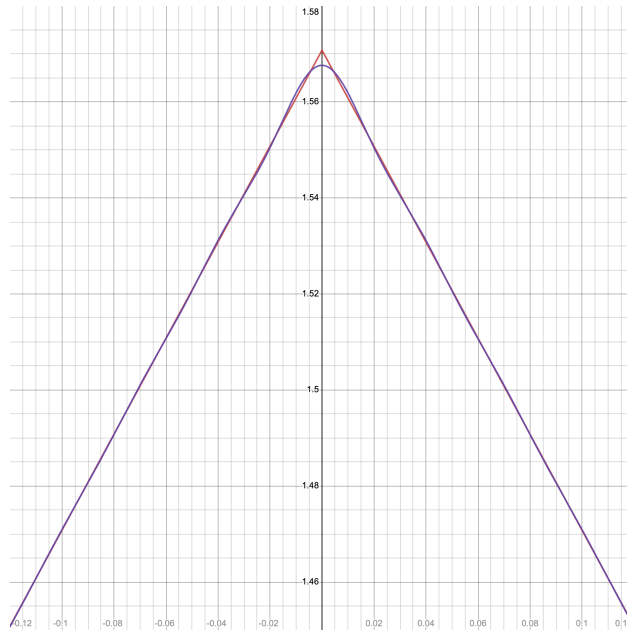


Slika 3.2. Razvoj u Fourierov red funkcije  $f(x)$

Ako usporedimo graf zadane funkcije  $f(x)$  sa dobivenim grafovima možemo uočiti da je za  $n$ -ove veće od 8 (prvih 9 članova) aproksimacija funkcije poprilično točna. Daljnjom izradom grafova u alatu Demos (<https://www.desmos.com/calculator>) moguće je utvrditi da se za  $n = 100$  aproksimacija Fourierovim redom gotovo potpuno poklapa s funkcijom  $f(x)$ , a najnepreciznije odnosno najslabije do poklapanja dolazi u krajnjim točkama  $(-\pi, 0)$  i  $(\pi, 0)$ . Ta je aproksimacija prikazana na slici 3.3.

### 3.2. Fourierov integral

Budući da mnogi izračuni uključuju funkcije koje nisu periodične i koje su zanimljive na cijeloj  $x$ -osi, postavlja se pitanje što se može učiniti da se proširi metoda Fourierovih redova na takve funkcije. Kao rješenje ovog izazova nameće se Fourierov integral.



Slika 3.3. Grafički prikaz kvalitete aproksimacije. Fourierova aproksimacija za  $n = 100$  - plavo, originalna funkcija  $f(x)$  - crveno.

Fourierov integral je generalizacija Fourierovog reda za funkcije koje nemaju periodičnost. Zapisujemo ga kao:

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin pw] dw, \quad (3.15)$$

gdje su

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv dw \quad (3.16)$$

i

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv dw. \quad (3.17)$$

## 4. Parcijalne diferencijalne jednađbe

Jednađbe u kojima se osim nepoznate funkcije  $y = y(x)$  pojavljuju i neke njene derivacije nazivaju se diferencijalne jednađbe. Diferencijalna jednađba koja ne sadrži parcijalne derivacije naziva se obična diferencijalna jednađba. Ako diferencijalna jednađba pak sadrži parcijalne derivacije naziva se parcijalna diferencijalna jednađba.

Parcijalna diferencijalna jednađba (PDE ili PDJ) je jednađba koja uključuje jednu ili više parcijalnih derivacija nepoznate funkcije, a koja ovisi o barem dvije varijable. Obično se jedna od tih varijabli odnosi na vrijeme, dok ostale varijable predstavljaju prostorne varijable. Najvažnije PDE-ove čine valna jednađbe koja može modelirati vibrirajuću žicu i vibrirajuću membranu, jednađba provođenja topline za temperaturu u šipci ili žici, te Laplaceova jednađba za elektrostatički potencijal. PDE-ovi su vrlo važni u dinamici, elastičnosti, prijenosu topline, elektromagnetskoj teoriji i kvantnoj mehanici. Imaju puno širi raspon primjena od običnih diferencijalnih jednađbi (ODE ili ODJ), koje mogu modelirati samo najjednostavnije fizikalne sustave.

Obična diferencijalna jednađba je jednađba oblika

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

koja povezuje nezavisnu varijablu  $x$ , nepoznatu funkciju  $y(x)$  i njene derivacije  $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ . Ovdje  $F$  označava poznatu funkciju više varijabli. Red diferencijalne jednađbe je red najviše derivacije koja se u njoj pojavljuje. Kod obične diferencijalne jednađbe tražimo nepoznatu funkciju jedne varijable  $y(x)$  [9].

Parcijalna diferencijalna jednađba je jednađba koja uključuje jednu ili više parcijalnih derivacija nepoznate funkcije u odnosu na dvije ili više varijabli, pri čemu je obično jedna od varijabli vrijeme  $t$ , a ostale su prostorne varijable. Red najviše derivacije naziva se redom PDE-a. Kao i kod običnih jednađbi, kažemo da je PDE linearna ako je prvog stupnja u nepoznatoj funkciji u njenim parcijalnim derivacijama. Inače ga nazivamo nelinearnim. Ako svaki član linearne PDE sadrži ili funkciju  $u$  ili jednu od njenih parcijalnih derivacija, nazivamo tu jednađbu homogenom. Inače je nazivamo nehomogenom.

Rješenje PDE-a u nekom području  $R$  prostora nezavisnih varijabli je funkcija koja ima sve parcijalne derivate koje se pojavljuju u PDE-u u nekoj domeni  $D$  koja sadrži  $R$  i zadovoljava PDE svugdje u  $R$ . Često se samo zahtijeva da je funkcija kontinuirana na granici  $R$ , da ima te derivacije u unutrašnjosti  $R$  i da zadovoljava PDE u unutrašnjosti  $R$ . Kada  $R$  leži unutar  $D$ , pojednostavljuje se situacija u vezi derivacija na granici  $R$ , koja je tada ista na granici kao i u unutrašnjosti  $R$ . [5].

Kasnije ćemo vidjeti da se jedinstveno rješenje PDE-a koje odgovara određenom fizičkom problemu dobiva korištenjem dodatnih uvjeta koji proizlaze iz problema. Na primjer, to može biti uvjet da rješenje u pretpostavljenoj području  $R$  poprima određene vrijednosti na granici (rubni ili

granični uvjeti). Ili, kada je vrijeme  $t$  jedna od varijabli,  $u$  ili  $u_t = \partial u / \partial t$  (ili oboje) mogu biti zadani pri  $t = 0$  tj. takozvanim "početnim uvjetima" [5].

#### 4.1. Rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi

Kako bismo dočarali primjenu Fourierovog reda i što bolje se uveli u rješavanje jednadžbi prvo ćemo pokazati primjer traženja rješenja jednodimenzionalne valne jednadžbe na primjeru vibrirajuće žice. Valna jednadžba se u primjeru može postaviti kao parcijalna diferencijalna jednadžba koja glasi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.1)$$

gdje je  $u(x, t)$  otklon žice u nekom vremenu, a  $c$  konstanta kojom se modelira materijal.

Prije nego pristupimo rješavanju diferencijalne jednadžbe, poznat ćemo se s dva pojma koja su potrebna kako bi se iz općeg rješenja PDE-a došlo do jedinstvenih.

Prvi takav pojam je inicijalni uvjet koji možemo definirati kao uvjet koji se primjenjuju na početnom trenutku vremena ili početnom položaju sustava. Opisuje početno stanje sustava prije nego što se sustav počne razvijati ili mijenjati tijekom vremena. Na primjer, ako promatramo diferencijalnu jednadžbu koja opisuje oscilacije opruge, inicijalni uvjeti mogu biti početna pozicija i brzina opruge u trenutku kada je sustav pokrenut. Ti podaci određuju početno stanje sustava i omogućuju izračunavanje njegovog ponašanja u kasnijim trenucima vremena.

S druge strane, rubni ili granični uvjeti su uvjeti koji se primjenjuju na granicama ili rubovima domene na kojoj se promatra matematički model ili sustav. Matematički model može biti definiran diferencijalnim jednadžbama ili nekim drugim matematičkim izrazima. Granični uvjeti predstavljaju ograničenja na ponašanje sustava na tim granicama. Primjerice, ako promatramo jednadžbu topline na šipki, granični uvjeti mogu biti temperatura na krajevima šipke. Možemo postaviti uvjet da je temperatura na lijevom kraju 100 stupnjeva Celzijusa, a na desnom kraju 50 stupnjeva Celzijusa. To su granični uvjeti koji ograničavaju ponašanje sustava na granicama šipke.

U promatranom slučaju, možemo prepoznati odnosno zaključiti:

##### 1) Inicijalni uvjeti

Forma gibanja žice u vremenu ovisi o dva početna uvjeta odnosno o dvije početne vrijednosti u trenutku  $t = 0$ , a to su početni otklon žice i početna brzina, koje označavamo sa  $f(x)$  i  $g(x)$  pa pišemo  $u(x, 0) = f(x)$  i  $u_t(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t} = g(x)$  za svaki  $x$  za koji vrijedi  $0 \leq x \leq L$ .

##### 2) Granični uvjeti

Žica zategnuta na dva kraja ( $x = 0$  i  $x = L$ , gdje  $L$  označava duljinu žice) ima dva granična uvjeta  $u(0, t) = 0$  i  $u(L, t) = 0$  za svaki  $t \geq 0$ .

Nakon što smo utvrdili uvjete koji su nam potrebni za pronalazak rješenja, možemo pristupiti samom postupku.



Metoda produkata je matematička tehnika koja se koristi za rješavanje nekih diferencijalnih jednačbi. Ova metoda se često primjenjuje na linearnim diferencijalnim jednačbama s konstantnim koeficijentima. Ideja metode produkata je predstaviti rješenje diferencijalne jednačbe kao umnožak dvaju faktora, često u obliku suma beskonačnih redova ili konačnih polinoma. Tako jedan faktor može predstavljati eksponencijalni rast ili pad, dok drugi faktor može predstavljati funkciju koja zadovoljava drugi dio diferencijalne jednačbe.

Prvo ćemo primijeniti metodu produkata odnosno metodu separacije varijabli koja će nam omogućiti pronalazak rješenja u obliku

$$u(x, t) = F(x)G(t). \quad (4.2)$$

Ovo će rješenje predstavljati produkt dvije funkcije od kojih svaka ovisi samo o jednoj varijabli,  $x$  odnosno  $t$ . U notaciji ćemo za derivacije po  $t$ -u koristiti točkice ( $\ddot{G}$ ), a po  $x$ -u crtice ( $F''$ ).

Slijedeći metodu produkata deriviramo 4.2 po  $x$ -u i  $t$ -u te dobivamo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\ddot{G},$$

odnosno:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G.$$

Uvrštavanjem dobivenog u valnu jednačbu (4.1) dobivamo

$$F\ddot{G} = c^2 F''G.$$

Kako bismo odvojili varijable po ovisnosti u odnosu na  $x$  i  $t$  podijelit ćemo jednačbu sa  $c^2 FG$ . Lijeva strane jednačbe sada je ovisna isključivo o  $t$ , a na desna o  $x$ :

$$\frac{G}{c^2 \ddot{G}} = \frac{F''}{F}.$$

Zaključujemo da su obje strane konstantne jer bi u protivnom promjena  $x$ -a ili  $t$ -a utjecala samo na jednu stranu što nije istina u našem slučaju pa pišemo:

$$\frac{G}{c^2 \ddot{G}} = \frac{F''}{F} = k.$$

Možemo uočiti da je iz ova dva izraza množenjem s nazivnikom moguće izvući dvije obične diferencijalne jednačbe:

$$F'' - kF = 0 \quad i \quad \ddot{G} - c^2 kG = 0.$$

Nakon što smo odredili ODE-ove, idući korak u rješavanju je povratak na granične uvjete koje smo definirali na početku potpoglavlja. Tražimo  $F$  i  $G$  koji zadovoljavaju granične uvjete, odnosno tražimo:

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0 \quad i \quad u(L, t) = F(L)G(t) = 0.$$

Za  $F$  možemo uočiti da ako vrijedi  $G = 0$ , onda imamo  $u = FG \equiv 0$  što nije rješenje koje proučavamo. Stoga  $G$  mora biti različit od 0, pa vrijedi:

$$F(0) = 0, \quad F(L) = 0.$$

Pokušajmo prvo pronaći oblik konstante  $k$ . Ukoliko uzmemo  $k = 0$  tada je opće rješenje jednadžbe  $F'' - kF = 0$  dano s  $F = ax + b$ , a uvrštavanjem u  $F(0) = 0$  dobivamo  $a = b = 0$  te  $F \equiv 0$  i  $u = FG \equiv 0$ . Ovakvo nam trivijalno rješenje ne donosi nikakve zaključke pa ga preskačemo.

Iduće razmatramo pozitivno  $k = \mu^2$  za kojeg opće rješenje jednadžbe glasi:

$$F = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}.$$

Iz graničnih uvjeta ponovno dobivamo  $F = 0$  te vrijedi jednak zaključak kao za  $k = 0$ .

Zaključujemo da  $k$  mora biti negativan te uzimamo da je  $k = -p^2$ . Potom iz ODE uvrštavanjem dobivamo opće rješenje:

$$F(x) = A \cos px - B \sin px.$$

Daljnijim uvrštavanjem u granične uvjete dobiva se

$$F(0) = A = 0, \quad F(L) = B \sin pL = 0.$$

Ukoliko bismo uzeli  $B = 0$  dobili bi  $F = 0$  kao rješenje što ne želimo pa računamo  $\sin pL = 0$  odnosno:

$$pL = n\pi, \quad p = \frac{n\pi}{L} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Uzmimo  $B = 1$ , te dobivamo neograničeno mnogo rješenja  $F(x) = F_n(x)$  gdje je

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Nakon toga, pristupamo traženju rješenja druge ODE. Uvrštavamo pronađeni  $k = -p^2 = -(\frac{n\pi}{L})^2$  i dobivamo:

$$\ddot{G} - \lambda_n^2 G = 0,$$

gdje je

$$\lambda_n = cp = \frac{cn\pi}{L}.$$

Tada je opće rješenje

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \lambda_n t.$$

Rješenja koja zadovoljavaju valnu jednadžbu uz opisane granične uvjete su u ovom slučaju:

$$u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t) = \sin \frac{n\pi}{L} x (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \lambda_n t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Dobivene funkcije nazivaju se svojstvenim ili karakterističnim funkcijama, dok se pripadne vrijednosti  $\lambda_n = n\pi x/L$  nazivaju svojstvenim ili karakterističnim vrijednostima titranja žice. Skup  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$  naziva se spektrom.

Karakteristične funkcije (4.3) zadovoljavaju valnu jednadžbu i granične uvjete. Međutim, kako bismo zadovoljili i početne uvjete nije dovoljan samo jedan  $u_n$ .

U ovom slučaju možemo iskoristi tzv. Osnovni teorem o superpoziciji za homogene jednadžbe koji nam govori da ako su  $u_1$  i  $u_2$  rješenja homogene linearne jednadžbe u nekom području  $R$ , onda je i  $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$  s bilo kojim konstantama  $c_1$  i  $c_2$  rješenje te jednadžbe u tom području. Zbog toga što je valna jednadžba linearna i homogena slijedi da je suma beskonačno mnogo rješenja  $u_n$  također njezino rješenje. Nadalje proučavamo beskonačni red:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{L} x (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \lambda_n t) \quad , \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}. \quad (4.4)$$

Vratimo se na prvi početni uvjet koji se odnosi na početni otklon žice:  $u(x, 0) = f(x)$ . U (4.4) uvrštavamo

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x) \quad 0 \leq x \leq L$$

Moramo odabrati takav  $B_n$  da  $u(x, 0)$  postane Fourierov sinusni red za  $f(x)$ :

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

Potom zadovoljavamo drugi početni uvjet - početnu brzinu:  $u_t(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t} = g(x)$ . Također potrebno je derivirati (4.4) po  $t$ -u te dobivamo:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} ((-B_n \lambda_n \sin \lambda_n t + B_n^* \lambda_n \cos \lambda_n t) \sin \frac{n\pi x}{L}) \right]_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin \frac{n\pi x}{L} = g(x).$$

Sada moramo izabrati takav  $B_n^*$  da u početnom vremenskom trenutku  $t = 0$  derivacija  $\frac{\partial u}{\partial t}$  bude Fourierov red funkcije  $g(x)$ :

$$B_n^* \lambda_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Cijelu funkciju dijelimo s  $\lambda_n$  i umjesto nje uvrštavamo cijeli izraz ( $\lambda_n = cn\pi/L$ ) iz čega dobivamo:

$$B_n^* = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

Pokazali smo da je  $u(x, t)$  s koeficijentima  $B_n$  i  $B_n^*$  rješenje valne jednadžbe koje zadovoljava početne i granične uvjete ukoliko red (4.4) konvergira kao i redovi dobiveni dvostrukim deriviranjem izraza po  $x$  i po  $t$  te imaju kontinuirane sume  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  i  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ .

Kako bismo utvrdili konačno rješenje (4.4) možemo zbog jednostavnosti razmatrati slučaj kad je početna brzina  $g(x) = 0$  jer je tada  $B_n^* = 0$  što nam omogućava da (4.4) pojednostavljeno zapišemo kao:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \lambda_n t \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}.$$

Ovaj izraz može se smatrati rješenjem valne jednadžbe.

Na kraju možemo popisati korake koje smo primijenili kako bismo došli do rješenja valne jednadžbe jer su oni univerzalni i višestruko primjenjivi.

1) Prvi korak u rješavanju je korištenje metode separacije varijabli kojom pronalazimo rješenje oblika  $u(x, t) = F(x)G(t)$ , te jednadžbu razbijamo na dvije obične diferencijalne jednadžbe.

2) Drugi korak je pronalazak rješenja diferencijalnih jednadžbi dobivenih u prvom koraku koji zadovoljavaju granične uvjete.

3) Na kraju, koristimo Fourierov red te iskorištavamo rješenja dobivena u drugom koraku kako bismo dobili konačno rješenje na početku zadane jednadžbe koje zadovoljava i granične i početne uvjete.

## 5. Jednadžba provođenja topline i njeno rješavanje Fourierovom metodom

### 5.1. Jednadžba provođenja topline

U prethodnim poglavljima dali smo uvod u parcijalne diferencijalne jednadžbe, a sada slijedi njihova primjena na jednadžbu provođenja topline. Jednadžbu, koja govori o tome kako se toplina raspoređuje po tijelu u prostoru, na samom početku potrebno je modelirati uzevši u obzir zakone fizike. Smatramo da su specifična toplina i gustoća materijala tijela konstantne te da se u tijelu ne stvara niti nestaje toplina.

Ekperimenti pokazuju da se u tijelu toplina širi u smjeru opadanja temperature, a stopa širenja je proporcionalna gradijentu temperature. Drugim riječima, brzina  $v$  protoka topline u tijelu ima oblik

$$v = -K \operatorname{grad} u, \quad (5.1)$$

gdje je  $u(x, y, z)$  temperatura na određenoj točki  $(x, y, z)$  u vremenu  $t$ . Termalna provodljivost  $K$  je konstantna u slučaju homogenog materijala i neekstremnih temperatura.

Neka je  $T$  dio tijela ograničen površinom  $S$  i vanjskim jediničnim normalnim vektorom  $n$  takvim da vrijedi teorem divergencije. Tada je  $v \cdot n$  komponenta  $v$  u smjeru  $n$ . Dakle,  $|v \cdot n \Delta A|$  je količina topline koja izlazi iz  $T$  (ako  $v \cdot n > 0$  u nekoj točki  $P$ ) ili ulazi u  $T$  (ako  $v \cdot n < 0$  u točki  $P$ ) u jedinici vremena na nekoj točki  $P$  površine  $S$  kroz maleni dio  $\Delta S$  od  $S$  od površine  $\Delta A$ . [5]

Prema tome, ukupnu količinu topline koja protječe kroz  $S$  od  $T$  može se prikazati površinskim integralom:

$$\iint_S v \cdot n \, dA.$$

Koristeći Gaussov teorem koji kombiniramo s (5.1) ovaj površinski integral možemo pretvoriti u volumni integral po području  $T$ . Dobivamo:

$$\begin{aligned} \iint_S v \cdot n \, dA &= -K \iint_S (\operatorname{grad} u) \cdot n \, dA \\ &= -K \iiint_T \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) \, dx \, dy \, dz = -K \iiint_T \nabla^2 u \, dx \, dy \, dz. \end{aligned}$$

S druge strane, ukupna količina topline u  $T$  se računa kao:

$$H = \iiint_T \sigma \rho u \, dx \, dy \, dz$$

s gustoćom  $\rho$  i  $\sigma$  koeficijentom toplinske kondukcije koji karakterizira materijal i utječe na brzinu prijenosa topline kroz njega. Smanjenje  $H$  u vremenu možemo zapisati kao

$$-\frac{\partial H}{\partial t} = - \iiint_T \sigma \rho \frac{\partial u}{\partial t} dx dy dz.$$

Zbog prve fizikalne pretpostavke s početka potpoglavlja znamo da se u tijelu ne stvara niti nestaje toplina. Stoga možemo izjednačiti dva prethodna izraza, pa dobivamo:

$$- \iiint_T \sigma \rho \frac{\partial u}{\partial t} dx dy dz = -K \iiint_T \nabla^2 u dx dy dz,$$

odnosno, pojednostavljujavanjem:

$$\iiint_T \left( \frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \nabla^2 u \right) dx dy dz = 0, \quad c^2 = \frac{K}{\sigma \rho}.$$

Budući da gornji izraz vrijedi za bilo koje područje  $T$  na tijelu, integrand (ako je kontinuiran) mora biti jednak nuli pa pišemo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u.$$

Dobivena diferencijalna jednadžba naziva se jednadžba provođenja topline i koristi se za modeliranje protoka topline. Pomoću nje pronalazimo temperaturu  $u(x, y, z, t)$  u tijelu sačinjenom od homogenog materijala u prostoru. Konstanta  $c^2$  predstavlja toplinsku difuzivnost [5].  $K$  predstavlja toplinsku provodljivost,  $\sigma$  specifičnu toplinu, a  $\rho$  gustoću materijala od kojeg je tijelo.  $\nabla^2 u$  je Laplacijan od  $u$  te u  $x, y, z$  koordinatnom sustavu kakav promatramo glasi:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Toplinska jednadžba, osim što opisuje prijenos topline u materijalu, često se naziva i difuzijskom jednadžbom. To je zato što dijeli sličnosti s matematičkim modelom za procese difuzije, poput difuzije kemikalija ili plinova.

Baš kao što toplina difuzira, pri čemu toplina teče s područja veće temperature prema područjima niže temperature, kemijska difuzija uključuje kretanje molekula ili čestica s područja veće koncentracije prema područjima niže koncentracije. Matematički model i principi koji upravljaju oba procesa su slični, zbog čega se toplinska jednadžba naziva difuzijskom jednadžbom [5].

## 5.2. Primjena Fourierove metode u rješavanju jednadžbe provođenja topline

Nakon što smo u prethodnim poglavlju dali osnovne korake za rješavanje parcijalne diferencijalne jednadžbe i u prvom potpoglavlju modelirali jednadžbu topline, nadalje slijedi njezina konkretizacija.

### 5.2.1. Jednodimenzionalna jednađba provođenja topline

Prvo ćemo proučiti jednodimenzionalnu jednađbu topline koju ćemo proučiti na primjeru duge tanke šipke kao na slici ispod 5.1.



Slika 5.1. Model duge šipke

Ovakva duga tanka metalna šipka ili (kako bismo zadržali iste fizikalne pretpostavke) žica konstantnog presjeka i izrađena od homogenoga materijala usmjerena je duž  $x$ -osi i bočno je potpuno izolirana, tako da toplina teče samo u smjeru  $x$ -osi. U takvom, "ispeglanom" slučaju  $u$  ovisi samo o vremenu i  $x$ -u pa se u tom slučaju Lapacijan može reducirati na  $u_{xx} = \partial^2 u / \partial x^2$ .

Prema tome i jednađba topline postaje jednodimenzionalna i glasi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (5.2)$$

Iako se na prvu čini da je jednađba prilično slična onoj u prethodnom poglavlju njihovo ponašanje, odnosno rješenja prilično su različita, ipak princip pristupa rješavanju isti je kao što je opisano u navedenom poglavlju. Dodatno, u ovom slučaju potreban je samo jedan početni uvjet kako bismo pronašli rješenje. [5]

Prvi i najjednostavniji primjer koji ćemo rješavati ima granične uvjete gdje su oba kraja šipke na temperaturi nula koje možemo pisati kao:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (5.3)$$

Također, za ovaj najjednostavniji primjer uzet ćemo da je temperaturu šipke u vremenu  $t = 0$  zadana kao  $f(x)$  pa je naš početni uvjet:

$$u(x, 0) = f(x). \quad (5.4)$$

Ako ujedinitimo početni uvjet s graničnima, znamo i da vrijedi  $f(0) = 0$  te  $f(L) = 0$ .

Prvi korak je ponovno traženje dvije obične diferencijalne jednađbe za što primjenjujemo metodu produkata te uvrštavamo  $u(x, t) = F(x)G(t)$  u (5.2). Koristimo istu notaciju kao i prije, odnosno  $\dot{G} = \frac{dG}{dt}$  i  $F'' = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ . Uvrštavanjem dobivamo izraz  $F\dot{G} = c^2 F''G$  kojeg svodimo na:

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F}.$$

I u ovom slučaju lijeva strana ovisi samo o  $t$ , a desna samo o  $x$  pa kao i u valnoj jednađbi obje moraju biti jednake nekoj konstanti  $k$ , koja ponovno mora biti negativna pa uzimamo  $k = -p^2$  i

dobivamo:

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = -p^2.$$

Iz gornjeg izraza lako je izdvojiti dvije obične diferencijalne jednačbe koje glase

$$F'' + p^2 F = 0 \quad (5.5)$$

i

$$\dot{G} + c^2 p^2 G = 0. \quad (5.6)$$

Idući korak uključuje pronalazak rješenja koja zadovoljavaju granične uvjete (5.3). Opće rješenje za (5.5) glasi

$$F(x) = A \cos px + B \sin px.$$

Iz graničnih uvjeta čitamo  $u(0, t) = F(0)G(t) = 0$  i  $u(L, t) = F(L)G(t) = 0$ . Zaključujemo da bismo izbjegli ne trivijalna rješenja (npr.  $u = 0$ ) potrebno je uzeti  $F(0) = 0$  i  $F(L) = 0$ . Iz toga slijedi  $F(0) = A = 0$  i  $F(L) = B \sin pL = 0$ , gdje je ponovno zbog trivijalnosti druge opcije  $B \neq 0$ . Zato pišemo  $\sin pL = 0$  iz čega slijedi

$$p = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Radi jednostavnosti, za vrijednost  $B$  uzimamo  $B = 1$  pa dobivamo:

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Dalje rješavamo drugu običnu diferencijalnu jednačbu (5.6). Zapisujemo

$$\dot{G} + \lambda_n^2 G = 0, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L},$$

a opće rješenje ove jednačbe glasi za konstantan  $B_n$ :

$$G_n(t) = B_n e^{\lambda_n^2 t} \quad n = 1, 2, \dots$$

Ujedinjavanjem rješenja dolazimo do skupa karakterističnih funkcija:

$$u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t) = B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{\lambda_n^2 t} \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

s pripadajućim karakterističnim koeficijentom:

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}.$$

Kako bismo pronašli rješenje koje zadovoljava početne uvjete prelazimo na treći korak rješavanja odnosno primjenu Fourierovog reda. Promatramo red karakterističnih funkcija koji smo prethodno pronašli

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{\lambda_n^2 t}. \quad (5.8)$$



Zbog eksponencijalnog faktora, sve vrijednosti u rješenju teže nuli kako se  $t$  približava beskonačnosti. Brzina opadanja se povećava s rastućim  $n$ .

Koristimo početni uvjet (5.4) i pišemo:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x).$$

Kako bi (5.8) zadovoljilo početni uvjet  $B_n$ -ovi moraju biti koeficijenti Fourierovog sinusnog reda pa vrijedi

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

### 5.2.2. Dvodimenzionalna jednadžba provođenja topline

Nakon što smo analizirali jednodimenzionalnu jednadžbu, idući je korak njezino proširenje na dvije dimenzije:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Ako je jednadžba neovisna o vremenu vrijedi i  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$  pa pišemo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (5.9)$$

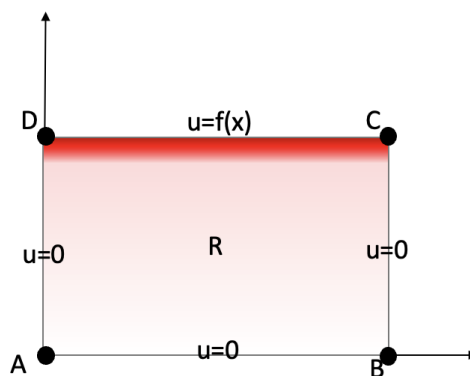
Na ovaj način definiran problem obuhvaća parcijalnu diferencijalnu jednadžbu koja se promatra u određenom području  $R$  u ravnini  $xy$ , zajedno s određenim graničnim uvjetima na granici tog područja  $C$ . Ovaj problem se naziva problem s graničnim uvjetima (Boundary Value Problem, krat. BVP) jer tražimo rješenje koje zadovoljava PDE unutar područja  $R$  i odgovarajuće uvjete na granici  $C$  [5].

Postoji više vrsta graničnih problema, a u ovom radu ćemo se fokusirati na prvi granični problem koji se još naziva i Dirichletov. On ima unaprijed definiranu vrijednost  $u$  na granici  $C$ . Postoje još i Neumannov (drugi BVP) kod kojeg je na granici  $C$  unaprijed određena normalna derivacija  $u_n = \frac{\partial u}{\partial n}$ . Treći BVP zapravo je kombinacija prva dva te se zbog toga naziva i Mješoviti granični problem.

Prelazimo na rješavanje Dirichleovog problema za 5.9. Prvo je potrebno postaviti zadatak - proučavat ćemo pravokutnik  $R$  smješten u koordinatnom sustavu  $xy$ . Njegove donje koordinate iznose  $A(0, 0)$  i  $B(b, a)$ , temperatura označena kao  $u(x, y)$  će na gornjoj strani pravokutnika biti jednaka zadanoj funkciji dok će na ostale tri strane vrijediti  $u(x, y) = 0$ . Gornje koordinate tada glase  $C(a, b)$  i  $D(0, b)$ .

Iz postavke možemo pročitati i granične uvjete koji glase:

$$F(0) = 0 \quad i \quad F(a) = 0. \quad (5.10)$$

Slika 5.2. Pravokutnik  $R$ 

Nadalje, rješavanju pristupamo na jednak način kao u prethodnim primjerima - prvo koristeći metodu produkata zapišemo  $u(x, t) = F(x)G(t)$ . Zatim iz 5.9 čitamo  $u_{xx} = -u_{yy}$ . Kombinacijom metode produkata i izraza iznad dobivamo odvojene varijable koje obje možemo izjednačiti s negativnom konstantom  $k$  odnosno:

$$\frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{G} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = -k.$$

S lijeve strane (u odnosu na  $x$ ) pišemo:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + kF = 0.$$

Zatim iz (5.10) pronalazimo  $k$ ,

$$k = \frac{n\pi^2}{a},$$

te su netrivialna rješenja onda:

$$F(x) = F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{a}x \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.11)$$

Druga obična diferencijalna jednadžba nakon uvrštavanja pronađenog  $k$  glasi:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 G = 0$$

dok su njezina netrivialna rješenja:

$$G(y) = G_n(y) = A_n e^{n\pi y/a} + B_n e^{-n\pi y/a}.$$

Znamo da je temperatura na cijeloj donjoj strani pravokutnika  $R$  jednaka nuli pa vrijedi i  $G_n(0) = 0$ . Iz  $G_n = A_n + B_n$  iskorištavamo  $A_n = -B_n$  što nam omogućava da zapišemo:

$$G(y) = G_n(y) = A_n (e^{n\pi y/a} + e^{-n\pi y/a}) = 2A_n \sinh \frac{n\pi y}{a}.$$

Iz izraza iznad i (5.11) uočavamo da vrijedi

$$2A_n = A_n^*.$$

Sada možemo zapisati red karakterističnih funkcija za naš problem kao:

$$u_n(x, y) = F_n(x)G_n(y) = A_n^* \sin \frac{n\pi}{a}x \sinh \frac{n\pi y}{a}. \quad (5.12)$$

Do sad smo se bavili rješenjima koja zadovoljavaju granične uvjete vezane za temperaturu koja iznosi nula, ali postoji još jedan početni uvjet koji govori o temperaturi gornje granice pravokutnika i on glasi

$$u(x, b) = f(x).$$

Prisjetimo se općeg izraza za red u koji ćemo u idućem koraku uvrstiti pronađeno rješenje (5.12) kako bismo pronašli rješenje koje će zadovoljiti i posljedni granični uvjet.

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y).$$

Pišemo:

$$u_n(x, b) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi b}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* \sinh \frac{n\pi b}{a}) \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Iz na ovaj način zapisanog izraza možemo prepoznati da je izraz u zagradama Fourierov koeficijent od  $f(x)$  odnosno

$$b_n = A_n^* \sinh \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx. \quad (5.13)$$

Iz (5.13) i (5.12) nalazimo konačno rješenje našeg problema koje glasi:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a},$$

gdje je

$$A_n^* = \frac{2}{a \sinh(n\pi y/a)} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx.$$

### 5.2.3. Primjena Fourierova integrala kod rješavanja jednadžbe provođenja topline

U poglavlju "Jednodimenzionalna jednadžba provođenja topline" bavili smo se jednadžbom provođenja topline u dugoj metalnoj šipci. Osnovni oblik jednadžbe koji smo koristili glasio je

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Sad ćemo duljinu šipke produžiti u beskonačnost kako bismo dobili model jako dugačke šipke, a šipka će i dalje ostati izolirana kao što je opisano ranije [5].

Ovakve se šipke (cijevi i slično) koriste na primjer, u električnim motorima, poput osovina ili namota, koje prenose toplinu nastalu uslijed gubitaka u motoru te omogućuju učinkovito odvođenje topline i sprječavaju pregrijavanje motora. Također, u elektronici i računalstvu, duge metalne šipke se koriste u hladnjacima ili hladnim pločama kako bi se odvodila toplina iz elektroničkih komponenti poput procesora ili tranzistora. Ove šipke omogućuju učinkovito rasipanje topline i održavanje optimalne temperature elektroničkih uređaja.

U ovom slučaju problem neće imati granične uvjete (pa ih se neće ni razmatrati), ali ćemo pokazati da je do rješenja moguće doći koristeći samo jedan početni uvjet koji glasi:

$$u(x, 0) = f(x) \quad -\infty < x < \infty,$$

gdje je  $f(x)$  kao i ranije početna temperatura promatrane šipke.

Ponovno koristimo metodu produkata (odnosno:  $u(x, t) = F(x)G(t)$ ). Iz jednadžbe provođenja topline metodom produkata dobivamo iste obične diferencijalne jednadžbe kao i za šipku ograničene duljine. Dvije ODE su:

$$F'' + p^2 F = 0$$

i

$$\dot{G} + c^2 p^2 G = 0.$$

Njihova su rješenja:

$$F(x) = A \cos px + B \sin px$$

i

$$G(t) = e^{-e^2 c^2 t}.$$

Ponovno smo izabrali  $k = -p^2$  jer bi u protivnom za  $G$  dobili rastuću eksponencijalnu funkciju pa bi rezultat bio neprimjenjiv u fizikalnom smislu tj. pravim modelima. Zbog toga dobivamo rješenje jednadžbe:

$$u(x, t; p) = FG = (A \cos px + B \sin px)e^{-e^2 c^2 t} \quad (5.14)$$

Bilo koji niz funkcija iz (5.14), koja se dobiva na uobičajeni način uzimajući  $p$  kao višekratnik cijelog broja, rezultirat će periodičnom funkcijom u  $x$ -u kad je vrijeme  $t$  jednako nuli. Jednadžba provođenja topline homogena je i linearna funkcija [5]. Međutim, budući da funkcija  $f(x)$  iz zadanih početnih uvjeta ne mora biti periodična, potrebno je koristiti Fourierove integrale umjesto Fourierovih nizova kako bismo došli do rješenja.

Također, koeficijenti  $A$  i  $B$  u (5.14) su proizvoljni i mogu se promatrati kao funkcije od  $p$ , koje označavamo s  $A = A(p)$  i  $B = B(p)$ .

Primjenjujemo Fourierov integral i pronalazimo rješenje koje vrijedi ukoliko ovakav integral postoji te može biti dvaput deriviran po  $x$ -u i jednom po  $t$ . Tada rješenje glasi:

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} u(x, t; p) dp = \int_0^{\infty} (A(p) \cos px + B(p) \sin px) e^{-c^2 c^2 t} dp.$$

Nakon što smo pronašli rješenje, tražimo koeficijente  $A(p)$  i  $B(p)$  takve da odgovaraju početnom uvjetu. Prema tome zapisujemo

$$u(x, 0) = \int_0^{\infty} [A(p) \cos px + B(p) \sin px] dp = f(x).$$

Iz formule (3.16) i (3.17) prepoznavamo

$$A(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos pv \, dv,$$

$$B(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin pv \, dv.$$

Zatim pronađene vrijednosti vraćamo u Fourierov integral te dobivamo:

$$u(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(px - pv) dv \right] dp.$$

Sada je moguće zapisati integral i bez početnog uvjeta kao:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(px - pv) e^{-c^2 c^2 t} dv \right] dp.$$

Možemo okrenuti redoslijed integracije pa dobivamo izraz s koji će biti lakše dalje računati odnosno

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2 c^2 t} \cos(px - pv) dp \right] dv. \quad (5.15)$$

Primjenjujući formulu

$$\int_0^{\infty} e^{-s^2} \cos 2bs \, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$$

možemo pronaći vrijednost unutarnjeg integrala

$$\int_0^{\infty} e^{-c^2 p^2 t} \cos(px - pv) dp = \frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{t}} \exp\left\{-\frac{(x-v)^2}{4c^2 t}\right\}.$$

Dobiveni rezultat uvrštavamo u (5.15) iz čega dobivamo:

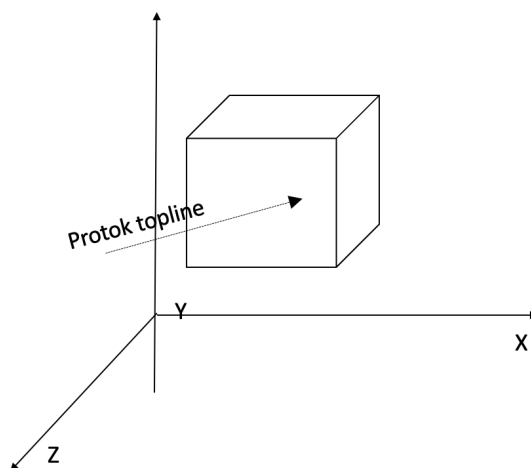
$$u(x, t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \exp\left\{-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}\right\} dv,$$

a ovaj se izraz može i dalje pojednostaviti ako kao integracijsku varijablu odaberemo  $z = \frac{x-v}{2c\sqrt{t}}$ . Naše traženo rješenje tada zadovoljava početni uvjet i glasi:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2cz\sqrt{t}) e^{-z^2} dz.$$

#### 5.2.4. Trodimenzionalna jednadžba provođenja topline

Na kraju ćemo proučiti problem potpuno izoliranog trodimenzionalnog vodiča topline koji je potpuno izoliran u Kartezijevim koordinatama kako bismo se upoznali s trodimenzionalnom jednadžbom provođenja topline u tri dimenzije.



Slika 5.3. Protok topline u Kartezijevom koordinatnom sustavu

Kao i u prethodnim dijelovima rada, proučavamo metalnu šipku koja provodi toplinu (ovoga puta ta šipka ima i treću dimenziju te je kvadratnoga oblika (5.3)). Kroz nju protječe toplina u u smjerovima paralelnima visini, širini i dužini šipke. Pišemo da je  $u(x, y, z)$  temperatura u bilo kojoj točki koordinata  $x, y, z$  unutar šipke [10].

Trodimezionalna jednadžba provođenja topline u vremenu  $t$  može se zapisati kao:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (5.16)$$

Radi jednostavnosti uzet ćemo slučaj stacionarnog stanja gdje se temperatura ne mijenja u odnosu na  $t$  što znači da možemo zapisati  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ .

Dakle

$$c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \quad \text{pa} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Postavljamo i rubne uvjete koji glase

$$u(0, y, z) = 0, \quad u(x, 0, z) = 0, \quad u(x, y, 0) = 0$$

$$u(l_1, y, z) = 0, \quad u(x, l_2, z) = 0, \quad u(x, y, l_3) = f(x, y).$$

Kao i ranije pretpostavljamo da je  $u = X(x)Y(y)Z(z)$ , odnosno primjenjujemo metodu produkata. U gornjoj jednadžbi vršimo supstituciju i dobivamo:

$$YZ \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + XZ \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + XY \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$$

Nakon pojednostavljivanja i sređivanja dobivamo izraz:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

Iz gornjeg izraza možemo zaključiti

$$\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -p_1^2$$

i

$$\frac{X''}{X} = \frac{Z''}{Z} = -p_2^2$$

proglasivši  $p_1$  i  $p_2$  konstantama. Postupak dalje nastavljamo kao u već opisanom dvodimenzionalnom slučaju.

## 6. Jednadžba provođenja topline u različitim koordinatnim sustavima

Jednadžba provođenja topline je fundamentalna jednadžba koja opisuje širenje topline ili toplinskih promjena u materijalima. Primjenjuje se u različitim koordinatnim sustavima, poput polarnog, cilindričnog i sfernog, kako bi se opisali različiti geometrijski oblici ili sustavi koji su prisutni u stvarnom svijetu. Uzimanje u obzir različitih koordinatnih sustava omogućuje nam da modeliramo složene fizikalne fenomene koji se javljaju u takvim sustavima [17].

Na primjer, u polarnom koordinatnom sustavu, jednadžba topline može uzeti u obzir asimetrične toplinske tokove koji se javljaju u kružnim ili prstenastim geometrijama. Cilindrični koordinatni sustav koristi se za opisivanje sustava koji imaju cilindričnu simetriju, poput cjevovoda ili rotirajućih cilindara. Sferni koordinatni sustav koristi se za opisivanje sferično simetričnih sustava, kao što su planete ili okrugli objekti. U takvim slučajevima, jednadžba topline u sfernim koordinatima omogućuje nam proučavanje toplinskog transfera kroz sferične strukture [17].

Ako uzmemo za primjer nekoliko konkretnih primjera iz svijeta elektrotehnike, električne zavojnice često imaju oblik prstena ili spirale te se mogu opisati pomoću polarnog koordinatnog sustava. Jednadžba topline u polarnim koordinatima koristi se za proučavanje raspodjele temperature u takvim strukturama i analizu toplinskih gubitaka. S druge strane, elektromotori često imaju složene geometrije, uključujući rotirajuće komponente poput statora i rotora zbog čega se za analizu toplinskih učinaka u elektromotorima koriste različiti koordinatni sustavi. Cilindrični koordinatni sustav može se koristiti za opisivanje rotacijske simetrije motora, dok se za analizu toplinskih efekata u statoru i rotoru može koristiti Kartazijev koordinatni sustav. Dok se npr. u analizi složenih elektromagnetskih polja u antenama ili optičkim vlaknima mogu se koristiti cilindrični ili sferni koordinatni sustav, ovisno o simetriji i geometriji sustava.

Općenito, korištenje jednadžbe topline u različitim koordinatnim sustavima omogućuje nam prilagođavanje modela stvarnom obliku i geometriji sustava s kojima radimo. U idućim potpoglavljima izvest ćemo iz osnovnog oblika jednadžbe provođenja topline za tri spomenuta koordinatna sustava.

Kao osnovu za izvođenje jednadžbe topline u različitim koordinatnim sustavima koristit ćemo opću jednadžbu provođenja topline iz prethodnog poglavlja 5.16.

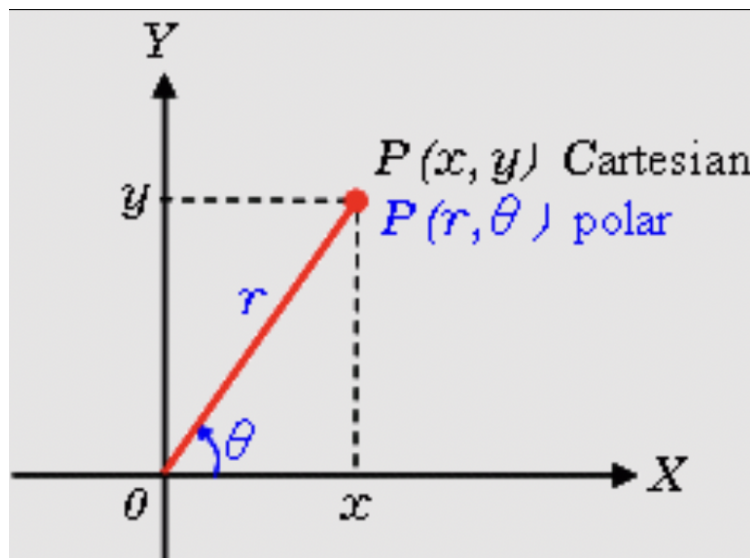
Ponovimo, opća jednadžba provođenja topline u trodimenzionalnom kartezijevom koordinatnom sustavu glasi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$



## 6.1. Jednadžba u polarnom sustavu

Polarni koordinatni sustav koristi se za opisivanje simetrije oko središta, poput kružnih ili prstenastih struktura. Polarni koordinatni sustav koristi dvije koordinate -  $r$  (udaljenost od središta) i  $\theta$  (kutna pozicija).



Slika 6.1. Polarni koordinatni sustav

Da bismo izveli jednadžbu topline za polarni koordinatni sustav, moramo transformirati diferencijalne operatore s kartezijevih koordinata u polarni koordinatni sustav.

Krenimo od opće dvodimenzionalne jednadžbe provođenja topline u kartezijevim koordinatama:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Dalje ćemo izvesti izraz za provođenje topline u polarnim koordinatama koristeći transformaciju koordinata.

Koristimo sljedeće transformacije:  $x = r \cos \theta$  i  $y = r \sin \theta$ .

Izračunamo parcijalne derivacije  $u$  s obzirom na  $x$  i  $y$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

Zatim, izračunamo druge parcijalne derivacije  $u$  s obzirom na  $x$  i  $y$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right).$$

Nadalje, koristimo izraze za derivacije transformacija:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta,$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}.$$

Zatim uvrstimo dobivene izraze u prethodne derivacije:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial \theta} \left( -\frac{\sin \theta}{r} \right) \right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial \theta} \left( \frac{\cos \theta}{r} \right) \right).$$

Računamo druge parcijalne derivacije  $u$  s obzirom na  $r$  i  $\theta$  i dobivamo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Na kraju, uvrstimo dobivene izraze u početnu jednadžbu za provođenje topline i dobivamo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right).$$

## 6.2. Jednadžba u cilindričnom sustavu

Na slici ispod možemo vidjeti usporedbu prikaza koordinate u 3 različita koordinatna sustava za koja ćemo izvesti jednadžbu provođenja topline.

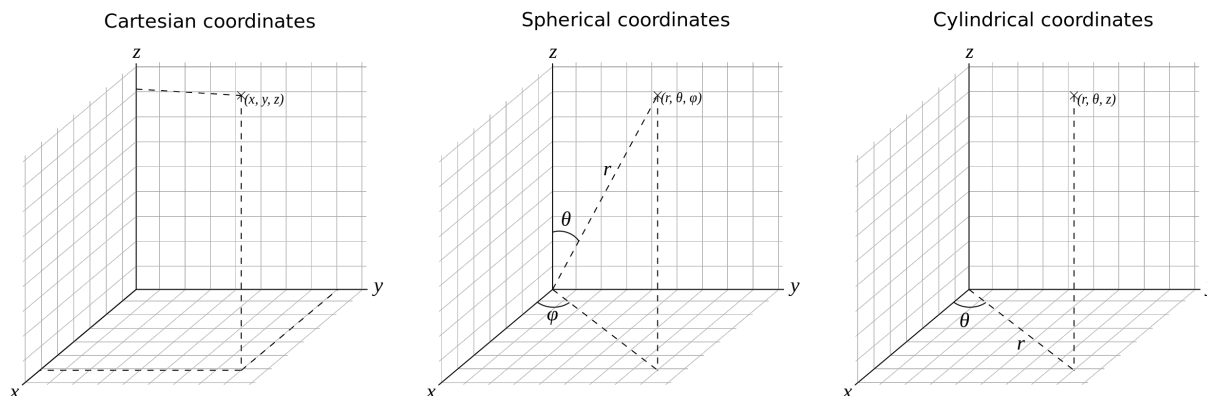
Prvo ćemo izvesti jednadžbe za cilindrični koordinatni sustav.

Cilindrični koordinatni sustav koristi tri koordinate -  $r$  (udaljenost od osi  $z$ ),  $\theta$  (kut u ravnini  $xy$ ) i  $z$  (visina). Na slici 6.2 možemo vidjeti ilustraciju koordinata (treći sustav).

Nakon što smo opisali koordinate, izvodimo jednadžbu topline za cilindrični koordinatni sustav [16].

Derivacija po  $r$ -koordinati:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}.$$



Slika 6.2. Usporedba točke u kartezijevom, cilindričnom i sfernom koordinatnom sustavu

Derivacija po  $z$ -koordinati:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial z}.$$

Derivacija po  $\theta$ -koordinati:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta}.$$

Derivacija drugog reda po  $r$ -koordinati:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

Derivacija drugog reda po  $z$ -koordinati:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right).$$

Na kraju zamijenimo sve derivacije u općoj jednačbi provođenja topline (5.16) s dobivenim izrazima:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

Dobivena je jednačba topline za cilindrični koordinatni sustav koji se primjenjuje za opisivanje sustava s cilindričnom simetrijom, kao što su cijevi, rotirajući valjci i slično.

### 6.3. Jednačba u sfernom sustavu

Na kraju ćemo izvesti jednačbu topline za sferni koordinatni sustav. I dalje koristimo istu osnovnu formulu koju prilagođavamo.

Sferni koordinatni sustav koristi se za opisivanje sferično simetričnih struktura i koristi tri koordinate -  $r$  (udaljenost od središta),  $\theta$  (kutna pozicija) i  $\varphi$  (kutna pozicija). Na slici 6.2 možemo

vidjeti ilustraciju koordinata (drugi sustav). Ovako izvedena jednadžba topline u sfernom koordinatnom sustavu uzimat će u obzir diferencijalne promjene temperature s obzirom na udaljenost od središta ( $r$ ), kutnu poziciju u odnosu na os  $z$  ( $\theta$ ) i kutnu poziciju u odnosu na os  $x$  ( $\varphi$ ) [17].

Da bismo izveli jednadžbu topline za sferni koordinatni sustav, moramo transformirati diferencijalne operatore od kartezijevih koordinata za sferni koordinatni sustav.

Derivacija po  $x$ -koordinati:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Derivacija po  $y$ -koordinati:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Derivacija po  $z$ -koordinati:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Derivacija drugog reda po  $r$ -koordinati:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

Derivacija drugog reda po  $\theta$ -koordinati:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right).$$

Derivacija drugog reda po  $\varphi$ -koordinati:

$$\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right).$$

Nakon što smo pronašli sve potrebne izvode i uvrštavamo ih u opću jednadžbu provođenja topline (5.16), te dobivamo jednadžbu topline za sferni koordinatni sustav:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right).$$

## 7. Primjene u elektrotehnici

Nakon što smo se upoznali s raznim načinima pristupa rješavanju jednadžbi topline i pogledali neke osnovne primjere, za kraj ćemo dati pregled četiri stvarna primjera koja se koriste u elektrotehnici i industriji. Možemo i napomenuti da danas takve primjere ne rješavaju sami inženjeri ručno, ali za pravilan rad i razvoj nužno im je dubinsko poznavanje i razumijevanje tematike.

### 7.1. Toplinska analiza na primjeru transformatora

Kako bismo još malo predočili kompleksnost i različite mogućnosti primjene jednadžbi topline uzet ćemo za primjer transformatore.

Transformator je električni uređaj koji prenosi električnu energiju između dvije ili više razina napona. Najvažniji su i najskuplji uređaji u elektroenergetskoj mreži za prijenos i distribuciju električne energije. Oni pretvaraju električnu energiju iz elektrana za krajnje korisnike. Učinkovitost ovih uređaja ključna je za osiguranje pouzdanosti i isporuku električne energije. Kako transformatori rade na temelju elektromagnetskih principa, dolazi do određenih gubitaka energije koja se pretvara u toplinu. Ovi gubici mogu dovesti do povećanja temperature unutar transformatora, što može imati negativan utjecaj na njegovu učinkovitost i dugovječnost. Jednadžba topline je matematički model koji se koristi za opisivanje i analizu prijenosa topline kroz materijal, a njena u transformatoru omogućava proučavanje raspodjele temperature unutar transformatora te utvrđivanje kritičnih točaka i uvjeta rada. Jednadžba topline koja se primjenjuje u transformatorima obično ima oblik:

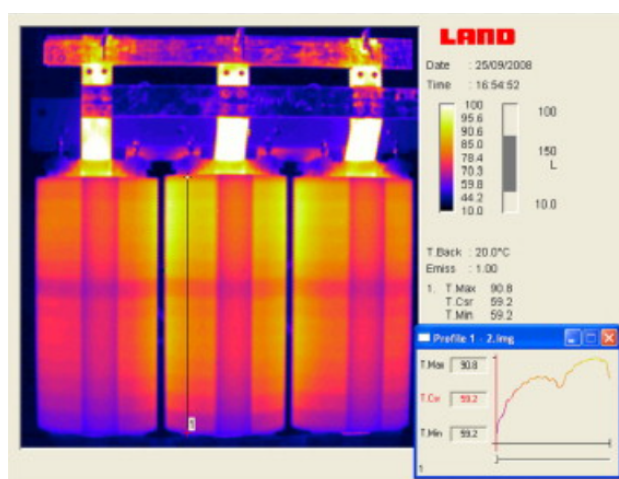
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + Q,$$

gdje je  $T$  temperatura u unutrašnjosti transformatora,  $t$  je vrijeme,  $\alpha$  je toplinska vodljivost materijala,  $\nabla^2$  je Laplaceov operator koji opisuje drugi prostorni izvod temperature, a  $Q$  predstavlja izvor ili potrošnju topline. Primjena jednadžbe topline u transformatorima može pomoći inženjerima da optimiziraju dizajn transformatora, poboljšaju učinkovitost, smanje gubitke i osiguraju pouzdan rad.

Pretpostavimo da imamo suhi transformator koji radi pod stalnim opterećenjem. Cilj je analizirati raspodjelu temperature u transformatoru kako bismo osigurali da se temperatura ne povećava iznad sigurnosnih granica - ograničenja temperatura koja treba poštivati radi sigurnog i pouzdanog rada. Previsoka temperatura može uzrokovati smanjenje izolacijske svojstvenosti materijala, pogoršati učinkovitost, smanjiti radni vijek i čak dovesti do oštećenja ili kvara transformatora. Stoga je važno analizirati raspodjelu temperature kako bi se identificirale kritične točke i osiguralo da temperature ostaju unutar dopuštenih granica [13].

Na početku definiramo geometriju transformatora i svojstva materijala, kao što su toplinska vodljivost i specifična toplota. Transformatori se sastoje od različitih materijala s različitim termalnim svojstvima. Primjerice, jezgra transformatora može biti izrađena od čelika s visokom toplinskom vodljivošću, dok su namotaji obično izolirani bakrom ili aluminijskim provodnicima. Svaki od ovih materijala ima svoju toplinsku vodljivost i specifičnu toplotu, što utječe na raspodjelu temperature unutar transformatora. Treba uzeti u obzir i činjenicu da transformatori generiraju gubitke energije koji se pretvaraju u toplotu, a najvažniji gubici su željeza u jezgri transformatora i u provodnicima namotaja.

Zatim, primjenjujemo jednadžbu topline na prostor i vrijeme unutar transformatora. Ovisno o složenosti geometrije i materijala, jednadžbu topline možemo riješiti analitički ili numerički koristeći računalne simulacije. Za složenije transformatorske sustave, analitičko rješavanje jednadžbe topline može biti teško ili nemoguće. U takvim slučajevima koriste se numeričke simulacije kao metoda rješavanja jednadžbe topline. Računalni programi i alati, kao što su metoda konačnih elemenata ili metoda konačnih volumena, koriste se za modeliranje transformatora, postavljanje rubnih uvjeta, određivanje termalnih svojstava materijala i dobivanje detaljnih informacija o raspodjeli temperature[11].



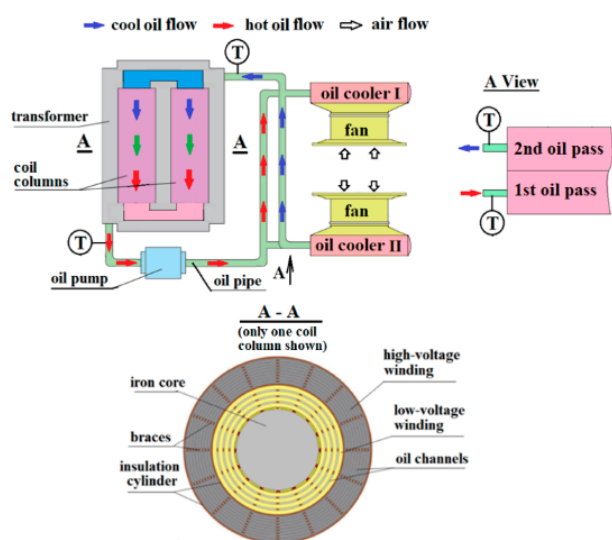
Slika 7.1. Primjer računalne simulacije za analizu temperature unutar transformatora [12]

Jednom kada riješimo jednadžbu topline, dobivamo raspodjelu temperature unutar transformatora tijekom vremena. Možemo identificirati točke s najvišom temperaturom, kao što su spojevi između namotaja ili određeni dijelovi jezgre. Ove točke mogu biti potencijalno kritične i zahtijevaju posebnu pažnju kako bi se osiguralo da temperatura ostane unutar sigurnosnih granica.

Analiza temperature temeljena na jednadžbi topline može pomoći u identifikaciji područja s visokom temperaturom i prepoznavanju nedostataka u hlađenju. Na temelju tih informacija, inženjeri mogu prilagoditi dizajn transformatora kako bi poboljšali protok zraka, dodali dodatne hladnjake, koristili ventilacijske sustave ili primijenili termalne izolacije kako bi se učinkovitije uklonila toplota [12].

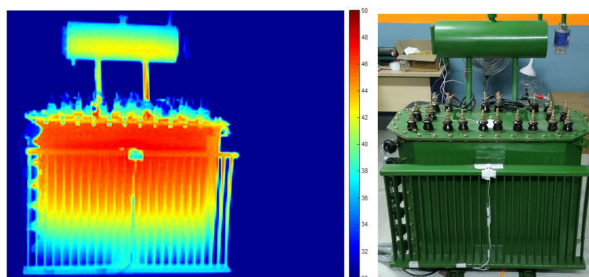
Ipak valja napomenuti i da su danas većina instaliranih energetske transformatora su transfor-

matori s uljnim izolacijskim sustavom jer omogućuju rad na visokim razinama snage.



Slika 7.2. Protok topline u transformatoru s uljnim izolacijskim sustavom [15]

Nažalost, ulje koje pruža hlađenje i izolaciju aktivnog dijela transformatora postupno se degradira tijekom vremena i ima ograničeno vijek trajanja (20-ak godina) kada se poštuje normalni raspon radnih temperatura (60 do 100 stupnjeva celzija). Međutim, preopterećeni transformatori mogu dosegnuti više radne temperature i u nekim slučajevima premašiti  $100^{\circ}\text{C}$ . Pri takvim temperaturama može se primijetiti brza degradacija ulja, čak i do potpune degradacije transformatora [14]. Praćenjem razine i kvalitete ulja u kombinaciji s analizom termalnih karakteristika inženjeri mogu detektirati potencijalne probleme degradacije i poduzeti korektivnih mjera prije nego što dođe do kritičnih stanja [15].



Slika 7.3. Sustav za procjenu količine ulja u spremniku transformatora razvijen u Simensu na temelju koncepta konvektog prijenosa topline [15]

## 7.2. Termalno upravljanje u visokonaponskim transformatorima

Jednadžba topline primjenjuje se za modeliranje termalnih svojstava visokonaponskih transformatora i analizu raspodjele temperature unutar njih. Matematički izraženo, jednadžba topline za transformator s nepropusnim feromagnetnim jezgrom može se zapisati kao:

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla(k \nabla T) + Q,$$

gdje je  $T$  temperatura koja ovisi o vremenu  $t$  i prostornim koordinatama  $(x, y, z)$ ,  $\rho$  je gustoća materijala,  $c$  je specifična toplina,  $k$  je koeficijent toplinske provodljivosti i  $Q$  predstavlja izvor topline[6]. Analiza ove jednadžbe topline omogućuje identifikaciju područja s visokim temperaturama unutar transformatora, što može dovesti do degradacije izolacijskih materijala ili smanjene efikasnosti. Optimizacija geometrije, materijala i hlađenja transformatora temelji se na rezultatima termalne analize.

### 7.3. Termalna simulacija električnih sklopova

Jednadžba topline primjenjuje se za simulaciju termalnih svojstava električnih sklopova, uključujući integrirane krugove i visokofrekventne komponente. Matematički izraženo, jednadžba topline u dvodimenzionalnom prostoru može se zapisati kao:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + Q,$$

gdje je  $u$  funkcija temperature koja ovisi o vremenu  $t$  i koordinatama  $(x, y)$ ,  $\alpha$  je koeficijent termalne provodljivost, a  $Q$  je izvor topline. Primjena jednadžbe topline omogućuje identifikaciju područja s visokim temperaturama unutar električnih sklopova, što može utjecati na performanse i pouzdanost. Kroz pravilno hlađenje, odabir materijala s dobrim termalnim svojstvima i optimizaciju dizajna sklopova, moguće je poboljšati termalnu učinkovitost i smanjiti rizik od pregrijavanja [7].

### 7.4. Termalna analiza električnih motora

Jednadžba topline koristi se za analizu termalnog ponašanja električnih motora i procjenu temperature unutar različitih dijelova motora. Primjerice, u slučaju trofaznih asinkronih motora, jednadžba topline može se zapisati kao:

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla(k \nabla T) + P_{gen},$$

gdje je  $T$  temperatura koja ovisi o vremenu  $t$  i prostornim koordinatama  $(x, y, z)$ , je  $\rho$  gustoća materijala,  $c$  je specifična toplina,  $k$  je koeficijent toplinske provodljivost, a  $P_{gen}$  predstavlja generiranu toplinu unutar motora [6]. Analiza ove jednadžbe topline omogućuje identifikaciju područja s visokim temperaturama koja mogu uzrokovati pregrijavanje i oštećenje motora. Primjenom naprednih metoda rješavanja jednadžbe topline, poput metode konačnih volumena ili metode konačnih elemenata, moguće je poboljšati termalnu učinkovitost i pouzdanost električnih motora.



## 7.5. Simulacija termalne difuzije u mikroelektronici

Jednadžba topline u mikroelektronici koristi se za simulaciju termalne difuzije u složenim integriranim krugovima. Matematički izraženo, jednadžba topline u trodimenzionalnom prostoru može se zapisati kao:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u,$$

gdje je  $u$  funkcija temperature koja ovisi o vremenu  $t$  i trodimenzionalnim koordinatama  $(x, y, z)$ , a  $\alpha$  je koeficijent termalne difuzije. Numeričke metode, poput metode konačnih elemenata, metode konačnih razlika ili metode konačnih volumena, primjenjuju se za diskretizaciju prostora i vremena te rješavanje ove jednadžbe. Simulacija termalne difuzije omogućuje analizu raspodjele temperature i toplinskog prijenosa kroz mikroelektroničke komponente, što je ključno za procjenu termalnih performansi, pouzdanosti i dizajna.

## 8. Zaključak

U ovom završnom radu opisana je Fourierova metoda koja predstavlja ključni matematički alat u proučavanju procesa prijenosa topline. Ova metoda omogućuje analizu i rješavanje jednadžbi provođenja topline, što je ključno za razumijevanje i predviđanje raspodjele temperature u različitim sustavima.

U radu smo istaknuli osnovne koncepte provođenja topline, objasnili jednadžbu provođenja topline kao parcijalnu diferencijalnu jednadžbu te predstavili povijesni pregled istraživanja vezanih za toplinu. Zatim smo detaljno opisali Fourierovu metodu, koja se temelji na razdvajanju varijabli i izražavanju funkcija kao zbroj sinusnih i kosinusnih funkcija. Navedeni su koraci za rješavanje jednadžbe koji su univerzalni i primjenjivi na sve parcijalne diferencijalne jednadžbe. Dodatno, dali smo primjer aproksimacije dobivene razvojem Fourierovog reda te smo grafički prikazali aproksimaciju.

Nadalje, prikazali smo primjenu Fourierove metode u rješavanju jednadžbi provođenja topline, uključujući jednodimenzionalne, dvodimenzionalne i trodimenzionalne slučajeve te razmotrili različite koordinatne sustave u kojima se jednadžba provođenja primjenjuje. Također smo istaknuli primjenu Fourierovog integrala u analizi toplinskih procesa.

Na kraju, fokusirali smo se na primjenu dobivenih rješenja Fourierove metode u elektrotehnici. Prikazali smo primjere primjene uključujući toplinsku analizu transformatora kao opći primjer i primjer složenosti i brojnih mogućnosti termalne analize. Zatim smo kraće opisali termalno upravljanje u visokonaponskim transformatorima, termalnu simulaciju električnih sklopova, termalnu analizu električnih motora i simulaciju termalne difuzije u mikroelektronici.

Sveukupno, ovaj rad pruža temeljno razumijevanje Fourierove metode za rješavanje jednadžbe provođenja topline i prikazuje njezinu primjenu u elektrotehnici. Razumijevanje i primjena ove metode ključni su za proučavanje toplinskih procesa i predviđanje temperature u različitim materijalima i sustavima.

## Literatura

- [1] "Hrvatska enciklopedija - Toplina", s Interneta, <https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=61787>, 10..06.2023.
- [2] "Hrvatska enciklopedija - Toplina", s Interneta, <https://www.embs.org/pulse/articles/highlights-in-the-history-of-the-fourier-transform/>, 10..06.2023.
- [3] "Britannica - Joseph Baron Fourier", s Interneta, <https://www.britannica.com/biography/Joseph-Baron-Fourier>, 10..06.2023.
- [4] Müller, I.: "A History of Thermodynamics: The Doctrine of Energy and Entropy", Springer, Berlin, 2007.
- [5] Kreyszig, E.: "Advanced engineering mathematics", Deseto izdanje, John Wiley and Sons, 2012.
- [6] Shanmuga Sundaram, A.; Velraj, R.: "Thermal management of electronics: A review of literature", Thermal Science 12(2), pp. 5-22, 2008.
- [7] "General Thermal Analysis of Integrated Circuits for Power Applications", s Interneta, <https://www.powerselectronicsnews.com/general-thermal-analysis-of-integrated-circuits-for-power-applications>, 18.06.2023.
- [8] Elezović, N.; Puljiz, M.: "Laplaceova transformacija. Fourierov red i Fourierova transformacija", Peto izdanje, ELEMENT d.o.o., 2019.
- [9] "Obične diferencijalne jednačbe", s Interneta, [https://www.grad.unizg.hr/download/repository/MAT2\[1\].pdf](https://www.grad.unizg.hr/download/repository/MAT2[1].pdf), 22.06.2023.
- [10] Ibitola G. A., Olanrewaju A. Oluwole A.: "Concept of thermal energy flow in three-dimensional solids", Scientific Research Journal (SCIRJ), Vol. 4 No. 9, 2016.
- [11] Torin, L.; Garzon Medina, D.; Sousa, T.: "Dry-Type Power Transformers Thermal Analysis with Finite Element Method", International Journal of Advanced Engineering Research and Science, Vol. 6, No. 3, pp. 159-165, 2019.
- [12] Eslamian, M.; Vahidi, B.; Eslamian, A.: "Thermal analysis of cast-resin dry-type transformers", Energy Conversion and Management, Vol. 52, No. 7, pp. 2479-2488, 2011.
- [13] Bouhaddiche, R. ; Bouazabia, S.; Fofana, I. : "Thermal modelling of power transformer", IEEE 19th International Conference on Dielectric Liquids (ICDL), Manchester, UK, pp. 1-4, 2017

- [14] You, Y.; Shao, K.; Yi, Z.: "Dynamic Heat Dissipation Model of Distributed Parameters for Oil-Directed and Air-Forced Traction Transformers and Its Experimental Validation", *Entropy*, Vol. 25, No. 3, 2023.
- [15] "Siemens Develops Health Monitoring System for Distribution Transformers", s Interneta, [https://www.mathworks.com/company/user\\_stories/case-studies/siemens-develops-health-monitoring-system-for-distribution-transformers.html](https://www.mathworks.com/company/user_stories/case-studies/siemens-develops-health-monitoring-system-for-distribution-transformers.html) , 08.07.2023.
- [16] "Heat conduction equation in spherical coordinates", s Interneta, <https://medium.com/@lucidlearning314/heat-conduction-equation-in-cylindrical-coordinates-3e26402ee1f8> , 18.07.2023.
- [17] Incropera, F. P.; DeWitt, D. P.; Bergman, T. L.; Lavine A. S. "Fundamentals of Heat and Mass Transfer ", Šesto izdanje, John Wiley & Sons, 2006.
- [18] <https://www.wikipedia.org/>, s Interneta, 10.06.2023.
- [19] <https://library.si.edu/>, s Interneta, 10.06.2023.

## Sažetak i ključne riječi

Tema ovog završnog rada je Fourierova metoda za rješavanje jednadžbe provođenja topline. Na početku rada opisana je povijest istraživanja topline i pregled rada Josepha Fouriera. Zatim je opisana Fourierova metoda, Fourierov red i integral te je prikazan razvoj funkcije po Fourierovom redu. Nakon što su postavljeni metodički temelji, postavljena je osnovna jednadžba provođenja topline te je prikazana primjena Fourierove metode u njezinom rješavanju u jednoj, dvije i tri dimenzije i u cilindričnom, sfernom i polarnom koordinatnom sustavu na različitim primjerima. Na kraju rada čitatelj se upoznaje s izabranim primjenama jednadžbe provođenja topline u elektrotehnici.

**Ključne riječi:** jednadžba provođenja topline, Fourierova metoda, Fourierov red, parcijalna diferencijalna jednadžba

## **Summary and key words**

The topic of this final thesis is the Fourier method for solving the heat equation. At the beginning of the paper, the history of heat research and an overview of Joseph Fourier's work are described. Then the Fourier method, the Fourier series and the integral are described, and the development of the function according to the Fourier series is shown. After the methodological foundations were laid, the basic equation of heat conduction was set and the application of the Fourier method in its solution in one, two and three dimensions and cylindrical, spherical and polar coordinates was presented on different examples. At the end of the paper, the reader is introduced to selected applications of the heat equation in electrical engineering.

**Keywords:** heat equation, Fourier method, Fourier series, partial differential equation