

# Numerički model za analizu toplinskoga izvijanja FG kompozitnih grednih nosača

---

**Kvaternik Simonetti, Sandra**

**Doctoral thesis / Disertacija**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:190:739429>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-25**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Engineering](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI  
TEHNIČKI FAKULTET

Sandra Kvaternik Simonetti

**NUMERIČKI MODEL ZA ANALIZU  
TOPLINSKOGA IZVIJANJA FG  
KOMPOZITNIH GREDNIH NOSAČA**

DOKTORSKI RAD

Rijeka, 2023.



SVEUČILIŠTE U RIJECI  
TEHNIČKI FAKULTET

Sandra Kvaternik Simonetti

**NUMERIČKI MODEL ZA ANALIZU  
TOPLINSKOGA IZVIJANJA FG  
KOMPOZITNIH GREDNIH NOSAČA**

DOKTORSKI RAD

Mentor: prof. dr. sc. Domagoj Lanc

Komentor: prof. dr. sc. Goran Turkalj

Rijeka, 2023.



UNIVERSITY OF RIJEKA  
FACULTY OF ENGINEERING

Sandra Kvaternik Simonetti

**NUMERICAL MODEL FOR THERMAL  
BUCKLING ANALYSIS OF FG  
COMPOSITE BEAM STRUCTURES**

DOCTORAL DISSERTATION

Rijeka, 2023.



*Mojoj obitelji.*

*Ps 139, 14*





Mentor doktorskoga rada: prof. dr. sc. Domagoj Lanc

Komentor: prof. dr. sc. Goran Turkalj

Doktorski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ 2023. na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci pred povjerenstvom u sastavu:

1. prof. dr. sc. Marko Čanađija, Tehnički fakultet, Sveučilište u Rijeci
2. prof. dr. sc. Gordan Jelinić, Građevinski fakultet, Sveučilište u Rijeci
3. prof. dr. sc. Zdenko Tonković, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu



## Zahvala

---

Na samom početku htjela bih izraziti zahvalnost svojim mentorima, prof. dr. sc. Domagoju Lancu i prof. dr. sc. Goranu Turkalju za svaku potporu, poticaj, znanje i vrijeme koje su mi pružali tijekom studija. Bez naših sastanaka i diskusija teško bi došlo do realizacije ovoga doktorskoga rada.

Zahvaljujem i svojim kolegama sa Zavoda za tehničku mehaniku, bivšim i sadašnjim, koji su svojim iskustvom, znanjem i riječima podrške pomogli prevladati mnoge prepreke. Posebice želim istaknuti Sanjina, Martina, Marina, Nevena, Igora i Nataliju.

Potrebno je istaknuti i prof. dr. sc. Josipa Brnića koji me uočio još na prvoj godini studija, a kasnije primio na svoj znanstvenoistraživački projekt HRZZ-a. Hvala na toj prilici i ohrabrenijima u susretima na hodnicima fakulteta.

Veliko hvala ide Damjanu koji je nesebično ulagao svoje vrijeme i suočavao se s mojim preprekama kao da su njegove te Ivani, koja je svojim entuzijazmom pomogla da stignem do kraja doktorskoga studija. Za svu pomoć i trud od srca im upućujem zahvalu, ne samo kao kolegama nego i kao prijateljima.

Hvala prijateljima koji su me nosili i hrabрили. Ima vas mnogo i svi ste dio moje priče. Posebno zahvaljujem Fran i Filipu, koji prate moju „gredu i kod“ od samih početaka, na svim dugim razgovorima i poticajima.

Najveća mi je podrška moja obitelj. Svojim sam roditeljima, Moreni i Nenadu, zauvijek zahvalna jer su uvijek znali naći prave riječi, dati savjet i promijeniti perspektivu. Uvijek ste vjetar u leđa i takvu obitelj rijetko tko ima.

Mojem Carlu, koji se sa mnom i ljutio i radovao, vjerovao u mene kada ni sama nisam.

Hvala ti.

Hvala dragom Bogu jer bez njega ništa ne bi bilo moguće.



## Sažetak

---

U doktorskom je radu prikazan numerički pristup rješavanju problema nelinearne stabilnosti grednih nosača i konstrukcija izrađenih od FG (*Functionally graded*) materijala u uvjetima promjenjive temperature. Geometrijski nelinearni algoritam razvijen je uporabom 1D numeričkog modela koji se temelji na primjeni prostornog grednog konačnog elementa. Uključeni su efekti velikih prostornih pomaka i prostornih rotacija. Deformacije su smatrane malima te se za njihovo definiranje rabi Green-Lagrangeov tenzor deformacije. Konačnoelementni model temelji se na Euler-Bernoullijevoj teoriji savijanja i Vlasovljevoj teoriji uvijanja. Kod nelinearne analize implementirana je UL (*updated Lagrangian*) inkrementalna formulacija uporabom principa virtualnih radova.

Predloženi gredni model omogućuje provođenje analize izvijanja za slučajeve uniforme, linearne i nelinearne temperaturne distribucije po debljini stijenke poprečnoga presjeka nosača, kao i pri linearnoj promjeni temperature uzduž nosača. Analiza uključuje i temperaturnu ovisnost mehaničkih svojstava materijala.

Temeljem prethodno izrečenog izrađen je računalni program THINWALL FG. Problem je rješavan u dvije faze. U prvoj fazi određuje se odziv konstrukcije za zadano mehaničko opterećenje. U drugoj fazi, dok se mehaničko opterećenje drži konstantnim, nanosi se temperaturno opterećenje te se određuje temperatura kod koje dolazi do toplinskoga izvijanja. Točnost i pouzdanost numeričkog algoritma testirane su usporedbom s rezultatima dostupnima iz literature te onima dobivenim primjenom 2D i/ili 3D konačnoelementnih modela iz etabliranih programskih paketa.

**Ključne riječi:** tankostjeni presjeci, MKE, toplinsko izvijanje, kompoziti, FGM, stabilnost



## Abstract

---

In this doctoral dissertation, a numerical approach for solving the problem of nonlinear stability of beam structures made of FG (functionally graded) materials under conditions of variable temperature is developed. The geometric nonlinear algorithm was developed using a 1D numerical model based on the application of a spatial beam finite element. The effects of large spatial displacements and spatial rotations are included. Deformations are considered small and the Green-Lagrange deformation tensor is used to define them. The finite element model is based on the Euler-Bernoulli beam theory for bending and the Vlasov theory for torsion. In the nonlinear analysis, the UL (updated Lagrangian) incremental formulation was implemented using the principle of virtual works.

The proposed beam model enables the implementation of buckling analysis for cases of uniform, linear and nonlinear temperature distribution through the thickness of the cross-sectional walls as well as linear temperature distribution along the beam length will be conducted. The analysis also includes the temperature dependence of the mechanical properties of the material.

The computer program THINWALL FG was created on the basis of the above. The problem was solved in two stages. In the first phase, the response of the structure to a given mechanical load is determined. In the second phase, while the mechanical load is kept constant, a temperature load is applied and the temperature at which thermal buckling occurs is determined. The accuracy and reliability of the numerical algorithm was tested by comparison with the results available from the literature and those obtained using 2D and/or 3D finite element models from established software packages.

**Keywords:** thin-walled, FEM, thermal buckling, composites, FG materials, stability





# SADRŽAJ

---

<b>Zahvala</b>	<b>v</b>
<b>Sažetak</b>	<b>vi</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>1. UVOD</b>	<b>1</b>
1.1. Motivacija.....	1
1.2. Analiza dosadašnjih istraživanja .....	2
1.3. Svrha, cilj i doprinosi istraživanja.....	4
1.4. Struktura doktorskoga rada .....	5
<b>2. FUNCTIONALLY GRADED (FG) MATERIJALI</b>	<b>7</b>
2.1. Povijesni razvoj FG materijala .....	7
2.2. Koncept FG materijala .....	9
2.3. Svojstva FG materijala .....	11
<b>3. TANKOSTJENI FG GREDNI NOSAČI</b>	<b>17</b>
3.1. Polje pomaka .....	18
3.2. Deformacije .....	20
3.3. Unutarnje sile .....	22
3.4. Konstitutivne jednačbe .....	24
3.5. Težište i centar smicanja .....	31
3.6. Raspodjela temperature .....	33
<b>4. KONAČNOELEMENTNA FORMULACIJA</b>	<b>37</b>
4.1. Gredni konačni element.....	38
4.2. Princip virtualnih radova .....	39
4.3. Nelinearna analiza .....	43
4.4. Jednačba konačnog elementa .....	47
4.5. Newton-Raphsonova metoda za rješavanje nelinearnih problema.....	48
<b>5. RAČUNALNI PROGRAM <i>THINWALL FG</i></b>	<b>51</b>
5.1. Opis programa .....	51
5.1.1. <i>Opis potprograma</i> .....	51

5.2. Primjeri.....	53
5.2.1. <i>Primjer 1</i> .....	54
5.2.2. <i>Primjer 2</i> .....	62
5.2.3. <i>Primjer 3</i> .....	65
5.2.4. <i>Primjer 4</i> .....	69
5.2.5. <i>Primjer 5</i> .....	71
5.2.6. <i>Primjer 6</i> .....	76
5.2.7. <i>Primjer 7</i> .....	81
5.2.8. <i>Primjer 8</i> .....	85
5.2.9. <i>Primjer 9</i> .....	92
5.2.10. <i>Primjer 10</i> .....	99
<b>6. ZAKLJUČAK</b>	<b>107</b>
<b>Popis literature</b>	<b>109</b>
<b>Popis oznaka i skraćenica</b>	<b>116</b>
Popis oznaka .....	116
Popis skraćenica.....	119
<b>Popis slika</b>	<b>120</b>
<b>Popis tablica</b>	<b>125</b>
<b>Životopis</b>	<b>127</b>
<b>Popis objavljenih radova</b>	<b>128</b>

# 1. UVOD

---

U uvodnom dijelu doktorskoga rada bit će prezentirane generalne informacije o izvedenom istraživanju koje uključuje znanstvenu motivaciju, pregled znanstvenih istraživanja, doprinose i svrhu istraživanja te organizaciju doktorskoga rada.

## 1.1. Motivacija

Vrlo važnu klasu konstrukcijskih elemenata u inženjerskoj praksi čine tankostjene gredne strukture koje zbog složenosti svoga oblika pokazuju i vrlo složeno ponašanje. Posebno je izražena njihova sklonost izvijanju i pojavi nestabilnih deformacijskih oblika. U uvjetima uporabe ovakih konstrukcija u okolišu povišene temperature problem postaje još složeniji jer u obzir treba uzeti toplinsko opterećenje i utjecaj temperature na svojstva materijala.

Kako je zahtjeve sigurnosti i pouzdanosti konstrukcija izloženih visokotemperaturnom režimu rada teško održati standardnim materijalima, krenulo se u primjenu kompozitnih materijala. Kompozitni materijali sastoje se od dvaju ili više materijala čime se dobiva novi materijal traženih karakteristika. Zbog toga su kompoziti danas zastupljeni u raznim područjima industrije i predmet su istraživanja velikog broja znanstvenika. S obzirom na to da su se iskazali kao dobro rješenje u slučajevima kada se različiti zahtjevi postavljaju na konstrukciju, sve veći broj istraživanja usmjeren je upravo na istraživanje novih vrsta kompozitnih materijala.

*Functionally graded* (FG), tj. funkcijski gradirani materijali, označavaju novu vrstu kompozita koji predstavljaju najlakše kompozitne materijale s vrlo visokim omjerom čvrstoće i krutosti u odnosu na težinu, što je od značajne važnosti za zrakoplovnu industriju i razne inženjerske primjene. FG materijal dobiva se variranjem udjela dvaju različitih materijala na način da je moguće kontinuirano mijenjati mehanička i fizikalna svojstva po debljini stijenke poprečnog presjeka nosača. Pritom se najčešće kombiniraju keramika, koja se ističe izdržljivošću u visokotemperaturnom okolišu, i metal, koji osigurava željena mehanička svojstva poput čvrstoće i duktilnosti. Na taj način postiže se visoka razina krutosti i čvrstoće u odnosu na masu te poboljšana termička svojstva, što je posebno traženo u područjima tehnike kao što su svemirsko inženjerstvo, nuklearna tehnologija, graditeljstvo i strojogradnja.

U područjima visoke temperature konstrukcijski dio, kao što je greda, često je izložen različitoj temperaturnoj distribuciji što prenošenjem topline po debljini stijenke ili uzduž nosača

uzrokuje pojavu toplinskog opterećenja. Pritom je kod FG materijala vrlo često keramički dio izložen višoj temperaturi, a metalni nižoj. U takvim je uvjetima stabilnost deformacijske forme konstrukcije od izrazite važnosti. Ne čudi, stoga, što je posljednjih godina izvršeno mnogo teoretskih, eksperimentalnih i numeričkih istraživanja o toplinskom izvijanju FG grednih nosača s obzirom na to da su FG materijali pokazali jako dobra svojstva. Za razliku od velikog broja radova vezanih za toplinsko izvijanje grednih nosača punih poprečnih presjeka [18,24,25,34,54,75], literatura o toplinskom izvijanju tankostjenih nosača prilično je oskudna. Iz navedenog proizlazi motivacija za ovaj doktorski rad u kojem je glavnina istraživanja usmjerena na toplinsko izvijanje FG tankostjenih grednih konstrukcija.

Kao rezultat istraživanja predloženog dokorskog rada izrađen je numerički algoritam zasnovan na metodi konačnih elemenata te izražen kao računalni program koji omogućava analizu stabilnosti kompozitnih FG grednih nosača otvorenih i zatvorenih tankostjenih poprečnih presjeka, različitih tipova oslonaca i geometrija pri mehaničkom i toplinskom opterećenju. Algoritam omogućava određivanje razine opterećenja koje uzrokuje pojavu nestabilnih deformacijskih formi. Pomoću predloženog algoritma upotunjena su postojeća istraživanja u području analize stabilnosti tankostjenih konstrukcija.

## **1.2. Analiza dosadašnjih istraživanja**

FG materijali relativno su nova klasa kompozitnih materijala izvorno razvijena od strane japanskih istraživača sredinom 80-ih godina prošloga stoljeća [43], a koja su se posljednja tri desetljeća počela intenzivno razvijati i upotrebljavati u različitim konstrukcijama s obzirom na brojne prednosti koje takvi materijali pružaju.

Tankostjene grede i konstrukcije sve se više koriste u inženjerskim granama kao samostalni elementi ili kao dio neke složenije strukture zbog svoje velike čvrstoće i male težine. Međutim, te strukture pokazuju sklonost ka gubitku stabilne deformacijske forme [1,74] te je analiza izvijanja i postkritičnog odziva takvih konstrukcija bila tema mnogih istraživačkih radova [52,53,76]. Što se tiče analize problema izotermnog izvijanja FG grednih nosača, većina radova odnosi se na analizu izvijanja punih presjeka te su samo neki od njih navedeni ovdje [23,53,78], a tek manji dio obrađuje problematiku izvijanja FG grede tankostjenih presjeka, otvorenih [7,32,48] i zatvorenih [33,49].

Razvojem industrije i suvremenih procesa proizvodnje, konstrukcijski se elementi sve češće nalaze u okolišu povišene temperature. FG materijali, kao kombinacija keramike i metala,

pokazuju izuzetna mehanička svojstva te termičku i korozivnu otpornost. Danas se zato razvijaju za opću uporabu kao strukturalne komponente u područjima visoke temperature te je istraživanje o toplinskom izvijanju FG konstrukcija posljednjih godina identificirano kao zanimljivo polje proučavanja.

Korištene su razne teorije grednih nosača za analizu termičkog izvijanja. Sankar i Tzeng [62] koristili su Euler-Bernoulli-Navierovu teoriju savijanja za analizu termičkih naprezanja zglobno vezanih FG greda. Fu et al. [13] uporabom su iste gredne teorije istražili toplinsko izvijanje, nelinearne slobodne vibracije i dinamičku stabilnost piezoelektrične FG grede.

Timoshenkovu teoriju savijanja za analizu dinamičkih odaziva FG grede u temperaturnom okruženju primijenili su Malekzadeh i Monajjemzadeh [41]. Primjenu iste teorije na analizu postkritičnog izvijanja obostrano uklještenog grednog nosača prezentirali su Li et. al [34] za režim nelinearnih temperaturnih uvjeta. Kiani i Eslami [24,25] proučavali su izvijanje Timoshenkove FG grede pri tri različite temperaturne distribucije po visini poprečnog presjeka nosača, a potom su nadogradili istraživanje izvođenjem egzaktnih izraza za određivanje kritične temperature izvijanja uzimajući u obzir temperaturnu ovisnost mehaničkih svojstava i različite tipove oslonaca. Ma i Lee [38] analizirali su nelinearno ponašanje FG grednih nosača pri jednolikom zagrijavanju primjenom Timoshenkove teorije savijanja za slučajeve temperaturno ovisnih i neovisnih materijalnih svojstava. Postkritično izvijanje FG Timoshenkove grede pri uniformnom zagrijavanju po visini poprečnog presjeka analizirali su Paul i Das [54].

Zhao et al. [87] istraživali su postkritično izvijanje zglobno vezane FG grede pri jednolikom zagrijavanju i nelinearnoj temperaturnoj distribuciji po visini poprečnog presjeka nosača primjenom numeričke shooting metode. Otkrili su da se u istim temperaturnim uvjetima FG greda manje deformira od homogene. Statičku analizu FG grede pri termomehaničkom opterećenju primjenom konačnoelementne CU formulacije proveli su Giunta et al. [18].

Toplinsko izvijanje FG greda primjenom posmično deformabilne teorije trećega reda pri uniformnom zagrijavanju istraživali su Wattanasakulpong et al. [83]. Luan et al. [75] izveli su analitička rješenja za izvijanje i vibriranje FG greda pri mehaničkim i termičkim opterećenjima s uniformnom, linearnom i nelinearnom distribucijom temperature po debljini stijenke nosača uporabom teorije savijanja višeg reda.

Shen i Wang [67] provode istraživanje o nelinearnom toplinskom izvijanju posmično deformabilnih FG greda na elastičnom temelju pri uniformnoj i neuniformnoj promjeni temperature. Fallah i Ahdam [12] su ispitivali toplinsko izvijanje elastično oslonjene FG grede pri uniformnom zagrijavanju pretpostavljajući temperaturno neovisna mehanička svojstva.

Esfahani [10] uporabom Timoshenkove gredne teorije proučava ponašanje grede na nelinearnom elastičnom osloncu pri toplinskom izvijanju, a sličnu su analizu proveli i Sun, Li i Batra [70].

Ghiasian [16] istražuje statičko i dinamičko izvijanja FG grede na nelinearnim elastičnim osloncima primjenom Euler-Bernoulli-Navierove teorije, a kasnije [17] nastavlja s analizom nelinearnog dinamičkog izvijanja Timoshenkovih greda izloženih iznenadnoj jednolikoj promjeni temperature.

Za razliku od velikog broja radova vezanih za toplinsko izvijanje grednih nosača punih poprečnih presjeka, radovi o toplinskom izvijanju tankostjenih nosača prilično su oskudni. Librescu et al. [35] istraživali su probleme nestabilnosti i vibracija FG tankostjenih greda u visokotemperaturnom okolišu. Ziane et al. [89] razvili su analitičku metodu za toplinsko izvijanje grednih nosača zatvorenog tankostjenog poprečnog presjeka pri nelinearnoj raspodjeli temperature uzimajući u obzir materijalnu nesavršenost i temperaturno neovisna mehanička svojstva.

### 1.3. Svrha, cilj i doprinosi istraživanja

Cilj istraživanja predložene doktorske disertacije bio je razviti izvorni numerički algoritam temeljen na prostornom grednom konačnom elementu koji u formi računalnog programa postaje samostalna cjelina pogodna za linearniziranu i nelinearnu termičku analizu stabilnosti FG grednih nosača i konstrukcija.

Konačnoelementni model temelji se na Euler-Bernoullijevoj teoriji savijanja i Vlasovljevoj teoriji uvijanja. Uporabom UL formulacije omogućena je nelinearna analiza stabilnosti koja obuhvaća materijalne i geometrijske nelinearnosti kao i efekt velikih rotacija grednih elemenata uveden kroz nelinearno polje pomaka poprečnog presjeka.

Uporaba FG materijala u izradi nosivih grednih konstrukcija povećava njihovu temperaturnu otpornost, a time i njihovu stabilnost. Uvođenjem temperature kao dodatnog ili samostalnog opterećenja grednih konstrukcija omogućena je i analiza utjecaja temperature na mehanička svojstva grednih nosača i stabilnost deformacijskih formi. Istraživanje je ograničeno na gredne nosače i konstrukcije u polju povišene temperature ne uzimajući u obzir utjecaj vremenske domene na odziv konstrukcije.

Numerički modeli temeljeni na *shell* i *solid* konačnim elementima imaju određena ograničenja jer mogu imati veliki broj konačnih elemenata što zahtijeva veliku memoriju i

uzrokuje dugotrajne analize, a razvojem spomenutog algoritma postigla se efikasnija i brža analiza istih problema. Računalni program THINWALL FG, koji je razvijen u sklopu ovog doktorskog rada, pruža mogućnost opisivanja i analize grednih nosača izrađenih od kompozitnih FG materijala tijekom procesa njihova dizajna, posebice u vidu procjene odziva i gubitka stabilnosti nosivosti konstrukcije u okolišu s promjenjivom temperaturom.

#### **1.4. Struktura doktorskoga rada**

Struktura doktorske disertacije organizirana je u poglavlja od kojih svako pokriva jedan dio istraživanja.

U prvom je poglavlju predstavljen problem istraživanja i znanstvena motivacija. Navedeni su glavni ciljevi i svha istraživanja te kratki pregled dosadašnjih istraživanja u području izvijanja grednih nosača u okolišu konstatne i promjenjive temperature.

U drugom su poglavlju prezentirani kompozitni FG materijali. Ukratko je predstavljen povijesni razvoj FG materijala, njihova današnja primjena i najčešći procesi proizvodnje. Prikazan je princip modeliranja FG materijala, tipovi distribucije materijala po visini stijenke koji su korišteni u ovom radu te značajke upotrebljivanih materijala u modeliranju FG konstrukcija.

U trećem poglavlju prikazani su temelji mehanike tankostjenih FG grednih nosača. Navedene su pretpostavke na kojima se temelji prikazani model. Definirano je polje pomaka tankostjenog poprečnog presjeka koje se dijeli na linearne i nelinearne komponente te pripadajući tenzor deformacije. Prikazane su rezultante unutarnjih sila poprečnog presjeka, uključujući i komponente uzrokovane promjenom temperature. Dan je pregled tipova raspodjela temperature po visini stijenke nosača i po duljini nosača.

U četvrtom poglavlju predstavljena je konačnoelementa formulacija promatranog problema. Predstavljeni model koncipiran je za lineariziranu i nelinearnu analizu stabilnosti. Linearizirana analiza pogodna je za brzu provjeru kritičnog opterećenja i pripadajućeg deformacijskog oblika konstrukcije, dok se u nelinearnoj analizi prati odziv deformacije s obzirom na opterećenje.

Konačni model ima 14 stupnjeva slobode gibanja. Ravnotežne jednadžbe izvedene su primjenom principa virtualnih radova, a dobivena tangentna matrica krutosti sastoji se od linearnog (elastičnog) i nelinearnog (geometrijskog) dijela. Elastična matrica krutosti modificirana je na način da uključuje termičko ponašanje FG materijala, što predstavlja glavni dio znanstvenog doprinosa ovoga rada. Nelinearna analiza temelji se na inkrementalno-



iterativnoj proceduri pri čemu je odabrana Newton-Raphsonova metoda. Za rješavanje ravnotežnih jednadžbi korištena je updated Lagrangian formulacija.

Peto poglavlje opisuje računalni program THINWALL FG. Uz shematski tijek programa, dan je kratak opis svih potprograma. Analizirano je 10 primjera u svrhu validacije numeričkog modela. U prvih sedam primjera određuju se kritične temperature izvijanja grednih nosača zatvorenih i otvorenih tankostjenih poprečni presjeka čiji su aksijalni pomaci spriječeni. Analizirane su tri vrste temperaturne distribucije po visini poprečnog presjeka nosača – uniformna, linearna i nelinearna, te linearna raspodjela temperature po duljini nosača. Razmatrani su različiti rubni uvjeti i FG tipovi stijenke nosača. U ostalim je primjerima program testiran za gredne nosače i konstrukcije pri kombiniranom mehaničkom i toplinskom opterećenju uzimajući u obzir utjecaj temperature na svojstva materijala.

U posljednjem su poglavlju izneseni zaključci o provedenom istraživanju, komentirani su doprinosi disertacije i znanstveno postignuće. Predstavljene su ideje i smjernice za buduća istraživanja i moguća poboljšanja u području analize toplinskog izvijanja kompozitnih FG grednih nosača.

## **2. FUNCTIONALLY GRADED (FG) MATERIJALI**

---

Kompozitni materijali predstavljaju razred naprednih materijala sastavljenih od dvaju ili više jednostavnih materijala kombiniranih u krutom stanju s određenim fizičkim i kemijskim svojstvima. Time novi kompozitni materijal istvoreneno postiže izvrsnu kombinaciju poželjnih karakteristika matičnih materijala i manju ukupnu masu.

Drvo je primjer kompozitnog materijala iz prirode jer se sastoji od celuloznih vlakana u matrici lignina [45], dok je vuna sastavljena od snopova vlakana u amorfnoj matrici. Iako je priroda odavno pružila primjere kompozitnih materijala, ovaj se naziv počeo koristiti tek nedavno kad su se počele razvijati sintetske smole ojačane staklenim vlaknima ili tkaninom. Danas kompozitni materijali obuhvaćaju materijale svih vrsta: od metala i keramike do polimernih materijala, a svoju svrhu pronalaze u svim područjima ljudskog djelovanja.

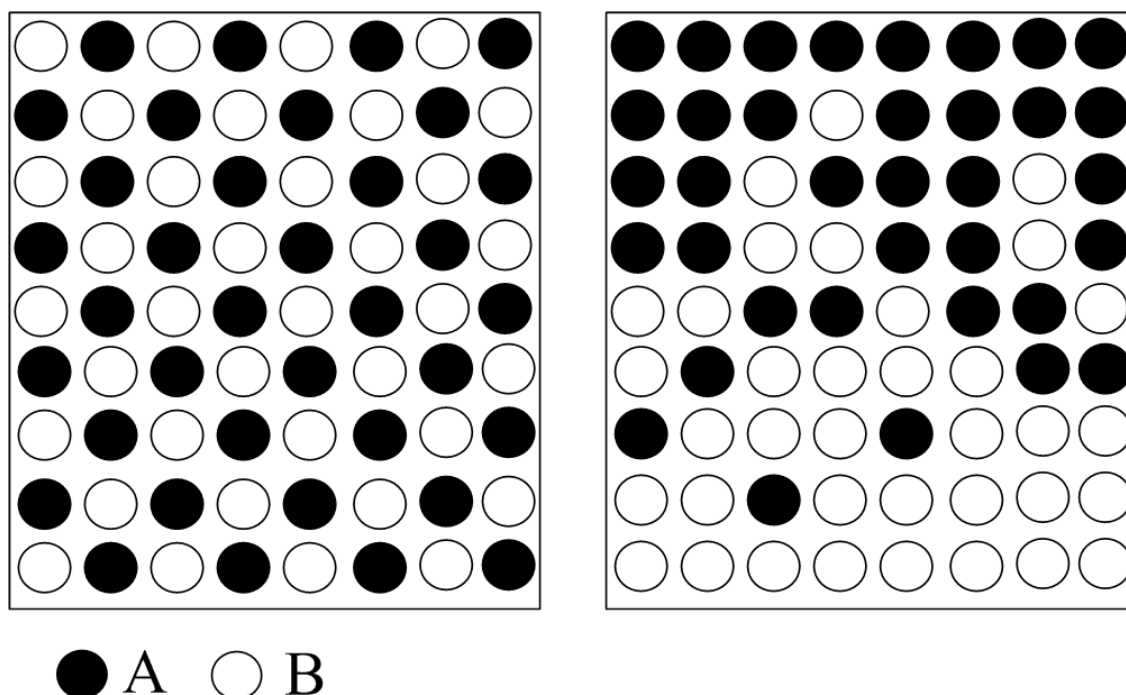
Kompoziti se općenito sastoje od jedne kontinuirane faze ili matrice koja obuhvaća jednu ili više diskontinuiranih faza ili ojačanja. Najčešće matrica štiti i prenosi opterećenje na punila (ojačanja) koja daju krutost i čvrstoću. Kompozitom se naziva onaj materijal kod kojeg postoji jasna granica između faza, na makroskopskoj ili mikroskopskoj razini. Ako takva granica nije jasna, primjerice kod slitina, homogenih polimernih mješavina ili organsko-anorganskih hibridnih materijala, onda takve materijale ne svrstavamo u kompozitne materijale.

U konačnici, svojstva kompozita ovise o materijalu pojedinih faza, njihovoj raspodjeli i volumnim udjelima. Značajke koje se mogu poboljšati uporabom kompozita su čvrstoća, krutost, otpornost na koroziju, masa, termička ili akustična izolacija, toplinska provodljivost i sl. Sva ova svojstva nije moguće poboljšati istvoreneno jer su neka i kontradiktorna, no u cilju je uvijek kreirati materijal s karakteristikama potrebnima za rješenje postojećeg problema. Tako se, primjerice, korištenjem kompozita može postići veća čvrstoća i krutost uz manju masu, a također omogućiti proizvodnju složenijih oblika, veću otpornost i izdržljivost. [22]

### **2.1. Povijesni razvoj FG materijala**

Nedostatak kompozitnog materijala je delaminacija, separacija vlakana i matrice, pri ekstremnim radnim uvjetima [79]. Da bi se doskočilo tom problemu, razvila se ideja o kompozicijskom i strukturalnom gradijentu u mikrostrukturi materijala. Na Sl. 2.1. prikazana je usporedba konvencionalnog kompozita i FG materijala. Bever je 70-ih godina prošloga

stoljeća proučavao razne gradijentne kompozite i globalne materijalne značajke te potencijalne primjene takvih materijala [4]. U radu [68] Shen i Bever predstavili su načine na koje može biti izazvana gradacija polimernih materijala, efektivna svojstva i moguće aplikacije takvih materijala. Tek 1985. godine prezentirana je uporaba kontinuirane kontrole teksture u svrhu poboljšanja čvrstoće prijanjanja i minimizacije toplinskog naprezanja u keramičkim premazima i zglobovima za višekratne raketne motore, [50]. Predloženi su koncepti kontinuirane kontrole mikrostrukture materijala u svrhu postizanja novih značajki i funkcija, kao i dizajn takvih materijala. Naziv *Functionally graded materials* (FGM) za gradijente kompozitne materijale nastao je godinu kasnije tijekom rada na projektu hipersoničnog svemirskog aviona [28,29,43]. Sposobnost materijala da izdrži visoke površinske temperature od 1700 °C i temperaturne razlike od 1000 °C po debljini stijenke od 10 mm riješena je uporabom FGM-a kao toplinske barijere. Da je keramika izravno spojena na metal, došlo bi do pucanja tijekom toplinskog ciklusa zbog visokih toplinskih naprezanja u spoju između metala i keramike. Upravo FG materijal s glatkim prijelazom s keramičke površine na metalnu jezgru osigurava bolje performanse uz sposobnost izbjegavanja koncentracije naprezanja na međupovršini.



Sl. 2.1 Usporedba konvencionalnog kompozita (lijevo) i FGM-a (desno)

FG materijali su originalno bili zamišljeni za primjenu u zrakoplovstvu gdje je potrebna visokotemperaturna otpornost barijera raketnih mlaznica, ploča izmjenjivača topline, dijelova strojeva, rešetkastih konstrukcija svemirskih letjelica i sl. U proteklih nekoliko desetljeća,

objavljen je velik broj radova koji se bave raznim aspektima FG materijala s obzirom na to da je moguća primjena FGM-a vrlo široka. Većina je ranijih istraživanja bila posvećena analizi toplinskih naprezanja i mehanici loma [42,51,55,72]. Danas se ovi kompoziti razvijaju za opću uporabu u konstrukcijskim komponentama u visokotemperaturnom okolišu kao što je tankostjena FGM rotirajuća lopatica turbine [35]. Predviđanje ponašanja FGM konstrukcijskih dijelova pri mehaničkom i toplinskom opterećenju od izuzetne je važnosti u strukturalnoj analizi, iza čega stoji bogata literatura [5,15,63,66,78,86] od čega je tek jedan manji dio vezan za gredne nosače prikazan u uvodnom poglavlju.

Kako je napredovalo istraživanje o FG materijalima, otkriveno je da se kompozicija, struktura i svojstva gradijentne promjene mogu učinkovitije prilagoditi za određenu primjenu te se aplikacija FGM-a proširila na razna područja industrije i u komercijalne svrhe. Tako se, primjerice, u medicini FGM koristi kao kompatibilan materijal za izradu dentalnih i ortopedskih implantanta [82], u elektronici i optoelektronici kao FGM senzori [64], fotodetektori [71] ili optička vlakna za prijenos valova velikom brzinom; za izradu FGM aktuatora [60] i uređaja za pretvorbu energije; u izradi zaštitnih oklopa i pancirki [37] zbog dobre sposobnosti sprječavanja širenja pukotina i sl. Ostala područja primjene su proizvodnja (alati za rezanje), automobilska industrija, izmjenjivači topline, komponente nuklearnog reaktora, tribologija itd. [44]

## **2.2. Koncept FG materijala**

FG materijali pripadaju razredu kompozitnih materijala kod kojih svojstva variraju po nekoj promjenjivoj dimenziji [2,65], primjerice po debljini stijenke. Primjer takvih materijala u prirodi su kosti i zubi [27]. Kod FG materijala oštri prijelazi između materijala karakterističnih za klasične kompozite zamijenjeni su gradijentnim prijelazima što omogućuje glatku tranziciju iz jednog materijala u drugi. Time se može sastaviti novi materijal za specifične potrebe.

FG materijali mogu biti pripremljeni na dva načina: kontinuirana struktura i stepenasta struktura. Kod kontinuirane strukture, kompozicija i mikrostruktura kontinuirano varira po promatranoj dimenziji, dok se kod stepenaste strukture značajke postupno mijenjaju stvarajući višeslojnu strukturu, Sl. 2.2.

Jedna od najvažnijih metoda u procesu izrade FG materijala je metalurgija praha [40,47]. U prvom se koraku miješaju materijal A i B, a potom se postupno slaže izmiješani prah u skladu s unaprijed predviđenom prostornom raspodjelom sastava u odgovarajućem kalupu. Posljednji je korak sinteriranje, tj. sraščivanje sitnih čestica praha zagrijavanjem na temperaturi nižoj od

tališta [88], među kojima razlikujemo sinteriranje uz prisustvo tekuće faze, uz primjenu električnog luka, mikrovalno sinteriranje, vruće prešanje i vruće izostatičko prešenje, reakcijsko sinteriranje i sl. Pritom je sinteriranje iskrom plazme jedna od boljih metoda kojom je moguće sinterirati visoko kvalitetne materijale u kratkom vremenskom periodu [59,73,85]. FG materijali proizvedeni ovom metodom imaju stepenastu strukturu.



Sl. 2.2 Kontinuirana (lijevo) i stepenasta (desno) struktura FG materijala

Kada je potrebna kontinuirana izvedba, primjenjuje se centrifugalna metoda koja je vrlo slična centrifugalnom lijevanju [58,80,81]. Djelovanjem sile gravitacije oblikuje se željeni gradijent rasutih faza FG materijala zbog razlike u gustoći materijala i vrtnje kalupa. Nedostatak ove metode jest što se na ovaj način mogu proizvesti jedino cilindrični oblici i određeni tipovi gradacije materijala [26].

Da bi se doskočilo ograničenjima centrifugalne metode, koriste se aditivne metode poput Solid Freeform (SFF) metode koja se ističe većom brzinom proizvodnje, maksimalnom iskoristivošću materijala, sposobnošću izrade složenijih oblika i dizajna, te je manje energetska intenzivna [6,36,69]. SFF metoda dijeli se u nekoliko osnovnih koraka: od generiranja i konvergiranja CAD podataka, preko izgradnje komponenata sloj po sloj do završne obrade. Iako postoje razne SFF tehnologije poput stereolitografije i *Fused Deposition Modeling* tehnologije najčešće se koriste laserske SFF metode među kojima su i selektivno lasersko sinteriranje i topljenje te 3D printanje [20,21,56]. Uz navedene prednosti, SFF omogućuje veliku fleksibilnost proizvodnje jer daje slobodu oblikovanja i složenijih dijelova slojevitom obradom. S druge strane, s obzirom na lošu površinsku obradu, vrlo je često potrebno izvršiti sekundarnu doradu.

Postoje i druge vrste metoda za procese izrade FG materijala koje se mogu pronaći u

literaturi [14,26,39,46]. Neke od njih koriste se za premazivanje površina poput fizikalnog i kemijskog neparivanja (PVD/CVD), samopropagirajuće visokotemperaturne sinteze (SHS), raspršivanja plazme i sl.

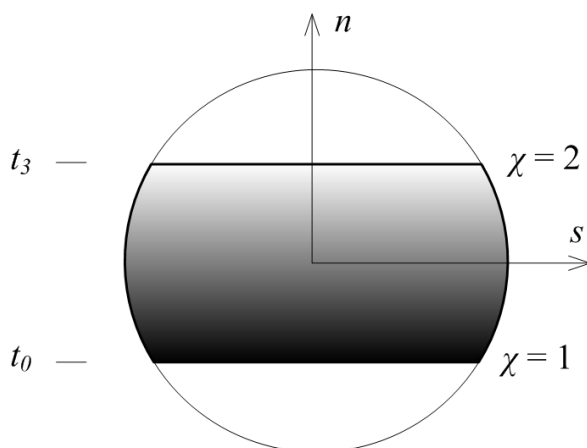
### 2.3. Svojstva FG materijala

FG materijali su najčešće sastavljeni od dvije faze materijala s različitim svojstvima. Detaljan opis stvarne gradirane mikrostrukture vrlo često nije moguć. Međutim, moguće je odrediti volumni udio distribucije s obzirom na to da volumni udio svake faze postepeno varira u smjeru gradacije čime se i efektivna svojstva FGM-a mijenjaju u istom smjeru.

Dva su različita pristupa modeliranju FG materijala. Prvi model su kvazihomogeni slojevi keramike i metala. Pretpostavlja se postupno variranje volumnog udjela keramike ili metala te se FGM promatra kao niz slojeva s istim volumnim udjelom u svakom sloju. Drugi model je kontinuirana varijacija volumnog udjela keramike ili metala pri čemu volumni udio sastavnog materijala  $\chi$  može biti prezentiran kao funkcija koordinate  $n$ . Na Sl. 2.3. prikazana je kontinuirana varijacija za FG Tip 1:

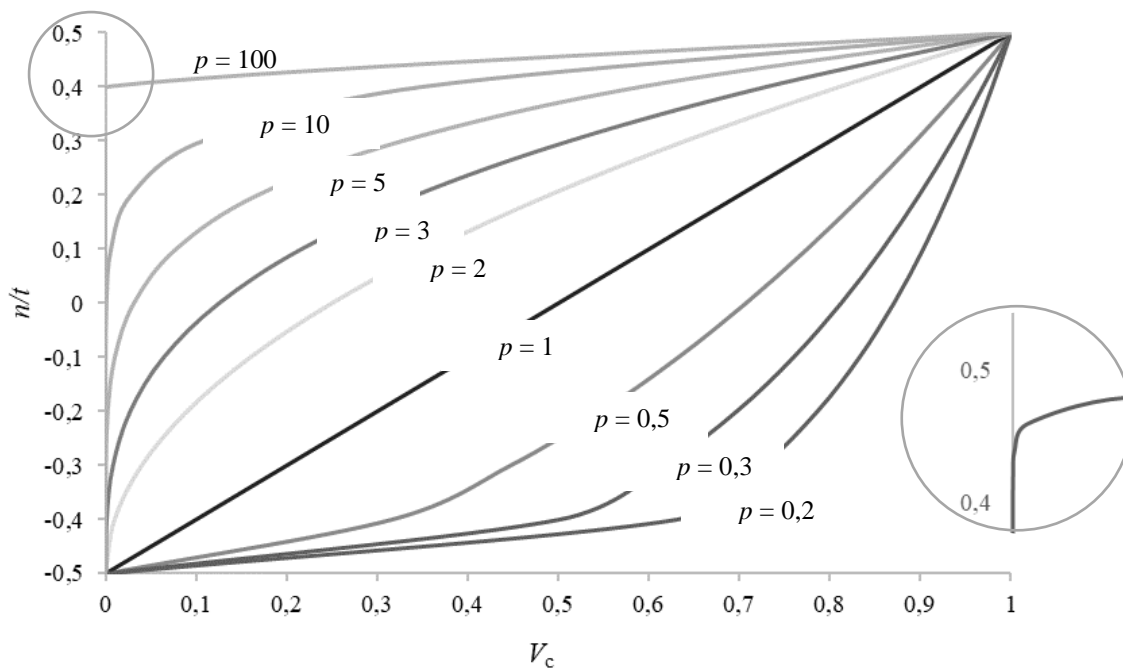
$$V_{\chi} = \left( \frac{1}{2} + \frac{n}{t} \right)^p ; t_0 \leq n \leq t_3. \quad (2.1)$$

Pritom je  $t$  debljina stijenke,  $n$  koordinata konturnog koordinatnog sustava, a  $p$  ( $p \leq 0$ ) eksponent funkcije promjene materijala po visini stijenke.



Sl. 2.3 FG Tip 1

Promjena eksponenta  $p$  generira beskonačan broj različitih distribucija materijala, Sl. 2.4.



Sl. 2.4 Volumni udio keramike po stijenci poprečnog presjeka

U radu su razmatrane i druge varijacije distribucije materijala po visini stijenke nosača, Sl. 2.5. Ako izraz (2.1) predstavlja volumni udio  $V_\chi$  materijala  $\chi = 2$  za FG Tip 1, ostale varijante stijenki nosača su:

- FG Tip 2: stijenka je izrađena od sloja homogenog materijala  $\chi = 2$  s unutarnje strane i FG gornjeg dijela stijenke koji varira od čistog materijala  $\chi = 2$  prema čistom materijalu  $\chi = 1$ . Pritom je volumni udio:

$$V_\chi(n) = 1; t_0 \leq n \leq t_1$$

$$V_\chi(n) = \left( \frac{n - t_3}{t_1 - t_3} \right)^p; t_1 \leq n \leq t_3 \quad (2.2)$$

- FG Tip 3: stijenka je izrađena od jezgre materijala  $\chi = 2$  u sredini i FG plašta koji varira od čistog materijala  $\chi = 2$  prema čistom materijalu  $\chi = 1$  na vanjskim stijenjkama. Volumni udio je izražen kao:

$$V_\chi(n) = \left( \frac{n - t_0}{t_1 - t_0} \right)^p; t_0 \leq n \leq t_1$$

$$V_\chi(n) = 1; t_1 \leq n \leq t_2 \quad (2.3)$$

$$V_\chi(n) = \left( \frac{n - t_3}{t_2 - t_3} \right)^p; t_2 \leq n \leq t_3$$

- FG Tip 4: stijenka je izrađena od čistog materijala  $\chi = 2$  i čistog materijala  $\chi = 1$  s unutarnje, odnosno vanjske strane stijenke, te FG jezgre u sredini koji varira od jednog do drugog materijala. Volumni udio se može napisati na sljedeći način:

$$V_{\chi}(n) = 1; t_0 \leq n \leq t_1$$

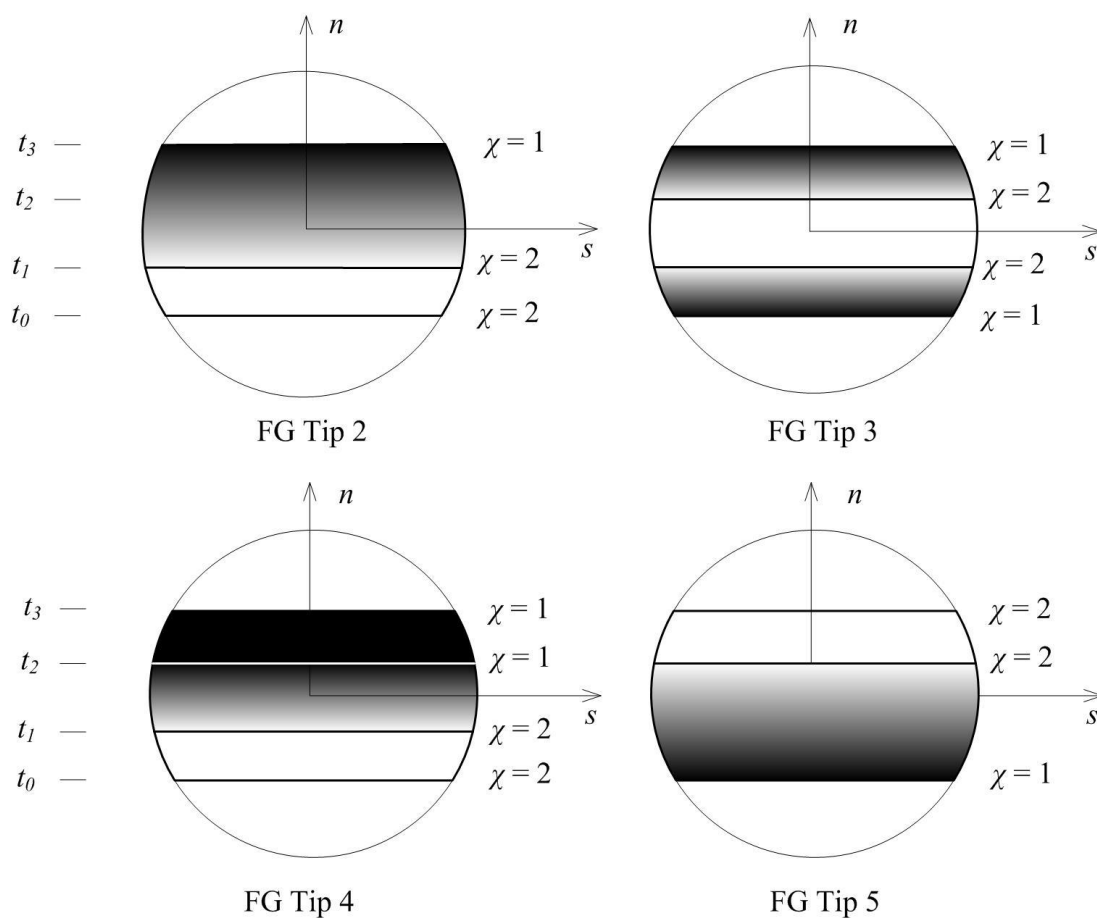
$$V_{\chi}(n) = \left(\frac{n - t_1}{t_2 - t_1}\right)^p; t_1 \leq n \leq t_2$$

$$V_{\chi}(n) = 0; t_2 \leq n \leq t_3$$
(2.4)

- FG Tip 5: stijenka je izrađena od sloja homogenog materijala  $\chi = 2$  s vanjske strane i FG donjeg dijela stijenke koji varira od čistog materijala  $\chi = 2$  prema čistom materijalu  $\chi = 1$ . Volumni udio je kako slijedi:

$$V_{\chi}(n) = \left(\frac{n - t_0}{t_2 - t_0}\right)^p; t_0 \leq n \leq t_2$$

$$V_{\chi}(n) = 1; t_2 \leq n \leq t_3$$
(2.5)



Sl. 2.5 Razmatrane varijacije distribucije materijala po stijenci nosača



Modeliranje materijalnih značajki FG materijala postiže se pomoću koncepta kompozitnih materijala *rule of mixture* (Voigt model) [66]. Materijalno svojstvo sloja FGM-a, kao što su modul elastičnosti, smični modul, koeficijent toplinske rastezljivosti i provodljivosti, može biti izraženo kao:

$$P_f = \sum_{\chi=1} P_{\chi} V_{f_{\chi}}, \quad (2.6)$$

pri čemu su  $P_{\chi}$  i  $V_{f_{\chi}}$  materijalno svojstvo i volumni udio sastavnoga materijala  $\chi$ . Pritom suma volumnih udjela svih sastavnih materijala iznosi 1, odnosno:

$$\sum_{\chi=1} V_{f_{\chi}} = 1. \quad (2.7)$$

FGM konstrukcije se uglavnom koriste u području visoke temperature, stoga je vrlo važno uzeti u obzir utjecaj temperature na materijalna svojstva sastavnih materijala kako bi se čim točnije predvidio odziv nosača [61]. Ako pretpostavimo da su modul elastičnosti  $E_f$ , koeficijent toplinske rastezljivosti  $\alpha_f$  i toplinske provodljivosti  $\kappa_f$  svojstva ovisna o temperaturi, možemo ih izraziti kao nelinearnu funkciju ovisnu o temperaturi:

$$P_{\chi} = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3), \quad (2.8)$$

gdje su  $P_0$ ,  $P_{-1}$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  i  $P_3$  koeficijenti temperature  $T$  (K) jedinstveni za svaki materijal. Tipične vrijednosti za modul elastičnosti, te koeficijente toplinske rastezljivosti i provodljivosti za keramičke i metalne materijale korištene u ovoj disertaciji, prikazane su u tablicama Tab. 2.1-2.3, [61]. Radi pojednostavljenja, pretpostavlja se da je Poissonov broj  $\nu$  konstantan.

Tab. 2.1 Modul elastičnosti za razne materijale ( $Pa$ )

<i>Materijal</i>	$P_0$	$P_{-1}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
ZrO <sub>2</sub>	244,27·10 <sup>9</sup>	0	-1,371·10 <sup>-3</sup>	1,214·10 <sup>-6</sup>	-3,681·10 <sup>-10</sup>
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	349,55·10 <sup>9</sup>	0	-3,853·10 <sup>-4</sup>	4,027·10 <sup>-7</sup>	-1,673·10 <sup>-10</sup>
Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub>	348,43·10 <sup>9</sup>	0	-3,070·10 <sup>-4</sup>	2,160·10 <sup>-7</sup>	-8,946·10 <sup>-11</sup>
Ti-6Al-4V	122,56·10 <sup>9</sup>	0	-4,586·10 <sup>-4</sup>	0	0
SUS304	201,04·10 <sup>9</sup>	0	3,079·10 <sup>-4</sup>	-6,534·10 <sup>-7</sup>	0

Tab. 2.2 Koeficijent toplinske rastezljivosti za razne materijale ( $1/^\circ\text{C}$ )

<i>Materijal</i>	$P_0$	$P_{-1}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
ZrO <sub>2</sub>	$12,766 \cdot 10^{-6}$	0	$-1,491 \cdot 10^{-3}$	$1,006 \cdot 10^{-5}$	$-6,778 \cdot 10^{-11}$
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	$6,827 \cdot 10^{-6}$	0	$1,838 \cdot 10^{-4}$	0	0
Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub>	$5,827 \cdot 10^{-6}$	0	$9,095 \cdot 10^{-4}$	0	0
Ti-6Al-4V	$7,579 \cdot 10^{-6}$	0	$6,638 \cdot 10^{-4}$	$-3,147 \cdot 10^{-6}$	0
SUS304	$12,330 \cdot 10^{-6}$	0	$8,086 \cdot 10^{-4}$	0	0

Tab. 2.3 Koeficijent toplinske provodljivosti za razne materijale ( $\text{Wm/K}$ )

<i>Materijal</i>	$P_0$	$P_{-1}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
ZrO <sub>2</sub>	1,700	0	$1,276 \cdot 10^{-4}$	$6,648 \cdot 10^{-8}$	0
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	-14,087	-1126,6	$-6,227 \cdot 10^{-3}$	0	0
Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub>	13,273	0	$-1,032 \cdot 10^{-3}$	$5,466 \cdot 10^{-7}$	$-7,876 \cdot 10^{-11}$
Ti-6Al-4V	1	0	$1,704 \cdot 10^{-2}$	0	0
SUS304	15,379	0	$-1,264 \cdot 10^{-3}$	$2,092 \cdot 10^{-6}$	$-7,223 \cdot 10^{-10}$

Uzimajući u obzir izraze (2.1)-(2.8), dobijemo:

$$E(n, T) = [E_o(T) - E_i(T)] \cdot V_c(n) + E_i(T), \quad (2.9)$$

$$\alpha(n, T) = [\alpha_o(T) - \alpha_i(T)] \cdot V_c(n) + \alpha_i(T), \quad (2.10)$$

$$K(n, T) = [K_o(T) - K_i(T)] \cdot V_c(n) + K_i(T), \quad (2.11)$$

pri čemu indeksi  $o$  i  $i$  predstavljaju vanjsku (*outer*) i unutarnju (*inner*) površinu stijenki poprečnog presjeka. Iz izraza (2.9)-(2.11) je vidljivo da materijalne značajke ovise o poziciji i temperaturi. Prikazana je metoda jednostavna i pogodna za primjenu i predviđanje ukupnih materijalnih značajki konačnog FG materijala.



### 3. TANKOSTJENI FG GREDNI NOSAČI

---

Gredni nosač predstavlja deformabilno tijelo čije su dimenzije poprečnog presjeka relativno male u odnosu na duljinsku dimenziju. Poprečni presjek može biti puni ili tankostjeni. Ako su dimenzije poprečnog presjeka relativno jednake, govorimo o punom presjeku, a ako je jedna dimenzija presjeka, tj. debljina stijenke, puno manja u odnosu na ostale dimenzije poprečnog presjeka, presjek se naziva tankostjenim. Iako tankostjeni gredni nosači imaju određenu prednost u odnosu na nosače punog presjeka u vidu veće učinkovitost s obzirom na utrošak materijala, ponašanje takvih konstrukcija je puno složenije te su skloniji gubitku stabilne ravnotežne forme.

Nadalje, kontura tankostjenog presjeka može biti zatvorena, otvorena i kombinirana, a s obzirom na simetričnost, presjeke možemo podijeliti na jednoosno simetrične, dvoosno simetrične i nesimetrične. Kod jednoosno simetričnih presjeka težište i centar smicanja leže na istoj osi, dok se kod dvoosno simetričnih presjeka centar smicanja i težište poklapaju.

Centar smicanja je točka poprečnog presjeka u kojoj je suma momenata svih unutarnjih smičnih sila pri savijanju jednaka nuli. Centar smicanja poklapa se s centrom torzije, tj. s točkom oko koje se odvija rotacija poprečnih presjeka pri torziji. Upravo se pri torziji javljaju velike razlike u obliku poprečnih presjeka grednih nosača. Kod uvijanja nosača kružnog poprečnog presjeka, presjeci prilikom deformiranja ostaju ravni i okomiti na uzdužnu os nosača, pa takvu torziju nazivamo slobodnom ili čistom torzijom. U slučaju uvijanja ostalih oblika presjeka, prilikom deformiranja javlja se vitoperenje presjeka, odnosno uz rotacijske pomake javljaju se i aksijalni pomaci točaka poprečnog presjeka. Ukoliko su aksijalni pomaci spriječeni, uz primarna tangencijalna naprezanja koja se pojavljuju kod čiste torzije, nastaju i dodatna normalna naprezanja razmjerna vitoperenju koja uzrokuju sekundarna tangencijalna naprezanja. Takva se torzija naziva Vlasovljeva torzija ili torzija s ograničenim vitoperenjem. S obzirom na to da je kod uvijanja nosača punih poprečnih presjeka i zatvorenih tankostjenih presjeka vitoperenje neznatno, sekundarna tangencijalna naprezanja mogu se zanemariti.

Budući da se u ovom radu analiziraju tankostjeni FG gredni nosači, teorija uvijanja i savijanja temelji se na sljedećim pretpostavkama:

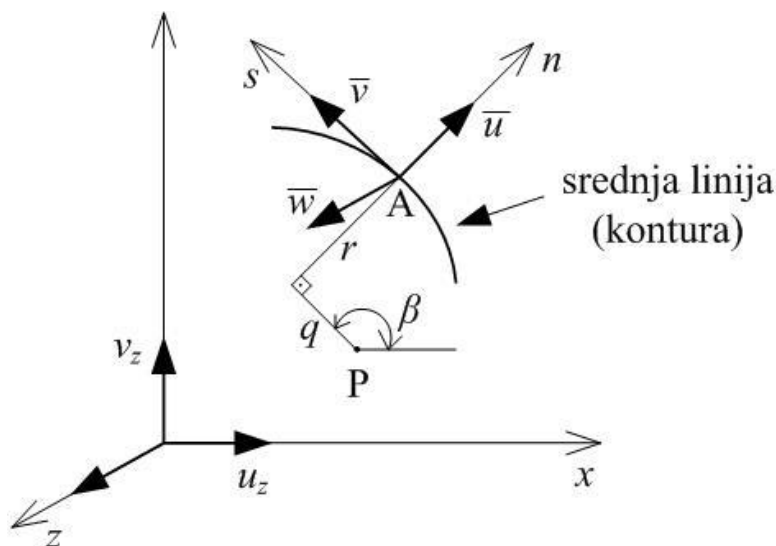
- gredni nosač je pravocrtan
- projekcija konture poprečnog presjeka ne deformira se u ravnini okomitoj na

uzdužnu os nosača

- primjenjena je Vlasovljeva teorija uvijanja
- primjenjena je Euler-Bernoulli-Navierova teorija savijanja
- pomaci su veliki, no deformacije su male.

### 3.1. Polje pomaka

Odabran je Cartesijev koordinatni sustav  $(z, x, y)$  tako da se os  $z$  podudara s uzdužnom osi nosača koja prolazi kroz težište  $T$  svih poprečnih presjeka. Osi  $x$  i  $y$  leže u ravnini poprečnoga presjeka. Drugi koordinatni sustav je konturni koordinatni sustav  $(z, s, n)$ , kod kojeg se os  $z$  podudara s osi  $z$  nosača, koordinata  $s$  je tangenta na srednju ravninu stijenke poprečnoga presjeka, a koordinata  $n$  je okomita na koordinatu  $s$ , Sl. 3.1.

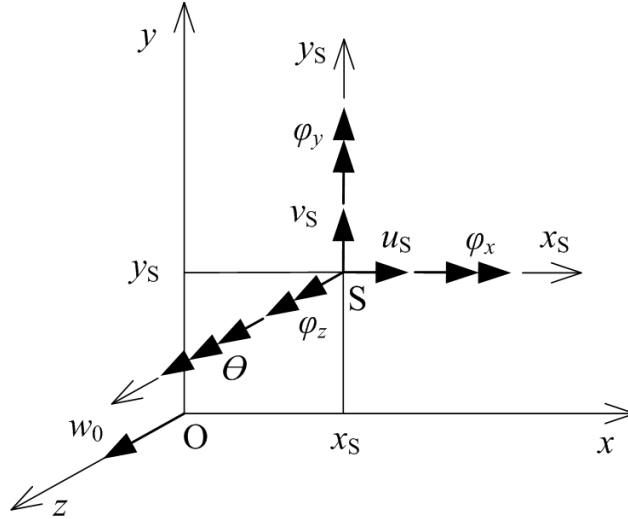


Sl. 3.1 Pomaci točkica srednje linije (konture) poprečnog presjeka

Komponente pomaka poprečnog presjeka kao krutog tijela su, Sl. 3.2:

$$\begin{aligned}
 w_0 &= w_0(z), & u_s &= u_s(z), & v_s &= v_s(z), \\
 \varphi_z &= \varphi_z(z), & \varphi_x &= \varphi_x(z) = -\frac{dv_s}{dz}, & \varphi_y &= \varphi_y(z) = \frac{du_s}{dz}, \\
 \theta &= \theta(z) = -\frac{d\varphi_z}{dz}(z),
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

pri čemu je  $w_0$  translacijski pomak težišta  $T$  po pravcu osi  $z$ ;  $u_s$  i  $v_s$  su translacijski pomaci centra smicanja u  $x$  i  $y$  smjeru;  $\varphi_z$ ,  $\varphi_x$  i  $\varphi_y$  su rotacije oko  $z$ ,  $x$  i  $y$  osi;  $\theta$  je parametar vitoperenja poprečnog presjeka definiran u odnosu na centar smicanja.



Sl. 3.2 Pomaci poprečnog presjeka kao krutog tijela

Ukupno polje pomaka dijeli se na primarno i sekundarno polje pomaka. U slučaju malih rotacija, inkrementalni pomaci dani su sljedećim izrazom:

$$\begin{aligned} u_z(z, x, y) &= w_0(z) - y \frac{dv_s}{dz}(z) - x \frac{du_s}{dz}(z) - \omega(x, y) \frac{d\varphi_z}{dz}(z), \\ u_x(z, x, y) &= u_s(z) - (y - y_s)\varphi_z(z), \\ u_y(z, x, y) &= v_s(z) + (x - x_s)\varphi_z(z), \end{aligned} \quad (3.2)$$

gdje su  $u_z$ ,  $u_x$  i  $u_y$  inkrementalni pomaci prvog reda proizvoljne točke poprečnog presjeka definirane koordinatama  $x$  i  $y$  te funkcijom vitoperenja  $\omega(x, y)$ .

Sekundarno polje pomaka zbog uključenih efekata velikih rotacija može se napisati kao [77]:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_z(z, x, y) &= 0,5[-(x - x_s)\varphi_z\varphi_x + (y - y_s)\varphi_z\varphi_y], \\ \tilde{u}_x(z, x, y) &= 0,5\{-\varphi_x\varphi_y y - [\varphi_z^2 + \varphi_y^2]x + x_s\varphi_z^2\}, \\ \tilde{u}_y(z, x, y) &= 0,5\{-\varphi_x\varphi_y x - [\varphi_z^2 + \varphi_x^2]y + y_s\varphi_z^2\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

U konturnom koordinatnom sustavu  $(z, s, n)$  definirani su pomaci točaka srednje linije:

$$\begin{aligned} \bar{w}(z, s, n) &= u_z(z, x, y), \\ \bar{u}(z, s, n) &= u_x(z, x, y) \cos \beta - u_y(z, x, y) \sin \beta, \\ \bar{v}(z, s, n) &= u_x(z, x, y) \sin \beta + u_y(z, x, y) \cos \beta, \end{aligned} \quad (3.4)$$

dok su pomaci točaka izvan srednje linije definirani kao:

$$w(z, s, n) = \bar{w}(z, s, n) - n \frac{\partial \bar{u}(z, s, n)}{\partial z}, \quad (3.5)$$

$$u(z, s, n) = \bar{u}(z, s, n),$$

$$v(z, s, n) = \bar{v}(z, s, n) - n \frac{\partial \bar{u}(z, s, n)}{\partial s}.$$

Budući da se pomaci točaka srednje linije sastoje od linearnih i nelinearnih komponenata, izraz (3.4) sada glasi:

$$\begin{aligned} \bar{w}^L(z, s, n) &= u_z(z, x, y), \\ \bar{u}^L(z, s, n) &= u_x(z, x, y) \cos \beta - u_y(z, x, y) \sin \beta, \\ \bar{v}^L(z, s, n) &= u_x(z, x, y) \sin \beta + u_y(z, x, y) \cos \beta, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}^{NL}(z, s, n) &= \tilde{u}_z(z, x, y), \\ \bar{u}^{NL}(z, s, n) &= \tilde{u}_x(z, x, y) \cos \beta - \tilde{u}_y(z, x, y) \sin \beta, \\ \bar{v}^{NL}(z, s, n) &= \tilde{u}_x(z, x, y) \sin \beta + \tilde{u}_y(z, x, y) \cos \beta, \end{aligned} \quad (3.7)$$

gdje indeksi  $L$  and  $NL$  označavaju linearne i nelinearne komponente pomaka. Po analogiji, izraz (3.5) glasi:

$$\begin{aligned} w^L &= \bar{w}^L - n \frac{\partial \bar{u}^L}{\partial z} \\ u^L &= \bar{u}^L(z, s, n) \\ v^L &= \bar{v}^L - n \frac{\partial \bar{u}^L}{\partial s} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} w^{NL} &= \bar{w}^{NL} - n \frac{\partial \bar{u}^{NL}}{\partial z} \\ u^{NL} &= \bar{u}^{NL}(z, s, n) \\ v^{NL} &= \bar{v}^{NL} - n \frac{\partial \bar{u}^{NL}}{\partial s} \end{aligned} \quad (3.9)$$

### 3.2. Deformacije

Green-Lagrangeovim tenzorom deformacije definiran je odnos između komponenata pomaka i komponenata deformacije. U skladu s nelinearnim poljem pomaka, tenzor deformacije glasi [77]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left[ (u_i + \tilde{u}_i)_{,j} + (u_j + \tilde{u}_j)_{,i} + (u_k + \tilde{u}_k)_{,i} + (u_k + \tilde{u}_k)_{,j} \right] \\ &\cong e_{ij} + \eta_{ij} + \tilde{e}_{ij} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Pritom vrijedi:

$$\begin{aligned} 2e_{ij} &= u_{i,j} + u_{j,i}, \\ 2\eta_{ij} &= u_{k,i} u_{k,j}, \\ 2\tilde{e}_{ij} &= \tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

gdje zarezi označavaju parcijalnu derivaciju s obzirom na koordinatne osi.

S obzirom na početne pretpostavke, komponente deformacije različite od nule su:

$$e_{zz} = \frac{\partial w^L}{\partial z}; \quad e_{zs} = \frac{\partial w^L}{\partial s} + \frac{\partial v^L}{\partial z}, \quad (3.12)$$

$$\eta_{zz} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w^L}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^L}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v^L}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (3.13)$$

$$\eta_{zs} = \frac{\partial w^L}{\partial z} \frac{\partial w^L}{\partial s} + \frac{\partial u^L}{\partial z} \frac{\partial u^L}{\partial s} + \frac{\partial v^L}{\partial z} \frac{\partial v^L}{\partial s},$$

$$\tilde{e}_{zz} = \frac{\partial w^{NL}}{\partial z}; \quad \tilde{e}_{zs} = \frac{\partial w^{NL}}{\partial s} + \frac{\partial v^{NL}}{\partial z}, \quad (3.14)$$

gdje  $e_{ij}$  and  $\eta_{ij}$  predstavljaju linearne i nelinearne komponente deformacije s obzirom na primarno polje pomaka, dok je  $\tilde{e}_{ij}$  komponenta deformacije prvog reda s obzirom na sekundarno polje pomaka.

Pri supstituciji izraza (3.8) u izraz (3.12), dobije se:

$$e_{zz} = \frac{\partial w^L}{\partial z} = \frac{\partial \bar{w}^L}{\partial z} - n \frac{\partial^2 \bar{u}^L}{\partial^2 z} = \bar{\varepsilon}_z^L + n\kappa_z^L, \quad (3.15)$$

$$e_{zs} = \frac{\partial w^L}{\partial s} + \frac{\partial v^L}{\partial z} = \frac{\partial \bar{w}^L}{\partial s} + \frac{\partial \bar{v}^L}{\partial z} - 2n \frac{\partial^2 \bar{u}^L}{\partial z \partial s} = \bar{\gamma}_{zs}^L + n\kappa_{zs}^L, \quad (3.16)$$

gdje su  $\bar{\varepsilon}_z^L$  duljinska deformacija:

$$\bar{\varepsilon}_z^L = \frac{\partial \bar{w}^L}{\partial z} = \frac{dw_0}{dz} - x \frac{d^2 u_s}{dz^2} - y \frac{d^2 v_s}{dz^2} - \omega \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2}, \quad (3.17)$$

$\kappa_z^L$  i  $\kappa_{zs}^L$  zakrivljenosti srednje linije presjeka:



$$\kappa_z^L = -\frac{\partial^2 \bar{u}^L}{\partial z^2} = -\frac{d^2 u_s}{dz^2} \sin \beta + \frac{d^2 v_s}{dz^2} \cos \beta + \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} q, \quad (3.18)$$

$$\kappa_{zs}^L = 2 \frac{d\varphi_z}{dz}, \quad (3.19)$$

a  $\bar{\gamma}_{zs}^L$  kutna deformacija:

$$\bar{\gamma}_{zs}^L = \frac{\partial \bar{w}^L}{\partial s} + \frac{\partial \bar{v}^L}{\partial z} = \frac{F_s}{t} \frac{d\varphi_z}{dz}. \quad (3.20)$$

Pritom  $r$  predstavlja radijus konture,  $q$  je udaljenost od proizvoljno odabrane točke pola P, a  $\omega$  funkcija vitopereanja obzirom na konturni koordinatni sustav [19]:

$$r = (x - x_s) \sin \beta - (y - y_s) \cos \beta, \quad (3.21)$$

$$q = (y - y_s) \sin \beta + (x - x_s) \cos \beta, \quad (3.22)$$

$$\omega = \int_s \left( r - \frac{F_s}{t} \right) ds. \quad (3.23)$$

$F_s$  je Venantov smični tok, a  $t$  predstavlja debljinu stijenke poprečnog presjeka. Obilježje  $F_s$  poprečnog presjeka neovisno je o izboru vrste koordinatnog sustava, pola i ishodišta. Eksplicitni izraz za smični tok može se pronaći u literaturi [19]. U slučaju otvorenih tankostjenih poprečnih presjeka vrijedi  $F_s = 0$ .

Konačno, deformacije iz izraza (3.15) i (3.16) postaju:

$$e_{zz} = \frac{dw_0}{dz} - \frac{d^2 u_s}{dz^2} (x + n \sin \beta) - \frac{d^2 v_s}{dz^2} (y - n \cos \beta) - \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} (\omega - nq), \quad (3.24)$$

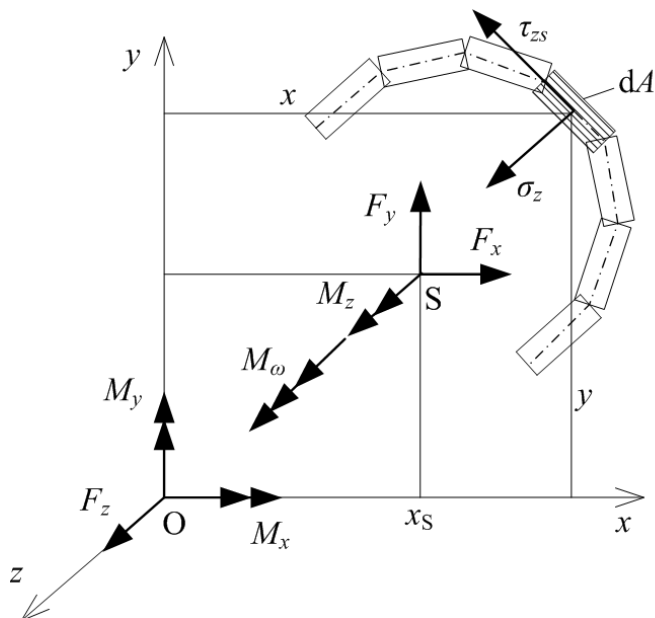
$$e_{zs} = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = 2 \frac{d\varphi_z}{dz} \left( n + \frac{F_s}{2t} \right). \quad (3.25)$$

Nelinearne komponente deformacije iz izraza (3.13) i (3.14) mogu se po analogiji izraziti na isti način preko odgovarajućih polja pomaka grednog nosača.

### 3.3. Unutarnje sile

Rezultanta unutarnjih sila u općem slučaju opterećenja grednog nosača sastoji se od sljedećih

komponentata: aksijalne sile  $F_z$ , momenata savijanja  $M_x$  i  $M_y$ , momenta uvijanja  $M_t$  te bimomenta  $M_\omega$ . S obzirom na početnu pretpostavku o apsolutnoj krutosti poprečnog presjeka u vlastitoj ravnini, u proizvoljnoj se točki poprečnog presjeka mogu pojaviti samo komponente naprezanja  $\sigma_z$  i  $\tau_{sz}$ , Sl. 3.3.



Sl. 3.3 Unutarnje sile

Unutarnje sile definirane su kako slijedi:

Aksijalna sila:

$$F_z = \int_n \int_s \sigma_z \, dn \, ds, \quad (3.26)$$

Momenti savijanja:

$$M_x = \int_n \int_s \sigma_z (y - n \cos \beta) \, dn \, ds, \quad (3.27)$$

$$M_y = \int_n \int_s \sigma_z (x - n \sin \beta) \, dn \, ds,$$

Moment uvijanja:

$$M_t = \int_n \int_s \tau_{sz} \left( n + \frac{F_s}{t} \right) \, dn \, ds, \quad (3.28)$$

Bimoment:

$$M_\omega = \int_n \int_s \sigma_z (\omega - nq) dn ds. \quad (3.29)$$

Kod tankostjenih se nosača zbog vitoperenja poprečnog presjeka pojavljuje i dodatni torzijski moment uzrokovan normalnim naprezanjem, tzv. Wagnerov efekt [9]:

$$T_q = \int_n \int_s \sigma_z \vartheta^2 dn ds \frac{d\varphi_z}{dz} = \bar{K} \frac{d\varphi_z}{dz}. \quad (3.30)$$

Pritom je  $\vartheta$  udaljenost proizvoljne točke poprečnog presjeka od točke glavnog pola, tj. od centra smicanja, a  $\bar{K}$  Wagnerov koeficijent:

$$\bar{K} = \int_n \int_s \sigma_z \rho^2 dn ds = \int_n \int_s \sigma_z (x^2 + y^2) dn ds. \quad (3.31)$$

### 3.4. Konstitutivne jednadžbe

Budući da se materijali smatraju linearno elastičnima, konstitutivna jednadžba FG grednog nosača, može biti izražena u lokalnom koordinatnom sustavu  $(z, s, n)$ :

$$\begin{pmatrix} \sigma_z \\ \tau_{sz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(n, T) & 0 \\ 0 & G(n, T) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_{zz} - \alpha(n, T) \Delta T \\ \gamma_{sz} \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

$$G(n, T) = \frac{E(n, T)}{2[1 + \nu(n, T)]}, \quad (3.33)$$

gdje su  $(\sigma_z, \tau_{sz})$  i  $(e_{zz}, \gamma_{sz})$  komponente naprezanja i deformacije.

Prema izrazima (3.24) i (3.25), a u skladu s izrazom (3.32), rezultatne sile iz (3.26) - (3.29) moguće je izraziti preko komponenata grednih pomaka:

$$\begin{aligned}
 F_z &= \varepsilon_z^0 \int_s A_{11} \, ds + \kappa_y \int_s (A_{11}x + B_{11} \sin \beta) \, ds \\
 &+ \kappa_x \int_s (A_{11}y - B_{11} \cos \beta) \, ds + \kappa_\omega \int_s (A_{11}\omega - B_{11}q) \, ds \\
 &- \int_s A_{11}^T \, ds,
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= \varepsilon_z^0 \int_s (A_{11}x + B_{11} \sin \beta) \, ds \\
 &+ \kappa_y \int_s (A_{11}x^2 + 2B_{11}x \sin \beta + D_{11} \sin^2 \beta) \, ds \\
 &+ \kappa_x \int_s (A_{11}xy - B_{11}y \sin \beta - B_{11}x \cos \beta \\
 &+ D_{11} \sin \beta \cos \beta) \, ds \\
 &+ \kappa_\omega \int_s (A_{11}x\omega + B_{11}\omega \sin \beta - B_{11}xq - D_{11}q \sin \beta) \, ds \\
 &- \int_s A_{11}^T x \, ds - \int_s B_{11}^T \sin \beta \, ds,
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= \varepsilon_z^0 \int_s (A_{11}y - B_{11} \cos \beta) ds \\
 &+ \kappa_y \int_s (A_{11}xy + B_{11}y \sin \beta - B_{11}x \cos \beta \\
 &- D_{11} \sin \beta \cos \beta) ds \\
 &+ \kappa_x \int_s (A_{11}y^2 - 2B_{11}y \cos \beta + D_{11} \cos^2 \beta) ds \\
 &+ \kappa_\omega \int_s (A_{11}y\omega - B_{11}\omega \cos \beta - B_{11}yq + D_{11}q \cos \beta) ds \\
 &- \int_s A_{11}^T y ds + \int_s B_{11}^T \cos \beta ds,
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
 M_\omega &= \varepsilon_z^0 \int_s (A_{11}\omega - B_{11}q) ds \\
 &+ \kappa_y \int_s (A_{11}x\omega + B_{11}\omega \sin \beta - B_{11}xq - D_{11}q \sin \beta) ds \\
 &+ \kappa_x \int_s (A_{11}y\omega - B_{11}\omega \cos \beta - B_{11}xy + D_{11}q \cos \beta) ds \\
 &+ \kappa_\omega \int_s (A_{11}\omega^2 - 2B_{11}q\omega + D_{11}q^2) ds - \int_s A_{11}^T \omega ds \\
 &+ \int_s B_{11}^T q ds,
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

$$M_T = \kappa_{sz} \int_s D_{66} ds, \tag{3.38}$$

pri čemu su deformacije i zakrivljenosti:

$$\varepsilon_z^0 = \frac{dw_0}{dz}, \quad \kappa_y = \frac{-d^2u_s}{dz^2}, \quad \kappa_x = \frac{-d^2v_s}{dz^2}, \tag{3.39}$$

$$\kappa_{\omega} = \frac{-d^2\varphi_z}{dz^2}, \quad \kappa_{sz} = 2 \frac{d\varphi_z}{dz}$$

Izrazi (3.34) - (3.37) mogu biti izraženi i u matričnoj formi:

$$\begin{Bmatrix} F_z \\ M_y \\ M_x \\ M_{\omega} \\ M_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & 0 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} & 0 \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_z^0 \\ \kappa_y \\ \kappa_x \\ \kappa_{\omega} \\ \kappa_{sz} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} RN_z^T \\ RM_y^T \\ RM_x^T \\ RM_{\omega}^T \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.40)$$

pri čemu  $RN_z^T$ ,  $RM_x^T$ ,  $RM_y^T$  i  $RM_{\omega}^T$  predstavljaju termičke sile i termičke momente:

$$\begin{aligned} RN_z^T &= \int_s A_{11}^T ds, \\ RM_y^T &= \int_s A_{11}^T x ds + \int_s B_{11}^T \sin \beta ds, \\ RM_x^T &= \int_s A_{11}^T y ds - \int_s B_{11}^T \cos \beta ds, \\ RM_{\omega}^T &= \int_s A_{11}^T \omega ds - \int_s B_{11}^T q ds, \end{aligned} \quad (3.41)$$

dok članovi matrice  $R_{ij}$  predstavljaju krutosti FG tankostjenog grednog nosača:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \int_s A_{11} ds \\ R_{12} = R_{21} &= \int_s A_{11} x ds + \int_s B_{11} \sin \beta ds \\ R_{13} = R_{31} &= \int_s A_{11} y ds - \int_s B_{11} \cos \beta ds \\ R_{14} = R_{41} &= \int_s A_{11} \omega ds - \int_s B_{11} q ds \\ R_{22} &= \int_s A_{11} x^2 ds + \int_s 2B_{11} x \sin \beta ds + \int_s D_{11} \sin^2 \beta ds \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned}
 R_{23} = R_{32} &= \int_s A_{11}xy \, ds + \int_s B_{11}y \sin \beta \, ds - \int_s B_{11}x \cos \beta \, ds \\
 &\quad - \int_s D_{11} \sin \beta \cos \beta \, ds \\
 R_{24} = R_{42} &= \int_s A_{11}x\omega \, ds + \int_s B_{11}\omega \sin \beta \, ds - \int_s B_{11}xq \, ds \\
 &\quad - \int_s D_{11}q \sin \beta \, ds \\
 R_{33} &= \int_s A_{11}y^2 \, ds - \int_s 2B_{11}y \cos \beta \, ds + \int_s D_{11} \cos^2 \beta \, ds \\
 R_{34} = R_{43} &= \int_s A_{11}y^2 \, ds - \int_s 2B_{11}y \cos \beta \, ds - \int_s B_{11}yq \, ds \\
 &\quad + \int_s D_{11}q \cos \beta \, ds \\
 R_{44} &= \int_s A_{11}\omega^2 \, ds - \int_s 2B_{11}\omega q \, ds + \int_s D_{11}q^2 \, ds \\
 R_{55} &= \int_s \left(\frac{F_s}{2t}\right)^2 A_{66} \, ds + \int_s \frac{F_s}{t} B_{66} \, ds \int_s D_{66} \, ds
 \end{aligned}$$

U izrazu (3.42)  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  i  $D_{ij}$  predstavljaju krutosti vlaka, savijanja i međudjelovanja vlaka i savijanja:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \int_n E(n, z, T) \, dn; \\
 A_{66} &= \int_n G(n, z, T) \, dn; \\
 B_{11} &= \int_n E(n, z, T) n \, dn;
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

$$B_{66} = \int_n G(n, z, T) n \, dn;$$

$$D_{11} = \int_n E(n, z, T) n^2 \, dn;$$

$$D_{66} = \int_n G(n, z, T) n^2 \, dn;$$

Analogno moguće je definirati  $A_{11}^T$  i  $B_{11}^T$  u izrazu (3.41):

$$A_{11}^T = \int_n E(n, z, T) \alpha(n, z, T) \Delta T(n, z) \, dn; \quad (3.44)$$

$$B_{11}^T = \int_n E(n, z, T) \alpha(n, z, T) \Delta T(n, z) n \, dn;$$

Integrali u prethodnim funkcijama koji sadrže  $x(s)$ ,  $y(s)$ ,  $q(s)$  i  $\omega(s)$  linearne su funkcije konturne koordinate  $s$  što se može izraziti kao na sljedeći način [31]:

$$f_i(s) = k_i \cdot s + l_i \text{ za } i = 1, 2 \text{ i } f = x, y, q, \omega \quad (3.45)$$

gdje  $k$  i  $l$  predstavljaju koeficijente u jednadžbi pravca. Ako su vrijednosti funkcije definirane za linijske segmente  $s_1 - s_2$ , koeficijenti glase:

$$k_i = \frac{f_i(s_2) - f_i(s_1)}{s_2 - s_1}, \quad (3.46)$$

$$l_i = \frac{s_1 \cdot [f_i(s_2) - f_i(s_1)]}{s_2 - s_1} + f_i(s_1) \text{ za } i = 1, 2.$$

Integrali se sada mogu izraziti u eksplicitnom obliku:

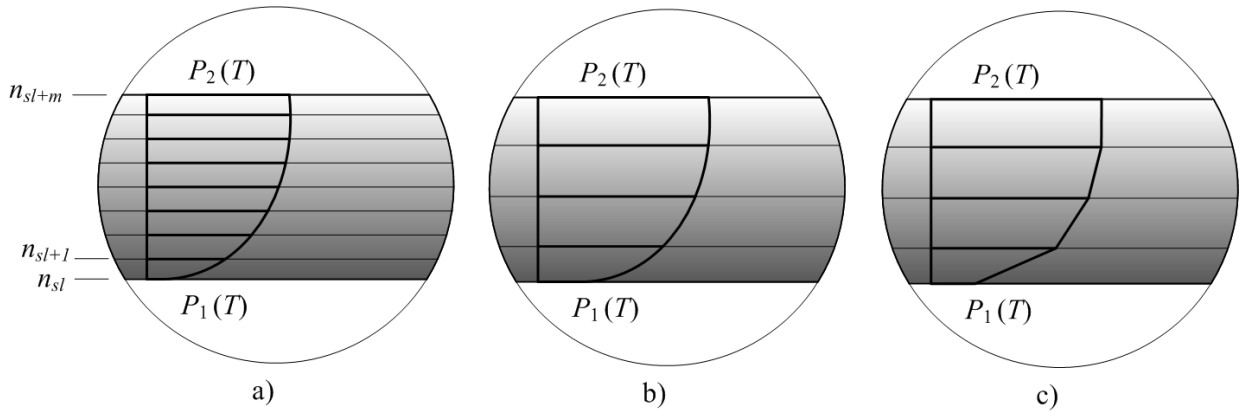
$$\int_{s_1}^{s_2} ds = s_2 - s_1,$$

$$\int_{s_1}^{s_2} f_1(s) \, ds = \frac{k_1}{2} (s_2^2 - s_1^2) + l_1 (s_2 - s_1), \quad (3.47)$$

$$\int_{s_1}^{s_2} f_1(s) \cdot f_2(s) \, ds = \frac{k_1 k_2}{3} (s_2^3 - s_1^3) + \frac{l_1 k_2}{2} (s_2^2 - s_1^2) + \frac{k_1 l_2}{2} (s_2^2 - s_1^2)$$

$$+ l_1 l_2 (s_2 - s_1).$$





Sl. 3.4 a) Podjela stijenke na slojeve; b) nelinearna distribucija materijala; c) linearna aproksimacija

Da bi se riješili integrali u izrazima (3.43) i (3.44) po konturnoj koordinati  $n$ , stijenke poprečnog presjeka podijeljene su na  $m$  slojeva unutar kojih je omogućena linearna promjena materijalnog svojstva  $P_f$  i temperature  $T$  kako bi se što bolje aproksimirala nelinearna distribucija materijala po visini stijenke poprečnog presjeka, Sl. 3.4. Na taj način integrali:

$$\int_n P_f(n) dn, \int_n P_f(n) n dn, \int_n P_f(n) n^2 dn, \quad (3.48)$$

$$\int_n P_{f1}(n) P_{f2}(n) \Delta T(n) dn, \int_n P_{f1}(n) P_{f2}(n) \Delta T(n) n dn,$$

sadrže funkcije  $P_f$  ili produkt jedne ili više takvih funkcija i linearne funkcije konturne koordinate  $n$  ili njenog kvadrata, što se može izraziti kao:

$$f_i(n) = k_i \cdot n + l_i \text{ za } i = 1, 2 \text{ i } f_i = E, G, \alpha, T \quad (3.49)$$

te su pritom  $k$  i  $l$  po analogiji definirani u izrazu (3.46) za slojeve  $n_{sl+1} - n_{sl}$ .

Integrali iz izraza (3.43) se sada mogu izraziti u eksplicitnom obliku:

$$\begin{aligned} \int_{n_{sl}}^{n_{sl+1}} f_1(n) dn &= \frac{k_1}{2} (n_{sl+1}^2 - n_{sl}^2) + l_1 (n_{sl+1} - n_{sl}), \\ \int_{n_{sl}}^{n_{sl+1}} f_1(n) \cdot n dn &= \frac{k_1}{3} (n_{sl+1}^3 - n_{sl}^3) + \frac{l_1}{2} (n_{sl+1}^2 - n_{sl}^2), \\ \int_{n_{sl}}^{n_{sl+1}} f_1(n) \cdot n^2 dn &= \frac{k_1}{4} (n_{sl+1}^4 - n_{sl}^4) + \frac{l_1}{3} (n_{sl+1}^3 - n_{sl}^3), \end{aligned} \quad (3.50)$$

dok se integrali iz izraza (3.44) koji sadrže produkte dviju funkcija  $P_f$ , temperature  $T$  i konturne koordinate  $n$ , mogu napisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
 \int_{n_{sl}}^{n_{sl+1}} f_1(n) \cdot f_2(n) \cdot f_3(n) \, dn &= \frac{k_1 k_2 k_3}{4} (n_{sl+1}^4 - n_{sl}^4) \\
 &+ \frac{1}{3} (k_1 k_3 l_2 + k_2 k_3 l_1 + k_1 k_2 l_3) (n_{sl+1}^3 - n_{sl}^3) \\
 &+ \frac{1}{2} (k_1 l_2 l_3 + k_2 l_1 l_3 + k_3 l_1 l_2) (n_{sl+1}^2 - n_{sl}^2) \\
 &+ l_1 l_2 l_3 (n_{sl+1} - n_{sl}), \\
 \int_{n_{sl}}^{n_{sl+1}} f_1(n) \cdot f_2(n) \cdot f_3(n) \cdot n \, dn &= \frac{k_1 k_2 k_3}{5} (n_{sl+1}^5 - n_{sl}^5) \\
 &+ \frac{1}{4} (k_1 k_3 l_2 + k_2 k_3 l_1 + k_1 k_2 l_3) (n_{sl+1}^4 - n_{sl}^4) \\
 &+ \frac{1}{3} (k_1 l_2 l_3 + k_2 l_1 l_3 + k_3 l_1 l_2) (n_{sl+1}^3 - n_{sl}^3) \\
 &+ \frac{1}{2} l_1 l_2 l_3 (n_{sl+1}^2 - n_{sl}^2).
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Integracija po uzdužnoj osi elementa provodi se u tri Gaussove točke [3,8,57].

### 3.5. Težište i centar smicanja

U poprečnom presjeku grede, težište  $(x_c, y_c)$  je točka u kojoj djeluje aksijalna sila  $F_z$  koja predstavlja rezultantu aksijalnih naprezanja uzrokovanih konstatnim stanjem deformacije  $\varepsilon_z^0$ . Ako se izjednače momenti savijanja obzirom na  $x$  i  $y$  os:

$$\begin{aligned}
 F_z \cdot y_c &= M_x, \\
 F_z \cdot x_c &= M_y,
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

te uzimajući u obzir izraz (3.40), težište se može izraziti na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
 x_c &= -\frac{\bar{R}_{12}}{R_{11}}, \\
 y_c &= -\frac{\bar{R}_{13}}{R_{11}},
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

gdje je:

$$\bar{R}_{12} = \int_s A_{11} \bar{x} ds + \int_s B_{11} \sin \beta ds, \quad (3.54)$$

$$\bar{R}_{13} = \int_s A_{11} \bar{y} ds - \int_s B_{11} \cos \beta ds.$$

Pritom  $\bar{x}$  i  $\bar{y}$  predstavljaju koordinate u odnosu na ishodište.

Funkcija vitoperenja obzirom na centar smicanja  $\omega$  povezana je s funkcijom vitoperenja obzirom na težište  $\omega_c$ :

$$\omega = \omega_c - x_s y + y_s x, \quad (3.55)$$

gdje su  $x_s$  i  $y_s$  koordinate centra smicanja. Na isti način može se izraziti koordinata  $q$  obzirom na  $q_c$ :

$$q = q_c - x_s \cos \beta + y_s \sin \beta. \quad (3.56)$$

Ako je gredni nosač opterećen samo momentom uvijanja, normalna deformacija iz izraza (3.24) glasi:

$$e_{zz} = -\frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} (\omega - nq), \quad (3.57)$$

te su momenti savijanja jednaki nuli. Uvrštavanjem izraza (3.55) i (3.56) u izraz (3.40), slijedi:

$$\begin{aligned} M_x &= R_{34}^0 - x_s R_{33} + y_s R_{23} = 0, \\ M_y &= R_{24}^0 - x_s R_{23} + y_s R_{22} = 0, \end{aligned} \quad (3.58)$$

gdje je:

$$\begin{aligned} R_{24}^0 &= \int_s A_{11} x \omega_c ds + \int_s B_{11} \omega_c \sin \beta ds - \int_s B_{11} x q_c ds \\ &\quad - \int_s D_{11} q_c \sin \beta ds, \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$R_{34}^0 = \int_s A_{11} y \omega_c ds - \int_s B_{11} \omega_c \cos \beta ds - \int_s B_{11} y q_c ds$$

$$+ \int_s D_{11} q_c \cos \beta ds.$$

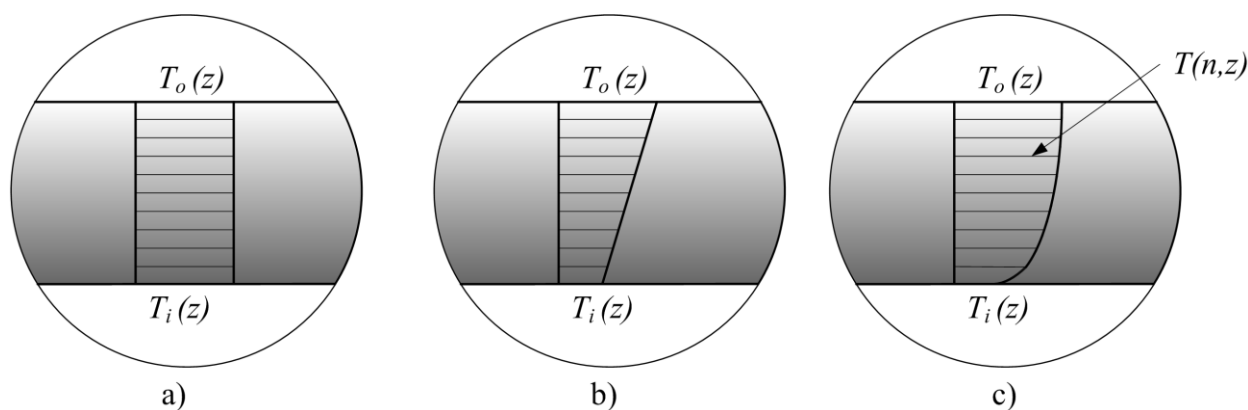
Rješavanjem jednadžbe (3.57), koordinate centra smicanja glase:

$$x_s = \frac{R_{22} R_{34}^0 - R_{23} R_{24}^0}{R_{22} R_{33} - R_{23} R_{23}},$$

$$y_s = -\frac{R_{33} R_{24}^0 - R_{23} R_{34}^0}{R_{22} R_{33} - R_{23} R_{23}},$$
(3.60)

### 3.6. Raspodjela temperature

Kako bi se analiziralo toplinsko izvijanje, potrebno je definirati raspodjelu temperature. Razmatrana su tri tipa temperaturne distribucije po visini stijenke poprečnog presjeka grednog nosača te linearna promjena temperature po duljini nosača. [11]



Sl. 3.5 Raspodjela temperature: a) UTR, b) LTR, c) NLR

- Uniforma raspodjela temperature (UTR)

Pretpostavimo da je referentna temperatura grednog nosača  $T_0$ . Ako su aksijalni pomaci spriječeni, temperatura neke točke nosača  $T(n, z)$  može pri zagrijavanju porasti na  $T(n, z) + \Delta T$ . Ako takva temperatura dostigne kritičnu vrijednost, doći će do izvijanja grednog nosača. Pritom je  $\Delta T$  temperaturni prirast te se sve točke nosača jednoliko zagrijavaju, Sl. 3.5a.

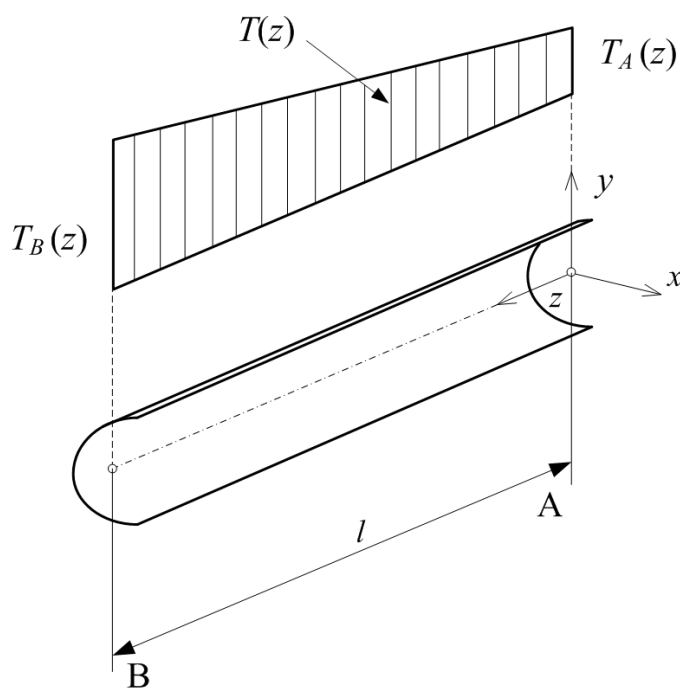
- Linearna raspodjela temperature (LTR)

Razmotrimo tankostijeni FG gredni nosač s različitim temperaturama na unutarnjoj i vanjskoj stijenci poprečnog presjeka,  $T_o(z)$  i  $T_i(z)$ . Temperaturna distribucija dobiva se rješavanjem jednadžbe provođenja topline po debljini stijenske nosača. Ako je stijenka dovoljno tanka, pretpostavlja se da je raspodjela temperature po visini stijenske linearna, Sl. 3.5b:

$$T(n, z) = T_i(z) + [T_o(z) - T_i(z)] \cdot V_x(n). \quad (3.61)$$

Analognim se pristupom može definirati linearna distribucija temperature po duljini nosača, Sl. 3.6. Recimo da su zadane temperature u krajnjim čvorovima grednog nosača,  $T_A(z)$  i  $T_B(z)$ . Temperatura neke točke nosača  $T(z)$  sada iznosi:

$$T(z) = T_A(z) \cdot \left(1 - \frac{z}{l}\right) + T_B(z) \cdot \frac{z}{l} \quad (3.62)$$



Sl. 3.6 Raspodjela temperature po duljini nosača

- Nelinearna raspodjela temperature (NLR)

Neka FG gredni nosač ima različite temperature na unutarnjoj i vanjskoj stijenci poprečnog presjeka,  $T_o(z)$  i  $T_i(z)$ . Rješavanjem jednodimenzionalne jednadžbe provođenja topline u stacionarnom stanju:

$$\frac{d}{dn} \left( K(n, T) \frac{dT(n, z)}{dn} \right) = 0. \quad (3.63)$$

može se dobiti distribucija temperature po debljini stijenke, Sl. 3.5c:

$$T(n, z) = T_i(z) + \frac{T_o(z) - T_i(z)}{C} D(n). \quad (3.64)$$

Pritom su:

$$\begin{aligned} D(n, T) = & V_c(n) - \frac{K_{oi}(T)}{(p+1)K_i(T)} \cdot V_\chi(n)^{p+1} + \frac{K_{oi}(T)^2}{(p+2)K_i(T)^2} \cdot V_\chi(n)^{p+2} \\ & - \frac{K_{oi}(T)^3}{(p+3)K_i(T)^3} \cdot V_\chi(n)^{p+3} + \frac{K_{oi}(T)^4}{(p+4)K_i(T)^4} \cdot V_\chi(n)^{p+4} \\ & - \frac{K_{oi}(T)^5}{(p+5)K_i(T)^5} \cdot V_\chi(n)^{p+5} \end{aligned} \quad (3.65)$$

i

$$\begin{aligned} C(T) = & 1 - \frac{K_{oi}(T)}{(p+1)K_i(T)} + \frac{K_{oi}(T)^2}{(p+2)K_i(T)^2} - \frac{K_{oi}(T)^3}{(p+3)K_i(T)^3} \\ & + \frac{K_{oi}(T)^4}{(p+4)K_i(T)^4} - \frac{K_{oi}(T)^5}{(p+5)K_i(T)^5} \end{aligned} \quad (3.66)$$

gdje su  $K_i$  i  $K_o$  koeficijenti toplinske provodljivosti na unutarnjoj i vanjskoj površini stijenke FG poprečnog presjeka, dok je  $K_{oi} = K_o - K_i$ .



## 4. KONAČNOELEMENTNA FORMULACIJA

---

S obzirom na složenost problema stabilnosti tankostjenih konstrukcija, pri rješavanju se koriste aproksimativne metode u koje spadaju i numeričke metode. Jedna od najraširenijih numeričkih metoda jest metoda konačnih elemenata (MKE) koja se temelji na fizičkoj diskretizaciji kontinuuma. Promatrani kontinuum s beskonačnim brojem stupnjeva slobode zamjenjuje se s konačnim brojem podpodručja, tj. konačnih elemenata, međusobno povezanih u točkama na konturi elemenata, tj. u čvorovima. Time se promatrani sustav aproksimira diskretiziranim s konačnim brojem stupnjeva slobode. Primjenom odgovarajućih ravnotežnih jednadžbi svakog konačnog elementa i uvjeta kompatibilnosti u čvorovima elemenata, problem se svodi na sustav algebarskih jednadžbi čijim se rješavanjem dobivaju nepoznati pomaci i sile u čvorovima konačnih elemenata.

Razvoj računala omogućio je primjenu metode konačnih elemenata u svakodnevnoj inženjerskoj praksi budući da sa složenošću problema raste i broj jednadžbi čiji je rješavanje neophodno u ovoj metodi. Uporaba računala uvelike smanjuje vrijeme potrebno za provedbu proračuna, a omogućuje i analizu većeg broja eksperimenata što daje dodatnu uštedu vremena.

U ovom konačnoelementnom modelu problem stabilnosti može se riješiti na dva načina. Prvi način je linearizirana analiza stabilnosti gdje se problem svodi na matrični problem vlastitih vrijednosti te se nastanak nestabilnosti određuje na direktan način bez izračuna deformacija. Vlastite vrijednosti predstavljaju faktore opterećenja kod kojih dolazi do bifurkacije ravnotežnog oblika promatrane konstrukcije dok pripadajući vlastiti vektor predstavlja samo oblik deformacijske forme koja se javlja pri gubitku stabilnosti. Od praktičnog je značenja prva vlastita vrijednost, tj. najniži nivo opterećenja kod kojeg konstrukcija prelazi iz stabilnog u nestabilno deformacijsko stanje.

Drugi način predstavlja nelinearnu analizu kod koje se kritična vrijednost opterećenja određuje praćenjem odnosa između vanjskog opterećenja i defomacije konstrukcije u prijekritičnoj i poslijekritičnoj fazi. Analiza se provodi inkrementalno pri čemu se unutar inkrementa problem tretira kao linearan, a sve nelinearnosti uvode se transformacijskim matricama iz lokalnog koordinatnog sustava vezanog za konačni element u globalni koordinatni sustav konstrukcije. U ovom je radu za opisivanje inkrementalnog procesa korištena *updated Lagrangian* formulacija koja se dijeli u tri faze. U prediktor fazi vrši se proračun krutosti

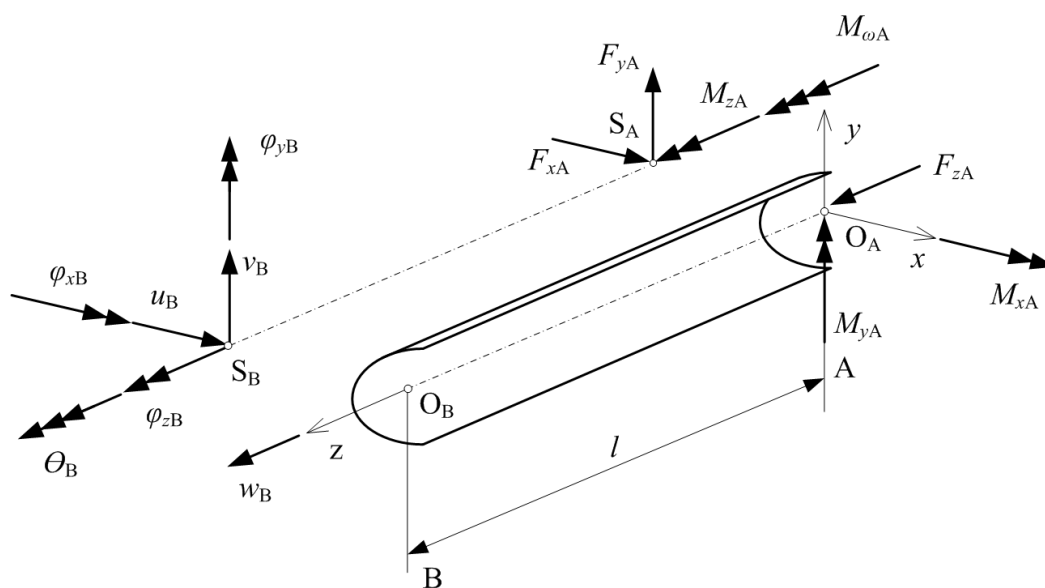


inkrementalnih pomaka diskretizirane konstrukcije i svakog konačnog elementa. Korektor faza obuhvaća korekcije geometrije svih konačnih elemenata te određivanje čvornih sila pomoću *force-recovery* algoritma. U posljednoj se fazi kontrolira konvergencija iterativnog rješenja obzirom na zadane kriterije.

Iako je nelinearna analiza proračunski i memorijski zahtjevnija i kompleksnija, moguće je modelirati odzive složenijih konstrukcija i postići realnije rezultate.

#### 4.1. Gredni konačni element

Na Sl. 4.1 je prikazan tankostjeni gredni konačni element definiran u lokalnom koordinatnom sustavu. Čvorovi konačnog elementa označeni su s A i B, z os je uzdužna os konačnog elementa koja prolazi kroz težišta svih poprečnih presjeka, osi x i y predstavljaju glavne centralne osi inercije. O i S su težište i centar smicanja poprečenog presjeka u čvorovima. Konačni element ima ukupno 14 stupnjeva slobode gibanja, tj. 7 stupnjeva slobode po svakom čvoru, a čemu odgovara 7 komponenta čvornih pomaka i 7 komponenta čvornih sila u svakom čvoru.



Sl. 4.1 Tankostjeni gredni konačni element sa 14 stupnjeva slobode gibanja

Vektornih čvornih pomaka, prema Sl. 4.1, glasi:

$$(\mathbf{u}^e)^T = \{w_A \ u_A \ v_A \ \varphi_{zA} \ \varphi_{xA} \ \varphi_{yA} \ w_B \ u_B \ v_B \ \varphi_{zB} \ \varphi_{xB} \ \varphi_{yB} \ \theta_A \ \theta_B\}, \quad (4.1)$$

a vektor čvornih sila:

$$(\mathbf{f}^e)^T = \{F_{zA} F_{xA} F_{yA} M_{zA} M_{xA} M_{yA} F_{zB} F_{xB} F_{yB} M_{zB} M_{xB} M_{yB} M_{\omega A} M_{\omega B}\}, \quad (4.2)$$

gdje indeks  $e$  označava  $e$ -ti konačni element diskretizirane konstrukcije.

Pritom su čvorni pomak  $w$  te čvorne sile  $F_z$ ,  $M_x$  i  $M_y$  definirane za težište, a sve ostale komponente vektora čvornog pomaka i sila definirane su za centar smicanja.

## 4.2. Princip virtualnih radova

Primjenom principa virtualnih radova izvedene su ravnotežne jednačbe. Princip se temelji na činjenici da je virtualni rad vanjskih sila jednak virtualnom radu unutarnjih sila:

$$\delta U = \delta W, \quad (4.3)$$

$$\int_V {}^t S_{ij} \delta {}^t \varepsilon_{ij} dV = \int_{A_\sigma} {}^t t_i \delta ({}^t u_i + {}^t \tilde{u}_i) dA_\sigma, \quad (4.4)$$

pri čemu je  $\delta U$  virtualna potencijalna energija deformiranja,  $\delta W$  virtualni rad vanjskih sila,  $S_{ij}$  je Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja druge vrste,  $\varepsilon_{ij}$  predstavlja Green-Lagrangeov tenzor deformacije,  $t_i$  označava površinske sile,  $u_i$  i  $\tilde{u}_i$  linearne i nelinearne komponente pomaka, a simbol  $\delta$  virtualnu vrijednost. Gornji indeks  $t$  uz veličine označava da se radi o ukupnim vrijednostima. Ako se zanemare početni pomaci i deformacije prije izvijanja, dobije se:

$$\begin{aligned} {}^t S_{ij} &= {}^0 S_{ij} + S_{ij}, \\ {}^t \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}, \\ {}^t t_i &= {}^0 t_i + t_i, \\ {}^t u_i + {}^t \tilde{u}_i &= u_i + \tilde{u}_i, \end{aligned} \quad (4.5)$$

gdje gornji lijevi indeks 0 uz veličine  $S_{ij}$  i  $t_i$  označava inicijalne vrijednosti, dok veličine bez takvog indeksa predstavljaju inkrementalne vrijednosti. Vrate li se vrijednosti iz izraza (4.5) u izraz (4.4) dobije se:

$$\int_V ({}^0 S_{ij} + S_{ij}) \delta (e_{ij} + \eta_{ij} + \tilde{e}_{ij}) dV = \int_{A_\sigma} ({}^0 t_i + t_i) \delta (u_i + \tilde{u}_i) dA_\sigma, \quad (4.6)$$

odnosno, ako se zanemare članovi višega reda iz prethodno izraza (4.6):

$$\begin{aligned} & \int_V (S_{ij} \delta e_{ij} + {}^0S_{ij} \delta e_{ij} + {}^0S_{ij} \delta \eta_{ij} + {}^0S_{ij} \delta \tilde{e}_{ij}) dV \\ & = \int_{A_\sigma} ({}^0t_i \delta u_i + {}^0t_i \delta \tilde{u}_i + t_i \delta u_i) dA_\sigma. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Pretpostavimo li da početne unutarnje i vanjske sile čine uravnotežen sustav sila:

$$\int_V {}^0S_{ij} \delta e_{ij} dV = \int_{A_\sigma} {}^0t_i \delta u_i dA_\sigma, \quad (4.8)$$

te oduzimajući izraz (4.8) od izraza (4.7), dobije se

$$\begin{aligned} & \int_V S_{ij} \delta e_{ij} dV + \int_V {}^0S_{ij} \delta \eta_{ij} dV + \int_V {}^0S_{ij} \delta \tilde{e}_{ij} dV - \int_{A_\sigma} {}^0t_i \delta \tilde{u}_i dA_\sigma \\ & = \int_{A_\sigma} t_i \delta u_i dA_\sigma. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Izraz (4.9) se naziva linearizirani princip virtualnih radova gdje prvi podintegral s lijeve strane izraza predstavlja varijaciju elastične potencijalne energije unutarnjih sila, drugi podintegral varijaciju geometrijskoga potencijal unutarnjih sila, a treći i četvrti predstavljaju geometrijski potencijal početnih unutarnjih i vanjskih sila uzrokovan efektom velikih rotacija. Podintegral s desne strane izraza označava virtualni rad vanjskih sila. Izraz (4.9) možemo napisati i na sljedeći način:

$$\delta U_E + \delta U_G - \delta W = \delta \Pi = 0, \quad (4.10)$$

gdje je

$$\delta U_E = \int_V S_{ij} \delta e_{ij} dV \quad (4.11)$$

$$\delta U_G = \int_V {}^0S_{ij} \delta \eta_{ij} dV + \int_V {}^0S_{ij} \delta \tilde{e}_{ij} dV - \int_{A_\sigma} {}^0t_i \delta \tilde{u}_i dA_\sigma, \quad (4.12)$$

$$\delta W = \int_{A_\sigma} t_i \delta u_i dA_\sigma, \quad (4.13)$$

a  $\Pi$  označava ukupni potencijal.

Uvrštavanjem izraza (3.24) i (3.25) u izraze (4.11) i (4.12) dobije se:

$$\begin{aligned} \delta U_E &= \int_V (\sigma_z \delta e_{zz} + \tau_{sz} \delta e_{sz}) dV \\ &= \int_0^l \int_A \left\{ [E(n, z, T)(e_{zz} - \alpha(n, z, T)\Delta T)] \left[ \delta \frac{dw_0}{dz} \right. \right. \\ &\quad - \delta \frac{d^2 u_s}{dz^2} (x + n \sin \beta) - \delta \frac{d^2 v_s}{dz^2} (y - n \cos \beta) \\ &\quad \left. \left. - \delta \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} (\omega - nq) \right] + G(n, z, T)e_{sz} \left( 2n \delta \frac{d\varphi_z}{dz} \right) \right\} dA dz \quad (4.14) \\ &= \int_0^l \left[ (F_z - RN_z^T) \delta \frac{dw_0}{dz} - (M_y - RM_y^T) \delta \frac{d^2 u_s}{dz^2} \right. \\ &\quad - (M_x - RM_x^T) \delta \frac{d^2 v_s}{dz^2} - (M_\omega - RM_\omega^T) \delta \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \\ &\quad \left. + 2RM_t \delta \frac{d\varphi_z}{dz} \right] dz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta U_G = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ {}^0F_z \left[ \delta \left( \frac{dw_0}{dz} \right)^2 + \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \right)^2 + \delta \left( \frac{du_s}{dz} \right)^2 + 2y_s \delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) \right. \right. \\
 \left. \left. - 2x_s \delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) \right] \right. \\
 + {}^0F_x \left[ \delta(\varphi_x \varphi_z) + 2\delta \left( \frac{dv_s}{dz} \varphi_z \right) - 2\delta \left( \frac{dw_0}{dz} \varphi_y \right) \right. \\
 \left. + 2x_s \delta \left( \frac{d\varphi_y}{dz} \varphi_y \right) - 2y_s \delta \left( \frac{d\varphi_x}{dz} \varphi_x \right) \right] \\
 + {}^0F_y \left[ \delta(\varphi_y \varphi_z) + 2\delta \left( \frac{du_s}{dz} \varphi_z \right) - 2\delta \left( \frac{dw_0}{dz} \varphi_x \right) \right. \\
 \left. - 2x_s \delta \left( \frac{d\varphi_y}{dz} \varphi_x \right) + 2y_s \delta \left( \frac{d\varphi_x}{dz} \varphi_x \right) \right] \\
 + {}^0M_x \left[ \delta \left( \frac{d\varphi_y}{dz} \varphi_z \right) + \delta \left( \frac{d\varphi_z}{dz} \varphi_y \right) - 2\delta \left( \frac{du_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) \right. \\
 \left. + 2\delta \left( \frac{dw_0}{dz} \frac{d\varphi_x}{dz} \right) \right] \\
 + {}^0M_y \left[ -\delta \left( \frac{d\varphi_x}{dz} \varphi_z \right) - \delta \left( \frac{d\varphi_z}{dz} \varphi_x \right) - 2\delta \left( \frac{dv_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) \right. \\
 \left. + 2\delta \left( \frac{dw_0}{dz} \frac{d\varphi_y}{dz} \right) \right] + {}^0M_z \left[ \delta \left( \frac{d\varphi_x}{dz} \varphi_y \right) - \delta \left( \frac{d\varphi_y}{dz} \varphi_x \right) \right] \\
 \left. + {}^0\bar{K} \delta \left( \frac{d\varphi_x}{dz} \right)^2 + {}^0M_\omega \delta \left( \frac{dw_0}{dz} \frac{d\theta}{dz} \right) \right\} dz. \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

Na osnovi integrala (4.14) može se dobiti elastična matrica krutosti konačnog elementa, a iz integrala (4.15) slijedi geometrijska matrica krutosti:

$$\delta U_E = (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{k}_E^e \mathbf{u}^e, \tag{4.16}$$

$$\delta U_G = (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{k}_G^e \mathbf{u}^e. \tag{4.17}$$

Integral (4.14) može se rastaviti na podintegrale uvođenjem izraza (3.42):

$$\begin{aligned}
 \delta U_E = & \int_0^l R_{11} \frac{dw_0}{dz} \delta \frac{dw_0}{dz} dz - \int_0^l R_{12} \frac{d^2 u_s}{dz^2} \delta \frac{dw_0}{dz} dz - \int_0^l R_{13} \frac{d^2 v_s}{dz^2} \delta \frac{dw_0}{dz} dz \\
 & - \int_0^l R_{14} \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \delta \frac{dw_0}{dz} dz - \int_0^l RN_z^T \delta \frac{dw_0}{dz} dz \\
 & - \int_0^l R_{21} \frac{dw_0}{dz} \delta \frac{d^2 u_s}{dz^2} dz + \int_0^l R_{22} \frac{d^2 u_s}{dz^2} \delta \frac{d^2 u_s}{dz^2} dz + \int_0^l R_{23} \frac{d^2 v_s}{dz^2} \delta \frac{d^2 u_s}{dz^2} dz \\
 & + \int_0^l R_{24} \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \delta \frac{d^2 u_s}{dz^2} dz - \int_0^l RM_y^T \delta \frac{d^2 u_s}{dz^2} dz \\
 & - \int_0^l R_{31} \frac{dw_0}{dz} \delta \frac{d^2 v_s}{dz^2} dz + \int_0^l R_{32} \frac{d^2 u_s}{dz^2} \delta \frac{d^2 v_s}{dz^2} dz + \int_0^l R_{33} \frac{d^2 v_s}{dz^2} \delta \frac{d^2 v_s}{dz^2} dz \\
 & + \int_0^l R_{34} \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \delta \frac{d^2 v_s}{dz^2} dz - \int_0^l RM_x^T \delta \frac{d^2 v_s}{dz^2} dz \\
 & - \int_0^l R_{41} \frac{dw_0}{dz} \delta \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} dz + \int_0^l R_{42} \frac{d^2 u_s}{dz^2} \delta \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} dz + \int_0^l R_{43} \frac{d^2 v_s}{dz^2} \delta \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} dz \\
 & + \int_0^l R_{44} \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} \delta \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} dz - \int_0^l RM_\omega^T \delta \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} dz \\
 & + \int_0^l 4R_{55} \frac{d\varphi_z}{dz} \delta \frac{d\varphi_z}{dz} dz.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

### 4.3. Nelinearna analiza

Na Sl. 4.2 prikazane su konfiguracije konačnog elementa tijekom procesa deformacije. Početna, nedeformirana konfiguracija, označena je s  $C_0$ , zadnja poznata konfiguracija s  $C_1$ , a s  $C_2$  prva sljedeća nepoznata konfiguracija. Razlikujemo globalni Cartesijev koordinatni sustav  $(Z, X, Y)$  te lokalni koordinatni sustav konačnog elementa  $(z, x, y)$ .

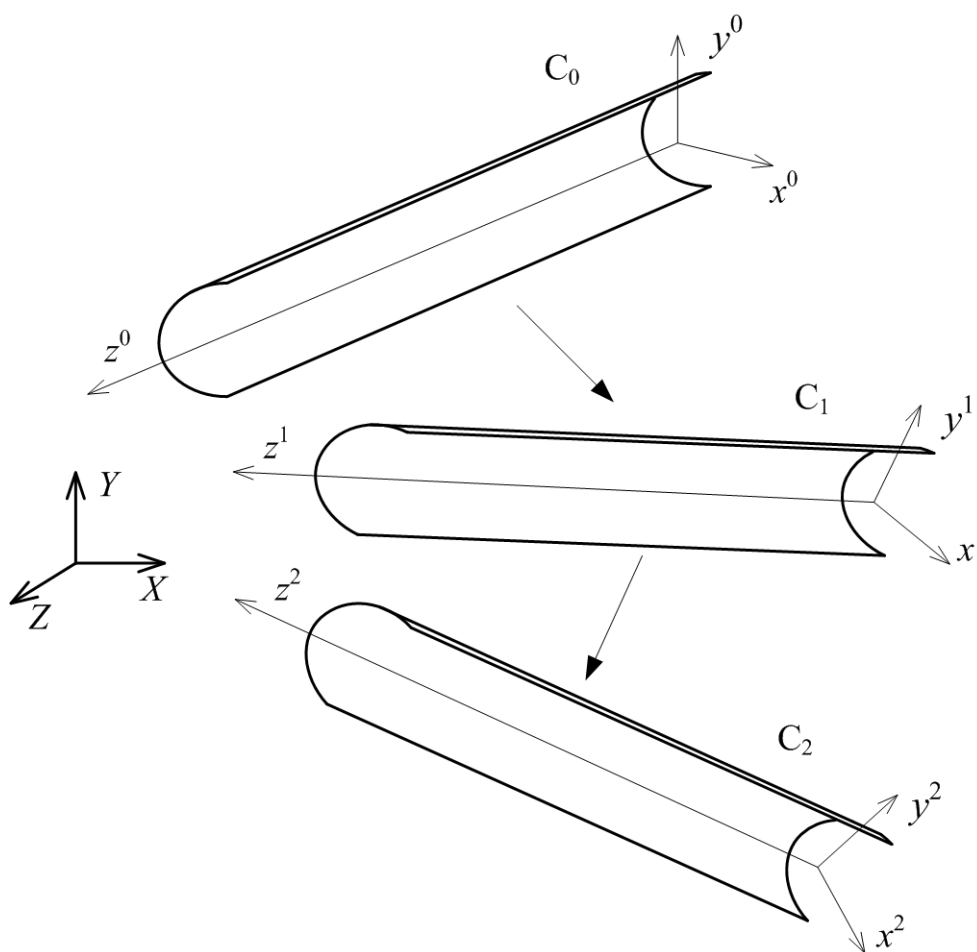
U ovom se radu koristi *updated Lagrangian* formulacija pomoću koje se sile i pomaci u ravnotežnim jednadžbama definiraju preko zadnje poznate konfiguracije  $C_1$ . Za konfiguraciju  $C_2$  princip virtualnih radova glasi:

$$\delta_2^2 W = \int_{^2V} {}^2\tau_{ij} \delta_2 e_{ij} {}^2dV, \quad (4.19)$$

gdje je  $\tau_{ij}$  Cauchyjev tenzor naprezanja,  $\delta e_{ij}$  tenzor deformacije obzirom na virtualne pomake [3].  $\delta W$  predstavlja virtualni rad vanjskih sila:

$$\delta_2^2 W = \int_{^2A_\sigma} {}^2t_i \delta(u_i + \tilde{u}_i) {}^2dA_\sigma + \int_{^2V} {}^2f_i \delta(u_i + \tilde{u}_i) {}^2dV, \quad (4.20)$$

pri čemu  $u_i$  i  $\tilde{u}_i$  predstavljaju linearne i nelinearne komponente pomaka,  $t_i$  površinske sile, a  $f_i$  volumenske sile. U prethodnim izrazima donji lijevi indeks predstavlja konfiguraciju u odnosu na koju je promatrana veličina definirana, dok se gornji lijevi indeks odnosi na konfiguraciju u kojoj se dotična oznaka pojavljuje. Kada su ta dva indeksa jednaka, donji se može zanemariti. U slučaju kada gornjeg lijevog indeksa nema, radi se o inkrementalnoj vrijednosti.



Sl. 4.2 Inkrementalni pomaci konačnog elementa

Ako se pretpostavi da volumenske sile ne djeluju na gredni konačni element, tada se izraz (4.20) može izraziti kao:

$$\delta_2^2 W = \int_{^2 A_\sigma} {}^2 t_i \delta(u_i + \tilde{u}_i)^2 {}^2 dA_\sigma, \quad (4.21)$$

gdje su sve vrijednosti izražene u odnosu na nepoznatu konfiguraciju  $C_2$ . U skladu s UL formulacijom, izraz treba izraziti u skladu sa zadnjom izračunatom konfiguracijom  $C_1$ . S obzirom na to da vrijedi:

$${}^2 t_i {}^2 dA_\sigma = {}^2 t_i {}^1 dA_\sigma, \quad (4.22)$$

kao i:

$$\int_{^1 V} {}^2 \tau_{ij} \delta_2 e_{ij} {}^2 dV = \int_{^1 A_\sigma} {}^2 S_{ij} \delta_1 \varepsilon_{ij} {}^1 dV, \quad (4.23)$$

gdje je  $S_{ij}$  Piola-Kirchhoffov tenzor napreznja druge vrste, a  $\varepsilon_{ij}$  Green-Lagrangeov tenzor deformacije, izraz (4.19) se sada može izraziti kao:

$$\int_{^2 A_\sigma} {}^2 S_{ij} \delta_1 \varepsilon_{ij} {}^1 dV = \int_{^2 A_\sigma} {}^2 t_i \delta(u_i + \tilde{u}_i) {}^1 dA_\sigma. \quad (4.24)$$

Jednakost (4.24) predstavlja ravnotežnu jednadžbu konačnog elementa u konfiguraciji  $C_2$  gdje su sve veličine izražene u odnosu na zadnju izračunatu konfiguraciju  $C_1$ .

U inkrementalnoj analizi tenzor  ${}^2_1 S_{ij}$  može se napisati na sljedeći način:

$${}^2_1 S_{ij} = {}^1 \tau_{ij} + {}^1 S_{ij} = {}^1_1 S_{ij} + {}^1 S_{ij}. \quad (4.25)$$

Pritom, prema izrazu (3.10) vrijedi:

$$\delta_1 \varepsilon_{ij} = \delta_1 e_{ij} + \delta_1 \eta_{ij} + \delta_1 \tilde{e}_{ij}, \quad (4.26)$$

te povratom izraza (4.25) i (4.26) u izraz (4.24), slijedi:

$$\int_{^1 V} {}^2_1 S_{ij} (\delta_1 e_{ij} + \delta_1 \eta_{ij} + \delta_1 \tilde{e}_{ij}) {}^1 dV = \int_{^2 A_\sigma} {}^2 t_i (\delta u_i + \delta \tilde{u}_i) {}^1 dA_\sigma, \quad (4.27)$$

to jest,



$$\begin{aligned} & \int_{^1V} {}_1S_{ij}\delta_1 \varepsilon_{ij} \, ^1dV + \int_{^1V} {}_1S_{ij}\delta_1 \eta_{ij} \, ^1dV + \int_{^1V} {}_1S_{ij}\delta_1 \tilde{e}_{ij} \, ^1dV \\ & - \int_{^1A_\sigma} {}_2t_i \delta \tilde{u}_i \, ^1dA_\sigma = \int_{^1A_\sigma} {}_2t_i \delta u_i \, ^1dA_\sigma - \int_{^1A_\sigma} {}_1S_{ij}\delta_1 e_{ij} \, ^1dA_\sigma. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Uzimajući u obzir da inkrementalna konstitutivna jednadžba glasi:

$${}_1S_{ij} = {}_1C_{ijkl} \, {}_1\varepsilon_{kl}, \quad (4.29)$$

gdje je tenzor elastičnih konstanti, te uz pretpostavku:

$$\int_{^1A_\sigma} {}_2t_i \delta \tilde{u}_i \, ^1dA_\sigma = \int_{^1A_\sigma} ({}_1t_i + {}_2t_i) \delta \tilde{u}_i \, ^1dA_\sigma \cong \int_{^1A_\sigma} {}_1t_i \delta \tilde{u}_i \, ^1dA_\sigma. \quad (4.30)$$

Iz izraza (4.28) slijedi:

$$\begin{aligned} & \int_{^1V} {}_1C_{ijkl} \, {}_1\varepsilon_{kl} \delta_1 \varepsilon_{ij} \, ^1dV + \int_{^1V} {}_1S_{ij}\delta_1 \eta_{ij} \, ^1dV + \int_{^1V} {}_1S_{ij}\delta_1 \tilde{e}_{ij} \, ^1dV \\ & - \int_{^1A_\sigma} {}_1t_i \delta \tilde{u}_i \, ^1dA_\sigma \\ & = \int_{^1A_\sigma} {}_2t_i \delta u_i \, ^1dA_\sigma - \int_{^1A_\sigma} {}_1S_{ij}\delta_1 e_{ij} \, ^1dA_\sigma. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Izraz (4.31), zapisan u skladu s UL formulacijom, predstavlja tenzorski oblik inkrementalnih ravnotežnih jednadžbi konačnog elementa pri inkrementalnoj pomaku iz konfiguracije  $C_1$  u konfiguraciju  $C_2$ . S obzirom na nelinearnost izraza (4.31) u inkrementalnom pomaku dobiva se približno rješenje uvođenjem sljedeće pretpostavke:

$$\delta_1 \varepsilon_{ij} \cong \delta_1 e_{ij}, \quad (4.32)$$

što daje:

$${}_1S_{ij} = {}_1C_{ijkl} \, {}_1e_{kl}. \quad (4.33)$$

Time iz izraza (4.31) slijedi linearizirana inkrementalna ravnotežna jednadžba konačnog elementa.

$$\begin{aligned}
 & \int_{^1V} {}^1C_{ijkl} {}^1e_{kl} \delta_1 e_{ij} {}^1dV + \int_{^1V} {}^1S_{ij} \delta_1 \eta_{ij} {}^1dV + \int_{^1V} {}^1S_{ij} \delta_1 \tilde{e}_{ij} {}^1dV \\
 & - \int_{^1A_\sigma} {}^1t_i \delta \tilde{u}_i {}^1dA_\sigma \tag{4.34} \\
 & = \int_{^1A_\sigma} {}^2t_i \delta u_i {}^1dA_\sigma - \int_{^1A_\sigma} {}^1S_{ij} \delta_1 e_{ij} {}^1dA_\sigma .
 \end{aligned}$$

Konačno vrijedi:

$$\delta_1^2 W = \int_{^1A_\sigma} {}^2t_i \delta u_i {}^1dA_\sigma = (\delta \mathbf{u}^e)^T {}^2 \mathbf{f}^e, \tag{4.35}$$

$$\delta_1^1 W = \int_{^1V} {}^1S_{ij} \delta_1 e_{ij} {}^1dV = (\delta \mathbf{u}^e)^T {}^1 \mathbf{f}^e. \tag{4.36}$$

#### 4.4. Jednadžba konačnog elementa

Ravnotežna jednadžba e-tog konačno elementa, za inkrementalni pomak iz konfiguracije  $C_1$  u konfiguraciju  $C_2$ , pri čemu su sve veličine definirane u odnosu na konfiguraciju  $C_1$  u skladu s UL formulacijom, glasi:

$$(\delta \mathbf{u}^e)^T (\mathbf{k}_E^e + \mathbf{k}_G^e) \mathbf{u}^e = (\delta \mathbf{u}^e)^T ({}^2 \mathbf{f}^e - {}^1 \mathbf{f}^e), \tag{4.37}$$

što se može napisati i u matričnom obliku:

$$\mathbf{k}_T^e \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e. \tag{4.38}$$

Pritom vrijedi da je  $\mathbf{k}_T^e$  tangentna matrica krutosti e-tog konačnog elementa:

$$\mathbf{k}_T^e = \mathbf{k}_E^e + \mathbf{k}_G^e, \tag{4.39}$$

a  $\mathbf{f}^e$  predstavlja vektor inkrementalnog čvornog opterećenja:

$$\mathbf{f}^e = {}^2 \mathbf{f}^e - {}^1 \mathbf{f}^e. \tag{4.40}$$

Kako bi se dobila jednadžba konstrukcije, prethodne je izraze potrebno transformirati iz

lokalnog koordinatnog sustava u kojem su svi konačni element definirani, u globalni koordinatni sustav, što daje:

$$\mathbf{K}_T \mathbf{U} = \mathbf{P}, \quad (4.41)$$

gdje je  $\mathbf{K}_T$  tangenta matrica krutosti konstrukcije:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G, \quad (4.42)$$

a  $\mathbf{K}_E$  i  $\mathbf{K}_G$  označavaju elastičnu i geometrijsku matricu krutosti konstrukcije dobivene zbrajanjem odgovarajućih matrica krutosti konačnih elemenata transformiranih u globalni koordinatni sustav:

$$\mathbf{K}_E = \sum_e \bar{\mathbf{k}}_E^e, \quad \mathbf{K}_G = \sum_e \bar{\mathbf{k}}_G^e. \quad (4.43)$$

Vektor  $\mathbf{U}$  označava vektor inkrementalnih pomaka čvorova konstrukcije, dok je  $\mathbf{P}$  vektor inkrementalnog opterećenja konstrukcije te predstavlja razliku opterećenja konstrukcije na kraju i početku svakog inkrementa:

$$\mathbf{P} = {}^2\mathbf{P} - {}^1\mathbf{P}. \quad (4.44)$$

Izraz (4.41) opisuje nelinearno ponašanje konstrukcije te je stoga sustav jednadžbi potrebno riješiti inkrementalno-iterativnom procedurom koje se odvijaju u nekoliko etapa. U prvoj prediktor etapi, nakon proračuna krutosti, određuje se vektor inkrementalnih čvornih pomaka konstrukcije  $\mathbf{U}$  iz izraza (4.41). Potom se u korektor fazi korigira geometrija svakog konačnog elementa i određuje vektor inkrementalnog opterećenja  $\mathbf{f}^e$  prema izrazu (4.40). U posljednjoj etapi vrši se provjera rješenja iteracije prema odabranom kriteriju konvergencije. Ako je postignuta ravnoteža između vanjskih i unutarnjih sila u trenutnoj konfiguraciji  $C_2$ , slijedi novi inkrement, dok se u suprotnom slučaju prediktor i korektor etape ponavljaju dok se ne ostvari tražena točnost.

#### 4.5. Newton-Raphsonova metoda za rješavanje nelinearnih problema

Problem nelinearnog odziva konstrukcije potrebno je rješavati inkrementalnim uvođenjem opterećenja pri čemu veličina inkrementa (koraka) može varirati ili biti konstanta. Zato se za rješavanje inkrementalnih jednadžbi ravnoteže konstrukcije upotrebljavaju numeričke inkrementalno-iterativne metode poput, *arc-length* metode, *displacement control* procedure,

*generalised displacement* procedure i sl.

Jedna od najčešće upotrebljivanih force control iterativno-inkrementalnih procedura jest Newton-Rapshonova metoda [3]. Inkrement opterećenja je konstantan, a iterativnim se postupkom korigira pomak dok se ne postigne ravnotežno stanje koje odgovara trenutnoj razini opterećenja. Karakteristično za ovu metodu je računanje tangente matrice krutosti u svakoj iteraciji, što omogućuje brzu konvergenciju nauštrb duljeg trajanja cijelog procesa.

Izraz (39) se za  $i$ -ti inkrement i  $j$ -tu iteraciju može napisati na sljedeći način:

$$(\mathbf{K}_T)_{(j-1)}^{(i)} \Delta \mathbf{U}_{(j)}^{(i)} = \mathbf{P}^{(i)} - \mathbf{F}_{(j-1)}^{(i)}, \text{ za } i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.45)$$

dok na početku svakog inkrementa vrijedi:

$$(\mathbf{K}_T)_{(0)}^{(i)} = (\mathbf{K}_T)_{(n)}^{(i-1)}, \quad \mathbf{U}_{(0)}^{(i)} = \mathbf{U}_{(n)}^{(i-1)}, \quad \mathbf{F}_{(0)}^{(i)} = \mathbf{F}_{(n)}^{(i-1)}. \quad (4.46)$$

Pritom vrijedi da je  $(\mathbf{K}_T)_{(j-1)}^{(i)}$  tangenta matrica krutosti na početku iteracije,  $\Delta \mathbf{U}_{(j)}^{(i)}$  vektor inkrementalnih pomaka konstrukcije za  $i$ -ti inkrement u  $j$ -toj iteraciji,  $\mathbf{P}^{(i)}$  predstavlja vanjsko opterećenje konstrukcije za  $i$ -ti inkrement, a  $\mathbf{F}_{(j-1)}^{(i)}$  označava vektor unutarnjih sila konstrukcije dobiven zbrajanjem čvornih sila konstrukcije svih konačnih elemenata do posljednje iteracije.

U svakoj iteraciji računa se vektor neuravnoteženog opterećenja:

$$\mathbf{R}_{(j-1)}^{(i)} = \mathbf{P}^{(i)} - \mathbf{F}_{(j-1)}^{(i)}, \quad (4.47)$$

a, zatim se iz izraza (43) određuje vektor inkrementalnih čvornih pomaka konstrukcije za  $i$ -ti inkrement i  $j$ -tu iteraciju  $\Delta \mathbf{U}_{(j)}^{(i)}$ , pa je ukupan pomak konstrukcije u  $i$ -tom inkrementu:

$$\mathbf{U}_{(j)}^{(i)} = \mathbf{U}_{(j-1)}^{(i)} + \Delta \mathbf{U}_{(j)}^{(i)}. \quad (4.48)$$

Postupak se ponavlja dok vektor neuravnoteženog opterećenja i vektor inkrementalnih pomaka nisu dovoljno mali prema zadanom kriteriju kovergencije.

Ukoliko se želi osigurati učinkovitost strategije inkrementalnog rješenja baziranog na iterativnoj metodi, potrebno je koristiti realne kriterije za završetak iteracije. Na kraju svake iteracije provjerava se ako vrijednosti komponenata vektora  $\mathbf{R}_{(j)}^{(i)}$  i  $\Delta \mathbf{U}_{(j)}^{(i)}$  zadovoljavaju kriterij konvergencije:

$$\|\mathbf{R}_{(j)}^{(i)}\| = \sqrt{(\mathbf{R}_{(j)}^{(i)})^T \mathbf{R}_{(j)}^{(i)}}, \quad (4.49)$$

$$\|\mathbf{U}_{(j)}^{(i)}\| = \sqrt{(\Delta\mathbf{U}_{(j)}^{(i)})^T \Delta\mathbf{U}_{(j)}^{(i)}}.$$

Pritom se kao vrsta kriterija može rabiti kriterij pomaka ili kriterij neuravnoteženog opterećenja; u ovom je radu primjenjen kriterij rada neuravnoteženog opterećenja:

$$\frac{(\Delta\mathbf{U}_{(j)}^{(i)})^T \mathbf{R}_{(j)}^{(i)}}{(\Delta\mathbf{U}_{(1)}^{(i)})^T \mathbf{R}_{(1)}^{(i)}} \leq \varepsilon_E, \quad (4.50)$$

gdje  $\varepsilon_E$  predstavlja dopuštenu toleranciju u sljedećim rasponu:

$$\varepsilon_E = 10^{-10}, \dots, 10^{-6}. \quad (4.51)$$

Važno je napomenuti da kriteriji ne smiju biti previsoki kako se nepotrebno ne bi produljilo vrijeme trajanja proračuna

## 5. RAČUNALNI PROGRAM *THINWALL FG*

---

Na temelju numeričkog modela baziranog na metodi konačnih elemenata, prikazanog u prethodnom poglavlju, izrađen je računalni program THINWALL FG (*Thinwall Functionally Graded*). U ovom je poglavlju opisan ovaj programa i primjeri na kojima je validirana njegova točnost i pouzdanost.

### 5.1. Opis programa

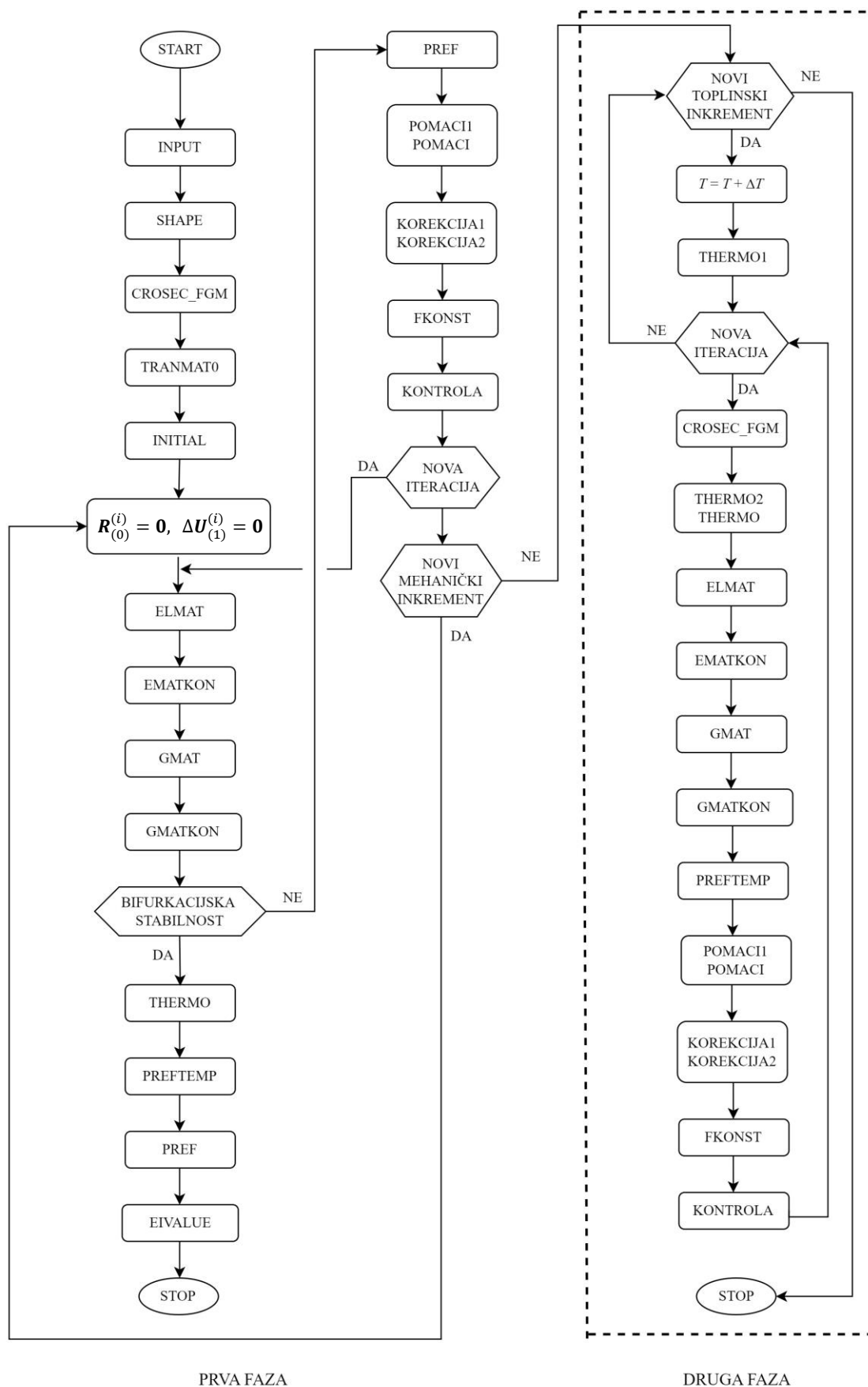
Računalni program THINWALL FG izrađen je u programskom paketu *Fortran Power Station* te je razvijen za lineariziranu i nelinearnu analizu toplinskog izvijanja FG kompozitnih grednih nosača i konstrukcija sastavljeni od zatvorenih i otvorenih tankostjenih profila. Numerički program THINWALL FG radi u režimu dvostruke preciznosti. Sastoji se od jednog glavnog programa te četrdesetak potprograma i funkcija. Tijek programa prikazan blok-dijagramom može se vidjeti na Sl. 5.1. Program se dijeli na dva osnovna dijela: u prvom dijelu analizira se trenutni odziv konstrukcije kako bi se odredio deformirani oblik prije početka zagrijavanja, a u drugom dijelu vrši se analiza odziva konstrukcije pri utjecaju temperature gdje je uključena temperaturna inkrementalna integracijska shema.

#### 5.1.1. Opis potprograma

Potprogram INPUT čita ulaznu datoteku u kojoj je definirana geometrija konstrukcije, mreža konačnih elemenata, rubni uvjeti, vanjsko mehaničko i temperaturno opterećenje, svojstva i distribucija materijala te kontrolne varijable proračuna.

Potprogram CROSEC\_FGM izračunava materijalne značajke FG materijala, komponente tenzora elastičnosti i karakteristike poprečnog presjeka. U potprogramu SHAPE definiraju se interpolacijske funkcije i njihove derivacije u Gaussovima integracijskim točkama na grednom konačnom elementu. U potprogramu TRANMAT0 formiraju se transformacijske matrice konačnih elemenata za konfiguraciju  $C_0$ , dok se u potprogramu INITIAL formiraju početne vrijednosti pojedinih matrica, vektora i parametara bitnih za daljnji proračun.

U potprogramima THERMO1 i THERMO2 definiraju se vrijednost temperature u točkama poprečnog presjeka za svaku Gaussovu integracijsku točku, a potom se u potprogramu THERMO definiraju vrijednosti komponenata sila i momenata nastalih zbog toplinske



Sl. 5.1 Tijek programa THINWALL FG

dilatacije. Potom potprogram PREFTEMP oblikuje vektor referentnog toplinskog opterećenja, a potprogram PREF oblikuje vektor referentnog opterećenja na temelju ulaznih podataka.

Potpogrami ELMAT i GMAT formiraju elastične, odnosno geometrijske matrice krutosti svih konačnih elemenata te ih transformiraju u globalni koordinatni sustav, a zatim ih potprogrami EMATKON i GMATKON slažu u elastičnu, tj. geometrijsku matricu krutosti konstrukcije. Ako se provodi linearizirana analiza, potprogram EIVALUE kondenzira elastičnu i geometrijsku matricu konstrukcije, oblikuje problem vlastitih vrijednosti te računa vlastite vrijednosti i vlastite vektore.

Potprogram POMACII kondenzira tangentu matricu krutosti i određuje vektor inkrementalnih pomaka čvorova konstrukcije, a potom potprogram POMACI određuje ukupni vektor inkrementalnih čvornih pomaka konstrukcije kao i vektore inkrementalnih čvornih pomaka konačnih elemenata u lokalnom koordinatnom sustavu.

Slijedi korigiranje koordinata čvorova konstrukcije i referentnih osi čvorova u potprogramu KOREKCIJA1 te korigiranje geometrije konačnih elemenata i formiranje transformacijskih matrica konačnih elemenata za sljedeću iteraciju u potprogramu KOREKCIJA2.

U potprogramu FKONST transformiraju se vektori čvornih sila konačnih elemenata u globalni koordinatni sustav te se formira vektor unutarnjih sila konstrukcije.

Konačno, potprogram KONTROLA izračunava vektor neuravnoteženog opterećenja i specifični rad neuravnoteženog opterećenja prema kojem se određuje prelazi li program u novu iteraciju ili novi inkrement.

## 5.2. Primjeri

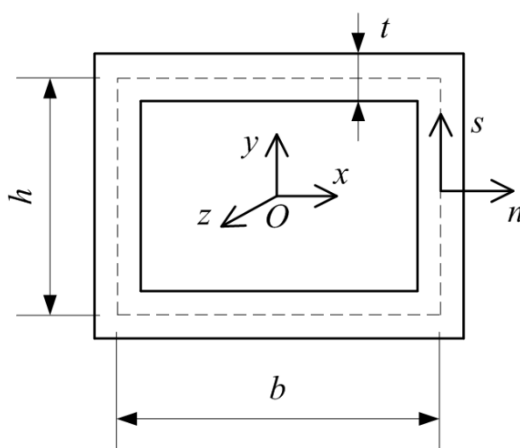
U nastavku je prikazana analiza 10 primjera u svrhu testiranja računalnog programa THINWALL FG. U prvih šest primjera provedena je linearizirana analiza toplinskog izvijanja grednih nosača za različite oblike poprečnih presjeka, raspodjele materijala i distribucije temperature po visini stijenke uz nelinearni odziv konstrukcije. Na sedmom primjeru dana je analiza izvijanja pri linearnoj raspodjeli temperature duž nosača. Ostali primjeri analiziraju ponašanje nosača pri mehaničko-toplinskom opterećenju konstrukcije uzimajući u obzir utjecaj temperature na svojstva materijala.

U navedenim su primjerima korišteni sljedeći rubni uvjeti (BC): obostrano uklještenje (C-C), zglobno oslonjena greda (S-S) te kombinacija uklještenje – zglobni oslonac (C-S).



5.2.1. *Primjer 1*

Tankostjeni zatvoreni FG pravokutni poprečni presjek<sup>1</sup> dimenzija  $b = 0,2$  m i  $h = 0,1$  m te debljine stijenke  $t = 0,005$  m prikazan je na Sl. 5.2. FG materijal Tip 1 i Tip 2 sastoje se od keramičke komponente  $Al_2O_3$  ( $E_c = 380$  GPa,  $\alpha_c = 7,2 \cdot 10^{-6}$  1/°C) i metalne komponente  $Al$  ( $E_m = 70$  GPa,  $\alpha_m = 23 \cdot 10^{-6}$  1/°C), a Poissonov je broj konstantan  $\nu = 0,3$ . Pritom kod FG Tipa 1, materijal se kontinuirano mijenja od keramike na vanjskoj prema metalu na unutarnjoj stijenci, dok se FG Tip 2 sastoji od keramičkog sloja na unutarnjoj stijenci i FG plašta. Ukupna duljina grednog nosača iznosi  $L = 8$  m. Gredni nosač se zagrijava uniformno i linearno po visini stijenke nosača za različite rubne uvjete.



Sl. 5.2 Uz primjer 1: Zatvoreni pravokutni poprečni presjek

Kako bi se utvrdila točnost numeričkog modela, vlastite vrijednosti dobivene su i pomoću komercijalnih *shell* i *solid* rješavača. Da bi se simulirala gradacija svojstava FG materijala, stijenke grednog nosača podijeljene su u slojeve s različitim, ali konstantnim, svojstvima materijala za svaki sloj. Solid model je korišten za validaciju rezultata dobivenih pri linearnoj distribuciji temperature po visini stijenke, dok su rezultati *shell* komercijalnog rješavača korišteni za validaciju rezultata pri jednolikoj raspodjeli temperature. Vrlo je važno napomenuti da je metoda dijeljenja stijenke nosača na slojeve dugotrajna i memorijski zahtjevna, suprotno pristupu predloženom u ovom radu. Dodatno, komercijalni rješavači uglavnom zahtijevaju

<sup>1</sup> Dio rada opisanog u ovom odjeljku autorica doktorskog rada i njezini suradnici objavili su u recenziranom znanstvenom radu [30] koji je izrađen i objavljen u sklopu obveza predviđenih nastavnim planom i programom doktorskoga studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci, Hrvatska, stoga se ovaj dio temelji, dijelom izravno izvodi i citira iz ovog rada.

konstantna svojstva materijala za svaki sloj, dok numerički model prikazan u ovom radu dopušta linearnu gradaciju materijala u svakom sloju.

Kako bi se dobili rezultati usporedivi sa *shell* i *solid* modelom, istražen je optimalan broj slojeva za predloženi model te su izrađeni modeli sa 4, 8, 12, 16, 20 i 24 sloja. Provedena je studija konvergencije za analizu toplinskog izvijanja prikazanog nosača pri obostranom uklještenju i za eksponent  $p = 10$  zajedno s brojem konačnih elemenata  $N_e$ . Iz rezultata prikazanih u Tab. 5.1. može se primijetiti da se kritične temperaturne razlike izvijanja ravnomjerno smanjuju s više slojeva. Minimalan broj slojeva koji daju usporedive rezultate za komercijalne modele je 20. Iako više slojeva daje točnije rezultate, to također zahtijeva duže vrijeme pripreme modela i analize. Stoga je za daljnje proučavanje usvojeno 20 slojeva. S druge strane, može se primijetiti da TW FG numerički model konvergira u manje slojeva. Da bi se dobile najtočnije usporedbe u sljedećim primjerima, odabran je model grede s 20 slojeva.

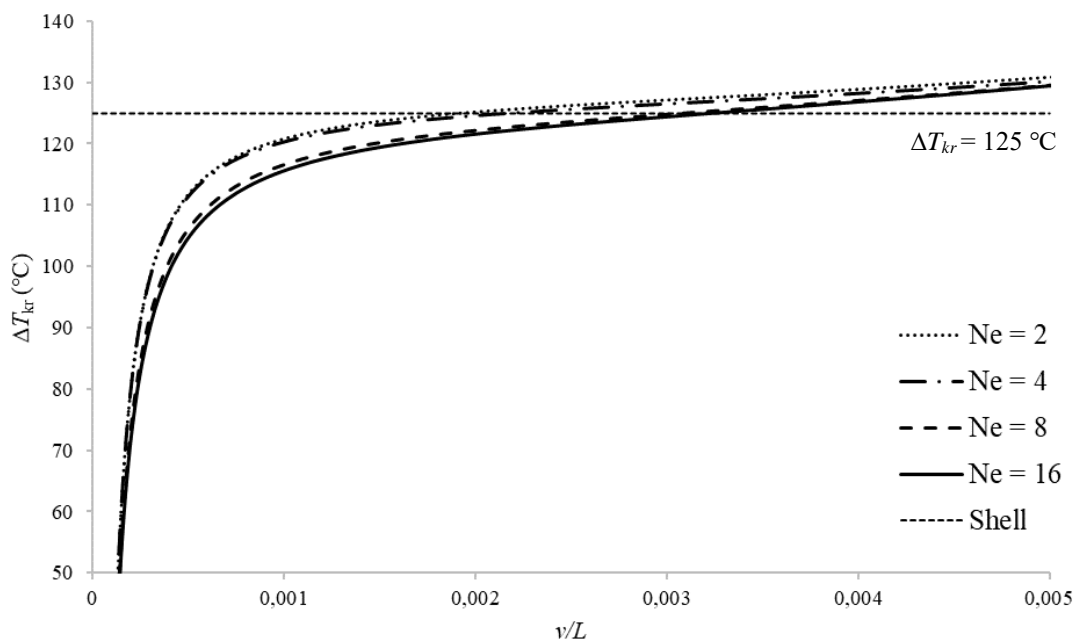
Tab. 5.1 Uz primjer 1: Analiza konvergencije kritičnih temperatura izvijanja s obzirom na broj slojeva

<b>Broj slojeva</b>	<b>Solid model</b>		<b>Shell model</b>		<b>TW FG</b>	
	$\Delta T_{kr}$	$N_e$	$\Delta T_{kr}$	$N_e$	$\Delta T_{kr}$	$N_e$
<b>4</b>	96,53	473 602	91,97	348	69,22	8
<b>8</b>	91,10	947 202	73,52	348	64,52	8
<b>12</b>	81,15	1 420 802	68,95	348	63,45	8
<b>16</b>	68,27	1 894 402	65,97	348	63,06	8
<b>20</b>	66,89	2 368 002	64,79	348	62,88	8
<b>24</b>	66,01	2 841 602	64,01	348	62,77	8

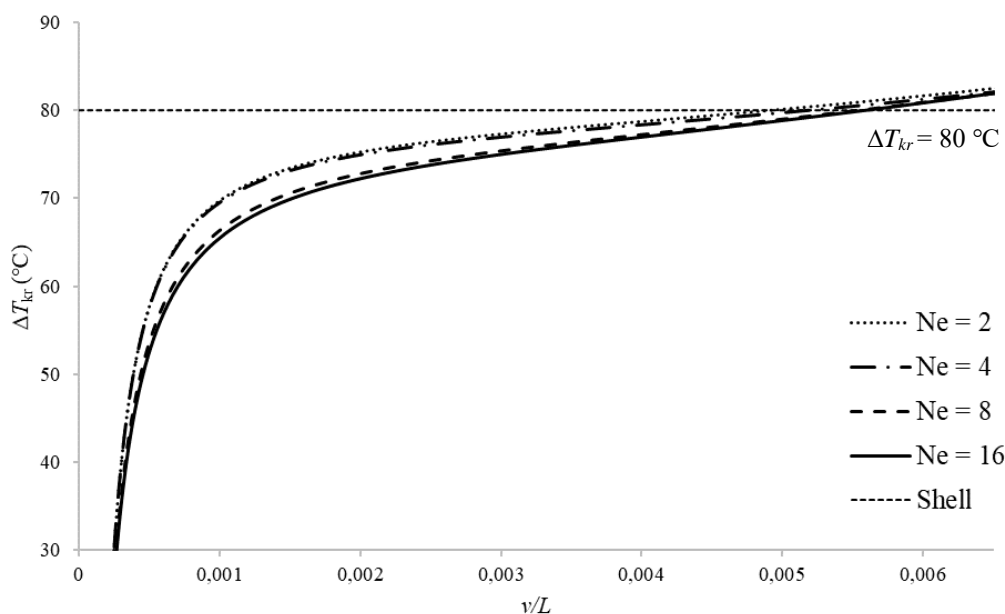
Tab. 5.2 Uz primjer 1: Analiza konvergencije kritičnih temperatura izvijanja s obzirom na broj konačnih elemenata

$N_e$	<b>Eksponent <math>p</math></b>	
	0,2	2
<b>2</b>	128,33	81,97
<b>4</b>	127,61	81,51
<b>8</b>	126,72	80,94
<b>16</b>	126,66	80,90

Izvršena je također studija konvergencije s obzirom na konačni broj elemenata. Analiza je provedena za eksponente  $p = 0,2$  i  $p = 2$  pri podjeli na 20 slojeva. U Tab. 5.2 prikazana je promjena kritične temperature izvijanja pri uniformnom zagrijavanju ako se gredni nosač podijeli na 2, 4, 8 i 16 konačnih elemenata. Iako se relativno dobri rezultati postižu i s manjim brojem konačnih elemenata, usvaja se  $N_e = 8$ . Na Sl. 5.3 prikazan je nelinearni odziv nosača za  $p = 0,2$ , odnosno na Sl. 5.4 za  $p = 2$  za različiti broj konačnih elemenata pri čemu su rezultati uspoređeni sa kritičnom temperaturom dobivenom pomoću *shell* modela.



Sl. 5.3 Uz primjer 1: Usporedba nelinearnog odziva za različiti broj konačnih elemenata,  $p=0,2$



Sl. 5.4 Uz primjer 1: Usporedba nelinearnog odziva za različiti broj konačnih elemenata,  $p=2$

U Tab. 5.4 dana je usporedba vrijednosti kritičnih temperatura sa *shell* modelom pri uniformnom zagrijavanju za FG Tip 1, odnosno u Tab. 5.5 za FG Tip 2. Za vrijednost eksponenta  $p = 0$ , FG materijal je čista keramika te kako indeks  $p$  raste, FG materijal teži prema čistom metalu. Može se uočiti dobra korelacija između dobivenih temperatura. Kako se eksponent  $p$  povećava, tj, kako udio metala u materijalu raste, tako vrijednost kritične temperature pada. U svrhu dodatne validacije, analitički je izračunata vrijednost kritične temperature za FG Tip 1 kod homogenih materijala, Tab. 5.3.

Tab. 5.3 Uz primjer 1: Analitički dobivene kritične temperature za homogene materijale, FG Tip 1

BC	Mod	Eksponent funkcije $p$	
		0	1000
C-C	Y	166,89	52,24
	X	476,38	149,13
C-S	Y	85,15	26,65
	X	243,05	76,09
S-S	Y	41,72	13,06
	X	119,09	37,28

Tab. 5.4 Uz primjer 1: Kritične temperature zatvorenog pravokutnog nosača za različite vrijednosti eksponenta  $p$  i različite rubne uvjete pri uniformnom zagrijavanju, FG Tip 1

BC	Mod	Metoda	Eksponent funkcije $p$							
			0	0,2	0,5	1	2	5	10	1000
C-C	Y	TW FG	166,81	126,72	106,01	92,18	80,94	69,27	62,88	56,09
		Shell	164,96	124,94	104,29	90,69	80,00	69,78	64,79	60,95
	X	TW FG	476,38	360,24	300,18	259,91	223,34	194,51	177,15	159,29
		Shell	471,94	356,94	297,96	259,11	228,56	199,33	185,06	174,11
C-S	Y	TW FG	85,28	64,79	54,19	47,13	41,38	35,42	32,15	28,68
		Shell	83,89	64,20	53,62	46,65	40,73	35,61	33,36	31,36
	X	TW FG	243,52	184,17	153,47	132,88	114,18	99,44	90,57	81,44
		Shell	242,01	183,43	153,18	133,25	115,21	100,59	93,35	87,70
S-S	Y	TW FG	41,68	31,67	26,89	23,03	20,23	17,31	15,71	14,02

		<i>Shell</i>	41,58	31,57	26,39	23,01	19,91	17,79	16,29	15,48
	X	<i>TW FG</i>	119,02	90,02	75,01	64,95	55,81	48,60	44,27	39,80
		<i>Shell</i>	118,63	90,09	75,33	65,64	56,16	49,44	45,86	42,99

Tab. 5.5 Uz primjer 1: Kritične temperature zatvorenog pravokutnog nosača za različite vrijednosti eksponenta  $p$  i različite rubne uvjete pri uniformnom zagrijavanju, FG Tip2

BC	Mod	Metoda	Eksponent funkcije $p$							
			0	0,2	0,5	1	2	5	10	1000
C-C	Y	<i>TW FG</i>	166,81	136,21	120,26	110,33	104,22	101,34	101,63	103,36
		<i>Shell</i>	164,96	134,33	118,38	108,67	102,56	98,85	98,11	99,39
	X	<i>TW FG</i>	476,27	390,09	346,09	318,86	302,57	295,37	296,59	301,81
		<i>Shell</i>	471,94	383,77	338,21	310,49	293,04	282,42	280,3	283,94
C-S	Y	<i>TW FG</i>	85,28	69,64	61,48	56,40	53,28	51,81	51,96	52,84
		<i>Shell</i>	83,89	68,39	60,27	55,33	52,22	50,33	49,95	50,60
	X	<i>TW FG</i>	243,49	199,68	176,94	163,02	154,69	151,01	151,63	154,30
		<i>Shell</i>	242,01	193,44	170,47	156,50	147,71	142,37	141,30	143,14
S-S	Y	<i>TW FG</i>	41,68	34,04	30,05	27,57	26,43	25,32	25,39	25,83
		<i>Shell</i>	41,59	33,42	29,45	27,04	25,52	24,60	24,42	24,74
	X	<i>TW FG</i>	119,01	97,59	86,48	79,68	75,61	73,81	74,11	75,42
		<i>Shell</i>	118,63	94,28	83,09	76,28	71,99	69,39	68,88	69,775

U Tab. 5.6 i Tab. 5.7 prikazane su usporedbe kritičnih temperatura sa solid modelom pri linearnom zagrijavanju po visini poprečnog presjeka za Tip 1, odnosno Tip 2. Pritom je na unutarnjoj strani stijenke poprečenog presjeka viša temperatura. S porastom eksponenta  $p$ , rastu razlike između temperatura što je izraženije u slučaju obostranog uklještenja za  $p = 1000$ . To je posljedica uporabe slojeva konstantnih materijalnih vrijednosti pri simuliranju numeričkog modela u komercijalnim rješavačima te zbog nedovoljnog broja slojeva kod *solid* modela.

Tab. 5.6 Uz primjer 1: Kritične temperature zatvorenog pravokutnog nosača za različite vrijednosti eksponenta  $p$  i različite rubne uvjete pri linearnom zagrijavanju, FG Tip 1

BC	Metoda	Eksponent funkcije $p$							
		0	0,2	0,5	1	2	5	10	1000
C-C	TW FG	333,59	245,49	211,76	196,68	186,65	164,83	144,12	116,74
	Solid	337,53	256,00	219,60	204,50	195,33	175,72	156,74	131,72
C-S	TW FG	170,54	125,51	108,26	100,55	95,42	84,27	73,68	59,69
	Solid	172,65	131,06	112,37	104,69	99,97	89,91	80,19	67,38
S-S	TW FG	83,36	61,34	52,91	49,15	46,64	41,19	36,01	29,17
	Solid	84,52	64,16	55,01	51,60	48,95	44,02	39,26	32,98

Tab. 5.7 Uz primjer 1: Kritične temperature zatvorenog pravokutnog nosača za različite vrijednosti eksponenta  $p$  i različite rubne uvjete pri linearnom zagrijavanju, FG Tip 2

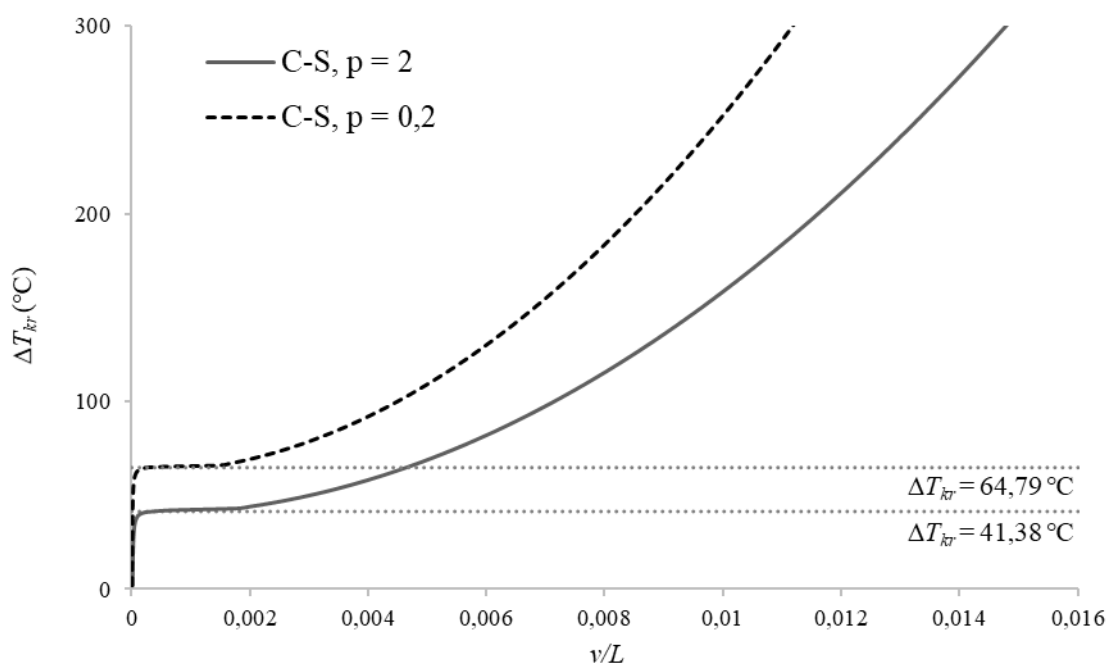
BC	Metoda	Eksponent funkcije $p$							
		0	0,2	0,5	1	2	5	10	1000
C-C	TW FG	333,59	283,80	247,83	217,91	194,72	180,79	179,70	183,29
	Solid	337,53	277,68	240,67	210,28	186,54	171,13	168,54	172,46
C-S	TW FG	170,54	145,09	126,70	111,40	99,55	92,43	91,87	93,71
	Solid	172,65	142,05	123,11	107,57	95,44	87,55	86,22	88,23
S-S	TW FG	83,36	70,92	61,93	54,45	48,66	45,18	44,90	45,80
	Solid	84,52	69,53	60,27	52,65	46,72	42,86	42,20	43,18

Presjek sastavljen od FG Tip 2 materijala daje više kritične temperature od Tipa 1 za oba tipa toplinskog opterećenja s obzirom na veći udio keramike u stijenci poprečnog presjeka te nižu stopu pada temperatura s porastom indeksa  $p$ . Nadalje, za  $p = 1000$ , FG Tip 2 model sastoji se od dva sloja homogenih materijala, keramike i metala, te za oba slučaja toplinskog opterećenja pokazuje višu kritičnu temperaturu u odnosu na modele s indeksima  $p = 5$  i  $p = 10$ .

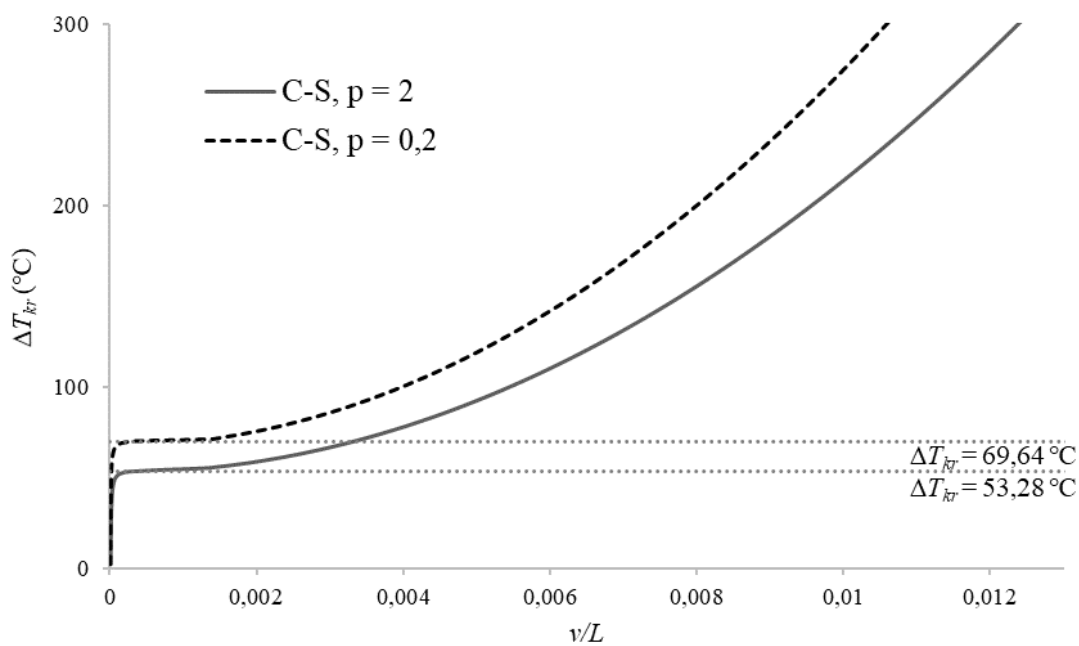
Na osnovi rezultata prikazanih u prethodnim tablicama, vidimo da se vrijednosti temperatura dobivenih TW FG programom dobro poklapaju s rezultatima dobivenima pomoću komercijalnih rješavača. Također, možemo zaključiti da distribucija materijala ima značajan utjecaj na kritične vrijednosti.

Kako bi se dodatno demonstrirala stabilnost algoritma, izvedena je i nelinearna analiza grednog nosača. Kako bi se iniciralo izvijanje, vrlo mala lateralna sila  $\Delta F = 100$  N aplicirana je u smjeru osi  $Y$  na sredini nosača u slučaju obostranog uklještenja i zglobno oslonjene grede, odnosno u slučaju kombiniranog rubnog uvjeta, u točki  $0,7L$  od uklještenja gdje se očekuju najveći pomaci. Nelinearan odziv grednog nosača pri uniformnom zagrijavanju za FG Tip 1 prikazan je na Sl. 5.5, odnosno na Sl. 5.6 za Tip 2. Na Sl. 5.7 prikazani su rezultati za Tip 2 pri linearnom progrijavanju stijenke nosača.

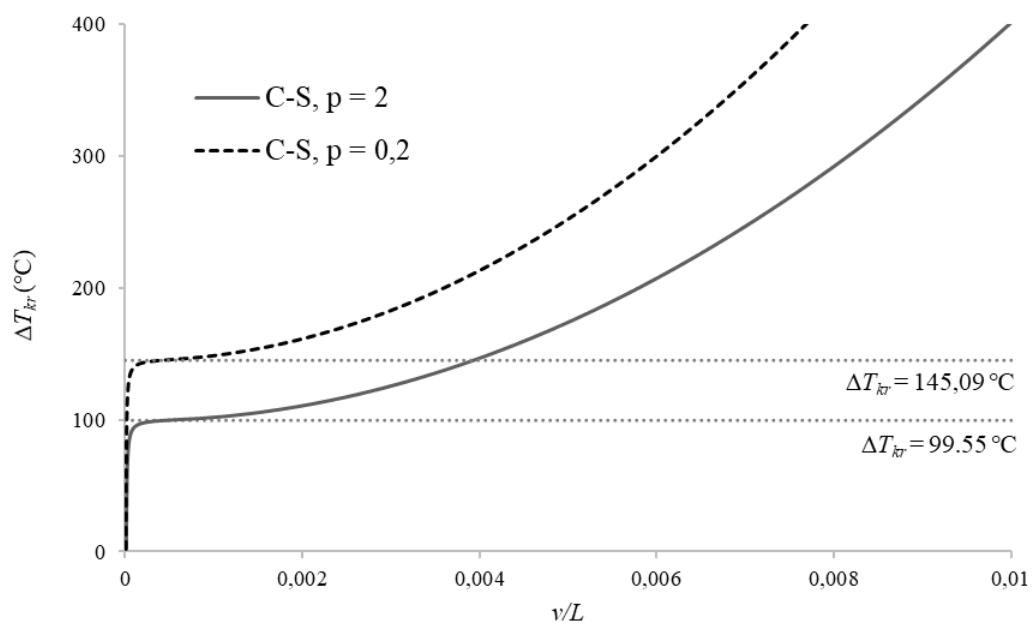
Prikazani su rezultati za rubne uvjete C-S za indekse  $p = 0,2$  i  $p = 2$ . Može se vidjeti da su rezultati dobiveni nelinearnom analizom stabilnosti sukladni rezultatima dobivenim linearnom analizom stabilnosti.



Sl. 5.5 Uz primjer 1: Dijagram temperatura-pomak za FG Tip 1, UTR



Sl. 5.6 Uz primjer 1: Dijagram temperatura-pomak za FG Tip 2, UTR



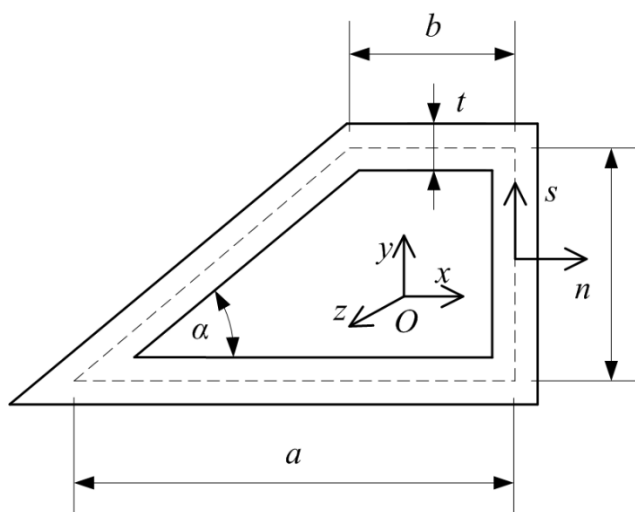
Sl. 5.7 Uz primjer 1: Dijagram temperatura-pomak za FG Tip 2, LTR



## 5.2.2. Primjer 2

Analiziran je tankostjeni gredni nosač trapezoidnog nesimetričnog poprečnog presjeka<sup>2</sup> duljine  $L = 16$  m, visine  $h = 0,2$  m, duljine baza  $a = 0,446$  m i  $b = 0,1$  m, i debljine stijenke  $t = 0,02$  m, Sl. 5.8. Poprečni je presjek sastavljen od FG materijala Tip 1 od keramičke komponente  $Al_2O_3$  ( $E_c = 380$  GPa,  $\alpha_c = 7,2 \cdot 10^{-6}$  1/°C) na vanjskoj stijenci i metalne komponente  $Al$  ( $E_m = 70$  GPa,  $\alpha_m = 23 \cdot 10^{-6}$  1/°C) na unutarnjoj stijenci. Poissonov je broj konstantan i iznosi  $\nu = 0,3$ .

Gredni nosač se uniformno zagrijava za različite rubne uvjete (BC): obostrano uklještenje (C-C), zglobno oslonjena greda (S-S) te kombinacija uklještenje – zglobni oslonac (C-S). Kritične temperature izvijanja prikazane su za FG Tip 1 u Tab. 5.8 i za FG Tip 2 u Tab. 5.9. Dobivene temperature uspoređene su s rezultatima dobivenim pomoću *shell* modela za različite vrijednosti eksponenta  $p$  eksponencijalne funkcije promjene FG materijala po debljini stijenke nosača. Kao što je očekivano, porastom eksponenta  $p$  pada vrijednost kritične temperature izvijanja za sve tipove rubnih uvjeta i temperaturnog opterećenja. Najviše kritične temperature izvijanja postižu obostrano uklještenne grede.



Sl. 5.8 Uz primjer 2: Trapezoidni poprečni presjek

<sup>2</sup> ibid

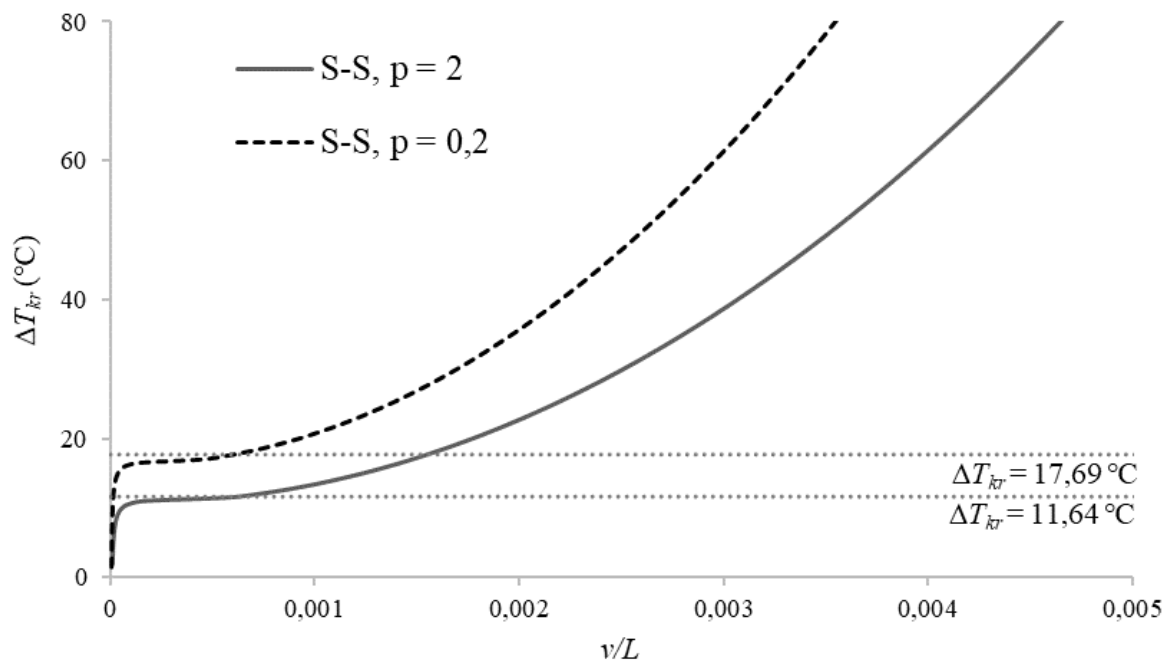
Tab. 5.8 Uz primjer 2: Kritične temperature trapezoidnog nosača za različite vrijednosti eksponenta  $p$  i različite rubne uvjete, FG Tip 1

BC	Metoda	Eksponent funkcije $p$							
		0	0,2	0,5	1	2	5	10	1000
C-C	TW FG	90,76	69,75	58,94	51,82	45,96	39,42	35,50	30,99
	Shell	91,48	70,76	59,94	52,97	47,41	41,53	38,22	35,15
C-S	TW FG	46,86	36,00	30,41	26,73	23,69	20,32	18,30	15,99
	Shell	46,89	36,27	30,72	27,15	24,30	21,28	19,59	18,01
S-S	TW FG	23,04	17,69	14,95	13,13	11,64	9,98	8,99	7,86
	Shell	22,97	17,77	15,05	13,30	11,91	10,43	9,59	8,82

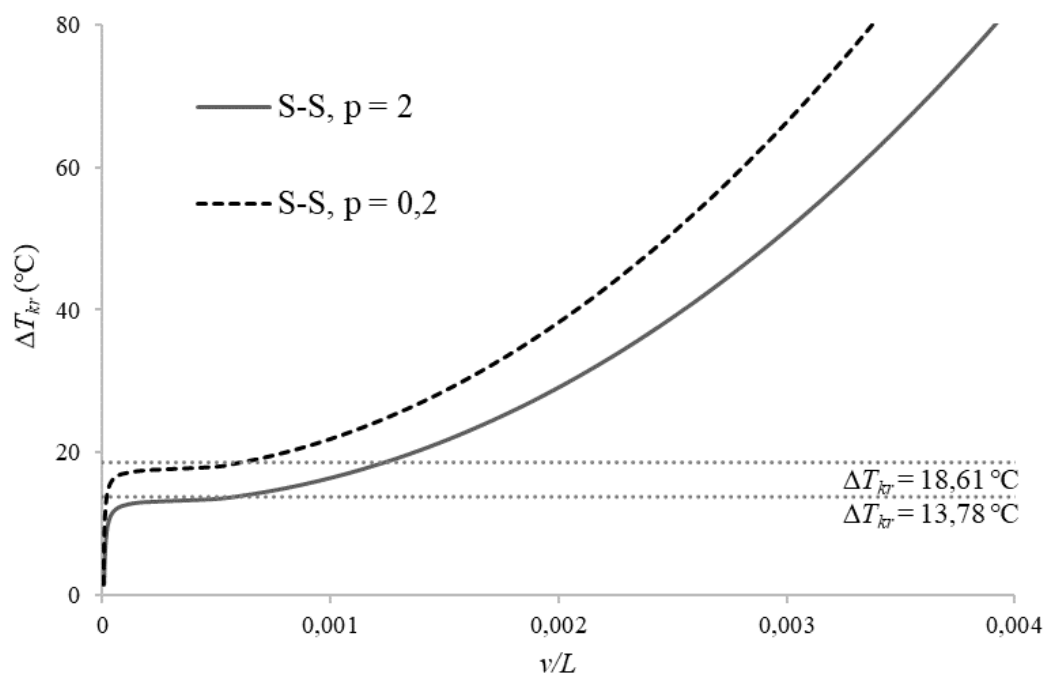
Tab. 5.9 Uz primjer 2: Kritične temperature trapezoidnog nosača za različite vrijednosti eksponenta  $p$  i različite rubne uvjete, FG Tip 2

BC	Metoda	Eksponent funkcije $p$							
		0	0,2	0,5	1	2	5	10	1000
C-C	TW FG	90,76	73,22	63,96	57,95	54,02	51,91	51,89	52,71
	Shell	91,48	72,92	63,35	57,21	53,07	50,38	49,78	50,35
C-S	TW FG	46,86	37,83	33,07	29,98	27,97	26,89	26,88	27,31
	Shell	46,89	37,38	32,47	29,33	27,21	25,83	25,53	25,82
S-S	TW FG	23,04	18,61	16,27	14,77	13,78	13,26	13,25	13,46
	Shell	22,97	18,31	15,91	14,37	13,33	12,66	12,51	12,65

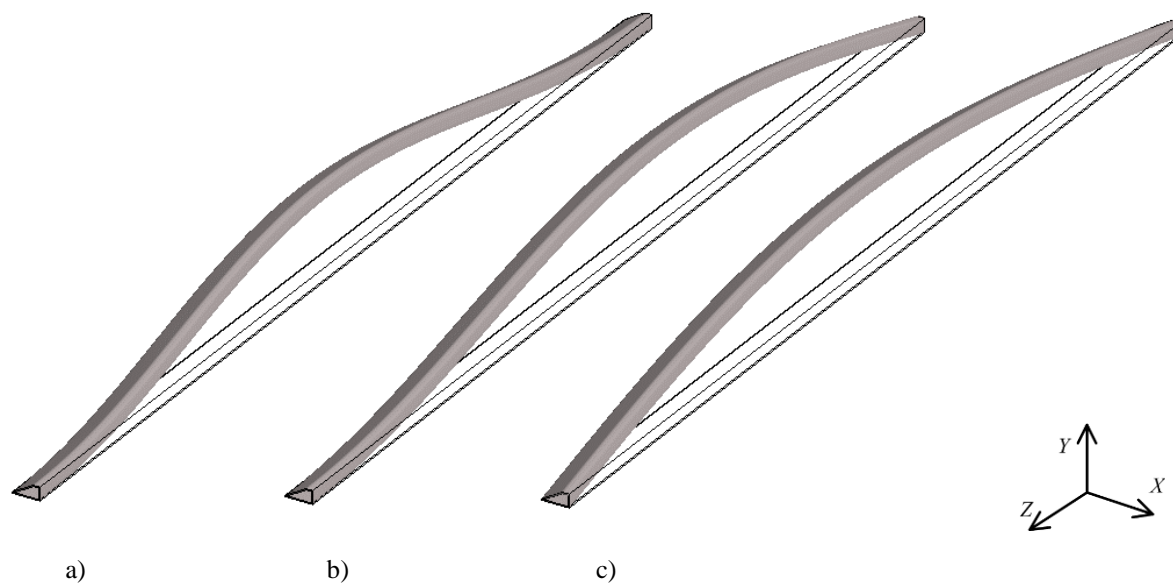
U nastavku je prikazan nelinearni odziv zglobno oslonjenog nosača za vrijednosti eksponenta  $p = 0,2$  i  $p = 2$ , za obje distribucije materijala, Sl. 5.9 i Sl. 5.10. Nelinearni odzivi prepoznaju kritičnu temperaturu. Prikazan je i torzijsko-fleksijski mod izvijanja trapezoidnog nosača dobiven *shell* modelom za sve rubne uvjete na Sl. 5.11.



Sl. 5.9 Uz primjer 2: Dijagram temperatura-pomak, FG Tip 1



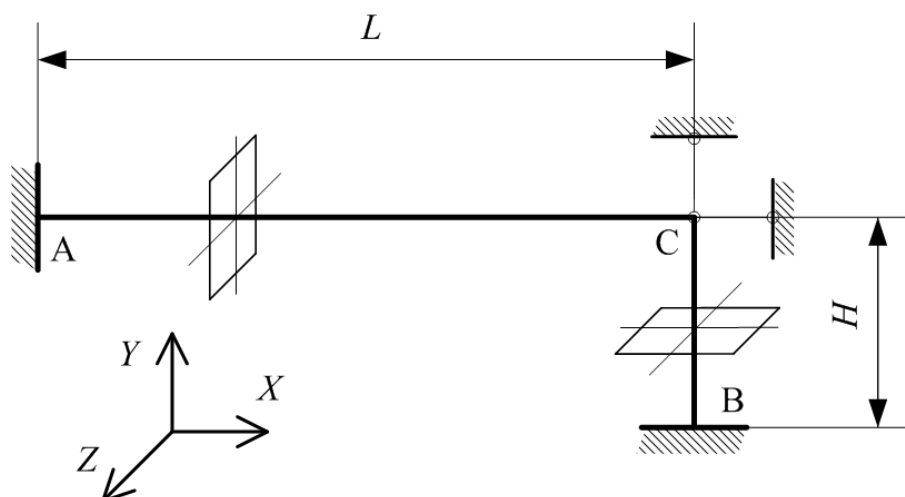
Sl. 5.10 Uz primjer 2: Dijagram temperatura-pomak, FG Tip 2



Sl. 5.11 Uz primjer 2: Shell model fleksijsko-torzijsko-fleksijskog oblika izvijanja: a) C-C, b) C-S, c) S-S

### 5.2.3. Primjer 3

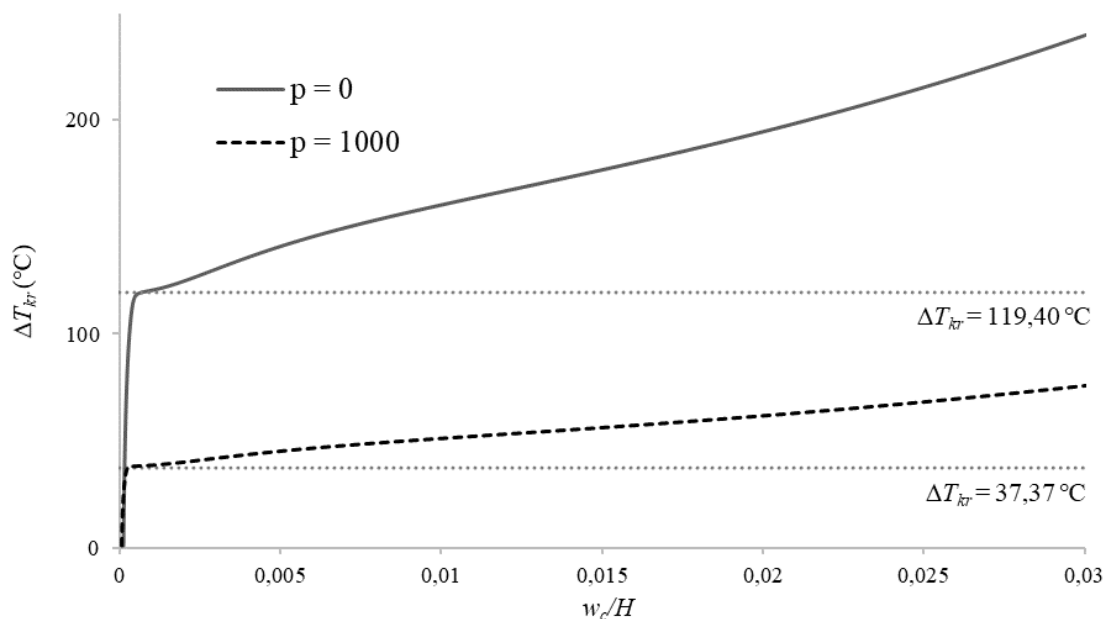
Na Sl. 5.12 prikazan je L-okvir uklješten u presjecima A i B i opterećen jednolikim zagrijavanjem. U presjeku C spriječene su translacije u  $XY$  ravnini. Segmenti okvira imaju duljinu  $L = 8$  m i  $H = 2$  m te poprečni presjek tankostjenog pravokutnog profila opisanog u Primjeru 1, ali debljine stijenke  $t = 0,02$  m. Komponente FG materijala su  $Al_2O_3$  keramika i  $Al$  metal.<sup>3</sup>



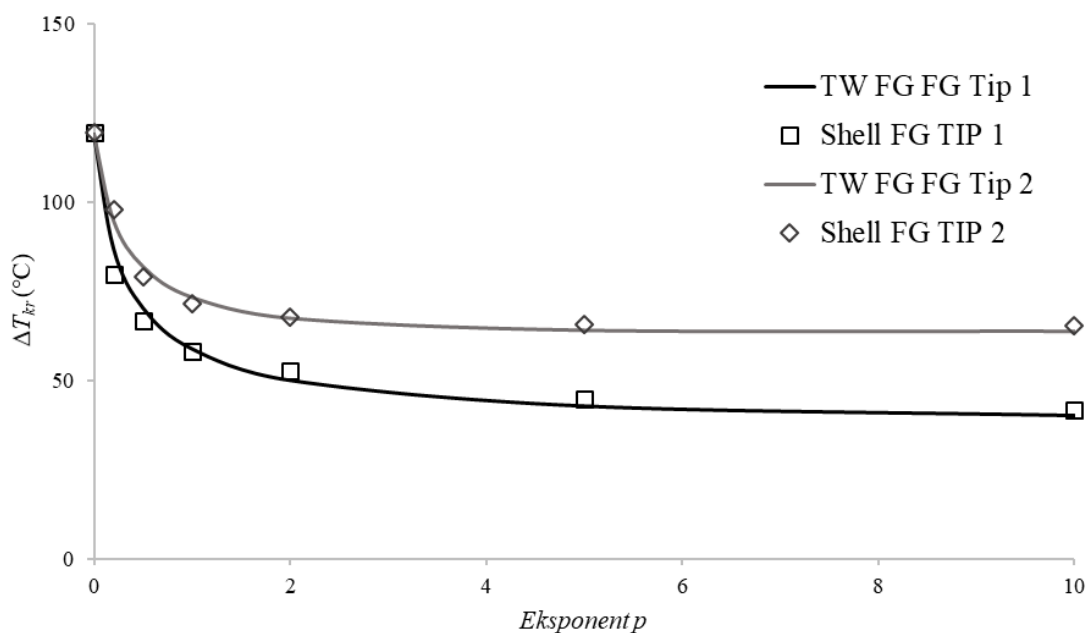
Sl. 5.12 Uz primjer 3: L – okvir

<sup>3</sup> ibid

U svrhu validacije, pomoću MKE *shell* komercijalnog rješavača, izračunata kritična vrijednost temperature za čistu keramiku je  $\Delta T_{kr(Al_2O_3)} = 119,4 \text{ }^\circ\text{C}$ , i za čisti metal  $\Delta T_{kr(Al)} = 37,37 \text{ }^\circ\text{C}$ . Ako uzmemo u obzir da je za eksponent  $p = 0$ , FGM čista keramika, a za  $p = 1000$  približno čisti metal, može se uočiti dobra korelacija između rezultata, Sl. 5.13. Kritične temperature za različite vrijednosti eksponenta  $p$  te FG tipove 1 i 2, prikazani su na Sl. 5.14

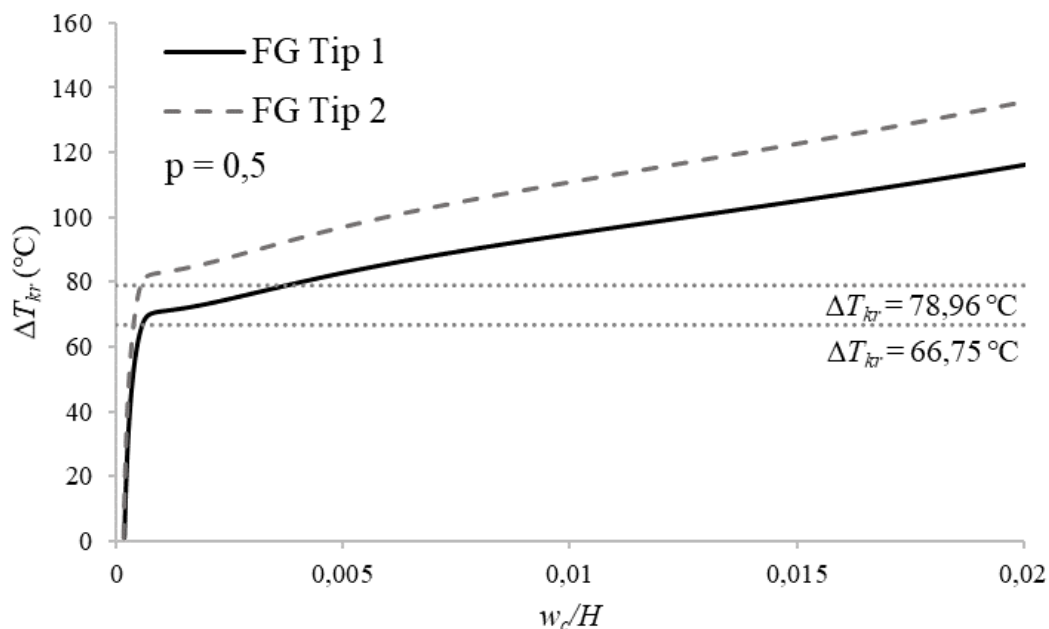


Sl. 5.13 Uz primjer 3: Dijagram temperatura-pomak za homogene materijale, UTR

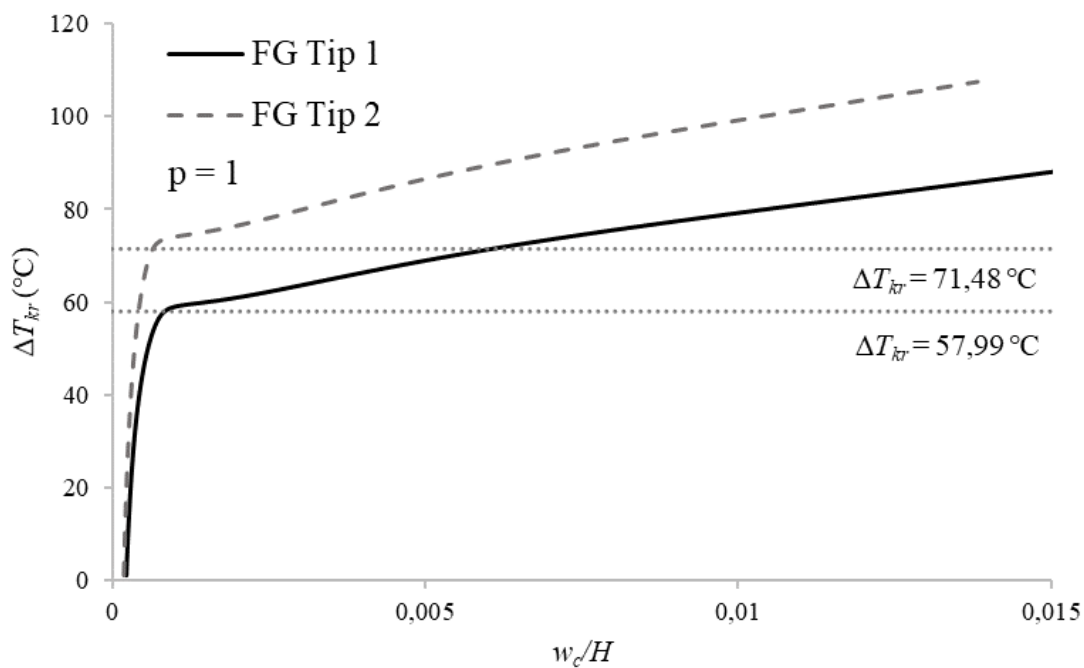


Sl. 5.14 Uz primjer 3: Kritične temperature obzirom na eksponent  $p$

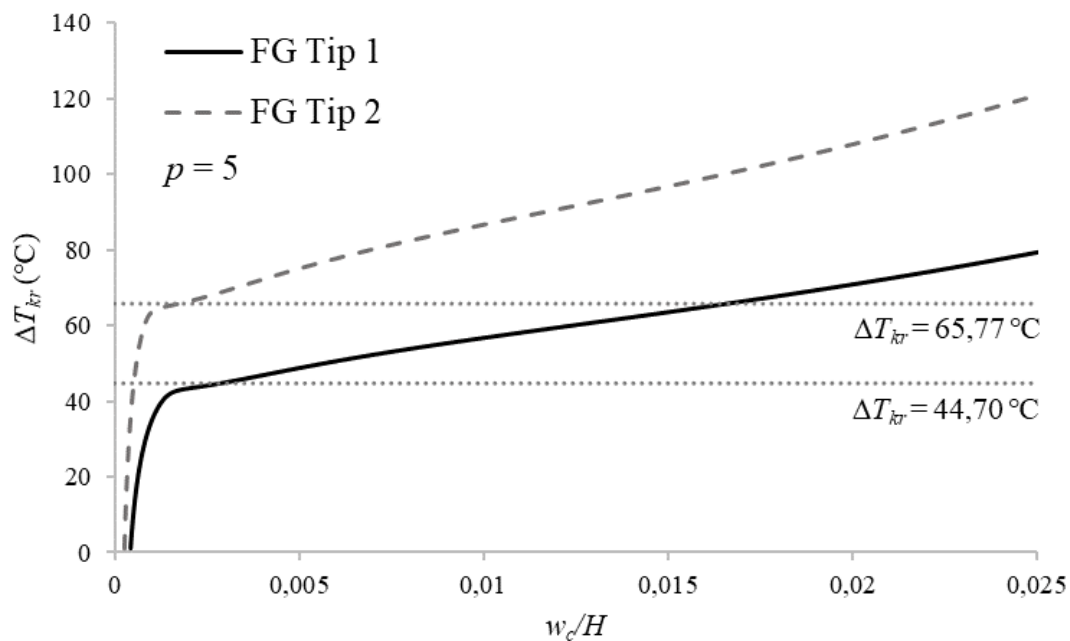
Kako bi se iniciralo izvijanje, mala perturbacijska sila  $\Delta F = 1$  kN dodana je u presjeku C u smjeru osi Z. Nelinearni odzivi konstrukcije za eksponente  $p = 0,5$ ,  $p = 1$  i  $p = 5$  prikazani su za obje FG distribucije materijala na Sl. 5.15-Sl. 5.17. Najniži oblik fleksijsko-torzijskog izvijanja za sve slučajeve dobiven u *shell* rješavaču prikazan je na Sl. 5.18.



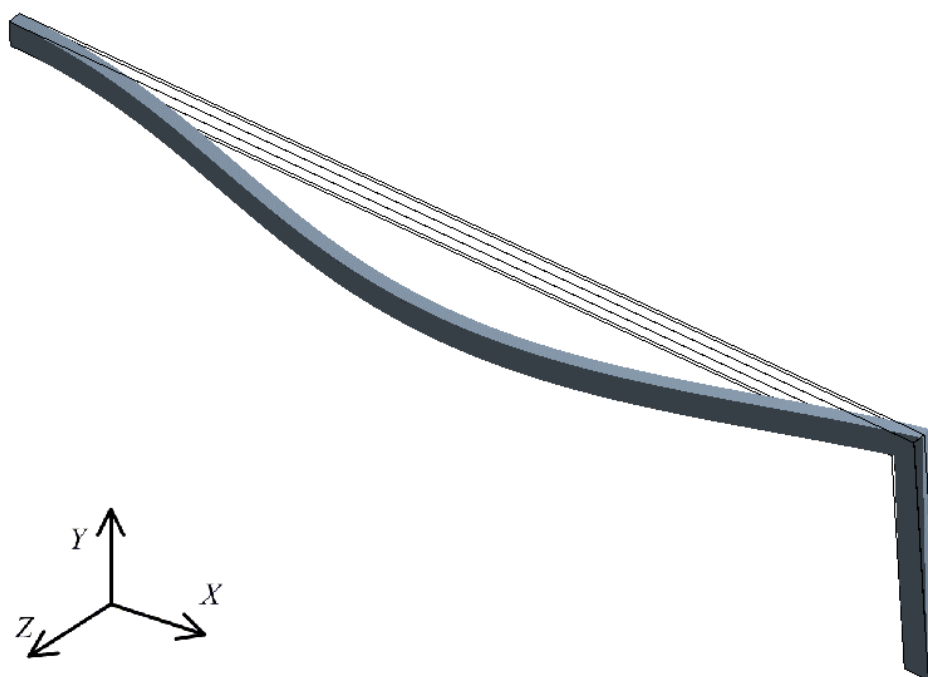
Sl. 5.15 Uz primjer 3: Dijagram temperatura-pomak za  $p = 0,5$ , FG Tip 1 i 2



Sl. 5.16 Uz primjer 3: Dijagram temperatura-pomak za  $p = 1$ , FG Tip 1 i 2



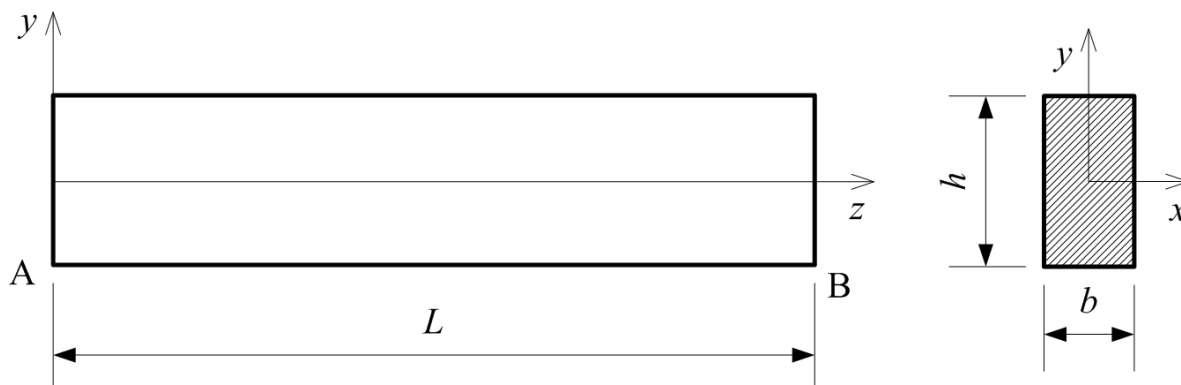
Sl. 5.17 Uz primjer 3: Dijagram temperatura-pomak za  $p = 5$ , FG Tip 1 i 2



Sl. 5.18 Uz primjer 3: Shell model fleksijsko-torzijskog oblika izvijanja L-okvira

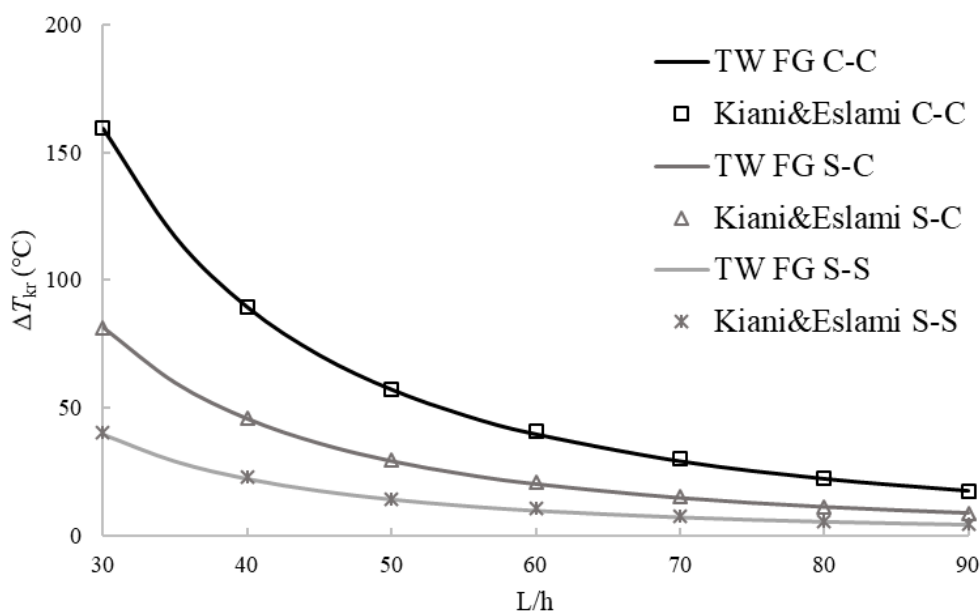
5.2.4. *Primjer 4*

Na Sl. 5.19 prikazan je gredni nosač punog pravokutnog poprečnog presjeka. Aksijalni su pomaci spriječeni u krajnjim presjecima nosača A i B.



Sl. 5.19 Uz primjer 4: Gredni nosač i puni pravokutni poprečni presjek

Za različite rubne uvjete, analizirano je toplinsko izvijanje grede od čistog metala sljedećih svojstava:  $E_m = 70$  GPa,  $\alpha_m = 23 \cdot 10^{-6}$  1/°C. Zagrijavanje se vrši uniformno. Rezultati su uspoređeni s rezultatima Kianija i Eslamija [16], Sl. 5.20. Prikazane su kritične temperature za različite omjere duljine nosača  $L$  i visine poprečnog presjeka  $h$ .

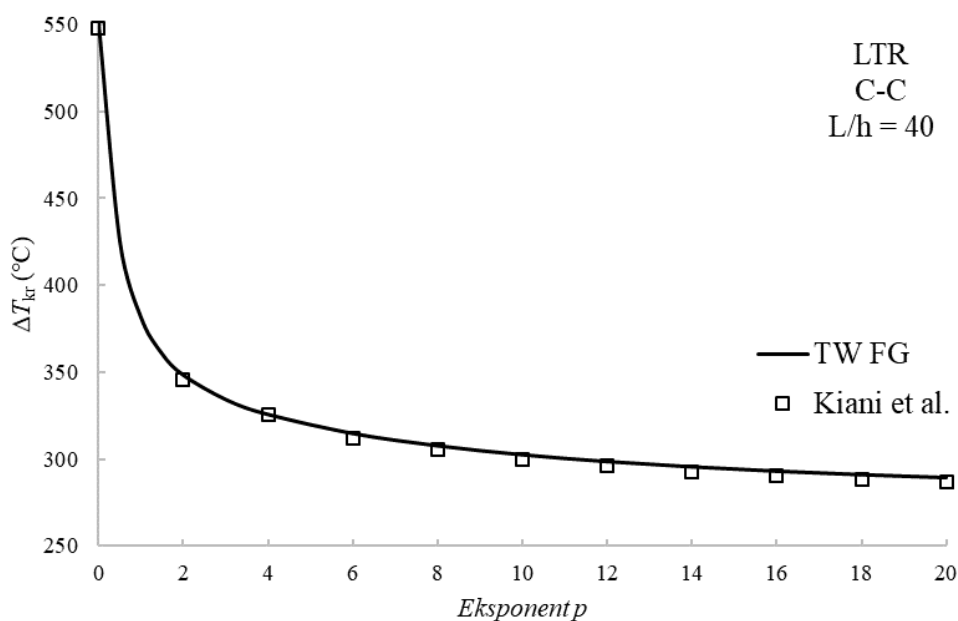


Sl. 5.20 Uz primjer 4: Usporedba kritičnih temperatura za različite omjere  $L/h$  i rubne uvjete

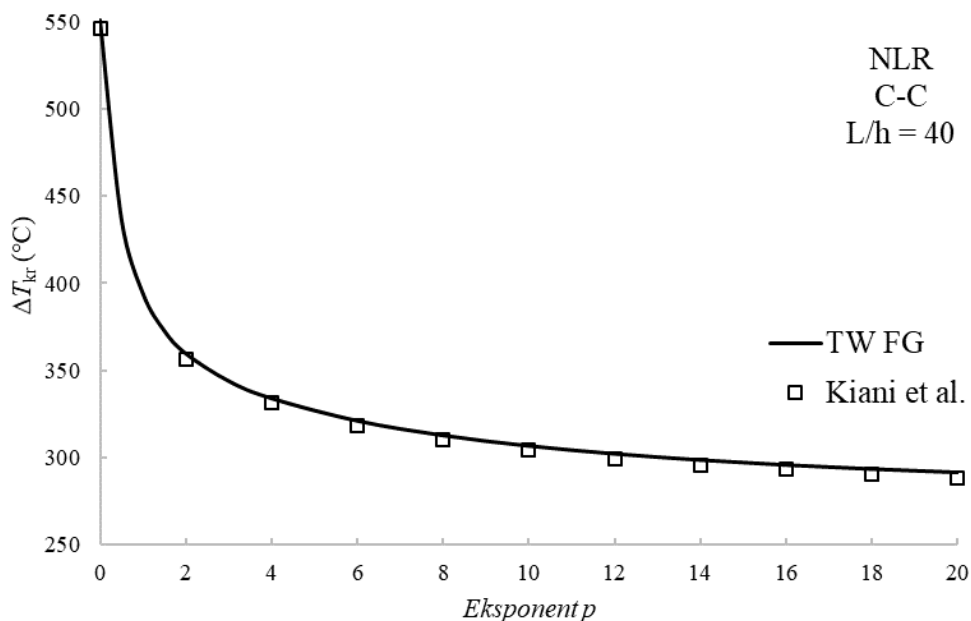
Nadalje, izvršena je analiza obostrano uklještena grede FG Tipa 1 za omjer  $L/h = 40$  i različite vrijednosti eksponenta  $p$ . Komponente FG materijala imaju sljedeća svojstva: za keramiku  $E_c = 380$  GPa,  $\alpha_c = 7,4 \cdot 10^{-6}$  1/°C,  $K_c = 10,4$  W/m te za metal  $E_m =$



70 GPa,  $\alpha_m = 23 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ ,  $K_m = 204 \text{ W/m}$ . Pritom se materijal mijenja iz čistog metala u čistu keramiku u smjeru osi  $y$ . Rezultati su uspoređeni s vrijednostima dobivenim od autora Kiani et al. [25]. Na Sl. 5.21 dana je usporedba pri linearnom zagrijavanju stijenke nosača od strane keramike prema metalu, a na Sl. 5.22 za nelinearnu raspodjelu temperature po visini stijenke nosača. Na osnovi prikazanih dijagrama, vidljivo je da se rezultati dobiveni rješavačem THINWALL FG vrlo dobro poklapaju s vrijednostima spomenutih autora za sva tri tipa toplinskog opterećenja.



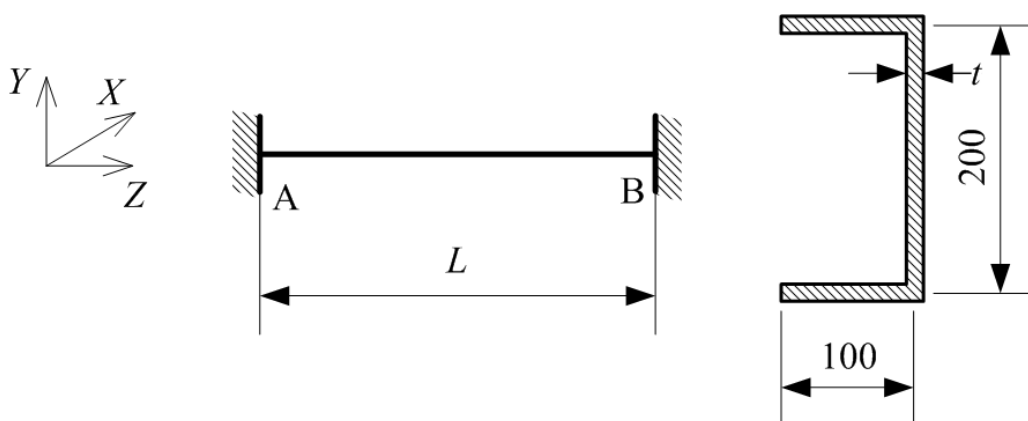
Sl. 5.21 Uz primjer 4: Utjecaj eksponenta  $p$  na kritičnu temperaturu izvijanja, LTR



Sl. 5.22 Uz primjer 4: Utjecaj eksponenta  $p$  na kritičnu temperaturu izvijanja, NLR

5.2.5. *Primjer 5*

U prethodnom je primjeru uz uniformnu i linearnu distribuciju temperature, razmatrana i nelinearna raspodjela temperature te su pokazana dobra poklapanja s rezultatima iz radova spomenutih autora. U ovom će se primjeru analizirati usporedba linearne i nelinearne raspodjele temperature kod tankostjenih nosača za različite materijale s obzirom na pretpostavku da se za dovoljno tanku stijenku temperaturna distribucija može aproksimirati kao linearna.



Sl. 5.23 Uz primjer 5: Obostrano uklještena greda monosimetričnog C-profila

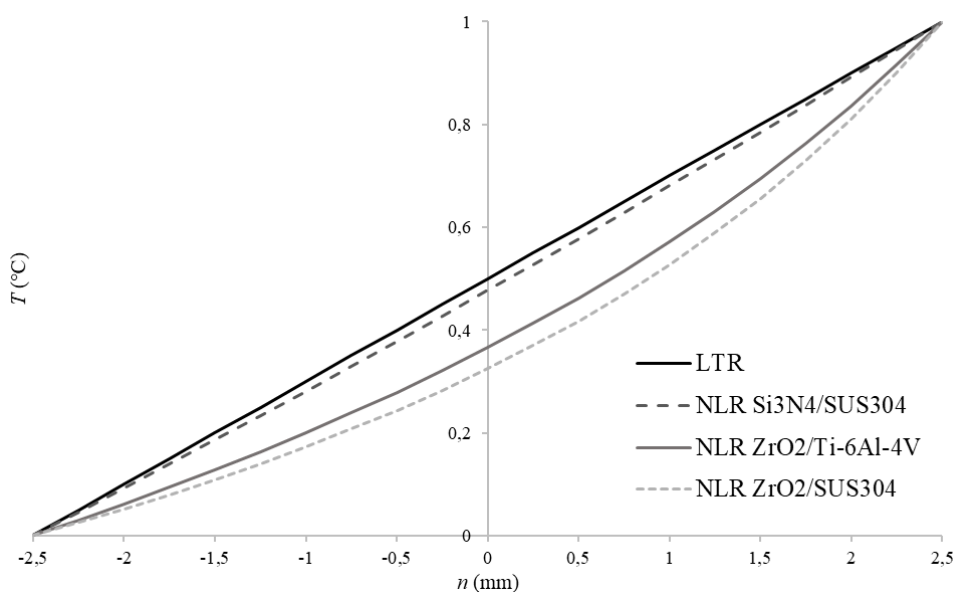
Prikazan je nosač C-profila duljine  $L = 8$  m na Sl. 5.23. Pretpostavlja se FG Tip 1 izrađen od  $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$  materijala sa sljedećim svojstvima:  $E_{\text{Si}_3\text{N}_4} = 322,270$  GPa,  $\alpha_{\text{Si}_3\text{N}_4} = 7,5 \cdot 10^{-6}$   $1/^\circ\text{C}$ ,  $K_{\text{Si}_3\text{N}_4} = 10,12$  W/m te za metal  $E_{\text{SUS304}} = 207,790$  GPa,  $\alpha_{\text{SUS304}} = 1,5 \cdot 10^{-5}$   $1/^\circ\text{C}$ ,  $K_{\text{SUS304}} = 12,14$  W/m. Pritom je metal s unutarnje, a keramika s vanjske strane profila.

Tab. 5.10 Uz primjer 5: Validacija rezultata sa shell modelom

BC		C-C		C-S		S-S	
$p$	Distribucija temperature	Shell	TW FG	Shell	TW FG	Shell	TW FG
0	UTR	82,86	83,51	42,21	43,87	20,66	21,44
	LTR	165,72	165,68	84,64	87,73	41,32	42,88
1	UTR	58,59	55,87	28,47	30,09	13,92	14,71
	LTR	-	118,2	-	62,70	-	30,65
3	UTR	47,43	49,87	24,17	25,76	11,82	12,59
	LTR	-	101,22	-	52,71	-	25,76

Radi validacije rezultata prvo je izvršena usporedba rezultata za nosač s debljinom stijenke  $t = 5$  mm s onima od *shell* modela pri uniformnoj raspodjeli za eksponent  $p = 0$ ,  $p = 1$  i  $p = 3$  za tri različita rubna uvjeta, a potom pri linearnoj raspodjeli samo za čistu keramiku ako temperatura raste s vanjske prema unutarnjoj stijenci. S obzirom na to da *shell* model ne omogućava analizu FG profila pri linearnoj distribuciji temperature, dana je usporedba samo za homogeni materijal. Rezultati validacije prikazani su u Tab. 5.10.

S obzirom na dobro poklapanje rezultata, slijedi usporedba kritičnih temperatura pri linearnoj i nelinearnoj temperaturnoj distribuciji po visini stijenke nosača. Promatrana je obostrano uklještena greda debljine stijenke  $t = 3, 4$  i  $5$  mm. Linearna raspodjela temperature definirana je temperaturama na vanjskim površinama stijenke nosača te volumnim udjelom pojedinog materijala u FG materijalu, dok je nelinearna raspodjela temperature zadana i karakteristikama materijala, tj. koeficijentom toplinske provodljivosti, u skladu sa izrazima (3.54) - (3.57). Iz tog je razloga analiza provedena za tri kombinacije materijala uzimajući u obzir razliku u koeficijentu toplinske provodljivosti:  $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$ ,  $\text{ZrO}_2/\text{Ti-6Al-4V}$  i  $\text{ZrO}_2/\text{SUS304}$ . Pritom je temperatura s unutarnje strane gdje je čisti metal jednaka  $0$  °C, a na strani keramike temperatura iznosi  $1$  °C. Na Sl. 5.24 može se vidjeti koliko je odstupanje nelinearne raspodjele temperature po visini stijenke  $n$  za zadane FG materijale pri eksponentu  $p = 1$  obzirom na linearnu raspodjelu. Kako je vrlo mala razlika u koeficijentu toplinske vodljivosti između metala SUS304 i keramike  $\text{Si}_3\text{N}_4$ , nelinearna raspodjela je vrlo blizu linearnoj. Najveće odstupanje vidljivo je kod kombinacije metala SUS304 i keramike  $\text{ZrO}_2$  jer je i razlike u toplinskoj vodljivosti najveća.



Sl. 5.24 Uz primjer 5: Usporedba LTR i NLR za različite materijale po visini stijenke

U sljedećim su tablicama dane kritične temperature izvijanja za različite eksponente  $p$  distribucije materijala po visini stijenke. Kod FG materijala  $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$  primjećujemo pad temperature s porastom eksponenta  $p$  zbog sve manjeg udjela keramike što se vidi u Tab. 5.11. Također, kritične vrijednosti između različitih distribucija iznose 1,5-3,5%.

Tab. 5.11 Uz primjer 5: Usporedba kritičnih temperatura za materijal  $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$ 

Debljina stijenke	Distribucija temperature	Eksponent $p$					
		0	0,3	1	3	10	1000
3	LTR	123,91	105,39	88,29	74,91	67,05	63,54
	NLR	123,91	107,49	91,18	77,06	67,99	63,55
4	LTR	142,37	120,88	101,51	86,54	77,49	73,195
	NLR	142,37	123,28	104,82	89,02	78,58	73,21
5	LTR	165,68	140,46	118,2	101,22	90,68	85,38
	NLR	165,68	143,24	122,06	104,11	91,95	85,39

Tab. 5.12 Uz primjer 5: Usporedba kritičnih temperatura za materijal  $\text{ZrO}_2/\text{Ti-6Al-4V}$ 

Debljina stijenke	Distribucija temperature	Eksponent $p$					
		0	0,3	1	3	10	1000
3	LTR	50,23	52,03	57,84	72,05	96,54	119,34
	NLR	50,23	58,49	68,24	83,03	104,1	119,47
4	LTR	57,72	59,65	66,46	83,18	111,53	137,45
	NLR	57,72	67,05	78,38	95,84	120,26	137,59
5	LTR	67,17	69,27	77,32	97,21	130,43	160,29
	NLR	67,17	77,85	91,18	111,99	140,63	160,46

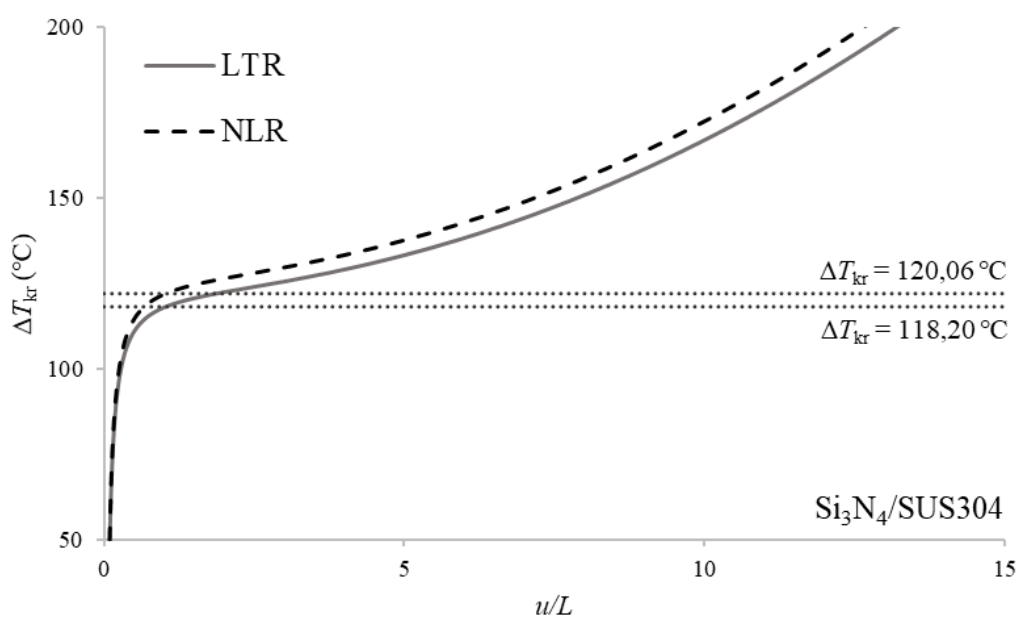
Za FG materijale  $\text{ZrO}_2/\text{Ti-6Al-4V}$ , Tab. 5.12, i  $\text{ZrO}_2/\text{SUS304}$ , Tab. 5.13, porastom eksponenta  $p$  raste temperatura izvijanja s obzirom na to da keramika  $\text{ZrO}_2$  ima manji modul elastičnosti i koeficijente toplinske ekspanzije i provodljivosti u odnosu na prikazane metale. Razlika u kritičnim temperaturama između LTR i NLR distribucije za  $\text{ZrO}_2/\text{Ti-6Al-4V}$  iznosi 7,8-18%, dok je za  $\text{ZrO}_2/\text{SUS304}$  razlika 13,4-31,5% bez obzira na debljinu stijenke. Može se

zaključiti da NLR distribucija temperatura ima utjecaj na kritičnu temperaturu izvijanja kod onih kombinacija materijala gdje je izraženija razlika između koeficijenata toplinske vodljivosti.

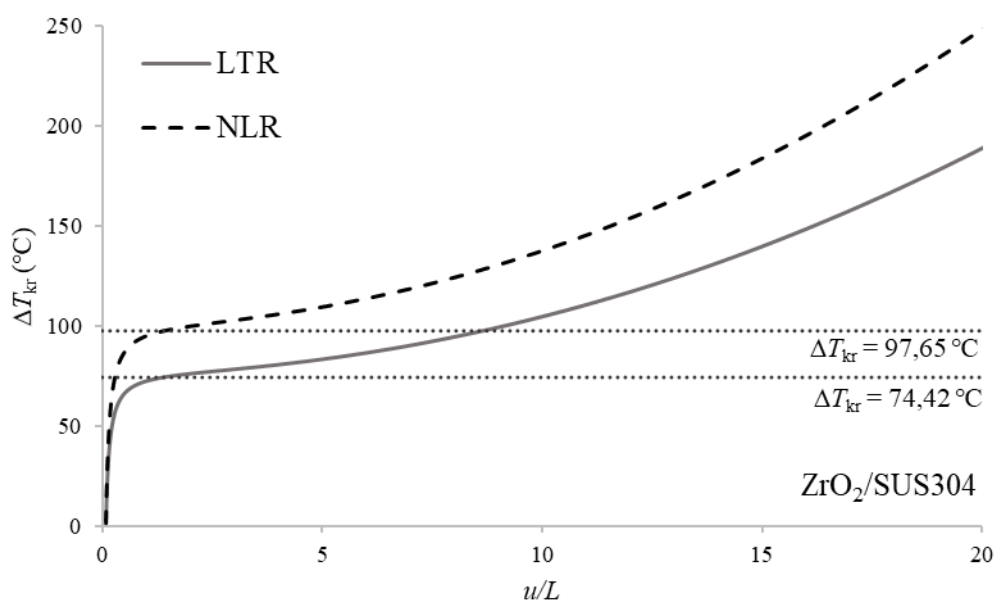
Tab. 5.13 Uz primjer 5: Usporedba kritičnih temperatura za materijal  $ZrO_2/SUS304$

Debljina stijenke	Distribucija temperature	Eksponent $p$					
		0	0,3	1	3	10	1000
3	LTR	50,23	52,89	55,68	58,4	60,42	61,51
	NLR	50,23	62,96	73,12	74,58	68,36	61,61
4	LTR	57,72	60,84	63,97	66,95	69,26	70,61
	NLR	57,72	72,39	83,97	85,45	78,36	70,72
5	LTR	67,17	70,87	74,42	77,75	80,43	82,1
	NLR	67,16	84,29	97,65	99,24	90,99	82,23

U nastavku je prikazana usporedba nelinearnog odziva pri linearnoj i nelinearnoj raspodjeli temperature pri  $p = 1$  i  $t = 5$  mm kod materijala  $Si_3N_4/SUS304$  na Sl. 5.25, i  $ZrO_2/SUS304$  na Sl. 5.26. Grafički se prikazom može zornije predočiti koliko je velika razlika između linearne i nelinearne distribucije temperature za različite kombinacije materijala.

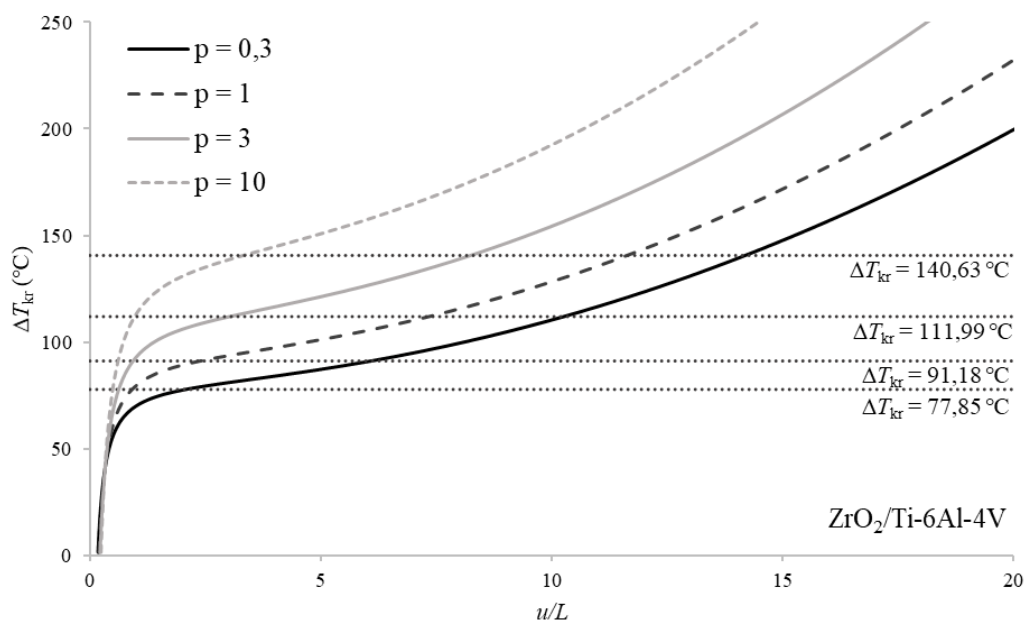


Sl. 5.25 Uz primjer 5: Usporedba LTR i NLR,  $Si_3N_4/SUS304$



Sl. 5.26 Uz primjer 5: Usporedba LTR i NLR,  $ZrO_2/SUS304$

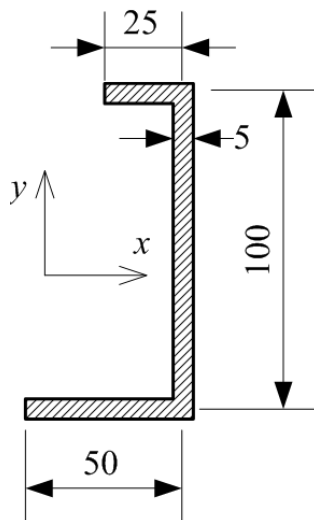
Također je dan prikaz odziva grede pri nelinearnoj distribuciji za  $ZrO_2/Ti-6Al-4V$  za različite eksponente  $p$  i debljinu stijenke od  $t = 3$  mm na Sl. 5.27.



Sl. 5.27 Uz primjer 5: Nelinearni odziv grede za različite eksponente  $p$ , NLR

## 5.2.6. Primjer 6

Analiziran je gredni nosač duljine  $L = 4$  m nesimetričnog poprečnog presjeka prikazan na Sl. 5.28.



Sl. 5.28 Uz primjer 6: Nesimetričan C-profil

Promatrana su dva slučaja rubnih uvjeta: obostrano uklještenje i zglobno oslonjena greda te tri FG tipa C-profila. U Tab. 5.14. dani su omjeri omjeri pojedinih slojeva za obje flande i struk za svaki navedeni FG Tip. Komponente FG materijala su  $Al_2O_3$  ( $E_c = 346,015$  GPa,  $\alpha_c = 6,86 \cdot 10^{-6}$   $1/^\circ C$ ) i  $SUS304$  ( $E_m = 207,788$  GPa,  $\alpha_m = 1,53 \cdot 10^{-5}$   $1/^\circ C$ ). FG Tipa 2 sastoji se od keramičkog sloja i FG plašta, FG Tip 3 od keramičke jezgre i FG plašteva, a FG tip 4 od sloja čiste keramike na unutarnjoj stijenci i sloja čistog metala na vanjskoj stijenci i FG jezgre koja varira od jednog do drugog materijala.

Tab. 5.14 Uz primjer 6: Sheme materijalne distribucije C-profila

Slučaj	Donja flanda	Struk	Gornja flanda
C1	FG Tip 2 1:2	FG Tip 2 1:2	FG Tip 2 1:2
C2	FG Tip 3 1:1:1	FG Tip 3 1:1:1	FG Tip 3 1:1:1
C3	FG Tip 4 1:2:1	FG Tip 4 1:2:1	FG Tip 4 1:2:1

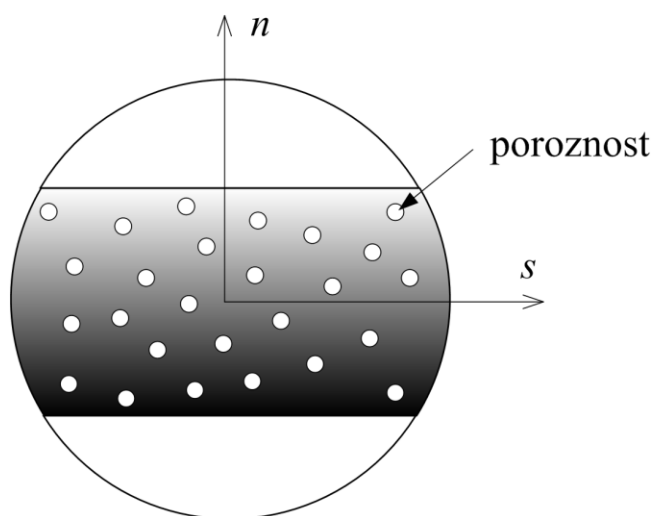
Materijal se smatra nesavršenim pri čemu je materijalna nesavršenost opisana kroz poroznost nastala u procesu proizvodnje. Na Sl. 5.29. prikazan je porozni FG materijal. Razmotrimo nesavršeni FG materijal s volumnim udjelom poroznosti, pri čemu je poroznost  $\rho$  ( $\rho \ll 1$ ) ravnomjerno raspoređena između metala i keramike, slijedi da je modificiran izraz za *rule of*

mixture, [84,89]:

$$P_f = \sum_{j=1} P_j \left( V_{f_j} - \frac{\rho}{2} \right), \quad (5.1)$$

gdje je  $\rho$  ( $\rho \ll 1$ ) koeficijent poroznosti. Svojstva nesavršenog FG materijala mogu se izraziti kao:

$$P(n, T) = [P_o(T) - P_i(T)] \cdot V_c(n) + P_i(T) - [P_o(T) + P_i(T)] \frac{\rho}{2}. \quad (5.2)$$



Sl. 5.29 Nesavršeni porozni FG materijal

U ovom primjeru prikazat će se utjecaj koeficijenta poroznosti  $\rho$  na kritičnu temperaturu izvijanja uzimajući u obzir eksponent  $p$ , FG tip te rubne uvjete. Distribucija temperature po visini stijenke je uniformna. Usporedba je dana sa *shell* modelom. U nastavku su prikazani dobiveni rezultati za savršeni materijal  $\rho = 0$  u Tab. 5.15, te materijale s nesavršenostima  $\rho = 0,1$  u Tab. 5.16, i  $\rho = 0,2$  u Tab. 5.17.

Tab. 5.15 Uz primjer 6: Kritična temperatura izvijanja grednog nosača bez nesavršenosti ( $\rho = 0$ )

	C1				C2				C3			
	C-C		S-S		C-C		S-S		C-C		S-S	
$p$	Shell	TWFG	Shell	TWFG	Shell	TWFG	Shell	TWFG	Shell	TWFG	Shell	TWFG
<b>0</b>	55,06	54,31	13,96	14,13	55,06	54,31	13,96	14,13	45,25	44,83	11,69	11,54
<b>0,2</b>	47,55	48,39	12,25	12,43	47,22	48,39	12,18	12,44	41,20	40,99	10,64	10,55
<b>0,5</b>	43,42	43,84	11,19	11,27	42,88	44,13	11,08	11,35	38,59	38,23	9,96	9,83



<b>1</b>	40,01	40,18	10,34	10,33	39,38	40,61	10,19	10,46	36,42	35,92	9,38	9,23
<b>2</b>	37,33	37,16	9,62	9,55	36,44	37,62	9,45	9,69	34,53	33,9	8,88	8,70
<b>5</b>	34,9	34,58	8,98	8,88	33,92	35,05	8,79	9,04	32,86	32,07	8,44	8,22

Tab. 5.16 Uz primjer 6: Kritična temperatura izvijanja grednog nosača sa nesavršenostima ( $\rho = 0,1$ )

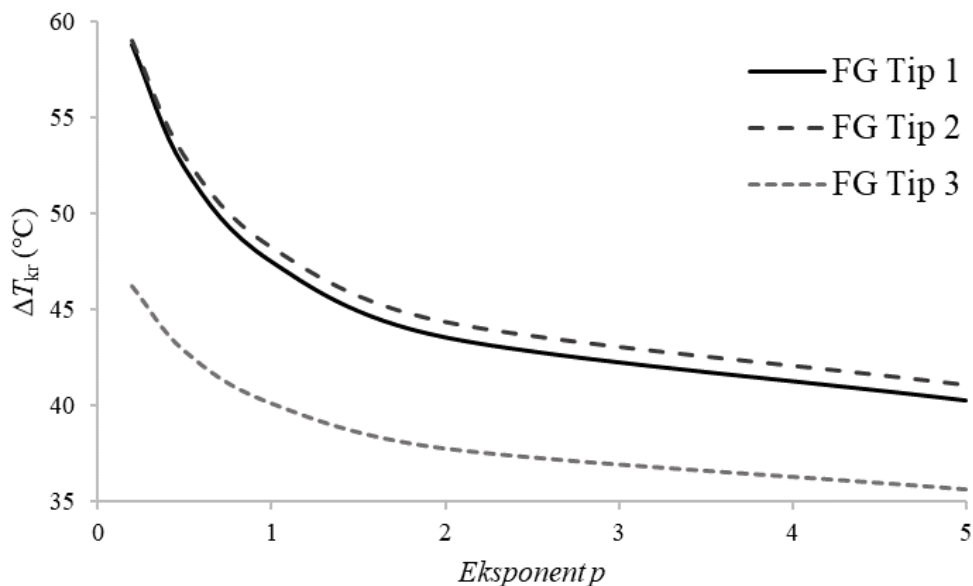
<i>p</i>	<b>C1</b>				<b>C2</b>				<b>C3</b>			
	C-C		S-S		C-C		S-S		C-C		S-S	
	<i>Shell</i>	<i>TW FG</i>	<i>Shell</i>	<i>TW FG</i>	<i>Shell</i>	<i>TW FG</i>	<i>Shell</i>	<i>TW FG</i>	<i>Shell</i>	<i>TW FG</i>	<i>Shell</i>	<i>TW FG</i>
<b>0</b>	55,06	54,31	13,96	14,13	55,06	54,31	13,96	14,13	45,25	44,83	11,69	11,54
<b>0,2</b>	52,30	53,26	13,47	13,68	51,68	53,35	13,34	13,72	43,60	43,61	11,24	11,21
<b>0,5</b>	47,47	47,88	12,23	12,31	46,62	48,31	12,06	12,44	40,75	40,55	10,49	10,42
<b>1</b>	43,66	43,65	11,26	11,23	42,60	44,23	11,05	11,41	38,39	38,18	9,88	9,76
<b>2</b>	40,52	40,20	10,44	10,34	39,28	40,82	10,21	10,54	36,36	35,83	9,34	9,19
<b>5</b>	37,79	37,29	9,72	9,58	36,46	37,91	9,48	9,79	34,58	33,84	8,87	8,67

Tab. 5.17 Uz primjer 6: Kritična temperatura izvijanja grednog nosača sa nesavršenostima ( $\rho = 0,2$ )

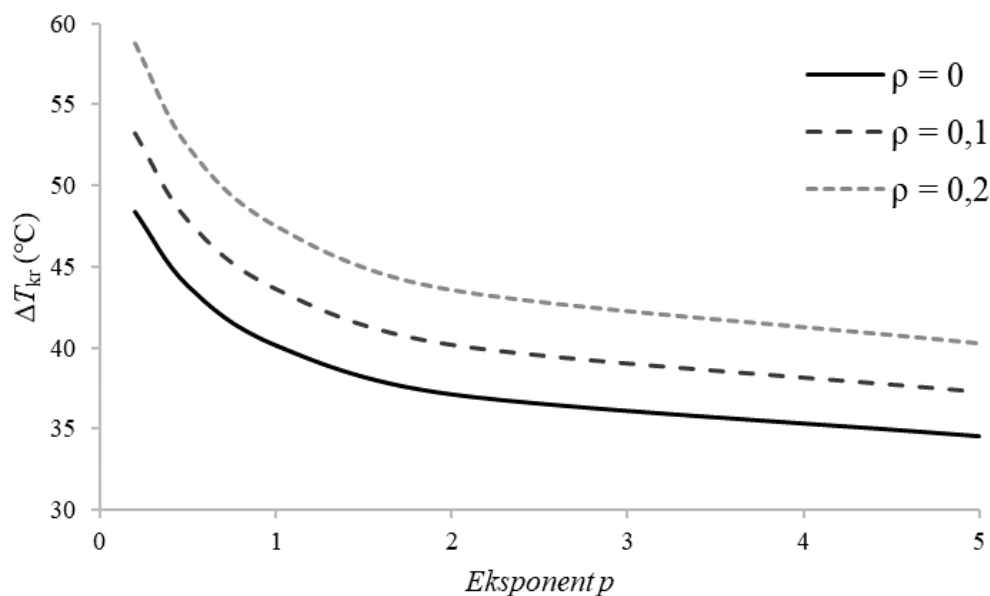
<i>p</i>	<b>C1</b>				<b>C2</b>				<b>C3</b>			
	C-C		S-S		C-C		S-S		C-C		S-S	
	<i>Shell</i>	<i>TW FG</i>	<i>Shell</i>	<i>TW FG</i>	<i>Shell</i>	<i>TW FG</i>	<i>Shell</i>	<i>TW FG</i>	<i>Shell</i>	<i>TW FG</i>	<i>Shell</i>	<i>TW FG</i>
<b>0</b>	55,06	54,31	13,96	14,13	55,06	54,31	13,96	14,13	45,25	44,83	11,69	11,54
<b>0,2</b>	57,64	58,77	14,84	15,1	56,63	59,01	14,64	15,19	45,96	46,24	11,83	11,88
<b>0,5</b>	51,65	52,41	13,39	13,48	50,70	53,01	13,15	13,67	42,85	42,86	11,02	11,00
<b>1</b>	45,58	47,51	12,27	12,22	46,10	48,26	11,99	12,46	40,32	40,11	10,36	10,28
<b>2</b>	44,02	43,56	11,35	11,20	42,34	44,36	11,04	11,47	38,16	37,74	9,79	9,67
<b>5</b>	40,98	40,27	10,55	10,35	39,18	41,07	10,22	10,63	36,27	35,6	9,29	9,11

Može se uočiti da se vrijednosti temperatura jako dobro slažu te da nema velikih razlika između FG tipa 1 i 2 s obzirom na malu debljinu stijenke i prevladavanje keramičke jezgre u stijenka. Osjetna razlika vidljiva je za FG Tip 3 gdje zbog postojanja sloja čistog metala opada otpornost na toplinsko izvijanje što se može vidjeti na Sl. 5.30.

Grafička usporedba utjecaja koeficijenta poroznosti na temperaturu izvijanja pri uniformnoj raspodjeli temperature prikazana je na Sl. 5.31. Uočeno je da vrijednost kritične temperature raste s porastom koeficijenta poroznosti.



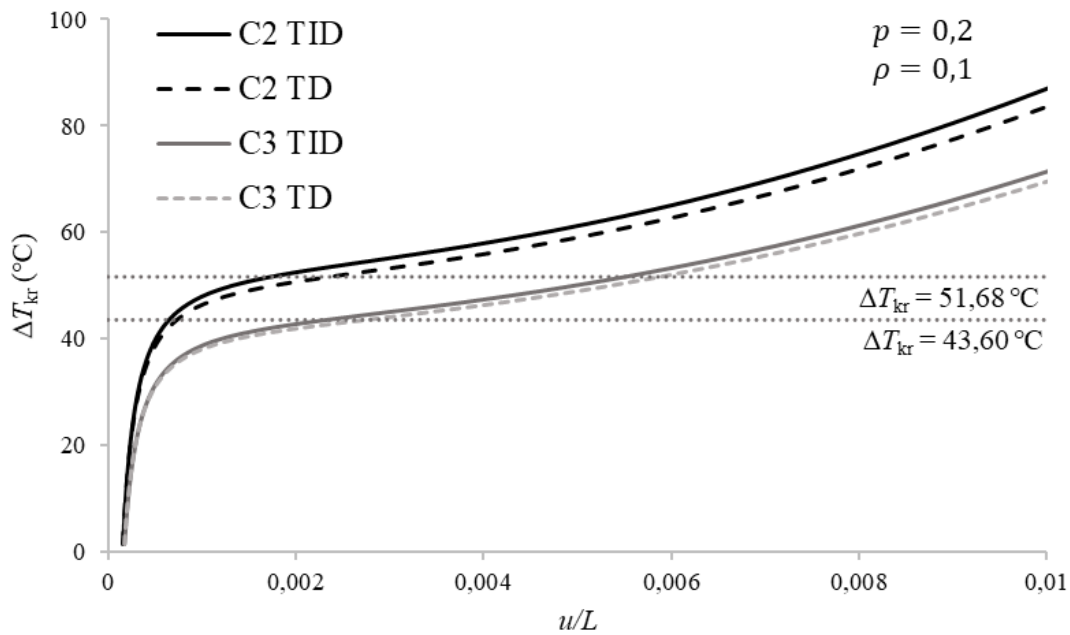
Sl. 5.30 Uz primjer 6: Usporedba kritičnih temperature s obzirom na FG distribuciju,  $\rho=0,2$



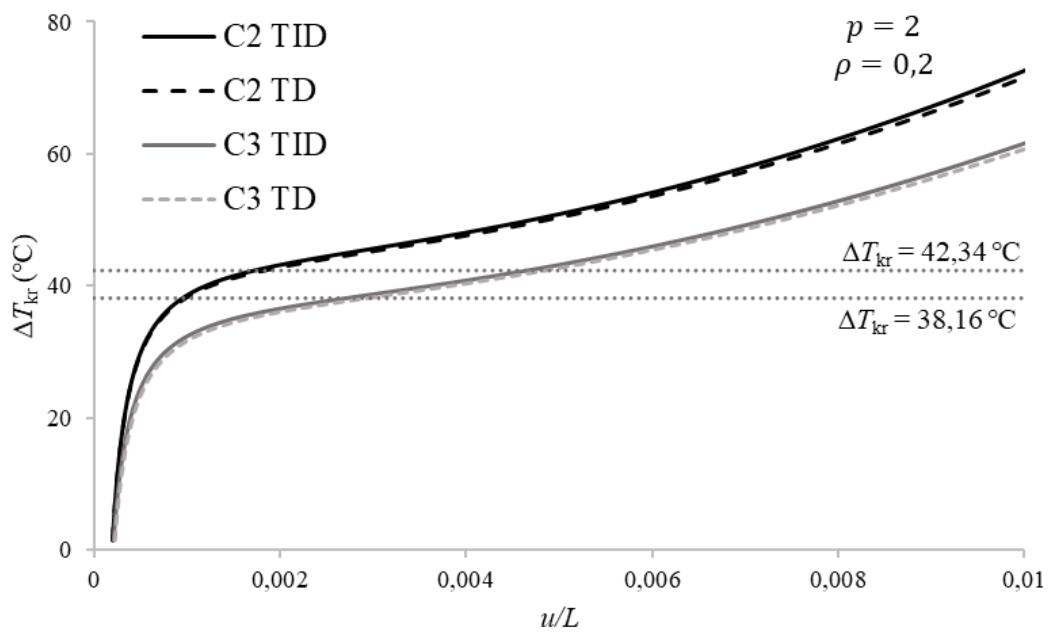
Sl. 5.31 Uz primjer 6: Usporedba kritičnih temperatura s obzirom na koefijent poroznosti, FG Tip 1

Izvršena je i nelinearna analiza izvijanja za porozne materijale te je dana usporedba s temperaturno ovisnim materijalnim svojstvima. U nastavku su prikazani rezultati za obostrano

uklještenu gredu profila C2 i C3 za eksponent  $p = 0.2$  i koeficijent poroznosti  $\rho = 0.1$  na Sl. 5.32, odnosno za  $p = 2$  i koeficijent poroznosti  $\rho = 0.2$  na Sl. 5.33. Kako je očekivano, TD materijali postižu nižu temperaturu izvijanja, no kako se radi o nižim temperaturama, ovisnost svojstava o temperaturi nema značajan utjecaj na proces izvijanja.



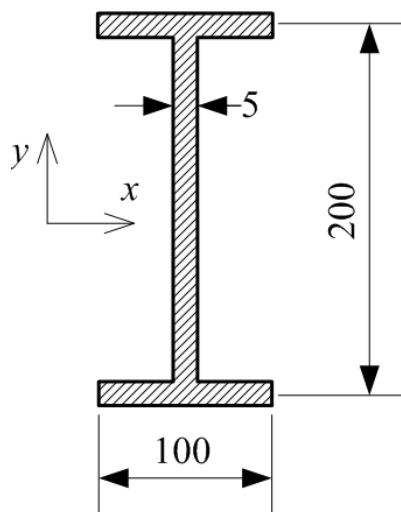
Sl. 5.32 Uz primjer 6: Dijagram temperatura-pomak za C2 i C3,  $\rho = 0.1$



Sl. 5.33 Uz primjer 6: Dijagram temperatura-pomak za C2 i C3,  $\rho = 0.2$

## 5.2.7. Primjer 7

U ovom je primjeru izvršena analiza grednog nosača s I-profilom poprečnog presjeka. Duljina grede iznosi  $L = 6$  m. Promatrano je toplinsko izvijanje kada se nosač zagrijava uzdužno, tj po pravcu aksijalne osi  $Z$  nosača pri čemu je na jednoj strani nosača temperatura konstantna, a na drugoj raste (v. Sl. 3.6.).



Sl. 5.34 Uz primjer 7: Simetričan I-profil

Razmatrana su tri različita rubna uvjeta (C-C, C-S, S-S) i dva FG tipa I-profila prikazanih u Tab. 5.18. FG Tip 2 sastoji se od keramičkog pojasa i FG plašta, dok se FG Tipa 3 sastoji od keramičke jezgre i FG plašteva sa svake strane. Izvršena je usporedba za  $ZrO_2/SUS304$  i  $ZrO_2/Ti-6Al-4V$  kombinacije materijala sa sljedećim svojstvima:

- $E_{ZrO_2} = 168,063$  GPa,  $\alpha_{ZrO_2} = 1,86 \cdot 10^{-5}$   $1/^\circ C$ ,
- $E_{SUS304} = 207,788$  GPa,  $\alpha_{SUS304} = 1,53 \cdot 10^{-5}$   $1/^\circ C$ ,
- $E_{Ti-6Al-4V} = 105,698$  GPa,  $\alpha_{Ti-6Al-4V} = 6,94 \cdot 10^{-6}$   $1/^\circ C$ .

Tab. 5.18 Uz primjer 7: Sheme materijalne distribucije I-profila

Slučaj	Donja flanda	Struk	Gornja flanda
I1	FG Tip 3 3:4:3	FG Tip 3 3:4:3	FG Tip 3 3:4:3
I2	FG Tip 2 3:7	FG Tip 3 3:4:3	FG Tip 2 3:7

U nastavku su prikazani dobiveni rezultati uspoređeni sa *shell* modelom, za profil I1 u Tab. 5.19 te za profil I2 u Tab. 5.20. Profil I1 postiže više temperature izvijanja za obje kombinacije materijala u odnosu na profil I2. Može se primijetiti da, bez obzira na FG tip materijala, te s

obzirom na istu keramičku komponentu, materijal s metalom Ti-6Al-4V postiže više temperature izvijanja. Dakle, kombinacija materijala i način distribucije materijala po visini stijenke ima utjecaj na toplinsko izvijanje.

Tab. 5.19 Uz primjer 7: Kritična temperatura izvijanja, I1

BC		C-C		C-S		S-S	
<i>p</i>	<i>Materijal</i>	<i>Shell</i>	<i>TW FG</i>	<i>Shell</i>	<i>TW FG</i>	<i>Shell</i>	<i>TW FG</i>
<b>0</b>	ZrO <sub>2</sub> /SUS304	49,03	49,28	25,05	25,17	12,15	12,30
	ZrO <sub>2</sub> /Ti-6Al-4V	49,03	49,28	25,05	25,17	12,15	12,30
<b>0,5</b>	ZrO <sub>2</sub> /SUS304	51,15	51,24	26,13	26,18	12,67	12,79
	ZrO <sub>2</sub> /Ti-6Al-4V	55,59	55,43	28,39	28,31	13,77	13,84
<b>1</b>	ZrO <sub>2</sub> /SUS304	52,19	52,27	26,66	26,70	12,93	13,29
	ZrO <sub>2</sub> /Ti-6Al-4V	58,86	58,89	30,07	29,93	14,59	14,63
<b>5</b>	ZrO <sub>2</sub> /SUS304	54,48	54,4	27,79	27,83	13,48	13,59
	ZrO <sub>2</sub> /Ti-6Al-4V	66,57	66,02	34,01	33,73	16,50	16,48
<b>10</b>	ZrO <sub>2</sub> /SUS304	54,91	54,98	28,05	28,09	13,60	13,72
	ZrO <sub>2</sub> /Ti-6Al-4V	68,61	67,94	35,05	34,71	17,01	16,96

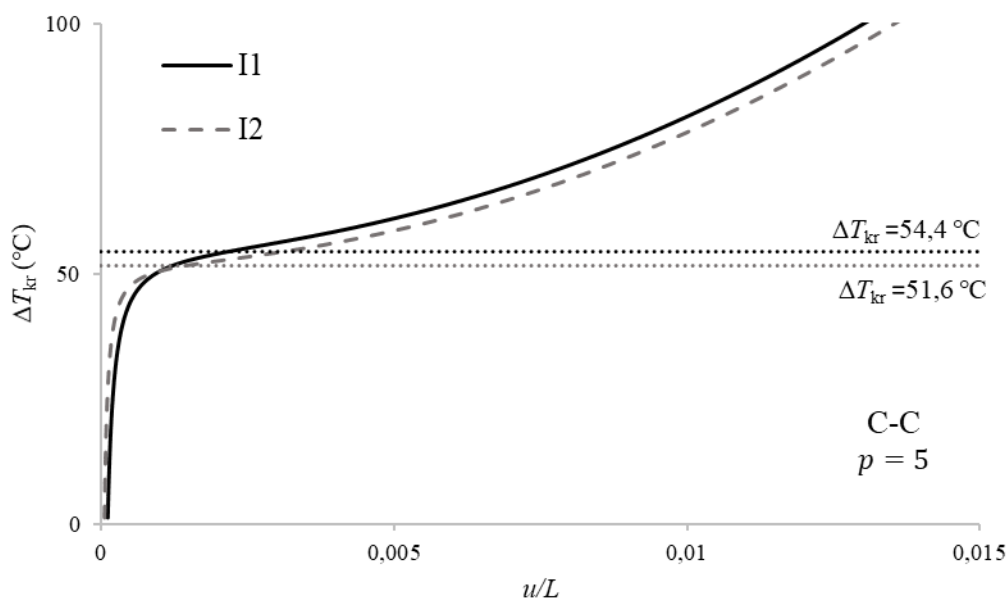
Tab. 5.20 Uz primjer 7: Kritična temperatura izvijanja, I2

BC		C-C		C-S		S-S	
<i>p</i>	<i>Materijal</i>	<i>Shell</i>	<i>TW FG</i>	<i>Shell</i>	<i>TW FG</i>	<i>Shell</i>	<i>TW FG</i>
<b>0</b>	ZrO <sub>2</sub> /SUS304	49,03	49,28	25,05	25,17	12,15	12,30
	ZrO <sub>2</sub> /Ti-6Al-4V	49,03	49,28	25,05	25,17	12,15	12,30
<b>0,5</b>	ZrO <sub>2</sub> /SUS304	50,01	50,17	25,55	25,63	12,39	12,52
	ZrO <sub>2</sub> /Ti-6Al-4V	54,82	54,71	28,01	27,95	13,58	13,66
<b>1</b>	ZrO <sub>2</sub> /SUS304	50,51	50,66	25,8	25,89	12,51	12,65
	ZrO <sub>2</sub> /Ti-6Al-4V	57,58	57,4	29,14	29,32	14,26	14,33
<b>5</b>	ZrO <sub>2</sub> /SUS304	51,60	51,76	26,36	26,44	12,78	12,92

	ZrO <sub>2</sub> /Ti-6Al-4V	63,63	63,29	32,5	32,33	15,74	15,8
<b>10</b>	ZrO <sub>2</sub> /SUS304	51,86	52,01	26,49	26,57	12,85	12,98
	ZrO <sub>2</sub> /Ti-6Al-4V	65,12	64,72	33,26	33,06	16,11	16,16

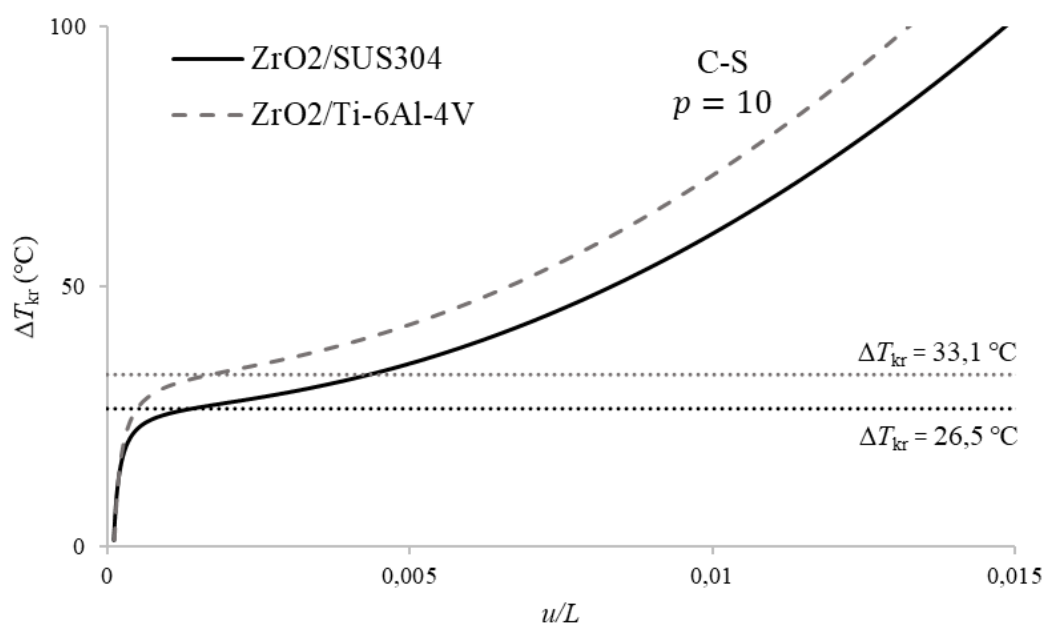
Nadalje, razmatran je nelinearan odziv nosača pri zagrijavanju po njegovoj duljini. Najprije je dana usporedba izvijanja profila I1 i I2 za eksponent  $p = 5$ , materijal ZrO<sub>2</sub>/SUS304 i obostrano uklještenje na Sl. 5.35. Kao što je vidljivo u prethodnim tablicama, I1 profil postiže više temperature izvijanja iako su razlike male. S porastom eksponenta razlike između profila rastu.

Slijedi usporedba odziva profila I2 za oba FG materijala i eksponent  $p = 10$ , uklještenje-zglob na Sl. 5.36. Materijal koji sadrži metal SUS304 postiže niže temperature izvijanja. U oba dijagrama vidljivo je dobro slaganje krivulje nelinearnog odziva i kritične vrijednosti.

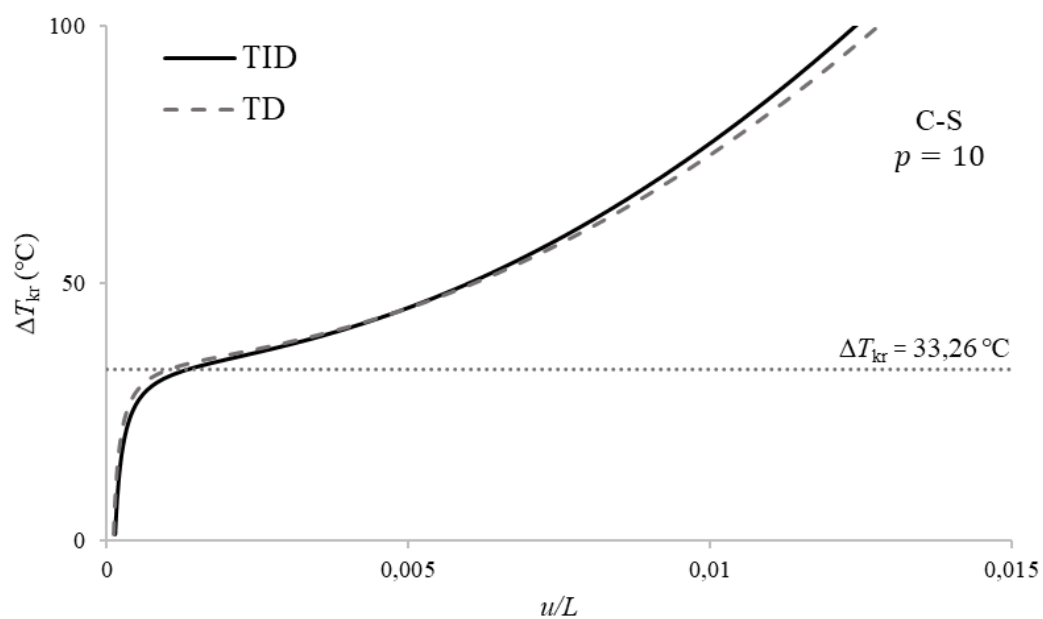


Sl. 5.35 Uz primjer 7: Dijagram temperatura-pomak za različite I-profile, ZrO<sub>2</sub>/SUS304

Ako uzmemo u obzir utjecaj temperature na materijalna svojstva, na sljedećem je dijagramu vidljivo malo odstupanje i manja otpornost nosača na izvijanja. Na Sl. 5.37. prikazani su rezultati za FG materijal ZrO<sub>2</sub>/Ti-6Al-4V i eksponent  $p = 10$  te za rubni uvjet C-S. S obzirom na to da se radi o niskim temperaturama, utjecaj je temperature na materijalna svojstva zanemarivno mali.



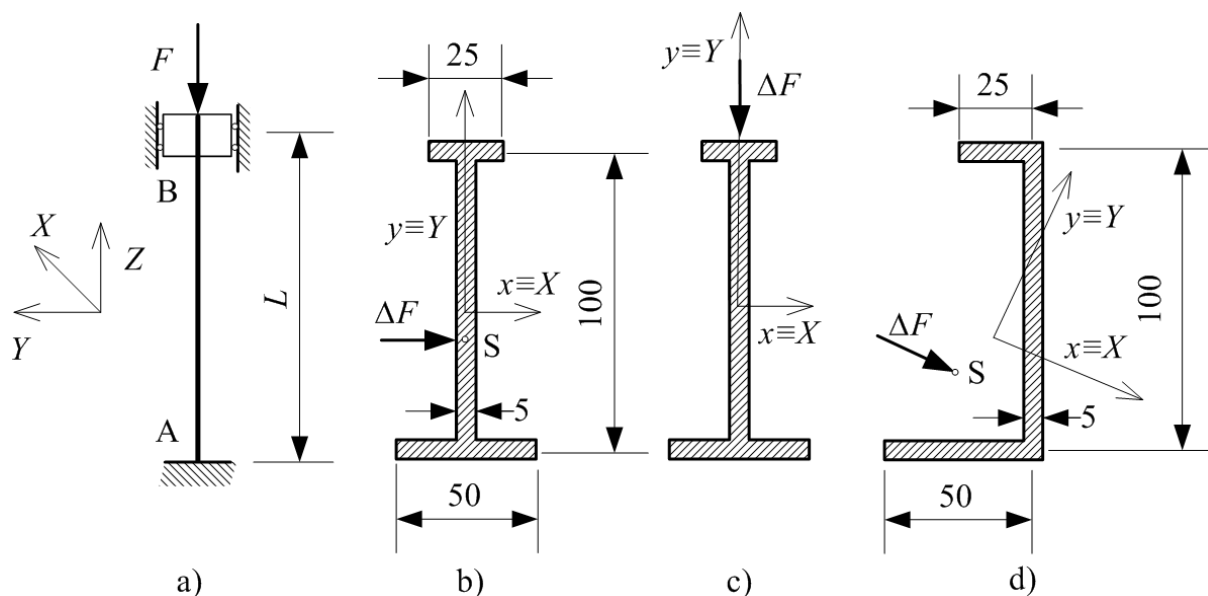
Sl. 5.36 Uz primjer 7: Dijagram temperatura-pomak za različite materijale, I2 profil



Sl. 5.37 Uz primjer 7: Usporedba TD i TID materijala pri izvijanju

5.2.8. *Primjer 8*

Obostrano uklješetena greda duljine  $L = 6$  m opterećena je tlačnom aksijalnom silom  $F$  u presjeku B te se uniformno zagrijava, Sl. 5.38a. Peturbacijska sila  $\Delta F$  djeluje na sredini nosača radi iniciranja izvijanja. Promatrano je torzijsko-fleksijsko izvijanje monosimetričnog I-profila, Sl. 5.38b, fleksijsko izvijanje istog I-profila, Sl. 5.38c, te fleksijsko-torzijsko izvijanje nesimetričnog C-profila, Sl. 5.38d. Distribucija materijala po debljini stijenke nosača modelirana je u obliku FG Tipa 3 koji se sastoji od metalne jezgre u sredini i FG plašta koji varira od čistog metala prema čistoj keramici na vanjskim stijenkama. Komponente FG materijala su čelik SUS304 i keramika  $Al_2O_3$ , a njihova svojstva prikazana su u Tab. 2.1 - Tab. 2.3.



Sl. 5.38 Uz primjer 8: a) Tlačno opterećen stup uklješten na oba kraja; b) torzijsko-fleksijsko izvijanje monosimetričnog I-profila (Slučaj II); c) fleksijsko izvijanje monosimetričnog I-profila (Slučaj I2); d) torzijsko fleksijsko izvijanje nesimetričnog C-profila (Slučaj C)

Tab. 5.21 Uz primjer 8: Kritične sile izvijanja

Slučaj	Tip izvijanja	Kritična sila izvijanja (N), $F_{kr}$					
		$p = 0$		$p = 1$		$p = 5$	
		TW FG	Analitički	TW FG	Analitički	TW FG	Analitički
<b>I1</b>	Torzijsko-fleksijsko	13323	13286	15547	15523	16993	16979
<b>I2</b>	Fleksijsko	299048	298576	347625	347076	379717	379397
<b>C</b>	Torzijsko-fleksijsko	30711	30677	35863	35820	39192	39177



U prvom je koraku određena kritična sila izvijanja za sva tri slučaja, Tab. 5.21. Potom je u analizi nelinearnog odziva grede pri uniformnom zagrijavanju greda opterećena tlačnom silom  $F$  koja iznosi 70-90% kritične sile izvijanja. Nelinearni odzivi su verificirani analitičkim izračunom kritične temperature izvijanja.

Postupak određivanja temperature izvijanja započinje izračunom sile izvijanja za čisto fleksijsko i čisto torzijsko izvijanje:

$$F_{nx} = n^2 \frac{\pi^2 R_{33}}{l^2}, \quad F_{ny} = n^2 \frac{\pi^2 R_{22}}{l^2}, \quad F_{n\varphi} = \frac{A}{I_{ps}} \left( 4R_{55} + n^2 \frac{\pi^2 R_{44}}{l^2} \right). \quad (5.3)$$

Pritom vrijedi  $R_{ij} = R_{ij}(T)$ , a  $I_{ps}$  je polarni moment inercije poprečnoga presjeka:

$$I_{ps} = I_x + I_y + (x_s^2 + y_s^2)A. \quad (5.4)$$

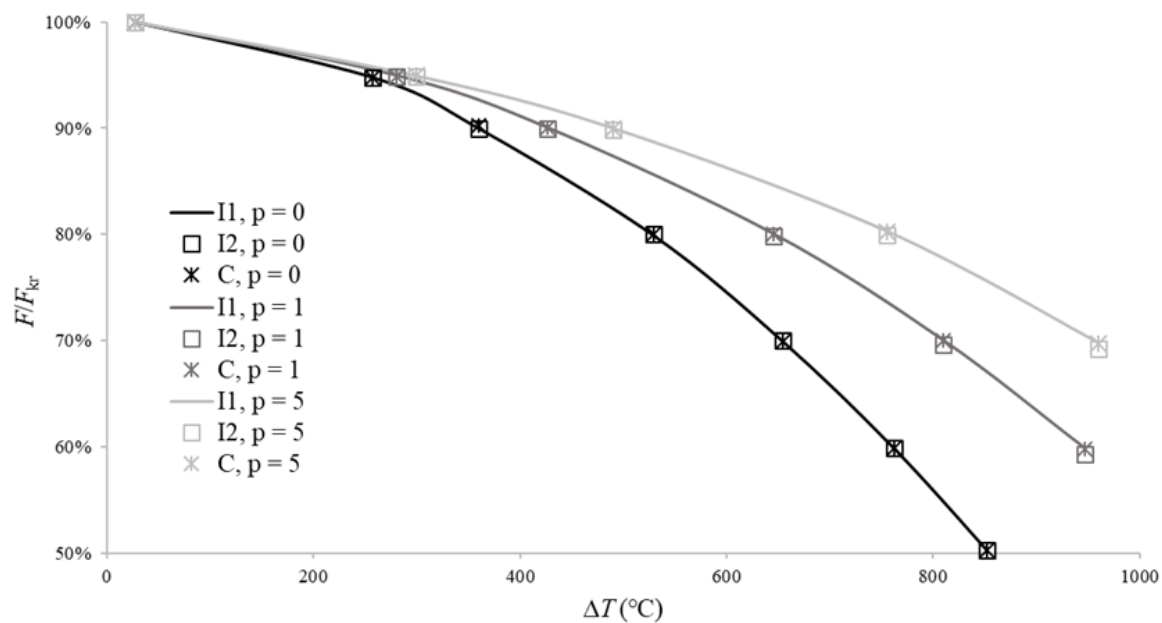
Potom se iz kubne jednadžbe dobiju tri rješenja za kritičnu silu izvijanja:

$$F^2 \left[ (F - F_{ny}) x_s^2 + (F - F_{nx}) y_s^2 \right] - \frac{I_{ps}}{A} (F - F_{ny})(F - F_{nx})(F - F_{n\varphi}) = 0. \quad (5.5)$$

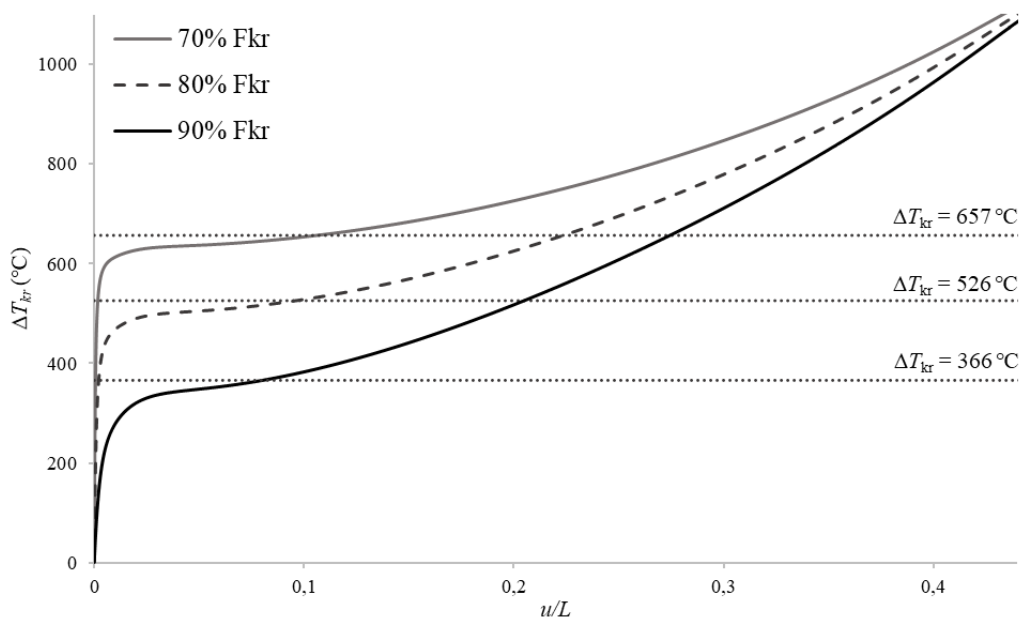
Treba napomenuti da će za monosimetrični I-profil dva rješenja biti torzijsko-fleksijskoga oblika izvijanja, dok će jedan biti čisti fleksijski oblik čija se vrijednost sile izvijanja može dobiti iz izraza (5.3). Za asimetrični C-profil sva tri rješenja su torzijsko-fleksijskoga oblika. U Tab. 5.21 za slučaj I1 i C uzeta je prva vrijednost iz izraza (5.5) koji odgovara torzijsko-fleksijskom obliku, dok je za slučaj I2 uzeta je druga vrijednost iz istog izraza koja odgovara fleksijskom obliku izvijanja.

Kako krutosti  $R_{ij}$  ovise o temperaturi, da bi se dobila analitička vrijednost sile izvijanja za određenu temperaturu, prvo se odrede krutosti za promatranu temperaturu, a potom se pomoću izraza (5.3) i/ili (5.5) dobiju vrijednosti sile izvijanja za promatranu temperaturu. Taj se postupak provodi za različite temperature te su rezultati prikazani na Sl. 5.39. Na osi ordinata dan je omjer sile izvijanja pri određenoj temperaturi i kritične sile izvijanja  $F_{kr}$  za svaki promatrani slučaj iz Tab. 5.21.

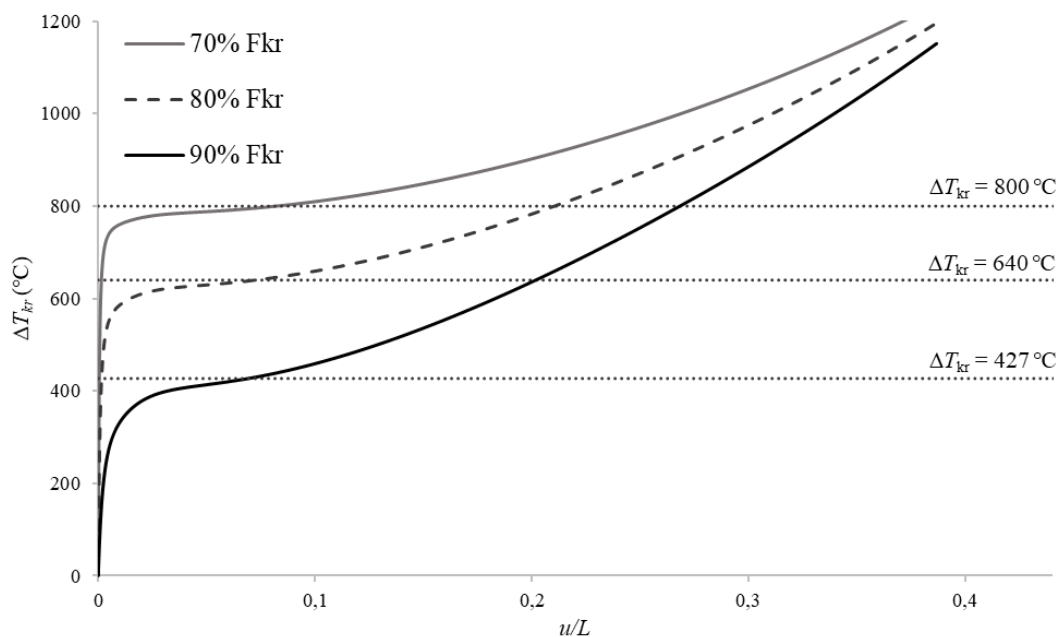
U nastavku su prikazani rezultati za torzijsko-fleksijsko izvijanje I-profila za sve tri vrijednosti eksponenta  $p$ , Sl. 5.40 - Sl. 5.42. Može se uočiti relativno dobro poklapanje analitički proračunate kritične temperature izvijanja i krivulje nelinearnog odziva. Kao što je i očekivano, s porastom eksponenta  $p$  raste i kritična temperatura izvijanja s obzirom na porast volumnog udjela keramike u stijenci poprečnog presjeka.



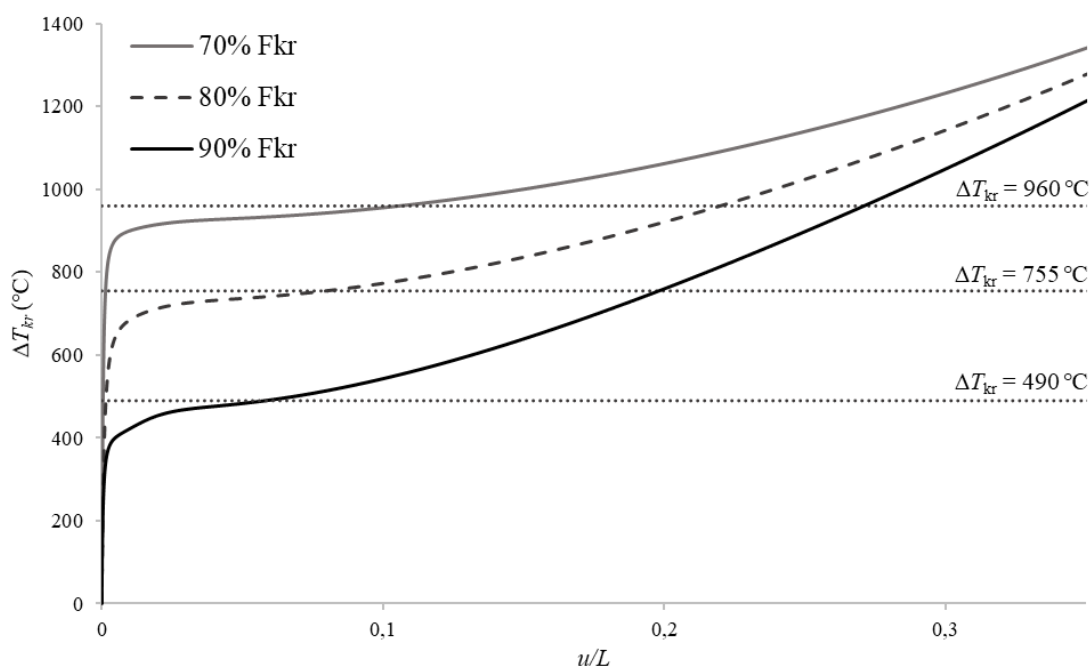
Sl. 5.39 Uz primjer 8: Promjena sile izvijanja obzirom na temperaturu za promatrane slučajeve i materijale



Sl. 5.40 Uz primjer 8: Dijagram temperatura-pomak, torzijsko-fleksijsko izvijanje I-profila za  $p = 0$

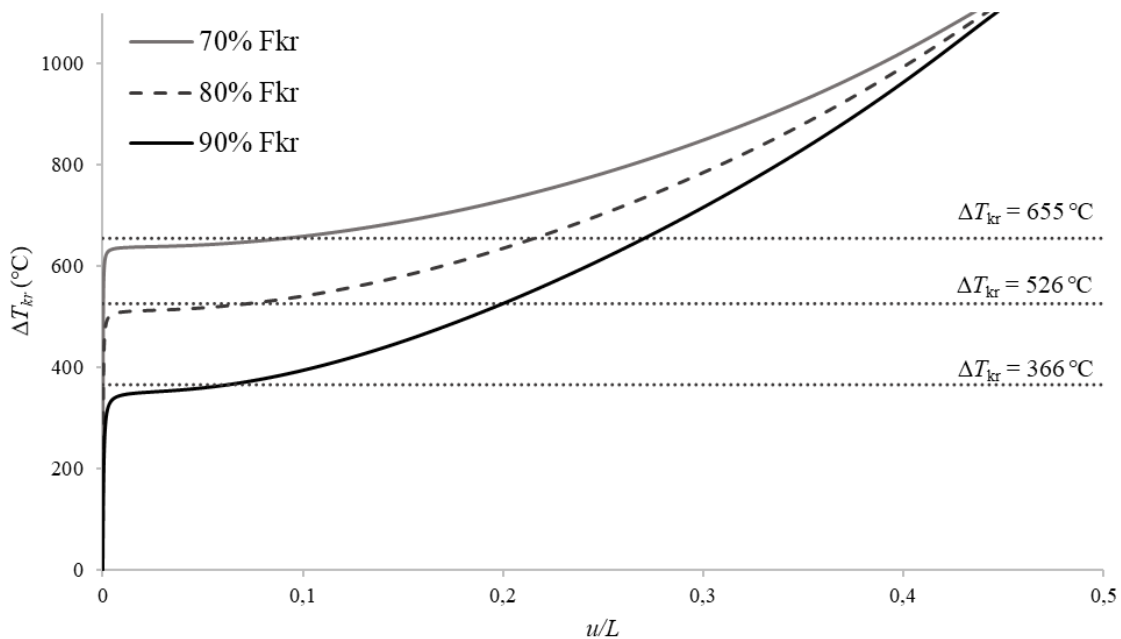


Sl. 5.41 Uz primjer 8: Dijagram temperatura-pomak, torzijsko-fleksijsko izvijanje I-profila za  $p = 1$

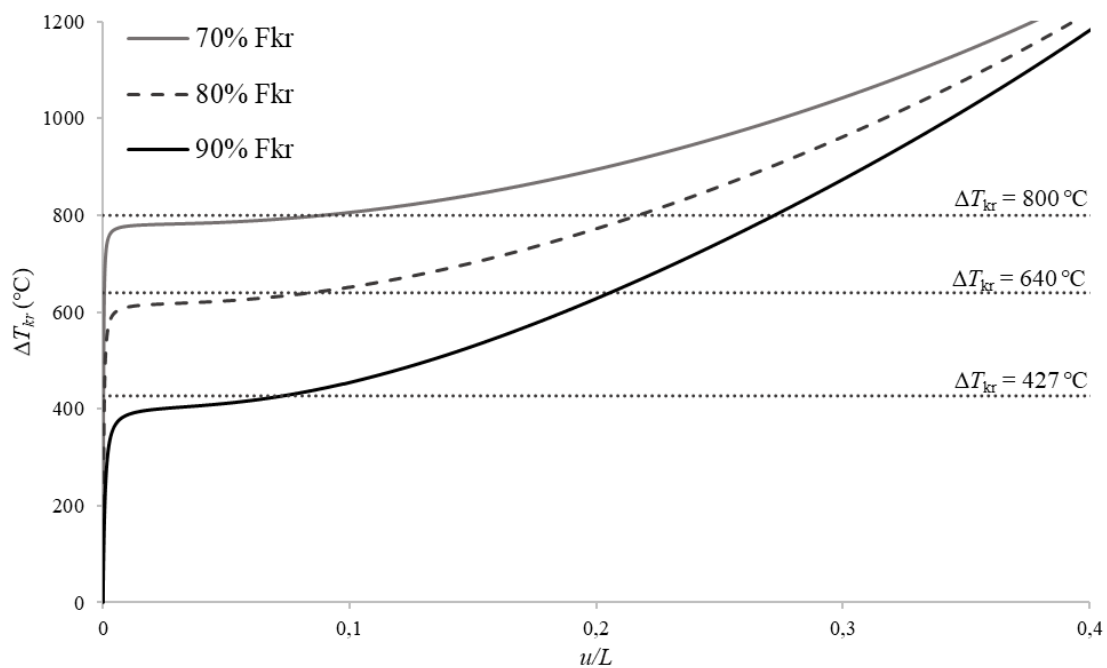


Sl. 5.42 Uz primjer 8: Dijagram temperatura-pomak, torzijsko-fleksijsko izvijanje I-profila za  $p = 5$

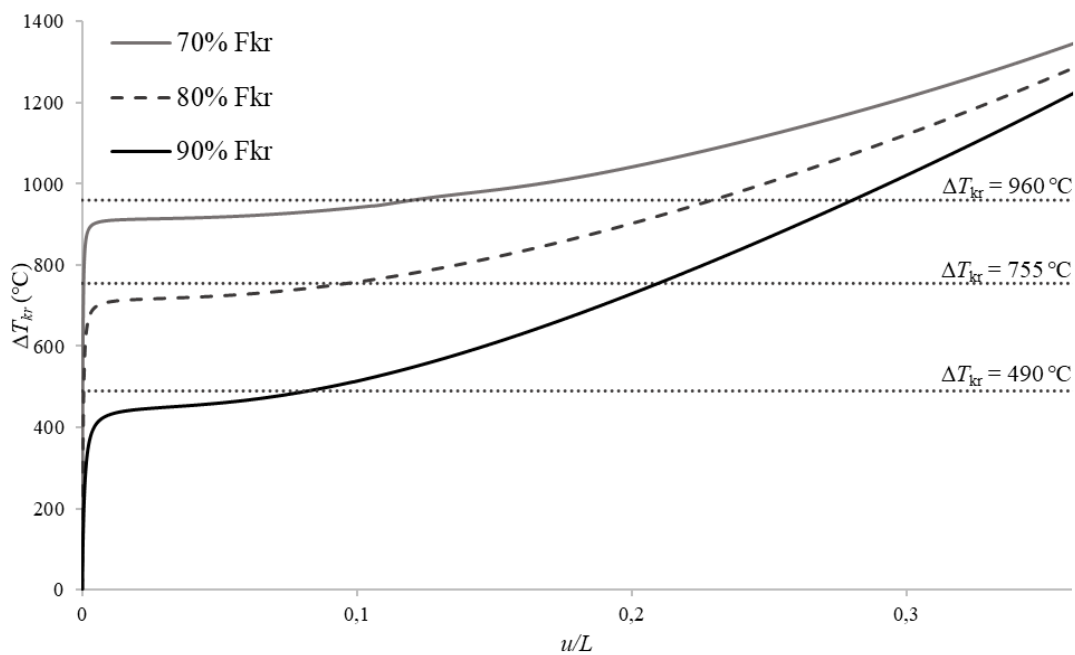
Na Sl. 5.43 - Sl. 5.45 prikazan je nelinearan odziv fleksijkog izvijanja I profila (Slučaj I2), a na Sl. 5.46 - Sl. 5.48 nelinearan odziv torzijsko-fleksijskog izvijanja nesimetričnog C-profila (Slučaj C). Potrebno je naglasiti da se kod slučaja I2 pretpostavlja čisto fleksijsko izvijanje u ravnini XZ te da je pojava ostalih oblika izvijanja spriječena.



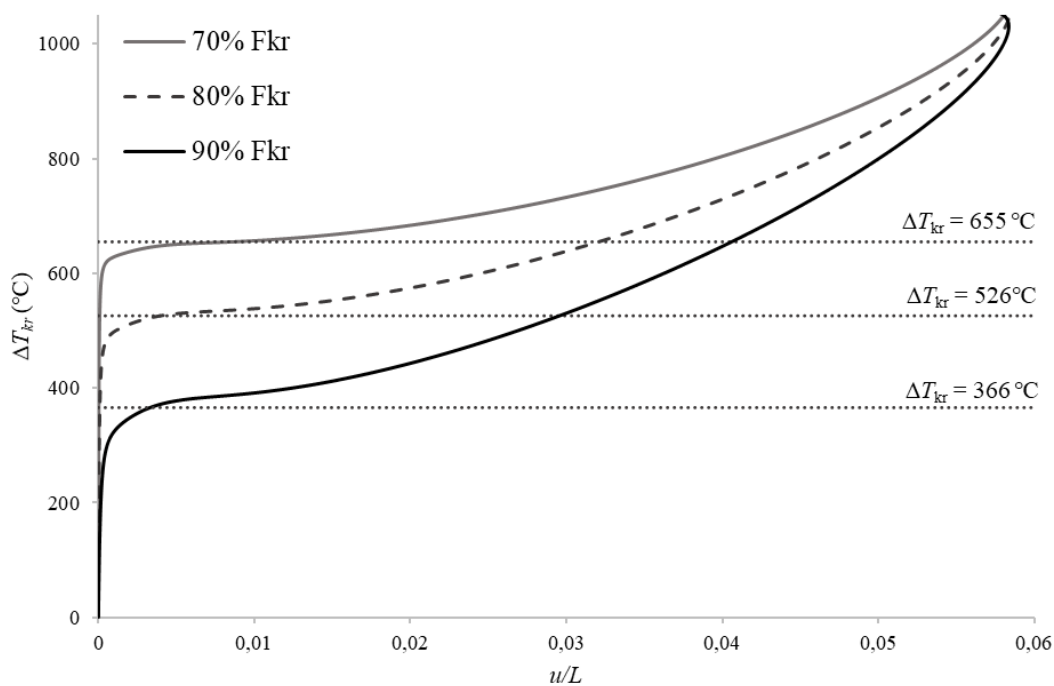
Sl. 5.43 Uz primjer 8: Dijagram temperatura-pomak, fleksijsko izvijanje I-profila za  $p = 0$



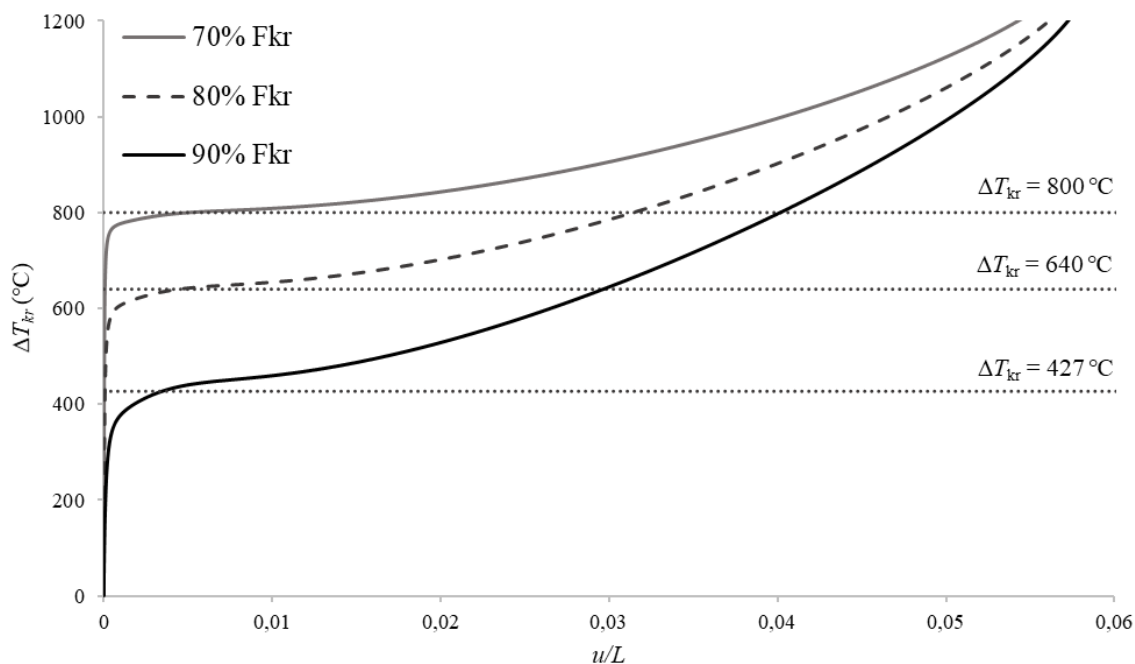
Sl. 5.44 Uz primjer 8: Dijagram temperatura-pomak, fleksijsko izvijanje I-profila za  $p = 1$



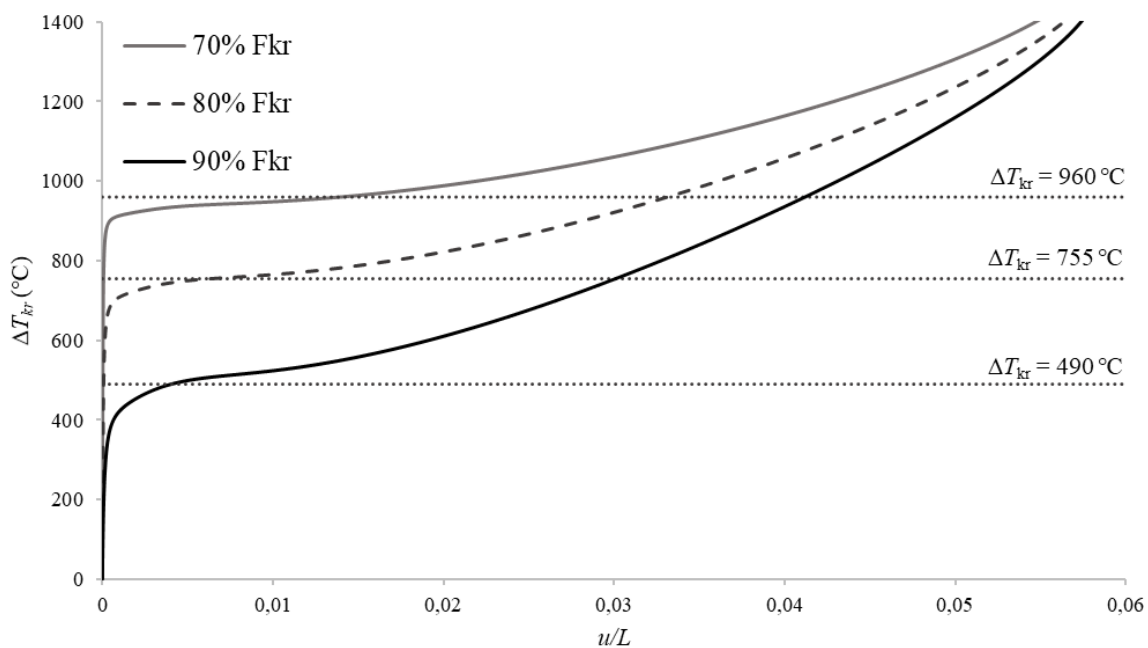
Sl. 5.45 Uz primjer 8: Dijagram temperatura-pomak, fleksijsko izvijanje I-profila za  $p = 5$



Sl. 5.46 Uz primjer 8: Dijagram temperatura-pomak, torzijsko-fleksijsko izvijanje C-profila za  $p = 0$



Sl. 5.47 Uz primjer 8: Dijagram temperatura-pomak, torzijsko-fleksijsko izvijanje C-profila za  $p = 1$

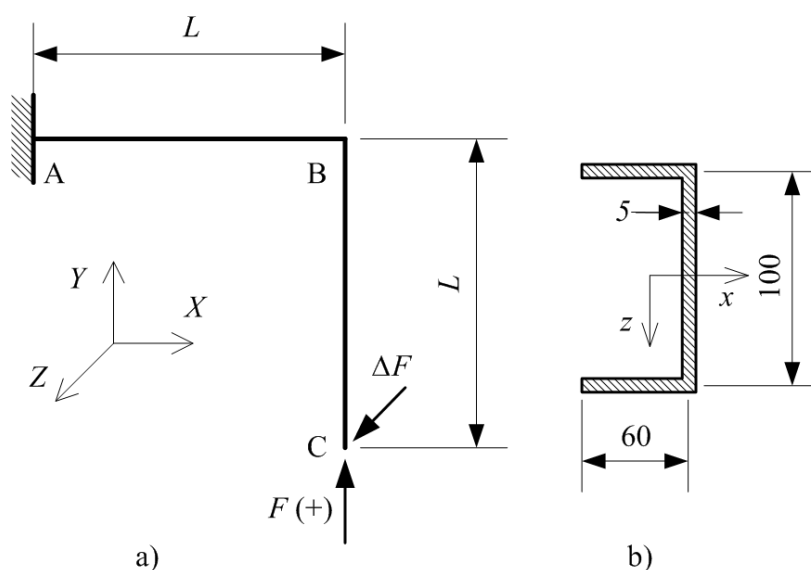


Sl. 5.48 Uz primjer 8: Dijagram temperatura-pomak, torzijsko-fleksijsko izvijanje C-profila za  $p = 5$

Moguće je primjetiti da su za zadane primjere dobivene jednake kritične temperature izvijanja za isti udio odgovarajuće kritične sile (torzijsko fleksijske kritične sile za Slučaj I1, fleksijske kritične sile za Slučaj I2 te torzijsko-fleksijske kritične sile za Slučaj C).

5.2.9. *Primjer 9*

Na Sl. 5.49a je prikazan L-okvir uklješten u presjeku A i opterećen aksijalnom silom u presjeku C. Spoj u presjeku B smatra se idealno krutim. Oba segmenta okvira imaju duljinu  $L = 2$  m i poprečni presjek C-profila tako da struk profila leži u ravnini okvira, Sl. 5.49b. Struk i pojasevi profila izrađeni su od FG materijala SUS304 i  $\text{Si}_3\text{N}_4$ . Flande i struk C-profila su FG tipa 5 s metalnim slojem na vanjskoj stijenci i FG plašta koji varira od čistog metala prema čistoj keramici na unutarnjoj stijenci.



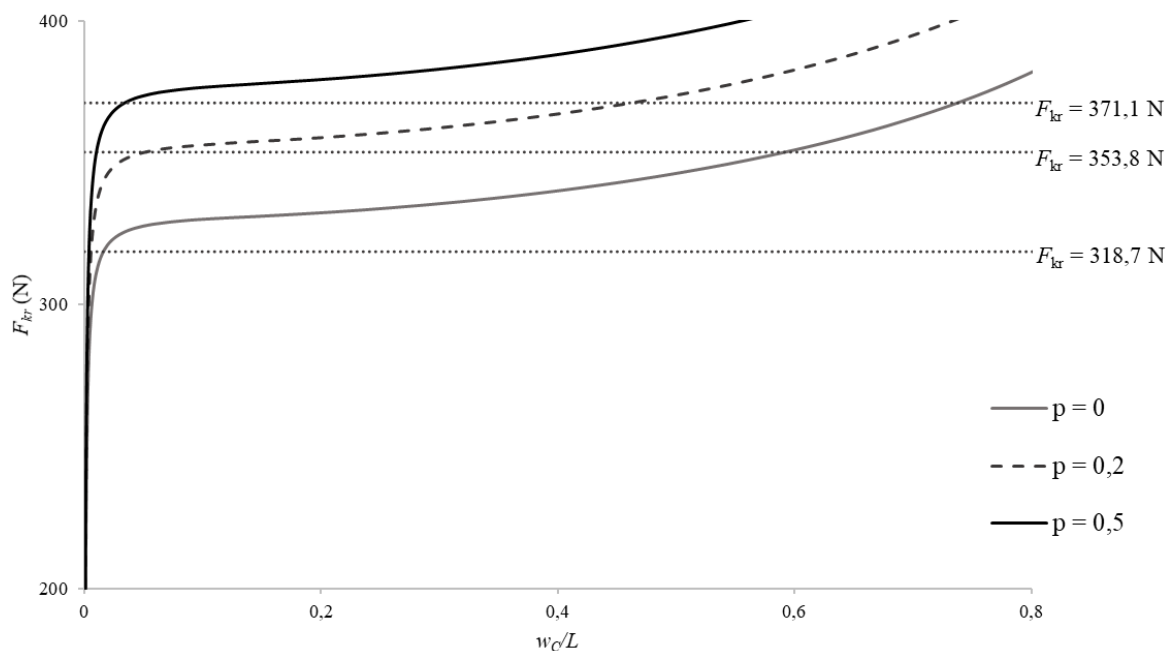
Sl. 5.49 Uz primjer 9: a) L-okvir; b) monosimetričan C-profil

Promatrana su tri slučaja distribucije materijala za eksponent  $p = 0$ ,  $p = 0,2$  i  $p = 0,5$  pri uniformnoj distribuciji temperature. Analizirana je stabilnost okvira za pozitivan smjer sile  $F$ , što odgovara prvom obliku izvijanja i negativan smjer sile  $F$ , što odgovara drugom obliku izvijanja.

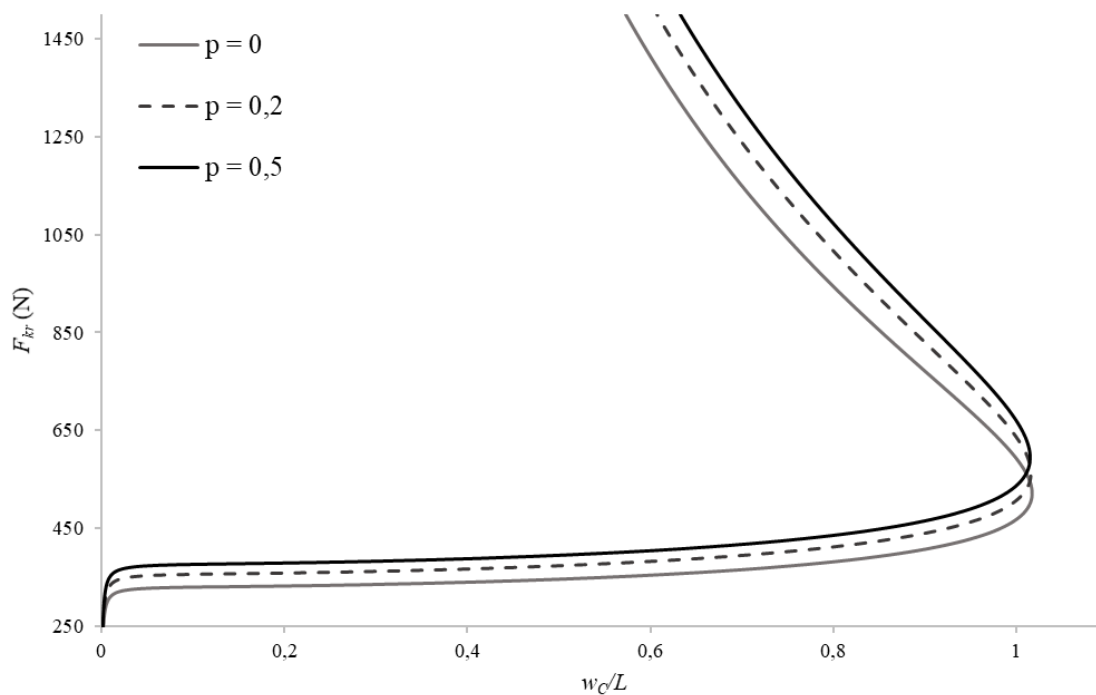
Tab. 5.22 Uz primjer 9: Kritične sile izvijanja L-okvira

Eksponent $p$	Oblik izvijanja	Thinwall FG	Shell model
$p = 0$	Prvi	330,52	318,74
	Drugi	23 026,60	21 723,98
$p = 0,2$	Prvi	356,95	358,78
	Drugi	24 504,00	23 548,65
$p = 0,5$	Prvi	377,39	371,13
	Drugi	25 797,20	24 808,13

Vrijednosti kritičnih sila izvijanja uspoređene su sa *shell* modelom i prikazane u Tab. 5.22. Na Sl. 5.50 prikazan je nelinearni odziv okvira pri djelovanju sile u pozitivnom smjeru  $F(+)$  za sva tri promatrana eksponenta. *Shell* model izvijanja pri djelovanju sile  $F$  u oba smjera prikazan je na Sl. 5.51.



a)

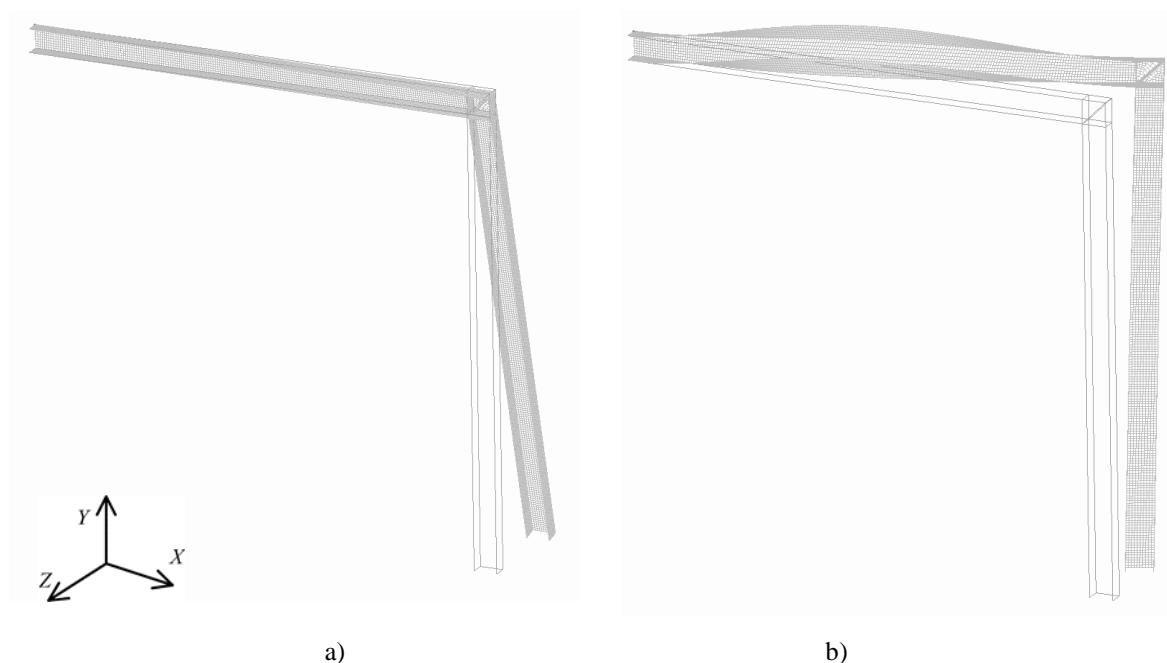


b)

Sl. 5.50 Uz primjer 9: Dijagram sila-pomak za različite eksponente  $p$ : a) kritična faza; b) postkritična faza



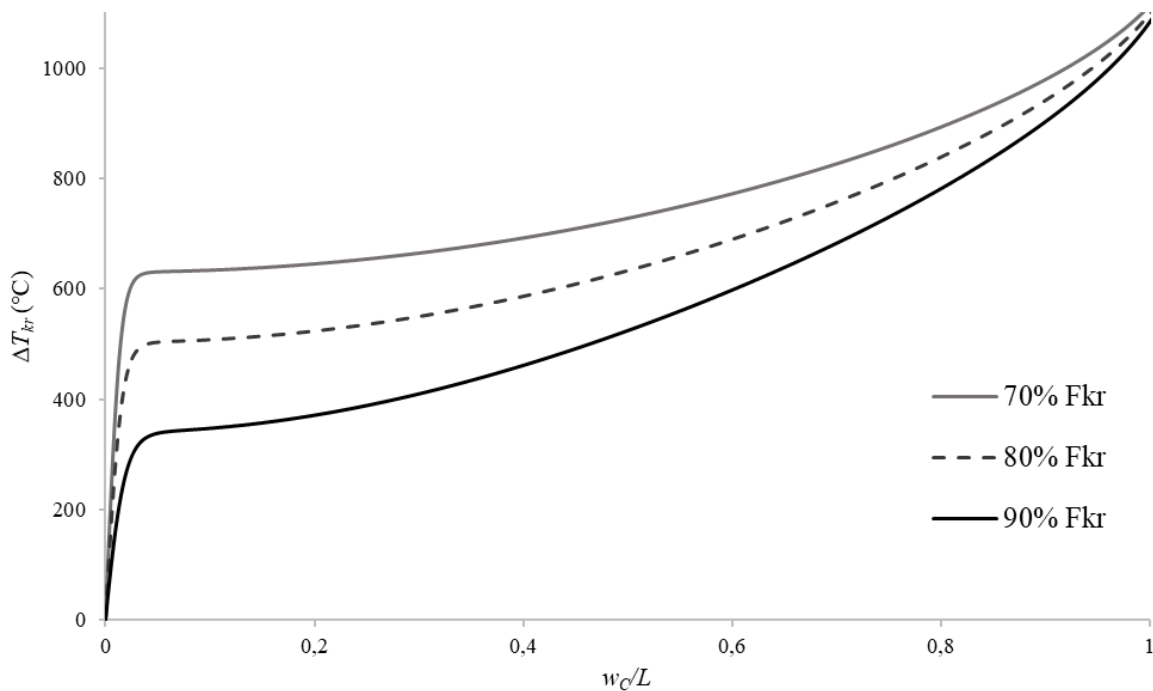
Nelinearni odziv okvira pri pozitivnom smjeru sile  $F$  i jednolikom zagrijavanju prikazan je na Sl. 5.52 za homogeni čelik SUS304 za tri razine kritične sile  $F$ . Da bi se iniciralo izvijanje okvira, dodana je mala sila  $\Delta F$  u presjeku C u smjeru osi  $Z$ . Kao i u prošlom primjeru, pri nižoj sili potrebna je viša temperatura izvijanja. Smatra se da svojstva materijala variraju ovisno o temperaturi prema izrazu (2.8).



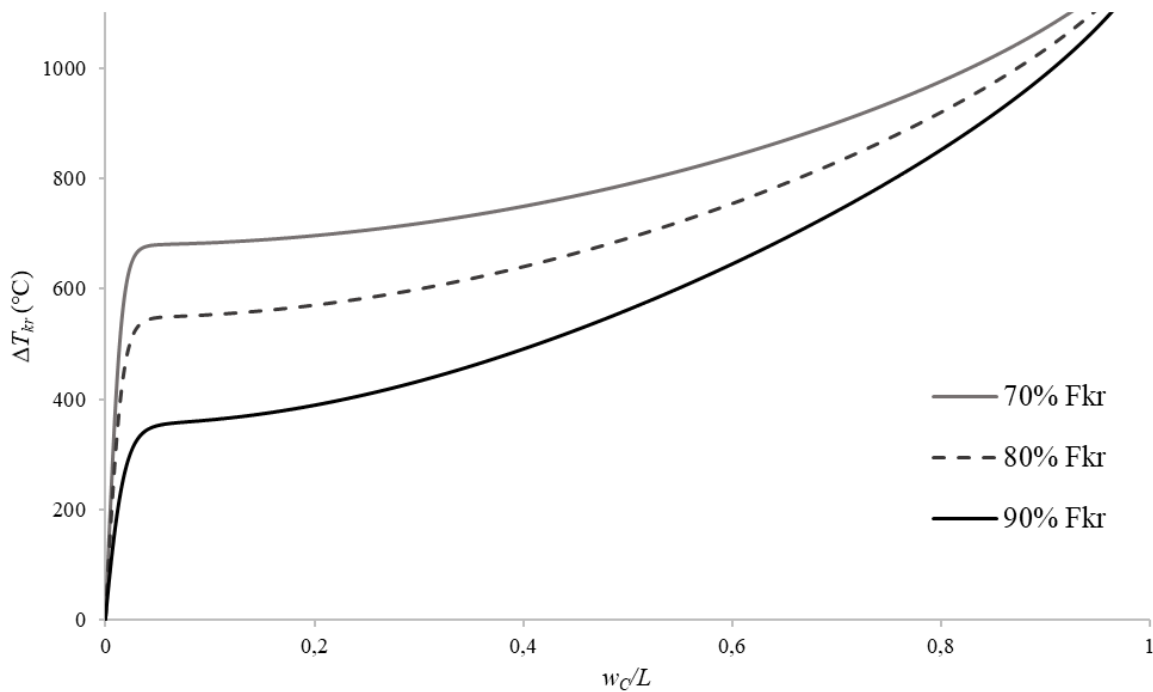
Sl. 5.51 Uz primjer 9: Shell model izvijanja L-okvira pri: a)  $F(+)$ , b)  $F(-)$

Prikazan je i nelinearni odziv okvira za FG materijale za eksponente  $p = 0,2$  na Sl. 5.53 i  $p = 0,5$  na Sl. 5.54. S obzirom na udio keramike u profilu okvira, uz više kritične sile izvijanja, postiže se i viša kritična temperatura izvijanja što je eksponent  $p$  veći.

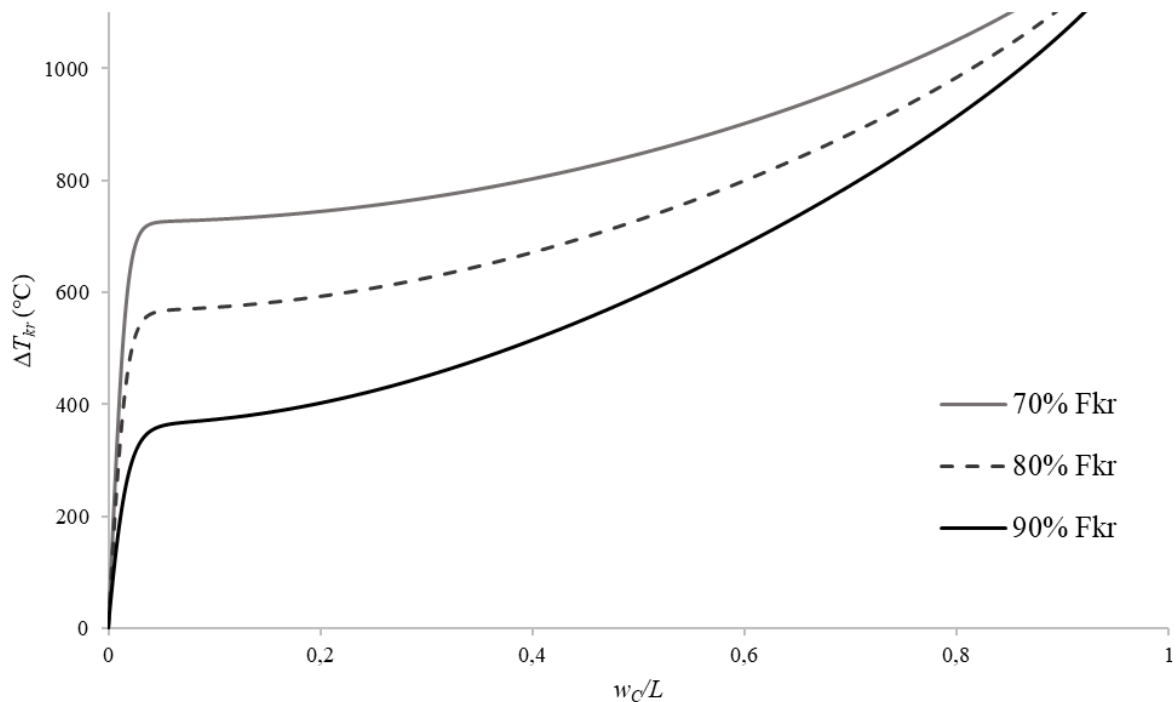
Provedena je analiza stabilnosti L-okvira pri djelovanju sile u pozitivnom smjeru ako je zagrijavanje linearno po visini stijenke profila. Pritom se zagrijavanje vrši po vanjskoj stijenci C-profila, uz metalni sloj. Ako usporedimo dijagrame za eksponent  $p = 0,2$  na Sl. 5.55, i  $p = 0,5$  na Sl. 5.56, primjećujemo više kritične temperature izvijanja nego kod uniformnog zagrijavanja.



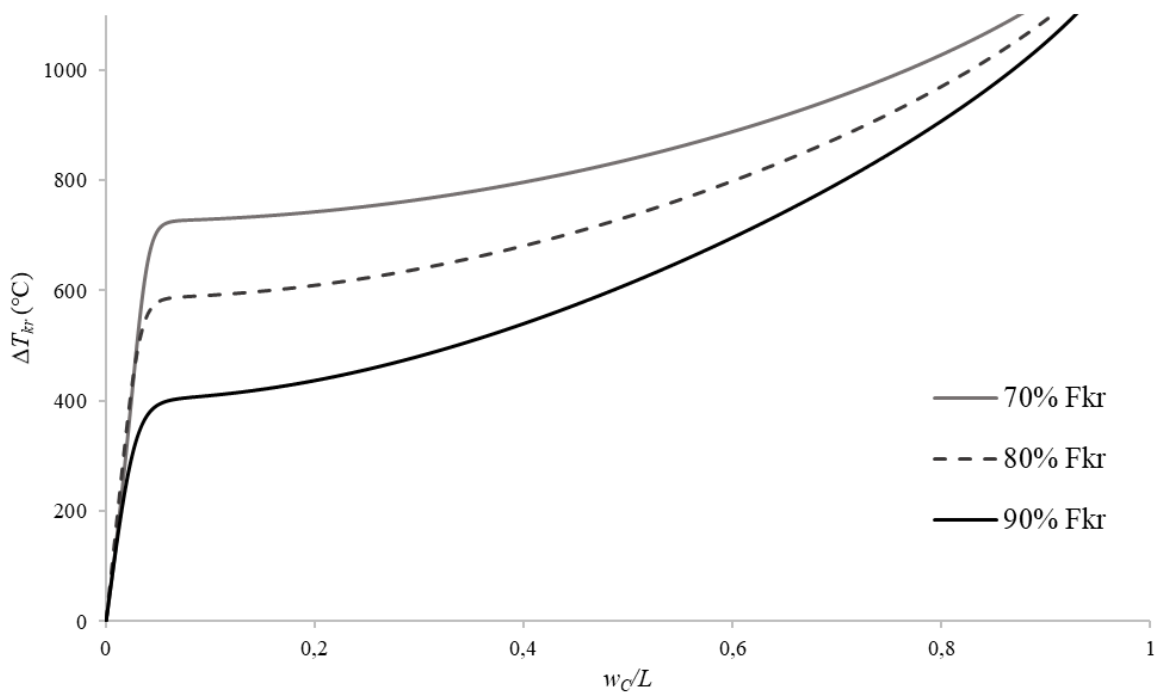
Sl. 5.52 Uz primjer 9: Dijagram temperatura-pomak za tri razine kritične sile  $F (+)$  za  $p = 0$ , UTR



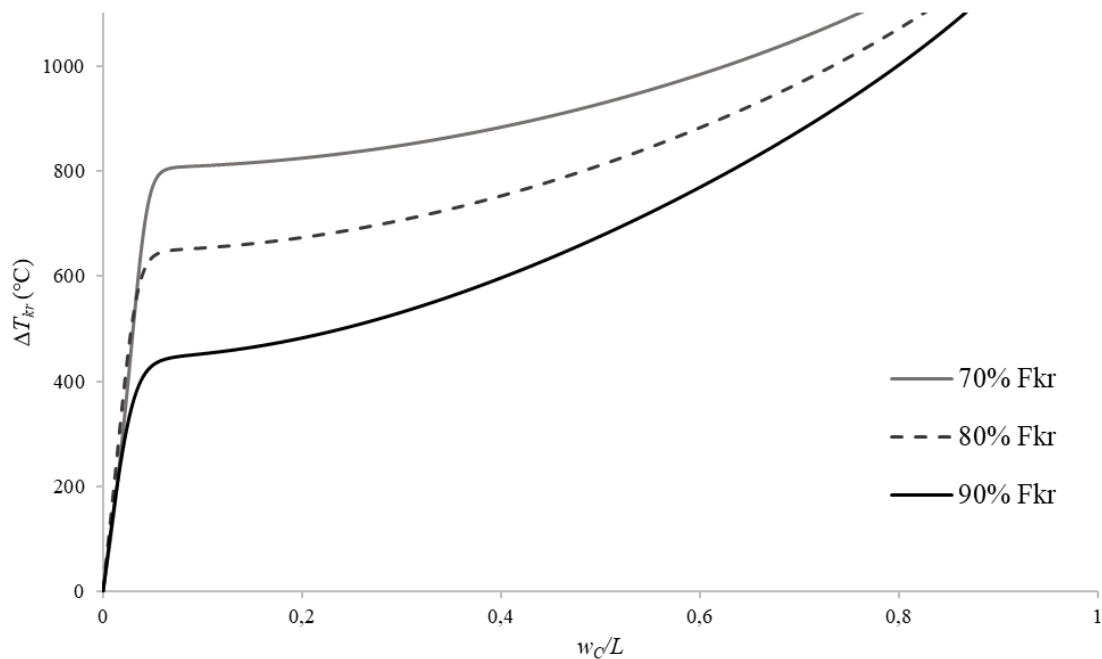
Sl. 5.53 Uz primjer 9: Dijagram temperatura-pomak za tri razine kritične sile  $F (+)$  za  $p = 0,2$ , UTR



Sl. 5.54 Uz primjer 9: Dijagram temperatura-pomak za tri razine kritične sile  $F (+)$  za  $p = 0,5$ , UTR

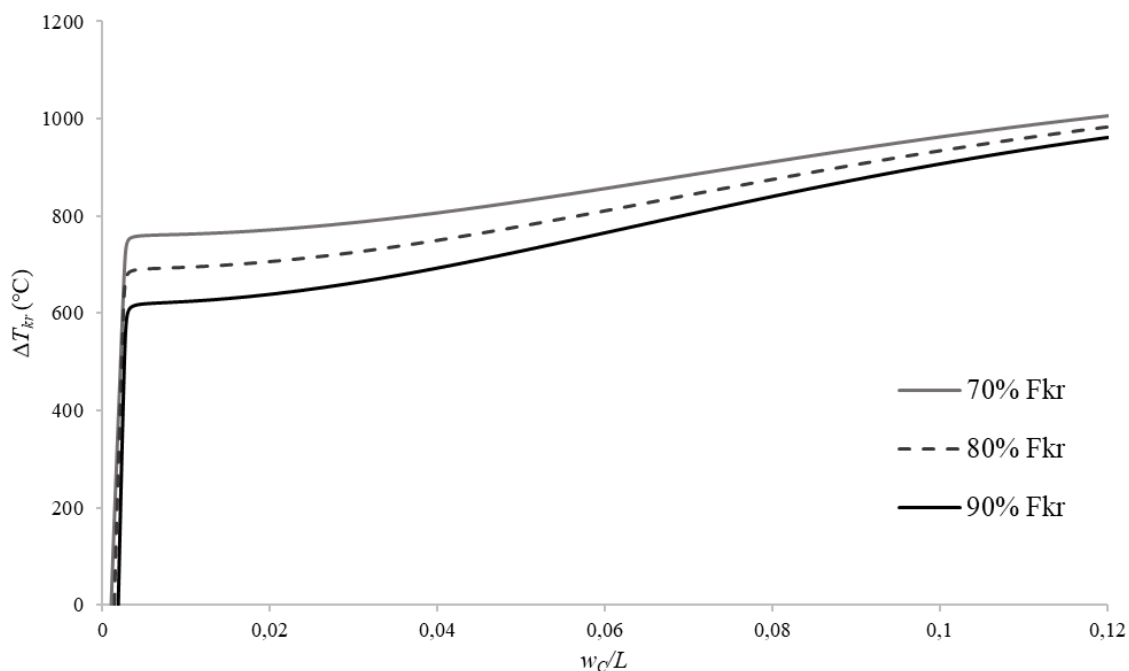


Sl. 5.55 Uz primjer 9: Dijagram temperatura-pomak za tri razine kritične sile  $F (+)$  za  $p = 0,2$ , LTR

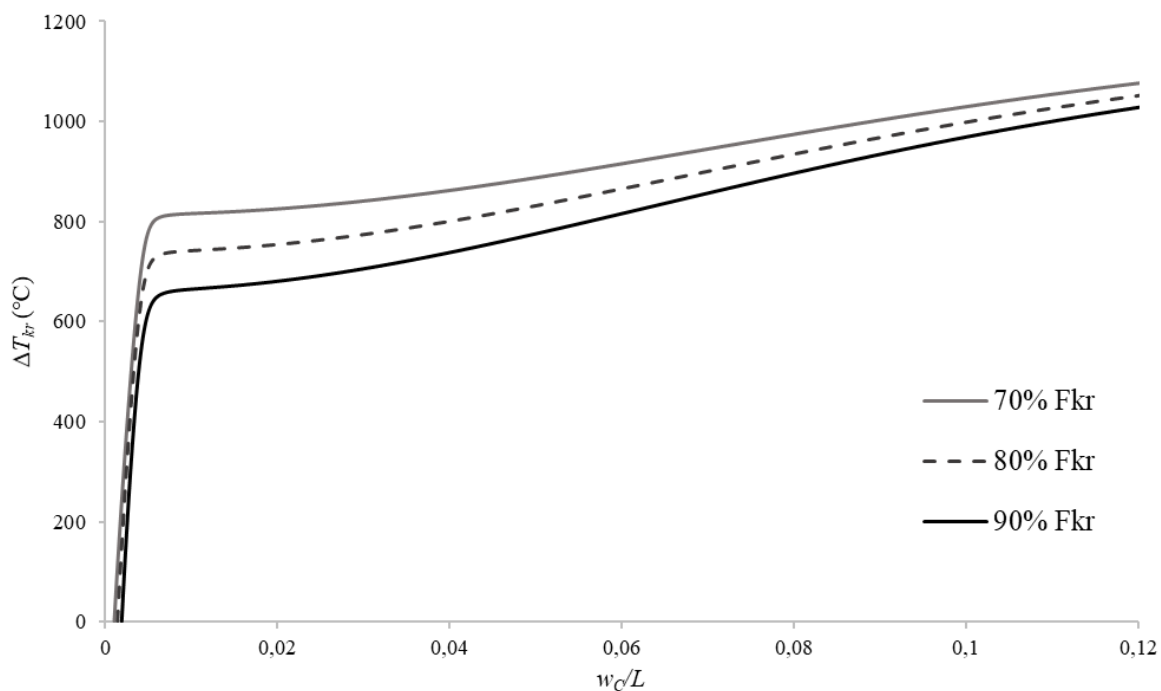


Sl. 5.56 Uz primjer 9: Dijagram temperatura-pomak za tri razine kritične sile  $F (+)$  za  $p = 0,5$ , LTR

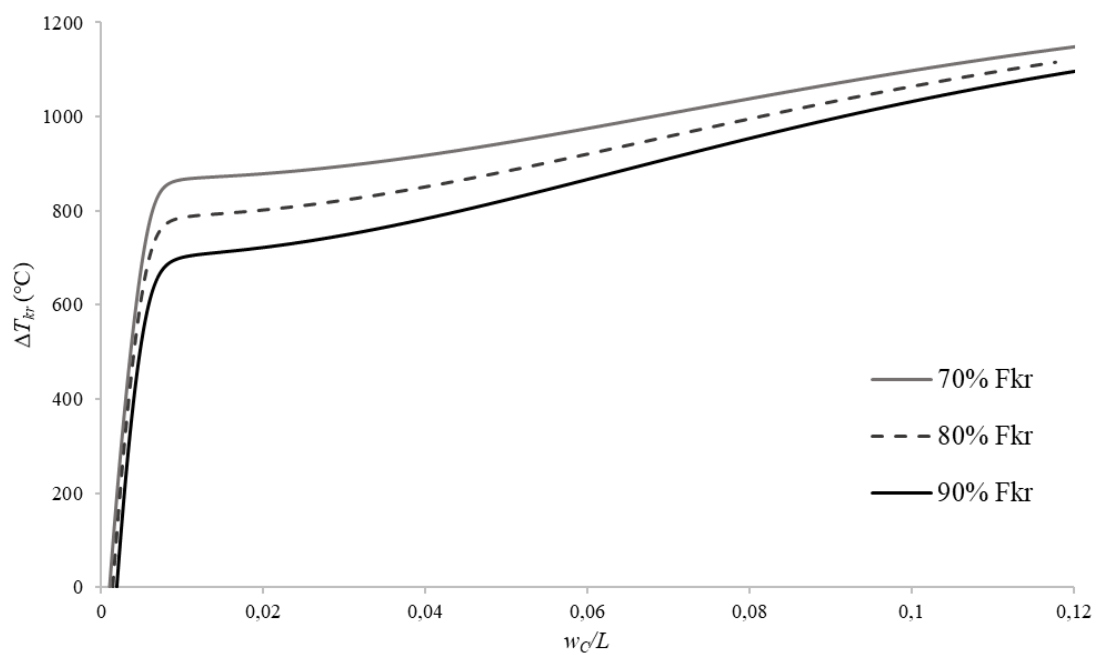
Za iste distribucije materijale provedena je analiza stabilnosti okvira ako je isti opterećen silom  $F$  u negativnom smjeru pri uniformnom zagrijavanju. Budući da se radi u drugom obliku izvijanja i da je pritom okvir krući, pri jednolikom zagrijavanju postižu se više kritične temperature izvijanja u odnosu na pozitivan smjer sile  $F$ . Na Sl. 5.57-Sl. 5.59 prikazani su nelinearni odzivi nosača za različite eksponente  $p$ .



Sl. 5.57 Uz primjer 9: Dijagram temperatura-pomak za tri razine kritične sile  $F (-)$  za  $p = 0$ , UTR



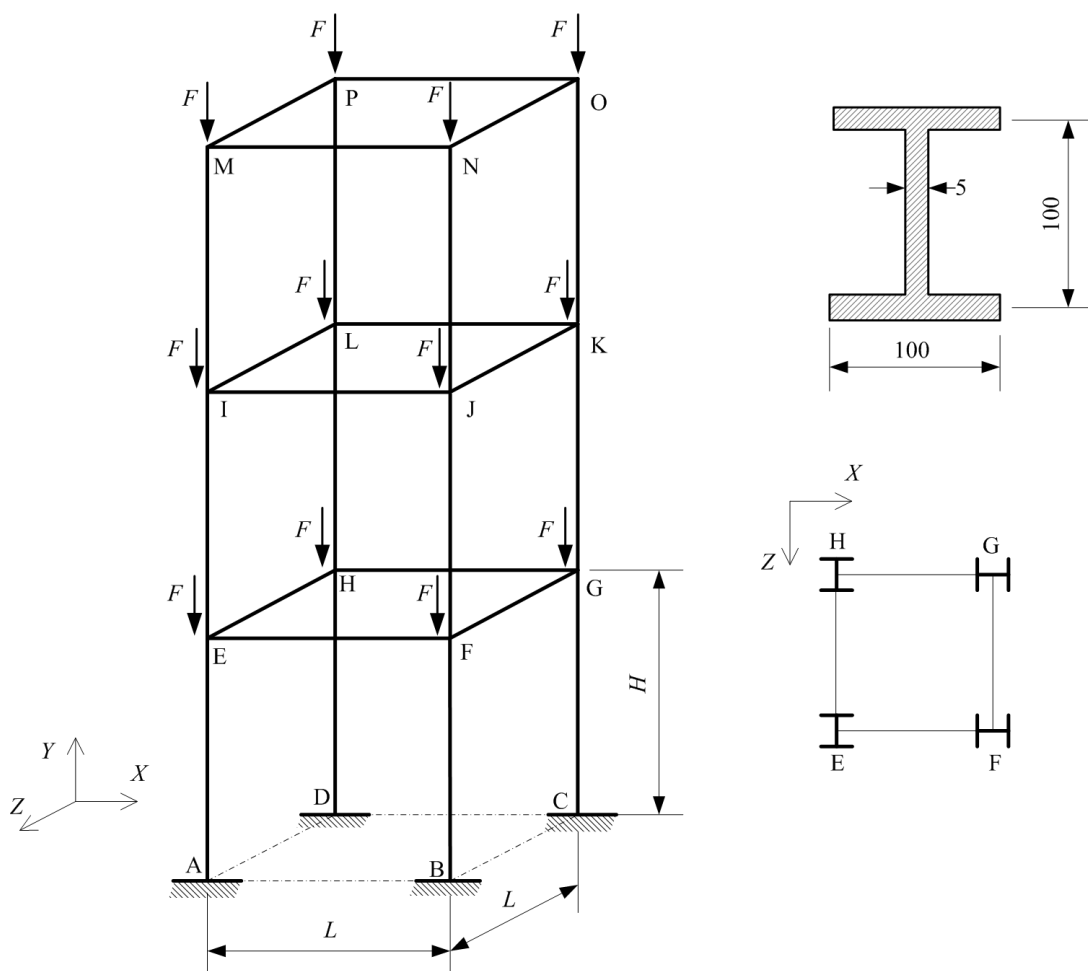
Sl. 5.58 Uz primjer 9: Dijagram temperatura-pomak za tri razine kritične sile  $F$  (-) za  $p = 0,2$ , UTR



Sl. 5.59 Uz primjer 9: Dijagram temperatura-pomak za tri razine kritične sile  $F$  (-) za  $p = 0,5$ , UTR

## 5.2.10. Primjer 10

Na Sl. 5.60 prikazan je troetažni prostorni okvir opterećen vertikalnim silama istog inteziteta  $F$ . Okvir je izrađen od I-profila. Visina stupova okvira iznosi  $H = 10$  m, a duljina horizontalnih greda iznosi  $L = 10$  m. Osim u osloncima, vitperenje je spriječeno i u ostalim spojevima od E do P. Struk i pojasevi profila izrađeni su od FG materijala SUS304 i  $Al_2O_3$  u obliku FG tipa 3 s metalnom jezgrom u sredini i FG plaštova koji variraju od čistog metala prema čistoj keramici na vanjskoj stijenci. Promatrana su tri slučaja distribucije materijala za eksponent  $p = 0$ ,  $p = 0,3$  i  $p = 3$ .

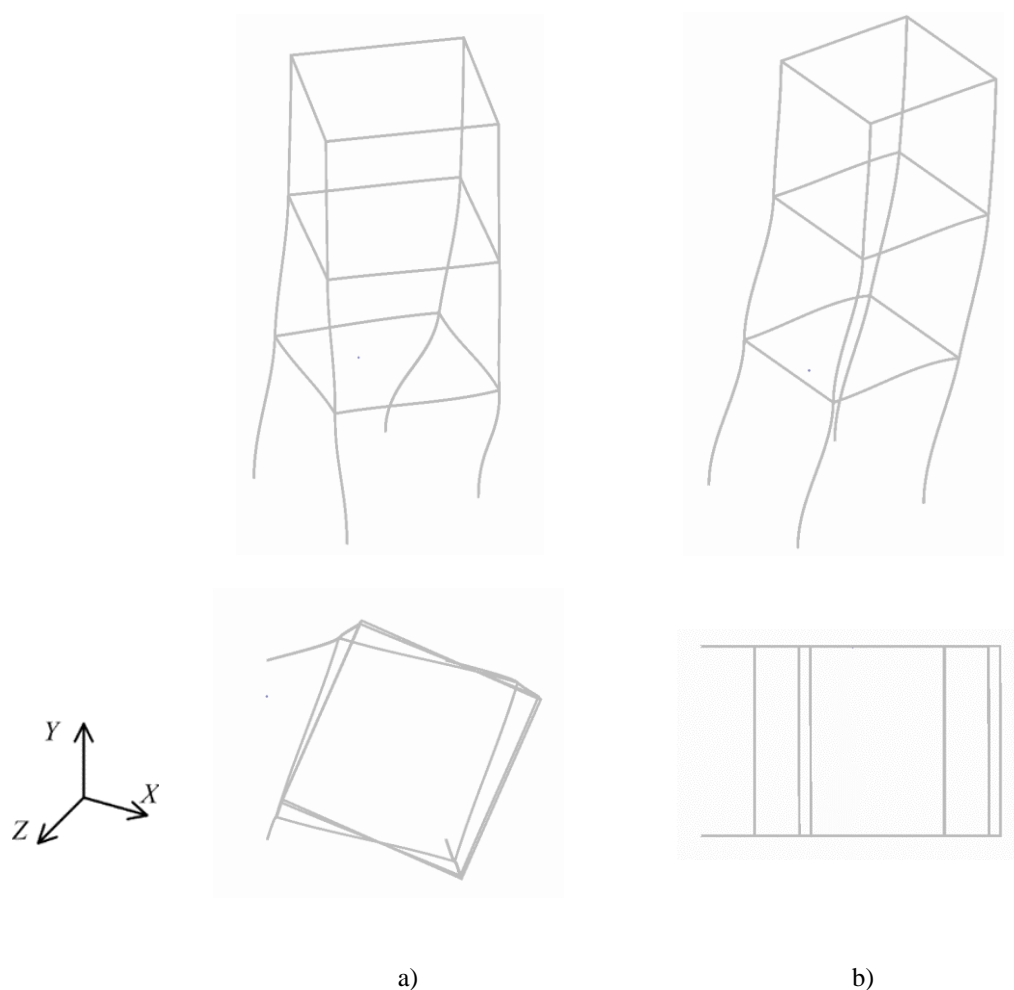
Sl. 5.60 Uz primjer 10: Prostorni okvir opterećen vertikalnim silama inteziteta  $F$ 

Gubitak stabilne deformacijske forme okvira kada vertikalne sile  $F$  dosegnu kritičnu vrijednost manifestira se u *twist-sway* obliku, kod kojeg se gornje etaže pomiču po pravcu osi  $X$  uz rotaciju oko osi  $Y$ , i *sway* obliku, gdje se gornje etaže pomiču u smjeru osi  $X$  bez rotacije oko osi  $Y$ . Pritom, za iniciranje *twist-sway* oblika gubitka stabilnosti, u presjecima E, I i M

pridodane su horizontalne sile u smjeru osi  $X$ , a u presjecima F, J i N horizontalne sile u negativnom smjeru osi  $Z$  inteziteta  $\Delta F = 0,001F$ . Za iniciranje *sway* oblika, u presjecima E, H, I, L, M i P pridodane su horizontalne sile u smjeru osi  $X$  inteziteta  $\Delta F = 0,001F$ . Usporedba rezultata sa *shell* modelom dana je u Tab. 5.23, na Sl. 5.61 prikazani su shell oblici izvijanja.

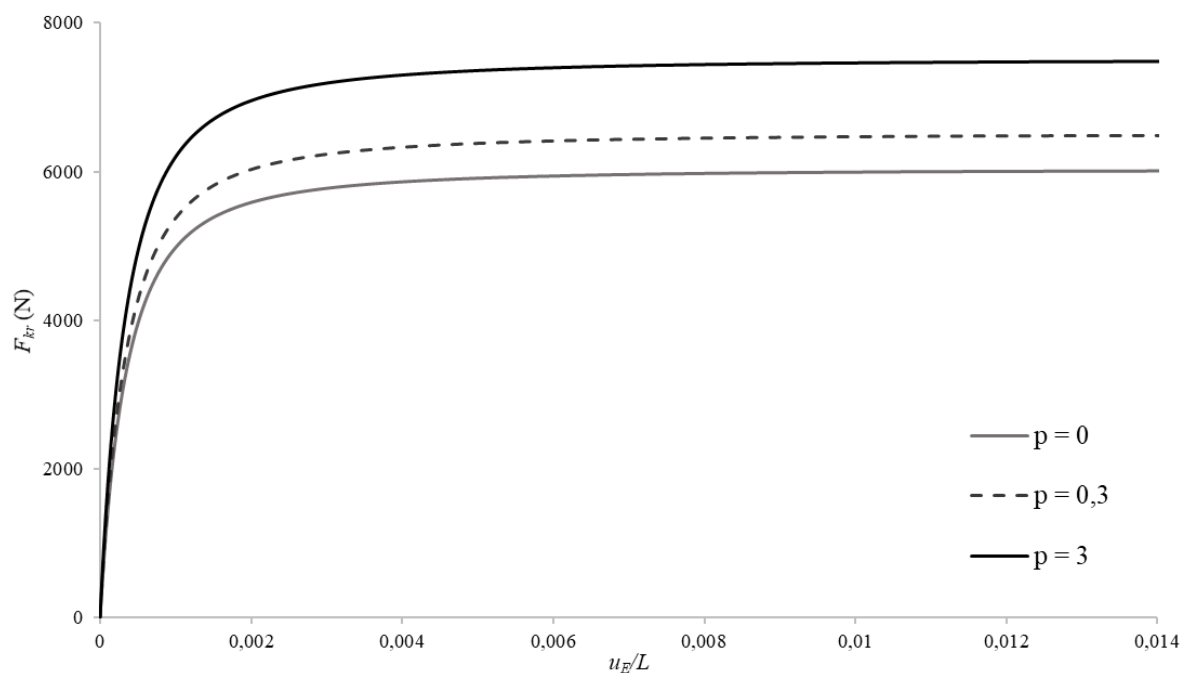
Tab. 5.23 Uz primjer 10: Kritične sile izvijanja prostornoga okvira

EkspONENT $p$	Oblik izvijanja	Thinwall FG	Shell model
$p = 0$	<i>Twist-sway</i>	6075,67	6148,38
	<i>Sway</i>	8727,68	8838,96
$p = 0,3$	<i>Twist-sway</i>	6557,62	6666,67
	<i>Sway</i>	9419,38	9579,07
$p = 3$	<i>Twist-sway</i>	7555,59	7704,73
	<i>Sway</i>	10852,40	11073,03

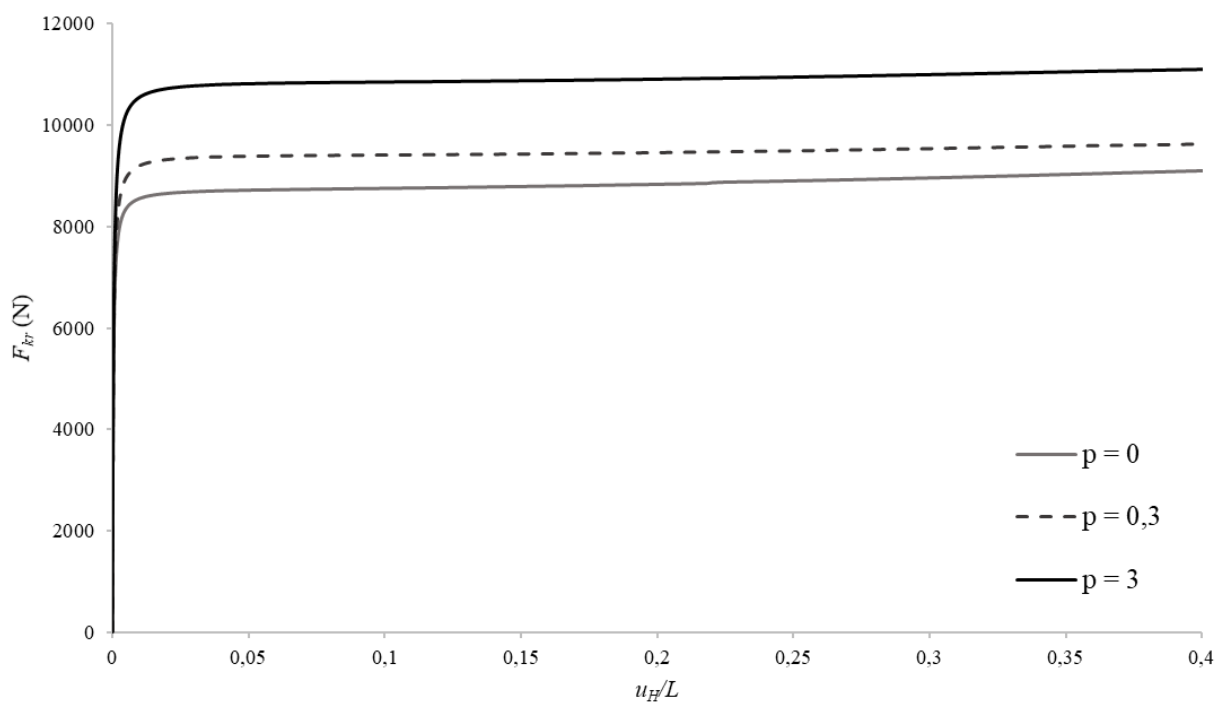


Sl. 5.61 Uz primjer 10: a) *twist-sway* oblik izvijanja; b) *sway* oblik izvijanja

Izvršena je nelinearna analiza stabilnosti okvira za oba oblika izvijanja. Na Sl. 5.62 prikazan je nelinearni odziv kod prvog oblika izvijanja gdje je promatran pomak točke E po pravcu osi X, a na Sl. 5.63 prikazan je drugi oblik izvijanja kod kojeg je promatran pomak točke H po pravcu osi X. Obje analize izvršene su za sva tri eksponenta  $p$ .



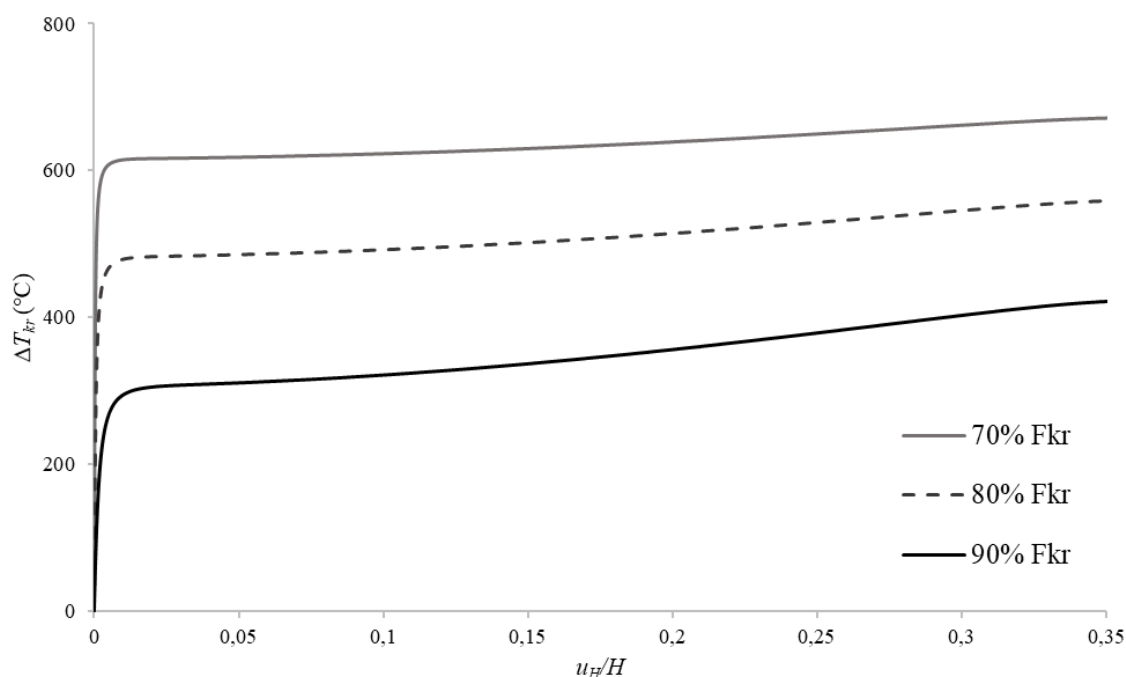
Sl. 5.62 Uz primjer 10: Nelinearni odziv twist-sway oblika izvijanja



Sl. 5.63 Uz primjer 10: Nelinearni odziv sway oblika izvijanja

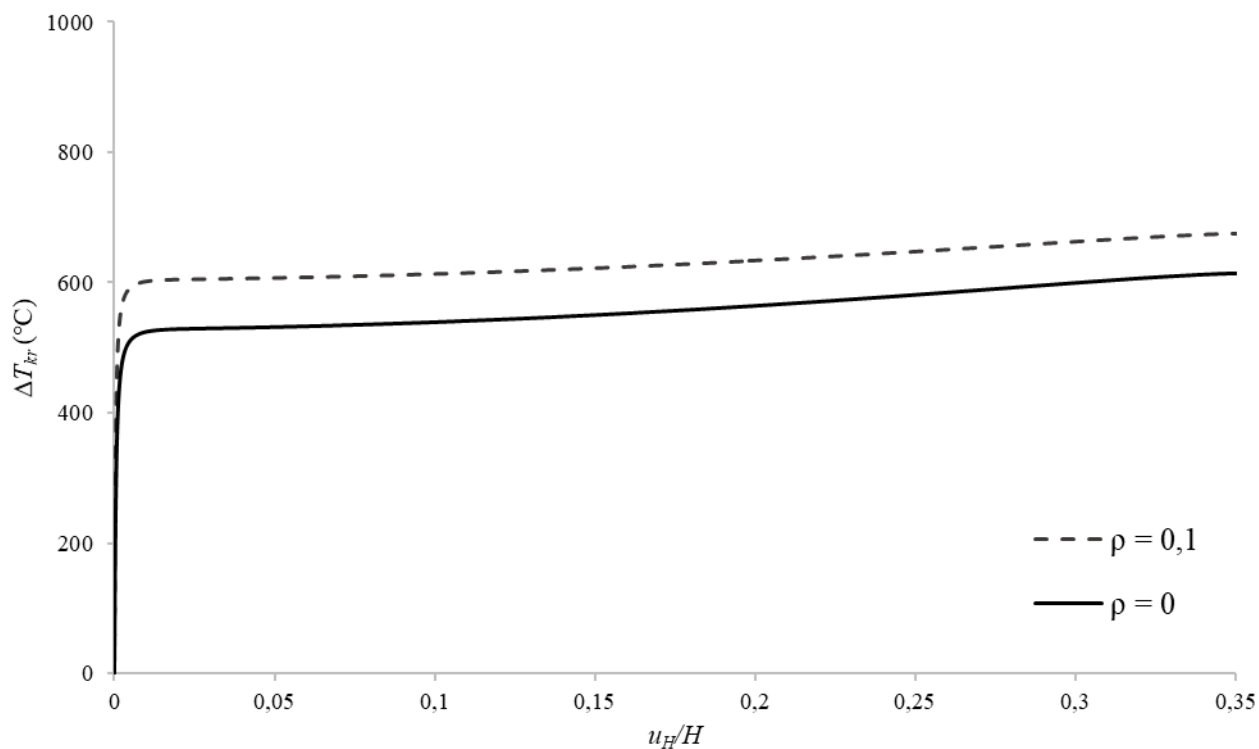


Promatran je nelinearni odziv okvira ako se stupovi uniformno zagrijavaju. Pritom se pretpostavlja da se materijalna svojstva mijenjaju s temperaturom. S obzirom na to da je u prethodnim primjerima pokazano da se za iste udjele kritične sile postiže ista kritična temperatura, sljedeći su rezultati prikazani samo za drugi oblik izvijanja troetažnog okvira. Na Sl. 5.64 prikazani su pomaci točke H po pravcu osi X s obzirom na temperaturu za tri razine kritične sile izvijanja i eksponent  $p = 0$  (homogeni metal). Što je sila koja djeluje na okvir niža, to je kritična temperatura izvijanja viša.

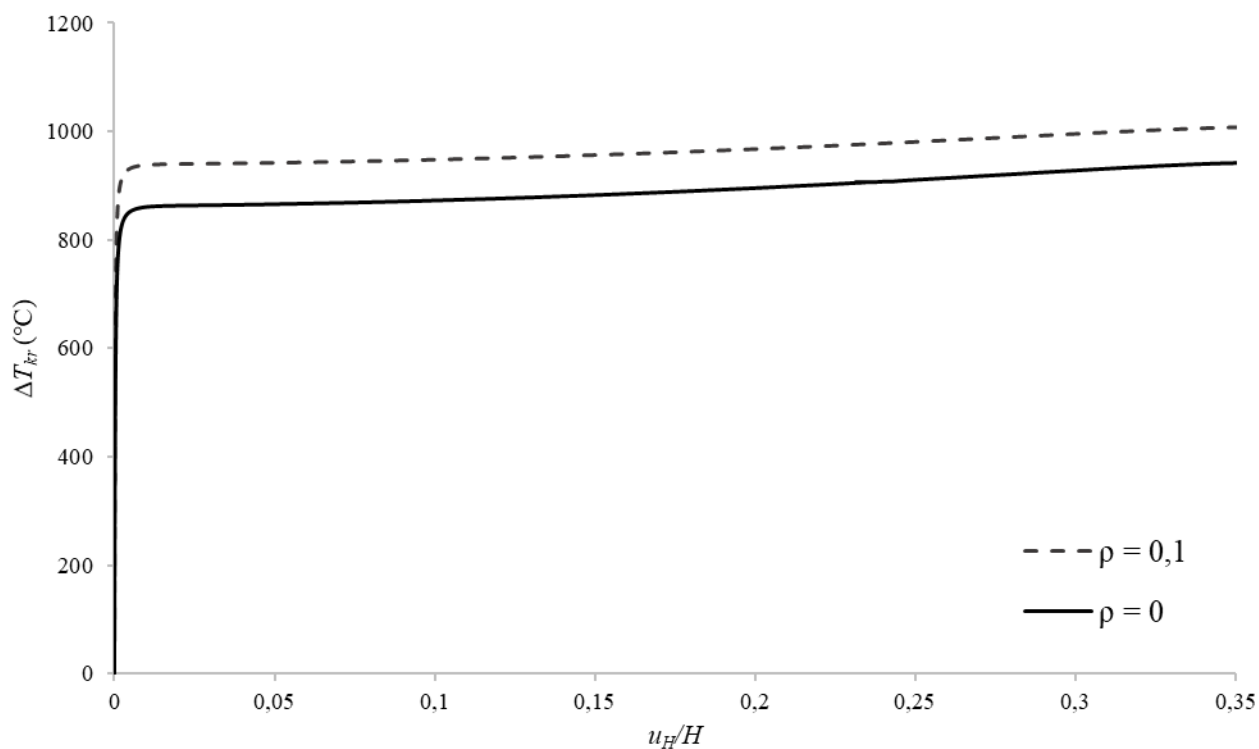


Sl. 5.64 Uz primjer 10: Dijagram temperatura-pomak za tri razine kritične sile  $F$  za  $p = 0$ , UTR

Zatim je izvršena analiza odziva okvira za eksponent  $p = 0,3$  pri sili od  $80\% F_{kr}$ , te za eksponent  $p = 3$  pri sili od  $70\% F_{kr}$ . Dana je i usporedba s poroznim materijalom ako je koeficijent poroznosti  $\rho = 0,1$ . S porastom eksponenta  $p$  raste udio keramike u kompozitnom materijalu pa se postižu i više kritične temperature izvijanja kod eksponent  $p = 3$ . Kao što je očekivano, porozni materijali slabije provode toplinu te su vrijednost kritične temperature više nego kod savršenih materijala. Usporedba nelinearnog odziva savršenog i poroznog materijala prikazana je na Sl. 5.65 za eksponent  $p = 0,3$ , odnosno na Sl. 5.66 za eksponent  $p = 3$ .

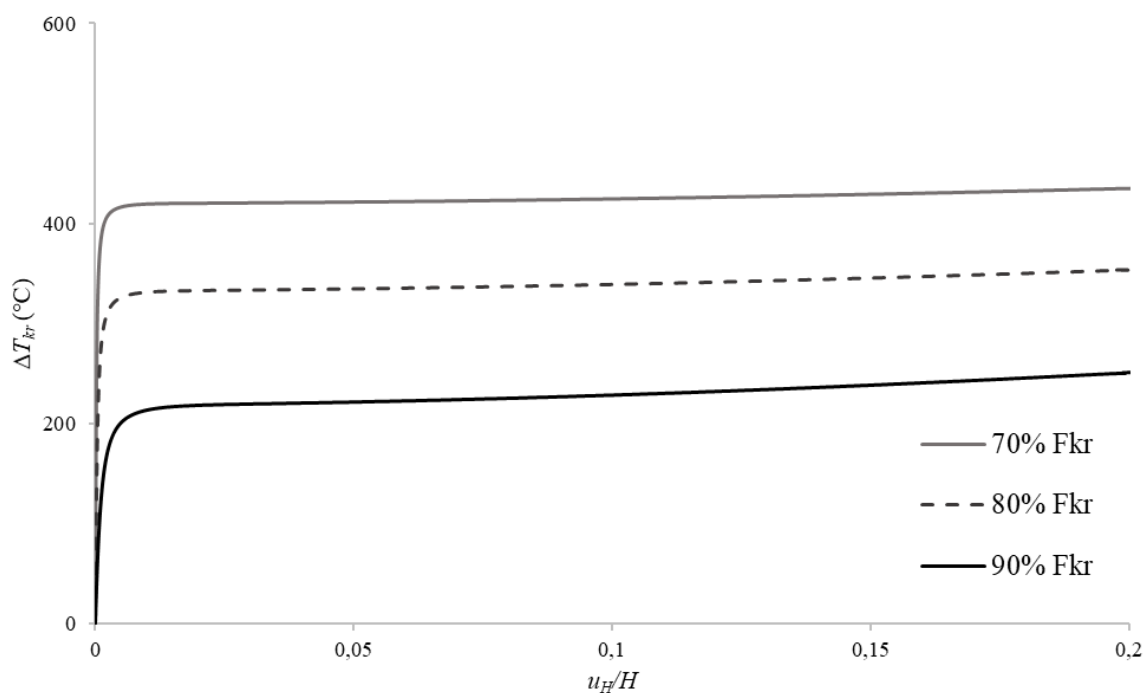


Sl. 5.65 Uz primjer 10: Usporedba savršenog i poroznog materijala za eksponent  $p = 0,3$  pri 80%  $F_{kr}$ , UTR



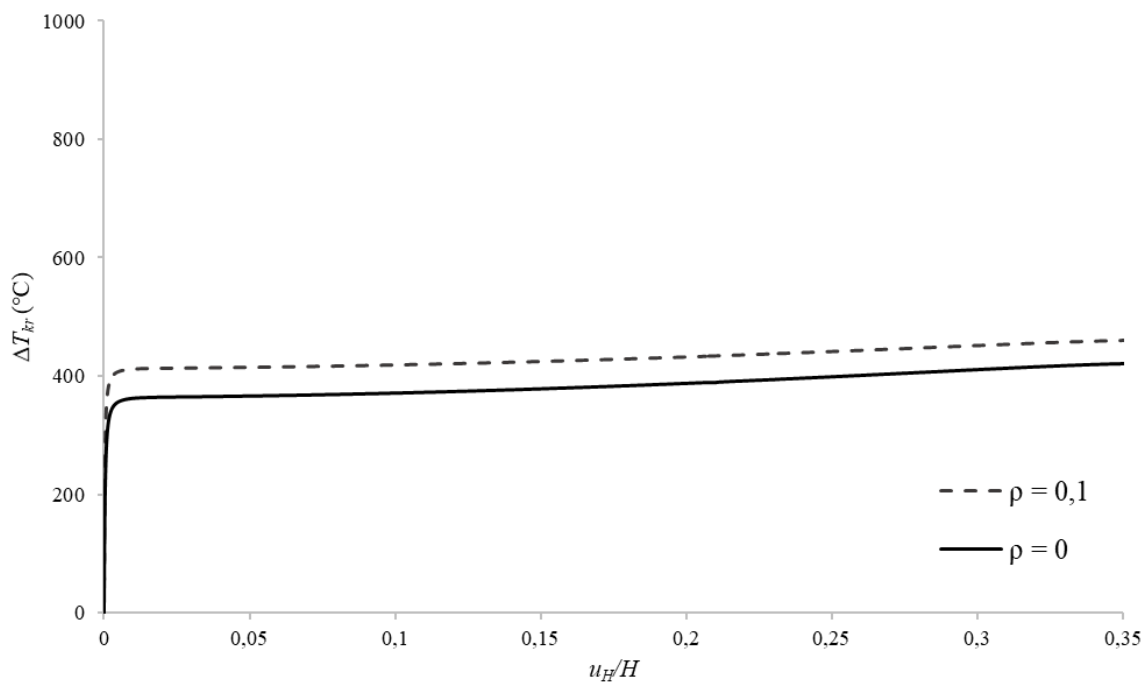
Sl. 5.66 Uz primjer 10: Usporedba savršenog i poroznog materijala za eksponent  $p = 3$  pri 70%  $F_{kr}$ , UTR

Nadalje je promatran odziv okvira ako se stupovi zagrijavaju linearno duž aksijalne osi stupa. Pritom temperatura raste u presjecima A, B, C i D dok se u presjecima M, N, O, i P temperatura drži konstantnom. Na Sl. 5.67 prikazan je nelinearan odziv za različite razine kritične sile  $F$  i eksponent  $p = 0$ . Usporedbom kritičnih temperatura izvijanja pri linearnom i uniformnom zagrijavanju stupova na Sl. 5.64 možemo uočiti da su temperature više pri uniformnom zagrijavanju.

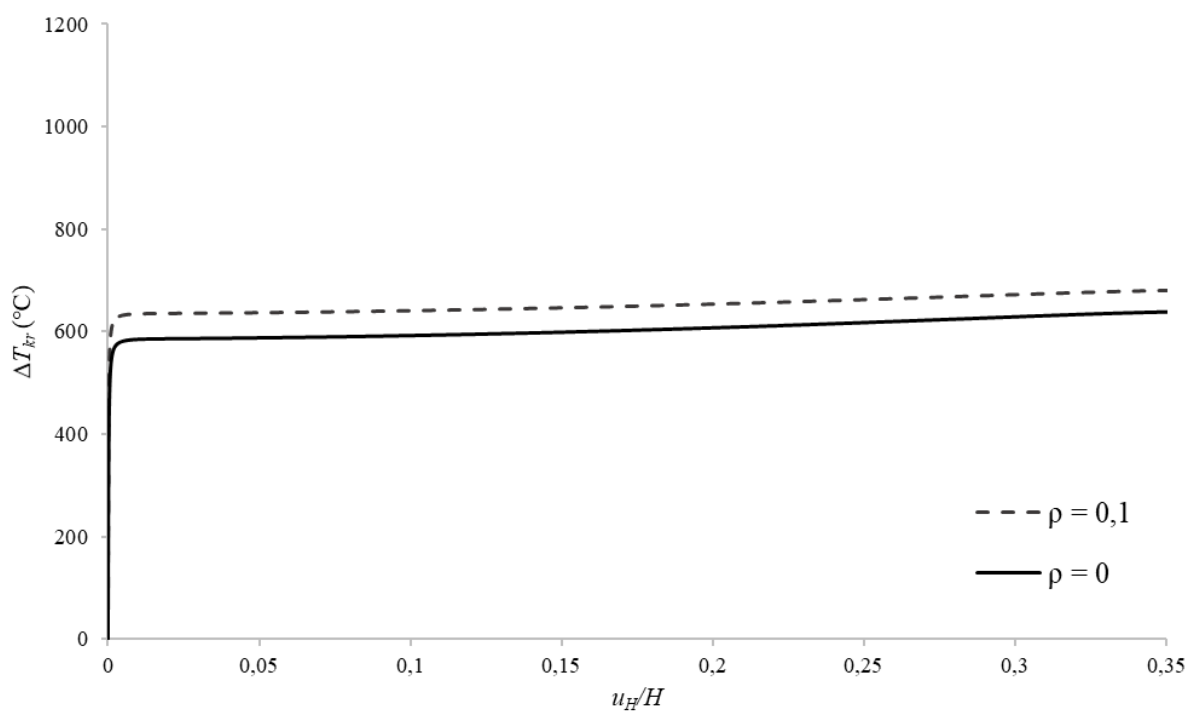


Sl. 5.67 Uz primjer 10: Dijagram temperatura-pomak za tri razine kritične sile  $F$  za  $p = 0$ , LTR

Analiza je dodatno izvršena za FG materijale ako je  $p = 0,3$  i  $p = 3$  kao kod jednolikog zagrijavanja stupova. Temperature izvijanja su niže pri linearnom zagrijavanju, ali porozni materijali imaju veću otpornost na toplinsko izvijanje nego savršeni. Na Sl. 5.68 prikazani su rezultati za linearno zagrijavanje duž stupova konstrukcije ako je eksponent distribucije materijala  $p = 0,3$ , a na Sl. 5.69 za eksponent  $p = 3$ .



Sl. 5.68 Uz primjer 10: Usporedba savršenog i poroznog materijala za eksponent  $p = 0,3$  pri 80%  $F_{kr}$ , LTR



Sl. 5.69 Uz primjer 10: Usporedba savršenog i poroznog materijala za eksponent  $p = 3$  pri 70%  $F_{kr}$ , LTR



## 6. ZAKLJUČAK

---

U ovom doktorskom radu prikazana je konačnoelementna analiza stabilnosti tankostjenih kompozitnih FG grednih konstrukcija. Primjenom Euler-Bernoullijeve teorije savijanja i Saint-Venantove teorije uvijanja izveden je gredni konačni element sa četrnaest stupnjeva slobode gibanja. Geometrijska nelinearnost uvedena je kroz nelinearno polje pomaka poprečnog presjeka koje uključuje efekt velikih rotacija uz pretpostavku da su pritom deformacije male. Također se pretpostavlja da je poprečni presjek nedeformabilan u svojoj ravnini te da je kutna deformacija srednje plohe jednaka nuli. Ravnotežne jednadžbe grednog konačnog elementa izvedene su primjenom principa virtualnih radova. Model je primjenjiv za otvorene i zatvorene tankostjene poprečne presjeke, različite distribucije materijala po visini stijenke nosača, raspodjele temperatura i rubne uvjete.

Izvedena je linearizirana i nelinearna analiza stabilnosti. U lineariziranoj analizi stabilnosti problem se svodi na matrični problem vlastitih vrijednosti pri čemu se određuju vlastite vrijednosti koje predstavljaju kritična opterećenja i pripadajući vlastiti vektori koji predstavljaju oblike izvijanja. Za opisivanje nelinearnog ponašanja upotrebljena je inkrementalno-iterativna procedura, tj. *Newton-Raphsonova* metoda, a za opisivanje inkrementalnog procesa korištena je *updated Lagrangian* formulacija. Kod nelinearne analize potrebno je uvesti poremećaj radi iniciranja deformacijske forme kod koje promatrana konstrukcija gubi stabilnosti.

Znanstveni doprinos ovog rada postignut je u obliku izvornog numeričkog modela baziranog na metodi konačnih elemenata temeljem kojeg je nadograđen postojeći računalni program razvijan na Zavodu za tehničku mehaniku Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci. Nadograđeni računalni program THINWALL FG verificiran je na odabranim primjerima, a rezultati su uspoređeni s rezultatima dostupnima u literaturi i onima dobivenim primjenom *shell* i *solid* komercijalnih rješavača.

Računalni program THINWALL FG predstavlja važan doprinos tehničkim znanostima u vidu analize nelinearne stabilnosti grednih konstrukcija. THINWALL FG već u trenutnoj formi pruža inženjerskoj struci pouzdani alat za opisivanje i analizu geometrijski nelinearnog ponašanja FG kompozitnih grednih nosača u okolišu s promjenjivom temperaturom. U odnosu na komercijalne rješavače temeljene na *shell* i *solid* konačnoelementnim modelima koji imaju memorijska ograničenja te analize vremenski mogu biti vrlo dugotrajne, THINWALL FG

omogućava efikasniju i bržu analiza obrađivanih problema.

Ipak, postoji potreba daljnjeg rada u smislu proširivanja algoritma na način da se uključe posmične deformacije kod savijanja silama i plastičnosti materijala. Numerički se model također namjerava nadograditi automatskim podešavanjem koraka temperature što bi dodatno ubrzalo numerički proces. Želja je autorice prošiti postojeći model i na ostale vrste kompozitnih materijala, kao što su primjerice laminati.

## Popis literature

---

- [1] N.A. Alfutov, *Stability of Elastic Structures*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [2] A.A. Atai, A. Nikranjbar, R. Kasiri, Buckling and post-buckling behaviour of semicircular functionally graded material arches: a theoretical study, *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci.* 226 (2012) 607–614.
- [3] K.J. Bathe, *Finite Element Procedure*, Klaus-Jurgen Bathe, 2007.
- [4] M.B. Bever, P.E. Duwez, *Invited Review Gradients in Composite Materials*, 1972.
- [5] V. Birman, L.W. Byrd, *Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials*, *Appl. Mech. Rev.* 60 (2007) 195–216.
- [6] S.K. Bohidar, R. Sharma, P.R. Mishra, *Functionally Graded Materials: A Critical Review*, *Int. J. Res.* 1 (2014) 289–301.
- [7] E. Carrera, A. Pagani, R. Augello, Large deflection and post-buckling of thin-walled structures by finite elements with node-dependent kinematics, *Acta Mech.* 232 (2021) 591–617.
- [8] S.C. Chapra, R.P. Canale, *Numerical Methods for Engineerings*, McGraw-Hill, Boston, 1998.
- [9] W.-F. Chen, T. Atsuta, *Theory of Beam-Columns Volume 2: Space Behavior and Design*, J. Ross Publishing, 2008.
- [10] S.E. Esfahani, Y. Kiani, M.R. Eslami, Non-linear thermal stability analysis of temperature dependent FGM beams supported on non-linear hardening elastic foundations, *Int. J. Mech. Sci.* 69 (2013) 10–20.
- [11] M.R. Eslami, *Buckling and postbuckling of beams, plates and shells*, Springer Cham, Cham, Switzerland, 2018.
- [12] A. Fallah, M.M. Aghdam, Thermo-mechanical buckling and nonlinear free vibration analysis of functionally graded beams on nonlinear elastic foundation, *Compos. Part B Eng.* 43 (2012) 1523–1530.
- [13] Y. Fu, J. Wang, Y. Mao, Nonlinear analysis of buckling, free vibration and dynamic stability for the piezoelectric functionally graded beams in thermal environment, *Appl. Math. Model.* 36 (2012) 4324–4340.
- [14] M.M. Gasik, *Functionally Graded Materials: bulk processing techniques*, *Int. J. Mater. Prod. Technol.* 39 (2010) 20–29.



- [15] P.S. Ghatage, V.R. Kar, P.E. Sudhagar, On the numerical modelling and analysis of multi-directional functionally graded composite structures : A review, *Compos. Struct.* (2019) 111837.
- [16] S.E. Ghiasian, Y. Kiani, M.R. Eslami, Dynamic buckling of suddenly heated or compressed FGM beams resting on nonlinear elastic foundation, *Compos. Struct.* 106 (2013) 225–234.
- [17] S.E. Ghiasian, Y. Kiani, M.R. Eslami, Nonlinear thermal dynamic buckling of FGM beams, *Eur. J. Mech. A/Solids.* 54 (2015) 232–242.
- [18] G. Giunta, D. Crisafulli, S. Belouettar, E. Carrera, A thermo-mechanical analysis of functionally graded beams via hierarchical modelling, *Compos. Struct.* 95 (2013) 676–690.
- [19] A. Gjelsvik, *The theory of thin-walled bars*, Wiley, New York, 1981.
- [20] D.W. Hutmacher, M. Sittinger, M. V Risbud, Scaffold-based tissue engineering : rationale for computer-aided design and solid free-form fabrication systems, *TRENDS Biotechnol.* 22 (2004) 354–362.
- [21] W. Jiang, R. Nair, P. Molian, Functionally graded mold inserts by laser-based flexible fabrication : processing modeling , structural analysis , and performance evaluation, *J. Mater. Process. Technol.* 166 (2005) 286–293.
- [22] R.M. Jones, *Mechanics of Composite Materials*, 2nd ed., Taylor & Francis, New York, 1999.
- [23] V. Kahya, M. Turan, Finite element model for vibration and buckling of functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory, *Compos. Part B Eng.* 109 (2017) 108–115.
- [24] Y. Kiani, M.R. Eslami, Thermal buckling analysis of functionally graded material beams, *Int. J. Mech. Mater. Des.* 6 (2010) 229–238.
- [25] Y. Kiani, M.R. Eslami, Thermomechanical Buckling of temperature-dependent FGM Beams, 10 (2013) 223–246.
- [26] B. Kieback, A. Neubrand, H. Riedel, Processing techniques for functionally graded materials *℄*, *Mater. Sci. Eng. A.* 362 (2003) 81–105.
- [27] G.E. Knoppers, J.W. Gunnink, W.P. Van Vliet, I. Prototyping, The reality of functionally graded material products, *TNO Sci. Ind.* (n.d.) 38–43.
- [28] M. Koizumi, The Concept of FGM, *Ceram. Trans. Funct. Gradient Mater.* 34 (1993) 3–10.

- [29] M. Koizumi, FGM activities in Japan, *Compos. Part B*. 28B (1997) 1–4.
- [30] S. Kvaternik Simonetti, G. Turkalj, D. Lanc, Thin-Walled Structures Thermal buckling analysis of thin-walled closed section FG beam-type structures, *Thin-Walled Struct.* 181 (2022) 110075.
- [31] D. Lanc, G. Turkalj, I. Pesic, Global buckling analysis model for thin-walled composite laminated beam type structures, *Compos. Struct.* 111 (2014) 371–380.
- [32] D. Lanc, G. Turkalj, T.P. Vo, J. Brnić, Nonlinear buckling behaviours of thin-walled functionally graded open section beams, *Compos. Struct.* 152 (2016) 829–839.
- [33] D. Lanc, T.P. Vo, G. Turkalj, J. Lee, Buckling analysis of thin-walled functionally graded sandwich box beams, *Thin-Walled Struct.* 86 (2015) 148–156.
- [34] S.R. Li, J.H. Zhang, Y.G. Zhao, Thermal post-buckling of functionally graded material Timoshenko beams, *Appl. Math. Mech. (English Ed.)* 27 (2006) 803–810.
- [35] L. Librescu, S.Y. Oh, O. Song, Thin-walled beams made of functionally graded materials and operating in a high temperature environment: Vibration and stability, *J. Therm. Stress.* 28 (2005) 649–712.
- [36] X. Lin, T.M. Yue, Phase formation and microstructure evolution in laser rapid forming of graded SS316L / Rene88DT alloy, *Mater. Sci. Eng. A*. 402 (2005) 294–306.
- [37] L.S. Liu, Q.J. Zhang, P.C. Zhai, The Optimization Design on Metal/Ceramic FGM Armor with Neural Net and Conjugate Gradient Method, *Mater. Sci. Forum.* 423–425 (2003) 791,796.
- [38] L.S. Ma, D.W. Lee, A further discussion of nonlinear mechanical behavior for FGM beams under in-plane thermal loading, *Compos. Struct.* 93 (2011) 831–842.
- [39] R.M. Mahamood, E.T. Akinlabi, *Functionally Graded Materials*, Springer, Porto Alegre, Brazil, 2017.
- [40] R.M. Mahamood, E.T.A. Member, M. Shukla, S. Pityana, *Functionally Graded Material : An Overview*, in: *Proc. World Congr. Eng.*, 2012: pp. 2–6.
- [41] P. Malekzadeh, S.M. Monajjemzadeh, Dynamic response of functionally graded beams in a thermal environment under a moving load, *Mech. Adv. Mater. Struct.* 23 (2016) 248–258.
- [42] A.J. Markworth, K.S. Ramesh, W.P. Parks, Review Modelling studies applied to functionally graded materials, *J. Mater. Process. Technol.* 30 (1995) 2183–2193.
- [43] I.S. Masao Yamanoushi, Mitsue Koizumi, Toshio Hirai, *Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials*, Japan, 1990.

- [44] Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*, Springer US, New York, 1999.
- [45] D. N.-S. Hon, N. Shiraishi, *Wood and Cellulosic Chemistry*, 2nd ed., Revised and Expanded, Marcel Dekker, New York and Basel, 2001.
- [46] M. Naebe, K. Shirvanimoghaddam, *Functionally graded materials: A review of fabrication and properties*, *Appl. Mater. Today*. 5 (2016) 223–245.
- [47] M.M. Nemat-alla, M.H. Ata, M.R. Bayoumi, W. Khair-elden, *Powder Metallurgical Fabrication and Microstructural Investigations of Aluminum / Steel Functionally Graded Material*, *Mater. Sci. Appl.* 2 (2011) 1708–1718.
- [48] N.D. Nguyen, T.P. Vo, T.K. Nguyen, *An improved shear deformable theory for bending and buckling response of thin-walled FG sandwich I-beams resting on the elastic foundation*, *Compos. Struct.* 254 (2020) 112823.
- [49] T.T. Nguyen, N. Il Kim, J. Lee, *Analysis of thin-walled open-section beams with functionally graded materials*, *Compos. Struct.* 138 (2016) 75–83.
- [50] M. Niino, R. Watanabe, Y. Doi, *Fabrication of a High Pressure Thrust Chamber by the CIP Forming Method*, *AIAA Pap.* (1984) 84–1227.
- [51] N. Noda, *Thermal Stresses In Functionally Graded*, *J. Therm. Stress.* 22 (1999) 477–512.
- [52] M. Norfaieqwan, B. Kamarudin, J. Syed, M. Ali, A. Aabid, Y.E. Ibrahim, *Buckling Analysis of a Thin-Walled Structure Using Finite Element Method and Design of Experiments*, *Aerospace*. 9 (2022) 1–31.
- [53] A. Pagani, R. Augello, E. Carrera, *Frequency and mode change in the large deflection and post-buckling of compact and thin-walled beams*, *J. Sound Vib.* 432 (2018) 88–104.
- [54] A. Paul, D. Das, *Non-linear thermal post-buckling analysis of FGM Timoshenko beam under non-uniform temperature rise across thickness*, *Eng. Sci. Technol. an Int. J.* 19 (2016) 1608–1625.
- [55] G.H. Paulino, Z. Jin, R.H. Dodds, *Failure of Functionally Graded Materials*, in: B. Karihallo, W.G. Knauss (Eds.), *Compr. Struct. Integrity*, Vol. 2, Elsevier Science, New York, 2003: pp. 607–644.
- [56] Y.T. Pei, J.T.H.M.D.E. Hosson, *Functionally graded materials produced by laser cladding*, *Acta Mater.* 48 (2000) 2617–2624.
- [57] I. Pesic, D. Lanc, G. Turkalj, *Non-linear global stability analysis of thin-walled laminated beam-type structures*, *Comput. Struct.* 173 (2016) 19–30.
- [58] T.R. Prabhu, *Processing and properties evaluation of functionally continuous graded*

- 7075 Al alloy/SiC composites, *Arch. Civ. Mech. Eng.* 17 (2016) 20–31.
- [59] Z. Qiao, J. Räthel, L. Berger, M. Herrmann, Investigation of binderless WC –TiC – Cr<sub>3</sub>C<sub>2</sub> hard materials prepared by spark plasma sintering (SPS), *Int. J. Refract. Met. Hard Mater.* 38 (2013) 7–14.
- [60] J. Qiu, J. Tani, T. Ueno, T. Morita, H. Takahashi, H. Du, Fabrication and high durability of functionally graded piezoelectric bending actuators, *Smart Mater. Struct.* 12 (2003) 115–112.
- [61] J.N. Reddy, C.D. Chin, Thermomechanical Analysis of Functionally Graded Cylinders and Plates, *J. Therm. Stress.* 21 (1998) 593–626.
- [62] B. V Sankar, J.T. Tzeng, Thermal stresses in functionally graded beams, *AIAA J.* 40 (2002).
- [63] A.S. Sayyad, Y.M. Ghugal, Modeling and analysis of functionally graded sandwich beams : A review, *Mech. Adv. Mater. Struct.* ISSN. 0 (2018) 1–20.
- [64] J. Schilz, W.A. Kaysser, E. Müller, Functionally graded materials for sensor and energy applications & , *Mater. Sci. Eng.* 362 (2003) 17–39.
- [65] P. Shanmugavel, G.B. Bhaskar, M. Chandrasekaran, P.S. Mani, S.P. Srinivasan, An Overview of Fracture Analysis in Functionally Graded Materials, *Eur. J. Sci. Res.* 68 (2012) 412–439.
- [66] H.-S. Shen, *Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells*, CRC Press, 2009.
- [67] H.S. Shen, Z.X. Wang, Nonlinear analysis of shear deformable FGM beams resting on elastic foundations in thermal environments, *Int. J. Mech. Sci.* 81 (2014) 195–206.
- [68] M. Shen, M.B. Bever, Gradients in polymeric materials, *J. Mater. Sci.* 7 (1972) 741–746.
- [69] K. Shin, H. Natsu, D. Dutta, J. Mazumder, A method for the design and fabrication of heterogeneous objects, *Mater. Des.* 24 (2003) 339–353.
- [70] Y. Sun, S.R. Li, R.C. Batra, Thermal buckling and post-buckling of FGM Timoshenko beams on nonlinear elastic foundation, *J. Therm. Stress.* 39 (2016) 11–26.
- [71] A. Szyszka, B. Paszkiewicz, R. P. Paszkiewicz, M. Wosko, D. Radziejewicz, W. Macherzynski, M. T, Functionally graded semiconductor layers for devices application, *Vacuum.* 82 (2008) 389–394.
- [72] Y. Tanigawa, Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials, *Appl. Mech. Rev.* 48 (1995) 287–300.
- [73] A. Teber, F. Schoenstein, F. Têtard, M. Abdellaoui, N. Jouini, Effect of SPS process

- sintering on the microstructure and mechanical properties of nanocrystalline TiC for tools application, *Int. J. Refract. Met. Hard Mater.* 30 (2012) 64–70.
- [74] N.S. Trahair, *Flexural-torsional buckling of structures*, CRC Press, Boca Raton, 1993.
- [75] L.C. Trinh, T.P. Vo, H.T. Thai, T.K. Nguyen, An analytical method for the vibration and buckling of functionally graded beams under mechanical and thermal loads, *Compos. Part B Eng.* 100 (2016) 152–163.
- [76] G. Turkalj, J. Brnić, Nonlinear stability analysis of thin-walled frames using ul–esa formulation', *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* 4 (2004) 45–67.
- [77] G. Turkalj, J. Brnic, J. Prpic-Orsic, Large rotation analysis of elastic thin-walled beam-type structures using ESA approach, *Comput. Struct.* 81 (2003) 1851–1864.
- [78] T.P. Vo, H.T. Thai, T.K. Nguyen, A. Maheri, J. Lee, Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory, *Eng. Struct.* 64 (2014) 12–22.
- [79] S.S. Wang, *Fracture Mechanics for Delamination Problems in Composite Materials*, Elsevier Science Publishers B.V., 1983.
- [80] Y. Watanabe, Y. Inaguma, H. Sato, E. Miura-fujiwara, A Novel Fabrication Method for Functionally Graded Materials under Centrifugal Force: The Centrifugal Mixed-Powder Method, *Materials (Basel)*. 2 (2009) 2510–2525.
- [81] Y. Watanabea, N. Yamanakab, Y. Fukuic, Control of composition gradient in a metal-ceramic functionally graded material manufactured by the centrifugal method, *Compos. Part A*. 29A (1998) 595–601.
- [82] F. Watari, A. Yokoyama, M. Omori, T. Hirai, H. Kondo, Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application, *Compos. Sci. Technol.* 64 (2004) 893–908.
- [83] N. Wattanasakulpong, B. Gangadhara Prusty, D.W. Kelly, Thermal buckling and elastic vibration of third-order shear deformable functionally graded beams, *Int. J. Mech. Sci.* 53 (2011) 734–743.
- [84] N. Wattanasakulpong, V. Ungbhakorn, Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities, *Aerosp. Sci. Technol.* 32 (2014) 111–120.
- [85] H. Yuan, J. Li, Q. Shen, L. Zhang, In situ synthesis and sintering of ZrB<sub>2</sub> porous ceramics by the spark plasma sintering – reactive synthesis (SPS – RS) method, *Int. J. Refract. Met. Hard Mater.* 34 (2012) 3–7.

- [86] P. Zahedinejad, C. Zhang, H. Zhang, J. Shuai, A comprehensive review on vibration analysis of functionally graded beams, *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* 20 (2020).
- [87] F.Q. Zhao, Z.M. Wang, H.Z. Liu, Thermal post-buckling analyses of functionally graded material rod, *Appl. Math. Mech. (English Ed.)* 28 (2007) 59–67.
- [88] J. Zhu, Z. Lai, Z. Yin, J. Jeon, S. Lee, Fabrication of ZrO<sub>2</sub> – NiCr functionally graded material by powder metallurgy, *Mater. Chem. Phys.* 68 (2001) 130–135.
- [89] N. Ziane, S.A. Meftah, G. Ruta, A. Tounsi, Thermal effects on the instabilities of porous FGM box beams, *Eng. Struct.* 134 (2017) 150–158.

## Popis oznaka i skraćenica

### Popis oznaka

oznaka	značenje
$A$	površina poprečnog presjeka ( $m^2$ )
$A_{ij}$	aksijalna krutost (N/m)
$b$	širina (m)
$B_{ij}$	spregnuta krutost (N/m)
$C_i$	$i$ -ta ravnotežna konfiguracija konačnog elementa
$C_{ijkl}$	tenzor elastičnih konstanti (Pa)
$d$	diferencijal
$D_{ij}$	savojna krutost (N/m)
$E$	Youngov modul (Pa)
$e_{ij}$	dio Green-Lagrangeova tenzora deformacije linearan u pomacima $u$ , $v$ i $w$ , Almansijev tenzor deformacije
$\tilde{e}_{ij}$	dio Green-Lagrangeova tenzora deformacije linearan u pomacima $\tilde{u}$ , $\tilde{v}$ i $\tilde{w}$
$\mathbf{F}$	vektor unutarnjih sila konstrukcije
$F$	sila (N)
$\mathbf{f}^e, \bar{\mathbf{f}}^e$	vektor čvornih sila $e$ -tog konačnog elementa u lokalnom, odnosno globalnom koordinatnom sustavu
$f_i$	volumenske sile ( $Nm^{-3}$ )
$F_s$	Venantov smični tok ( $m^2$ )
$F_{kr}$	kritična sila izvijanja (N)
$F_x, F_y$	smične sile (N)
$F_z$	aksijalna sila (N)
$G$	modul smicanja (N)
$h$	visina (m)
$i$	$i$ -ti inkrement
$j$	$j$ -ta iteracija
$k$	nagib pravca
$\bar{K}$	Wagnerov koeficijent ( $Nm^2$ )
$\mathbf{K}_E$	elastična matrica krutosti konstrukcije
$\mathbf{K}_G$	geometrijska matrica krutosti konstrukcije
$\mathbf{k}_G^e, \bar{\mathbf{k}}_G^e$	geometrijska matrica krutosti $e$ -tog konačnog elementa u lokalnom, odnosno globalnom koordinatnom sustavu
$\mathbf{k}_E^e, \bar{\mathbf{k}}_E^e$	elastična matrica krutosti $e$ -tog konačnog elementa u lokalnom, odnosno globalnom koordinatnom sustavu
$\mathbf{K}_T$	tangentna matrica krutosti konstrukcije
$\mathbf{k}_T^e, \bar{\mathbf{k}}_T^e$	tangentna matrica krutosti $e$ -tog konačnog elementa u lokalnom, odnosno globalnom koordinatnom sustavu
$l$	odsječak na osi ordinata

$L$	duljina (m)
$m$	ukupni broj FGM slojeva
$M$	moment (Nm)
$M_x, M_y$	momenti savijanja (Nm)
$M_t$	torzijski moment (Nm)
$M_\omega$	bimoment (Nm <sup>2</sup> )
$n$	normala
$n_{sl}$	koordinata $n$ FGM sloja
$O$	težište poprečnog presjeka
$p$	eksponent distribucije materijala
$\mathbf{P}$	vektor opterećenja konstrukcije
$P_f$	svojstvo materijala
$r$	vektor položaja
$\mathbf{R}$	vektor neuravnoteženog opterećenja konstrukcije
$R_{ij}$	krutosti FG tankostjenog presjeka
$RN_z^T$	termičke sile FG tankostjenog presjeka zbog zagrijavanja (N)
$RM_x^T, RM_y^T, RM_t^T$	termički momenti FG tankostjenog presjeka zbog zagrijavanja (Nm)
$S$	centar smicanja poprečnog presjeka
$q$	udaljenost proizvoljno odabrane točke P od pravca normale $n$ (m)
$s$	krivocrtna koordinata uzduž konture s ishodištem u točki A (m)
$S_{ij}$	Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja druge vrste (Pa)
$t$	tangenta
$t$	debljina stijenke poprečnog presjeka
$t_i$	površinska sila (Nm <sup>-2</sup> )
$T$	transformacijska matrica
$T$	temperatura (°C)
$T_q$	torzijski moment zbog Wagnerovog efekta (Nm)
$\mathbf{U}$	vektor čvornih pomaka konstrukcije, vlastiti vektor
$U$	potencijal unutarnjih sila (J)
$U_E$	elastična potencijalna energija unutarnjih sila (J)
$U_G$	geometrijski potencijal početnih unutarnjih sila i vanjskih sila (J)
$\mathbf{u}$	vektor čvornih pomaka pri savijanju konačnog elementa u ravnini ( $z, x$ )
$\mathbf{u}^e, \bar{\mathbf{u}}^e$	vektor čvornih pomaka $e$ -tog konačnog elementa u lokalnom, odnosno globalnom koordinatnom sustavu
$\mathbf{U}_0$	vektor pomaka poprečnog presjeka kao kruto tijelo
$u, v$ i $w$	linearne komponente pomaka po pravcu lokalnih osi $z, x$ i $y$ (m)
$u_s, v_s$	translatorni pomaci centra smicanja S poprečnoga presjeka po pravcima osi $x_s$ i $y_s$ (m)
$\Delta\mathbf{U}$	vektor inkrementalnih čvornih pomaka konstrukcije
$V$	volumen (m <sup>3</sup> )
$V_f$	volumni udio (-)



<b>U</b>	potencijal vanjskih sila (J)
$w_0$	translatorni pomak težišta O po pravcu osi z (m)
$u_z, u_x, u_y,$	linearne komponente pomaka po pravcu osi z, x i y (m)
$\tilde{u}_z, \tilde{u}_x, \tilde{u}_y$	nelinearne komponente pomaka po pravcu osi z, x i y (m)
$\bar{w}, \bar{u}, \bar{v}$	pomaci srednje linije konture presjeka po pravcu osi z, s i n (m)
$w, u, v,$	pomaci točaka izvan srednje linije konture presjeka po pravcu osi z, s i n (m)
$\bar{w}^L, \bar{u}^L, \bar{v}^L$	linearne komponente pomaka srednje linije konture presjeka pravcu osi z, s i n (m)
$\bar{w}^{NL}, \bar{u}^{NL}, \bar{v}^{NL}$	nelinearne komponente pomaka srednje linije konture presjeka pravcu osi z, s i n (m)
$w^L, u^L, v^L$	linearne komponente pomaka točaka izvan srednje linije konture presjeka pravcu osi z, s i n (m)
$w^{NL}, u^{NL}, v^{NL}$	nelinearne komponente pomaka točaka izvan srednje linije konture presjeka pravcu osi z, s i n (m)
$x_S, y_S$	koordinate centra smicanja S poprečnoga presjeka (m)
$z$	uzdužna (težišna) os, koordinata (m)
$Z, X, Y$	globalni koordinatni sustav
$z, x, y$	lokalni koordinatni sustav s ishodištem u težištu poprečnog presjeka
$z, n, s$	koordinatni sustav s ishodištem u točki A konture
$\alpha$	koeficijent toplinske ekspanzije (1/°C)
$\beta$	nagib srednje linije konture presjeka na uzdužnu os
$\Delta$	inkrementalna veličina
$\delta$	varijacija
$\varepsilon$	duljinska deformacija (-)
$\varepsilon_{ij}, \boldsymbol{\varepsilon}$	Green-Lagrangeov tenzor deformacije (-)
$\varepsilon_E$	dopušteno odstupanje ili tolerancija
$\gamma$	kutna deformacija (-)
$\eta_{ij}$	dio Green-Lagrangeova tenzora deformacije nelinearan u pomacima $u, v$ i $w$
$\vartheta$	Udaljenost proizvoljne točke poprečnog presjeka od glavog pola (m)
$\theta$	parametar vitoperenja u poprečnog presjeka (rad/m)
$\kappa_{ij}$	komponente zakrivljenosti srednje linije poprečnog presjeka
$K$	koeficijent toplinske provodljivosti (Wm/K)
$\nu$	Poissonov broj
<b>Π</b>	ukupni ili totalni potencijal (J)
$\rho$	Koeficijent poroznosti (-)
$\sigma, \sigma_z$	normalno naprezanje (Pa)
$\tau, \tau_{zS}$	tangencijalno naprezanje (Pa)
$\tau_{ij}$	Cauchyjev tenzor naprezanja (Pa)
$\varphi_z, \varphi_x, \varphi_y$	rotacijski pomaci poprečnoga presjeka kao krutog tijela oko osi z, x i y (rad)
$\chi$	sastavni materijal FGM-a
$\omega$	sektorska koordinata ili funkcija vitoperenja u odnosu na centar smicanja (m <sup>2</sup> )

$\partial$  parcijalna derivacija

### Popis skraćenica

skraćenica	značenje
BC	rubni uvjet ( <i>boundary condition</i> )
C-C	obostrano uklještenje ( <i>clamped – clamped</i> )
C-S	uklještenje-zglob ( <i>clamped – simply supported</i> )
FG	<i>Functionally graded</i>
FGM	<i>Functionally graded material</i>
LTR	linearna raspodjela temperature ( <i>linear temperature distribution</i> )
NLR	nelinearna raspodjela temperature ( <i>nonlinear temperature distribution</i> )
S-S	zglob-zglob ( <i>simply supported – simply supported</i> )
TD	temperaturno ovisni ( <i>temperature dependent</i> )
TID	temperaturno neovisni ( <i>temperature independent</i> )
UTR	jednolika raspodjela temperature ( <i>uniform temperature distribution</i> )

## Popis slika

---

Sl. 2.1 Usporedba konvencionalnog kompozita (lijevo) i FGM-a (desno) .....	8
Sl. 2.2 Kontinuirana (lijevo) i stepenasta (desno) struktura FG materijala.....	10
Sl. 2.3 FG Tip 1 .....	11
Sl. 2.4 Volumni udio keramike po stijenci poprečnog presjeka.....	12
Sl. 2.5 Razmatrane varijacije distribucije materijala po stijenci nosača .....	13
Sl. 3.1 Pomaci točaka srednje linije (konture) poprečnog presjeka .....	18
Sl. 3.2 Pomaci poprečnog presjeka kao krutog tijela .....	19
Sl. 3.3 Unutarnje sile .....	23
Sl. 3.4 a) Podjela stijenske na slojeve; b) nelinearna distribucija materijala; c) linearna aproximacija.....	30
Sl. 3.5 Raspodjela temperature: a) UTR, b) LTR, c) NLR .....	33
Sl. 3.6 Raspodjela temperature po duljini nosača .....	34
Sl. 4.1 Tankostjeni gredni konačni element sa 14 stupnjeva slobode gibanja .....	38
Sl. 4.2 Inkrementalni pomaci konačnog elementa .....	44
Sl. 5.1 Tijek programa THINWALL FG.....	52
Sl. 5.2 Uz primjer 1: Zatvoreni pravokutni poprečni presjek.....	54
Sl. 5.3 Uz primjer 1: Usporedba nelinearnog odziva za različiti broj konačnih elemenata, $p=0,2$ .....	56
Sl. 5.4 Uz primjer 1: Usporedba nelinearnog odziva za različiti broj konačnih elemenata, $p=2$ .....	56
Sl. 5.5 Uz primjer 1: Dijagram temperatura-pomak za FG Tip 1, UTR .....	60
Sl. 5.6 Uz primjer 1: Dijagram temperatura-pomak za FG Tip 2, UTR .....	61
Sl. 5.7 Uz primjer 1: Dijagram temperatura-pomak za FG Tip 2, LTR.....	61
Sl. 5.8 Uz primjer 2: Trapezoidni poprečni presjek .....	62

Sl. 5.9 Uz primjer 2: Dijagram temperatura-pomak, FG Tip 1 .....	64
Sl. 5.10 Uz primjer 2: Dijagram temperatura-pomak, FG Tip 2 .....	64
Sl. 5.11 Uz primjer 2: Shell model fleksijsko-torzijsko-fleksijskog oblika izvijanja: a) C-C, b) C-S, c) S-S .....	65
Sl. 5.12 Uz primjer 3: L – okvir .....	65
Sl. 5.13 Uz primjer 3: Dijagram temperatura-pomak za homogene materijale, UTR .....	66
Sl. 5.14 Uz primjer 3: Kritične temperature obzirom na eksponent $p$ .....	66
Sl. 5.15 Uz primjer 3: Dijagram temperatura-pomak za $p = 0,5$ , FG Tip 1 i 2.....	67
Sl. 5.16 Uz primjer 3: Dijagram temperatura-pomak za $p = 1$ , FG Tip 1 i 2.....	67
Sl. 5.17 Uz primjer 3: Dijagram temperatura-pomak za $p = 5$ , FG Tip 1 i 2.....	68
Sl. 5.18 Uz primjer 3: Shell model fleksijsko-torzijskog oblika izvijanja L-okvira .....	68
Sl. 5.19 Uz primjer 4: Gredni nosač i puni pravokutni poprečni presjek.....	69
Sl. 5.20 Uz primjer 4: Usporedba kritičnih temperatura za različite omjere $L/h$ i rubne uvjete .....	69
Sl. 5.21 Uz primjer 4: Utjecaj eksponenta $p$ na kritičnu temperaturu izvijanja, LTR.....	70
Sl. 5.22 Uz primjer 4: Utjecaj eksponenta $p$ na kritičnu temperaturu izvijanja, NLR .....	70
Sl. 5.23 Uz primjer 5: Obostrano uklještena greda monosimetričnog C-profila.....	71
Sl. 5.24 Uz primjer 5: Usporedba LTR i NLR za različite materijale po visini stijenke .....	72
Sl. 5.25 Uz primjer 5: Usporedba LTR i NLR, $Si_3N_4/SUS304$ .....	74
Sl. 5.26 Uz primjer 5: Usporedba LTR i NLR, $ZrO_2/SUS304$ .....	75
Sl. 5.27 Uz primjer 5: Nelinearni odziv grede za različite eksponente $p$ , NLR.....	75
Sl. 5.28 Uz primjer 6: Nesimetričan C-profil.....	76
Sl. 5.29 Nesavršeni porozni FG materijal .....	77
Sl. 5.30 Uz primjer 6: Usporedba kritičnih temperatura s obzirom na FG distribuciju, $\rho=0,2$	79
Sl. 5.31 Uz primjer 6: Usporedba kritičnih temperatura s obzirom na koefijent poroznosti, FG Tip 1 .....	79

Sl. 5.32 Uz primjer 6: Dijagram temperatura-pomak za C2 i C3, $\rho = 0,1$ .....	80
Sl. 5.33 Uz primjer 6: Dijagram temperatura-pomak za C2 i C3, $\rho = 0,2$ .....	80
Sl. 5.34 Uz primjer 7: Simetričan I-profil .....	81
Sl. 5.35 Uz primjer 7: Dijagram temperatura-pomak za različite I-profile, ZrO <sub>2</sub> /SUS304 .....	83
Sl. 5.36 Uz primjer 7: Dijagram temperatura-pomak za različite materijale, I2 profil .....	84
Sl. 5.37 Uz primjer 7: Usporedba TD i TID materijala pri izvijanju .....	84
Sl. 5.38 Uz primjer 8: a) Tlačno opterećen stup uklješten na oba kraja; b) torzijsko-fleksijsko izvijanje monosimetričnog I-profila (Slučaj I1); c) fleksijsko izvijanje monosimetričnog I-profila (Slučaj I2); d) torzijsko fleksijsko izvijanje nesimetričnog C-profila (Slučaj C) .....	85
Sl. 5.39 Uz primjer 8: Promjena sile izvijanja obzirom na temperaturu za promatrane slučajeve i materijale .....	87
Sl. 5.40 Uz primjer 8: Dijagram temperatura-pomak, torzijsko-fleksijsko izvijanje I-profila za $p = 0$ .....	87
Sl. 5.41 Uz primjer 8: Dijagram temperatura-pomak, torzijsko-fleksijsko izvijanje I-profila za $p = 1$ .....	88
Sl. 5.42 Uz primjer 8: Dijagram temperatura-pomak, torzijsko-fleksijsko izvijanje I-profila za $p = 5$ .....	88
Sl. 5.43 Uz primjer 8: Dijagram temperatura-pomak, fleksijsko izvijanje I-profila za $p = 0$ .	89
Sl. 5.44 Uz primjer 8: Dijagram temperatura-pomak, fleksijsko izvijanje I-profila za $p = 1$ .	89
Sl. 5.45 Uz primjer 8: Dijagram temperatura-pomak, fleksijsko izvijanje I-profila za $p = 5$ .	90
Sl. 5.46 Uz primjer 8: Dijagram temperatura-pomak, torzijsko-fleksijsko izvijanje C-profila za $p = 0$ .....	90
Sl. 5.47 Uz primjer 8: Dijagram temperatura-pomak, torzijsko-fleksijsko izvijanje C-profila za $p = 1$ .....	91
Sl. 5.48 Uz primjer 8: Dijagram temperatura-pomak, torzijsko-fleksijsko izvijanje C-profila za $p = 5$ .....	91
Sl. 5.49 Uz primjer 9: a) L-okvir; b) monosimetričan C-profil.....	92

Sl. 5.50 Uz primjer 9: Dijagram sila-pomak za različite eksponente $p$ : a) kritična faza; b) postkritična faza .....	93
Sl. 5.51 Uz primjer 9: Shell model izvijanja L-okvira pri: a) F (+), b) F(-).....	94
Sl. 5.52 Uz primjer 9: Dijagram temperatura-pomak za tri razine kritične sile F (+) za $p = 0$ , UTR .....	95
Sl. 5.53 Uz primjer 9: Dijagram temperatura-pomak za tri razine kritične sile F (+) za $p = 0,2$ , UTR .....	95
Sl. 5.54 Uz primjer 9: Dijagram temperatura-pomak za tri razine kritične sile F (+) za $p = 0,5$ , UTR .....	96
Sl. 5.55 Uz primjer 9: Dijagram temperatura-pomak za tri razine kritične sile F (+) za $p = 0,2$ , LTR .....	96
Sl. 5.56 Uz primjer 9: Dijagram temperatura-pomak za tri razine kritične sile F (+) za $p = 0,5$ , LTR .....	97
Sl. 5.57 Uz primjer 9: Dijagram temperatura-pomak za tri razine kritične sile F (-) za $p = 0$ , UTR .....	97
Sl. 5.58 Uz primjer 9: Dijagram temperatura-pomak za tri razine kritične sile F (-) za $p = 0,2$ , UTR .....	98
Sl. 5.59 Uz primjer 9: Dijagram temperatura-pomak za tri razine kritične sile F (-) za $p = 0,5$ , UTR .....	98
Sl. 5.60 Uz primjer 10: Prostorni okvir opterećen vertikalnim silama inteziteta F.....	99
Sl. 5.61 Uz primjer 10: a) twist-sway oblik izvijanja; b) sway oblik izvijanja .....	100
Sl. 5.62 Uz primjer 10: Nelinearni odziv twist-sway oblika izvijanja .....	101
Sl. 5.63 Uz primjer 10: Nelinearni odziv sway oblika izvijanja .....	101
Sl. 5.64 Uz primjer 10: Dijagram temperatura-pomak za tri razine kritične sile F za $p = 0$ , UTR .....	102
Sl. 5.65 Uz primjer 10: Usporedba savršenog i poroznog materijala za eksponent $p = 0,3$ pri 80% $Fkr$ , UTR .....	103
Sl. 5.66 Uz primjer 10: Usporedba savršenog i poroznog materijala za eksponent $p = 3$ pri 70%	

<i>Fkr</i> , UTR .....	103
Sl. 5.67 Uz primjer 10: Dijagram temperatura-pomak za tri razine kritične sile $F$ za $p = 0$ , LTR .....	104
Sl. 5.68 Uz primjer 10: Usporedba savršenog i poroznog materijala za eksponent $p = 0,3$ pri 80% <i>Fkr</i> , LTR .....	105
Sl. 5.69 Uz primjer 10: Usporedba savršenog i poroznog materijala za eksponent $p = 3$ pri 70% <i>Fkr</i> , LTR.....	105

## Popis tablica

---

Tab. 2.1 Modul elastičnosti za razne materijale (Pa) .....	14
Tab. 2.2 Koeficijent toplinske rastezljivosti za razne materijale ( $1/^{\circ}\text{C}$ ) .....	15
Tab. 2.3 Koeficijent toplinske provodljivosti za razne materijale ( $\text{Wm/K}$ ).....	15
Tab. 5.1 Uz primjer 1: Analiza konvergencije kritičnih temperatura izvijanja s obzirom na broj slojeva.....	55
Tab. 5.2 Uz primjer 1: Analiza konvergencije kritičnih temperatura izvijanja s obzirom na broj konačnih elemenata .....	55
Tab. 5.3 Uz primjer 1: Analički dobivene kritične temperature za homogene materijale, FG Tip 1 .....	57
Tab. 5.4 Uz primjer 1: Kritične temperature zatvorenog pravokutnog nosača za različite vrijednosti eksponenta p i različite rubne uvjete pri uniformnom zagrijavanju, FG Tip 1 .....	57
Tab. 5.5 Uz primjer 1: Kritične temperature zatvorenog pravokutnog nosača za različite vrijednosti eksponenta p i različite rubne uvjete pri uniformnom zagrijavanju, FG Tip2 .....	58
Tab. 5.6 Uz primjer 1: Kritične temperature zatvorenog pravokutnog nosača za različite vrijednosti eksponenta p i različite rubne uvjete pri linearnom zagrijavanju, FG Tip 1 .....	59
Tab. 5.7 Uz primjer 1: Kritične temperature zatvorenog pravokutnog nosača za različite vrijednosti eksponenta p i različite rubne uvjete pri linearnom zagrijavanju, FG Tip 2.....	59
Tab. 5.8 Uz primjer 2: Kritične temperature trapezoidnog nosača za različite vrijednosti eksponenta p i različite rubne uvjete, FG Tip 1 .....	63
Tab. 5.9 Uz primjer 2: Kritične temperature trapezoidnog nosača za različite vrijednosti eksponenta p i različite rubne uvjete, FG Tip 2 .....	63
Tab. 5.10 Uz primjer 5: Validacija rezultata sa shell modelom .....	71
Tab. 5.11 Uz primjer 5: Usporedba kritičnih temperatura za materijal $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$ .....	73



Tab. 5.12 Uz primjer 5: Usporedba kritičnih temperatura za materijal ZrO <sub>2</sub> /Ti-6Al-4V .....	73
Tab. 5.13 Uz primjer 5: Usporedba kritičnih temperatura za materijal ZrO <sub>2</sub> /SUS304.....	74
Tab. 5.14 Uz primjer 6: Sheme materijalne distribucije C-profila.....	76
Tab. 5.15 Uz primjer 6: Kritična temperatura izvijanja grednog nosača bez nesavršenosti ( $\rho = 0$ ) .....	77
Tab. 5.16 Uz primjer 6: Kritična temperatura izvijanja grednog nosača sa nesavršenostima ( $\rho = 0,1$ ).....	78
Tab. 5.17 Uz primjer 6: Kritična temperatura izvijanja grednog nosača sa nesavršenostima ( $\rho = 0,2$ ).....	78
Tab. 5.18 Uz primjer 7: Sheme materijalne distribucije I-profila.....	81
Tab. 5.19 Uz primjer 7: Kritična temperatura izvijanja, I1 .....	82
Tab. 5.20 Uz primjer 7: Kritična temperatura izvijanja, I2.....	82
Tab. 5.21 Uz primjer 8: Kritične sile izvijanja.....	85
Tab. 5.22 Uz primjer 9: Kritične sile izvijanja L-okvira.....	92
Tab. 5.23 Uz primjer 10: Kritične sile izvijanja prostornoga okvira .....	100

## Životopis

---

Sandra Kvaternik Simonetti (rođ. Kvaternik) rođena je 12. 3. 1992. u Rijeci. Nakon završetka osnovne škole 2006. godine u Rijeci upisuje opći smjer u Prvoj sušačkoj hrvatskoj gimnaziji u Rijeci. Završetkom srednjoškolskog obrazovanja 2010. godine upisuje prijediplomski sveučilišni studij strojarstva pri Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci koji završava 2013. godine i stječe naziv sveučilišne prvostupnice (baccalaurea) inženjerke stolarstva uz najveće pohvale. Iste godine upisuje diplomski sveučilišni studij pri istom fakultetu te zvanje magistre inženjerke strojarstva, uz najveće pohvale, stječe 2015. godine obranom diplomskog rada pod nazivom *Termodinamička analiza kompaktnog izmjenjivača topline* pod mentorstvom prof. dr. sc. Bernarda Frankovića. U jesen iste godine upisuje poslijediplomski sveučilišni (doktorski) studij iz tehničkih znanosti, polje strojarstvo, modul Računarska mehanika.

Od studenog 2016. godine zaposlena je na Zavodu za tehničku mehaniku Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci, na suradničkom radnom mjestu asistenta u okviru programa *Projekt razvoja karijera mladih istraživača – izobrazba novih doktora znanosti* Hrvatske zaklade za znanost. U ožujku 2019. godine zapošljava se kao asistentica na istom Zavodu gdje sudjeluje u izvođenju nastave na kolegijama *Čvrstoća*, *Čvrstoća konstrukcija I* i *Čvrstoća konstrukcija II*. Bila je suradnica na znanstvenom projektu Hrvatske zaklade za znanost *Procjena ponašanja struktura u graničnim uvjetima rada* čiji je voditelj bio prof. dr. sc. Josip Brnić, od 2016. do 2018. godine. Trenutno je suradnica na znanstvenom projektu HRZZ-a *Procjena granične nosivosti inženjerskih konstrukcija*, voditelja prof. dr. sc. Domagoja Lanca. U travnju 2017. godine pohađa naprednu školu *Advanced School on Computational methods for the analysis, design, and failure of composites* u Udinama, Italija. Bila je članica organizacijskog odbora i uređivačkog odbora zbornika konferencije za doktorande *My First Conference*, održane 27. rujna 2017. g. na Tehničkom fakultetu u Rijeci. U okviru znanstvenog usavršavanja boravila je od listopada 2018. do veljače 2019. godine na fakultetu *Politecnico di Torino* u Italiji.

Koautorica je sedam znanstvenih članaka objavljenih u časopisima, od kojih tri pripadaju prvom kvartilu (Q1), dvanaest kongresnih priopćenja prezentiranih na međunarodnim skupovima te jednog priopćenja prezentiranog na ostalim skupovima. Predstavljala je radove na tri međunarodna skupa u inozemstvu te na jednom domaćem znanstvenom skupu.

Aktivno se služi engleskim jezikom u govoru i pismu.

## Popis objavljenih radova

---

### Izvorni znanstveni radovi:

1. Kvaternik Simonetti, S.; Turkalj, G.; Banić, D.; Lanc, D., *Bimetallic Thin-Walled Box Beam Thermal Buckling Response*, *Materials* 15 (2022), 7537.
2. Banić, D.; Turkalj, G.; Kvaternik Simonetti, S.; Lanc, D., *Numerical model for a geometrically nonlinear analysis of beams with composite cross-sections*, *Journal of Composites Science* 6 (2022), 12, 377, 18
3. Kvaternik Simonetti, S.; Turkalj, G.; Lanc, D., *Thermal buckling analysis of thin-walled closed section FG beam-type structures*, *Thin-Walled Structures* 181 (2022), 110075.
4. Kvaternik, S.; Fillipi, M.; Lanc, D.; Turkalj, G.; Carrera, E., *Comparison of classical and refined beam models applied on isotropic and FG thin-walled beams in nonlinear buckling response*, *Composite structures* 229 (2019), 111490, 7
5. Kvaternik, S.; Turkalj, G.; Lanc, D., *Analysis of flexure, torsion and buckling of thin-walled frames with a focus on the joint warping behaviour*, *Transactions of FAMENA* 41 (2017), 4, 1-10
6. Banić, D.; Lanc, D.; Kvaternik, S., *Creep analysis of elastic beams under constant torque*, *Machines. Technologies. Materials XI* (2017), 5/2017, 229-232
7. Kvaternik, S.; Turkalj, G.; Banić, D., *Finite element analysis of torsional-flexural behaviour of thin-walled frame considering joint warping conditions*, *Trans&Motauto World, II* (2017), 5/2017, 181-183

### Konferencije

1. Kvaternik Simonetti, S., Lanc, D., Turkalj, G., Banić, D., *Beam model for thermal buckling of thin-walled functionally graded box-beam*, *Proceedings of the Fourteenth International Conference on Computational Structures Technology*, 3 (2022), Montpellier, France, doi: 10.4203/cc.3.15.1.
2. Banić, D., Turkalj, G., Lanc, D., Kvaternik Simonetti, S., *Shear deformable beam model for stability analysis of beam-type structures with composite thin-walled cross sections*, *Proceedings of the Fourteenth International Conference on Computational Structures Technology*, 3 (2022), Montpellier, France, doi: 10.4203/cc.3.15.3.
3. Kvaternik Simonetti, S.; Lanc, D.; Turkalj, G.; Zlatić, M., *Thermal buckling analysis of thin-walled FG closed section beams*, *ICCSM 7th International congress of Croatian society of mechanics: book of abstracts*, 10th ICCSM 2022, Pula, Hrvatska
4. Banić, D., Turkalj, G., Lanc, D., Kvaternik Simonetti, S., *Stability analysis of composite beam-type structures including shear deformation effects*, *ICCSM 7th International congress of Croatian society of mechanics: book of abstracts*, 10th ICCSM 2022, Pula, Croatia.
5. Kvaternik Simonetti, S.; Lanc, D.; Turkalj, G.; Banić, D., *Thermal buckling analysis of*

- thin-walled functionally graded closed section beams*, Proceedings of the conference ICCSE2, 2nd International Conference on Computations for Science and Engineering 2022, Rimini, Italija
6. Banić, D.; Turkalj, G.; Kvaternik Simonetti, S.; Lanc, D., *Stability analysis of beam-type structures with composite cross-section considering coupled shear deformation effects*, Proceedings of the conference ICCSE2, 2nd International Conference on Computations for Science and Engineering 2022, Rimini, Italija
  7. Lanc, D.; Turkalj, G.; Kvaternik Simonetti, S., *FG beam thermal buckling analysis*, 7th International Conference on Mechanics of Composites Book of Abstracts, MECHCOMP7 2021, Porto, Portugal
  8. Kvaternik Simonetti, S.; Lanc, D.; Turkalj, G.; Banić, D., *Beam model for thermal buckling analysis of thin-walled functionally graded open section beams*, 5th International Conference on Mechanics of Composites Book of Abstracts, MECHCOMP 2019, Lisabon, Portugal
  9. Banić, D.; Turkalj, G.; Kvaternik, S.; Lanc, D., *Shear deformable beam model for stability analysis of beam type structures with composite cross sections*, 5th International Conference on Mechanics of Composites Book of Abstracts, MECHCOMP 2019, Lisabon, Portugal
  10. Lanc, D.; Turkalj, G.; Kvaternik, S.; Pešić, I., *Buckling analysis of thermally loaded fg box beams*, USB Proceedings of eight international conference- Thin walled structures, International conference Thin walled structures 2018, Lisabon, Portugal
  11. Turkalj, G.; Lanc, D.; Banić, D.; Kvaternik, S., *Finite element analysis of thin-walled functionally graded open section beams exposed to thermal loading*, 4th International Conference on Mechanics of Composites - BOOK OF ABSTRACTS, 4th International Conference on Mechanics of Composites, Madrid, Španjolska
  12. Kvaternik, S.; Turkalj, G.; Lanc, D., *Numerical Buckling Analysis of Thin-walled Frames with Joint Effect*, Book of Extended Abstracts – My First Conference 2017, MFC 2017, Rijeka, Hrvatska
  13. Lanc, D.; Turkalj, G.; Kvaternik, S., *Thermal buckling analysis of thin-walled functionally graded box beams*, 3th International Conference on Mechanics of Composites Book of Abstracts, MECHCOMP 2017, Bologna, Italija