Testovi prilagodbe razdiobama

Kardum, Dario

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Sveučilišni prijediplomski studij strojarstva

Završni rad

TESTOVI PRILAGODBE RAZDIOBAMA

Rijeka, srpanj 2024.

Dario Kardum
0069092534

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Sveučilišni prijediplomski studij strojarstva

Završni rad

TESTOVI PRILAGODBE RAZDIOBAMA

Mentor: izv. prof. dr. sc. Loredana Simčić

Rijeka, srpanj 2024.

Dario Kardum
0069092534

SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET
POVJERENSTVO ZA ZAVRŠNE ISPITE

Rijeka, 08.03.2024.

Zavod: Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike
Predmet: Inženjerska statistika

ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Dario Kardum (0069092534)**
Studij: Sveučilišni prijediplomski studij strojarstva (1010)

Zadatak: **Testovi prilagodbe razdiobama / Goodness of Fit Tests**

Opis zadatka:

U završnom radu je potrebno opisati slučajne varijable te njihovu primjenu u modeliranju podataka. Potom je potrebno objasniti koncept testova prilagodbe razdiobama i detaljno analizirati nekoliko njih: Hi-kvadrat test, Anderson-Darlingov test i Kolmogorov-Smirnovljev test. Navedene testove je potrebno provesti na konkretnim podacima koristeći odabrana programska okruženja.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanja diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Zadatak uručen pristupniku: 20.03.2024.

Mentor:
izv. prof. dr. sc. Loredana Simčić

Predsjednik povjerenstva za završni ispit:
izv. prof. dr. sc. Samir Žic

IZJAVA

Temeljem članka 7. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku sveučilišnih prijediplomskih studija izjavljujem da sam postavljeni zadatak rješavao samostalno uz korištenje dostupne literature i dosad stečenog znanja, te uz pravodobno izvještavanje i konzultiranje mentora.

Dario Kardum

0069092534

ZAHVALA

Ovim putem zahvalio bih se mentorici, izv. prof. dr. sc. Loredani Simčić za pomoć i podršku tijekom pisanja, brojne savjete i općenito za svoje izdvojeno vrijeme tijekom izrade ovoga rada.

SADRŽAJ

1. UVOD

Statistika i metode koje ona koristi pri proračunima u današnje su vrijeme gotovo nezaobilazan dio većine ljudskih djelatnosti, bilo to zbog preliminarnih proračuna i analiza, kontrole, procjene isplativosti ili nekih drugih bitnih parametara koje je za neki projekt nužno znati. Takve metode najčešće daju jednoznačan rezultat za željeni parametar međutim gotovo uvijek s određenom greškom. Ako je postupak ispravno proveden te greške najčešće su svedene na minumum odnosno za konkretni slučaj proračuna su zanemarive. Kako se proračuni najčešće vrše na skupu podataka (varijabli), potrebno je znati neke osnovne podatke o njima kako bi se izbjegla greška prilikom njihove upotrebe. U skladu s time, u nastavku će prije svega biti opisane slučajne varijable i njihove moguće razdiobe što je nužno za razumijevanje i upotrebu statističkih testova prilagodbe razdiobama koji se učestalo i u raznim oblicima koriste kao alat za brojne statističke provjere, a naročito za provjere pripadnosti grupe podataka određenoj razdiobi. Neki od takvih testova su Pearsonov χ^2 test, Kolmogorov-Smirnovljev, Anderson-Darlingov te Shapiro-Wilkov test. Iako ih postoji još mnogo, ova četiri imaju poseban značaj zbog velikog područja problema koje mogu pokriti što je povijesno gledano znatno unaprijedilo i ubrzalo statističke proračune.

2. SLUČAJNE VARIJABLE

Za razumijevanje primjene i načina funkcioniranja testova prilagodbe razdiobama, prije svega je potrebno definirati slučajne varijable. Njih možemo definirati kao numeričke veličine čije vrijednosti ovise o ishodu nekog slučajnog pokusa, pa one u različitim slučajevima poprimaju različite vrijednosti. Slučajne je varijable moguće podijeliti na diskretne i neprekidne, pri čemu diskretne slučajne varijable poprimaju vrijednosti unutar diskretnog skupa (npr. skup prirodnih brojeva) dok neprekidne poprimaju vrijednosti unutar neprebrojivoga skupa (npr. skup realnih brojeva). Generalno, slučajne varijable možemo opisati kao preslikavanje koje proizvoljnom ishodu slučajnog pokusa pridružuje realan broj:

$$X : \Omega \rightarrow R.$$

2.1. Diskretne slučajne varijable

Kao što je ranije spomenuto, diskretne slučajne varijable svoje vrijednosti poprimaju unutar prebrojivih skupova što znači da mora vrijediti da je prostor ishoda Ω konačan odnosno prebrojiv (tada ga nazivamo diskretnim). Zakon razdiobe diskretne slučajne varijable može se pisati kao:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k & \dots \end{pmatrix};$$

pri čemu vrijedi da su u prvom retku vrijednosti koje slučajna varijabla može poprimiti, a u drugom retku njene pripadajuće vrijednosti vjerojatnosti pa slijedi:

$$p_k = P(X = x_k), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

Za tako zadanu slučajnu varijablu slijedi da se funkcija vjerojatnosti koja se još naziva i funkcija gustoće slučajne varijable može zapisati kao:

$$f(x_k) = P(X = x_k) = p_{k.}$$

Kao osnovne diskretne razdiobe mogu se navesti uniformna, Bernoullijeva, binomna, Poissonova te geometrijska i hipergeometrijska razdioba.

2.2. Neprekidne slučajne varijable

Kako se praktični problemi često temelje na neprekidnim slučajnim varijablama također ih je potrebno pobliže objasniti. Kao što je ranije spomenuto, koriste se u situacijama gdje broj ishoda slučajnog pokusa nije prebrojiv. Neki od primjera numeričkih veličina za koje se koriste bili bi: dimenzije proizvedenih dijelova, trajanje nekog procesa ili dijela procesa, odstupanje od zadane brzine, ali i brojni drugi. Kao i kod diskretnih, neprekidne slučajne varijeble potrebno je zadati pomoću skupa vrijednosti koji mogu poprimiti i pripadajućim vrijednostima, a za razliku od diskretnih, kod neprekidnih te vrijednosti potječu iz beskonačnog, neprebrojivog skupa. U praksi, neprekidne slučajne varijable mogu se zadati na dva načina: funkcijom gustoće (vjerojatnosti) i funkcijom distribucije (razdiobe). Kod funkcije gustoće ($f(x)$) slučajna se varijabla zadaje na način da je vjerojatnost da slučajna varijabla poprimi vrijednost unutar nekog intervala jednaka površini lika ispod te funkcije gustoće na promatranom intervalu (interval $[x_1, x_2)$).

Za tako zadanu funkciju gustoće moraju vrijediti sljedeća svojstva:

$$f(x) \geq 0;$$

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx;$$

$$P(X < x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Funkcija distribucije ($F(x)$) definira se s:

$$F(x_1) = P(X < x_1),\ x_1 \in R\,,$$

a njena svojstva su sljedeća:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1);$$

$$F \text{ je rastuća funkcija } (x_1 < x_2 \rightarrow F(x_1) \leq F(x_2));$$

$$F(x) \in [0,1];$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0,\ \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Funkcija distribucije je neprekinuta funkcija, a još se naziva i kumulativna funkcija distribucije. Osim normalne razdiobe, u neprekidne razdiobe spadaju, među ostalima, i uniformna, eksponencijalna te trokutasta razdioba.

2.3. Numerički pokazatelji slučajnih varijabli

Za mogućnost upotrebe u raznim proračunima sa slučajnim varijablama, kako diskretnim tako i neprekidnim, potrebno je navesti i objasniti neke njihove glavne numeričke pokazatelje. Tako je numerički pokazatelj od vrlo velikog značaja matematičko očekivanje (μ) koje predstavlja centralnu tendenciju slučajne varijable, a za diskretne slučajne varijable moguće ga je izračunati po sljedećoj formuli:

$$\mu = E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k,$$

ako postoji gornja suma reda, dok za neprekidne vrijedi:

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

ako navedeni integral konvergira.

Osim matematičkog očekivanja, bitno je definirati i varijancu ($V(x)$) i standardnu devijaciju ($\sigma(x)$), koje predstavljaju mjeru rasutosti podataka oko matematičkog očekivanja. Varijanca slučajne varijable definira se kao srednje kvadratno odstupanje od matematičkog očekivanja, a moguće ju je izračunati prema sljedećoj formuli:

$$V(X) = E(X - E(X)^2 = E(X^2) - \mu^2.$$

U diskretnom slučaju gornja je formula jednaka izrazu

$$V(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 p_k - \mu^2$$

dok za neprekidne slučajne varijable izraz za računanje varijance glasi:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2.$$

Standardna devijacija se kako za diskretne tako i za neprekidne slučajne varijable definira kao drugi korijen dobivene varijance tako da vrijedi:

$$\sigma(x) = \sqrt{V(X)}.$$

2.4. Osnovne diskretne razdiobe

Uniformna razdioba može se definirati kao razdioba s pozitivnom funkcijom gustoće konstantne vrijednosti na diskretnom skupu. Kod takve razdiobe vrijedi da je svaki od *n* potencijalnih ishoda jednako vjerojatan pa vrijedi:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Kod takve razdiobe, za matematičko očekivanje uniformno distribuirane slučajne varijable vrijedi da je:

$$\mu = E(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\mathrm{n}} x_k.$$

Promatramo pokus s dva moguća ishoda. Primjerice, za promatrani događaj *A* s vjerojatnošću realizacije *p*, **Bernoullijeva razdioba** temelji se na tome je li se on realizirao ili nije. Ako definiramo slučajnu varijablu *X* koja u slučaju realizacije događaja *A* poprima vrijednost 1, a u suprotnom vrijednost 0, tada kažemo da *X* ima Bernoullijevu razdiobu i vrijedi:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix};$$

$$\mu = E(X) = p;$$

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

Neka je *A* prometrani događaj, s vjerojatnošću realizacije *p*. Pokus ponavljamo n puta. Slučajna varijabla koja broji koliko se puta događaj *A* realizirao u *n* ponavljanja pokusa ima **binomnu razdiobu**:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & k & \dots & n \\ q^n & \binom{n}{1}pq^{n-1} & \dots & \dots & \binom{n}{k}p^k q^{n-k} & \dots & p^n \end{pmatrix},$$

n i *p* su parametri binomne razdiobe i kraće pišemo $B(n,p)$.

Tako vrijedi da broj realizacija promatranog događaja ovisi o tome je li se u svakom od *n* ponavljanja pokusa promatrani događaj *A* dogodio ili nije. Moguće je uvesti slučajnu varijablu X_i koja prati ishod kod svakog ponavljanja te poprima vrijednost 1 u slučaju realizacije promatranog događaja A, odnosno 0 u suprotnom. Same varijable X_i koje su međusobno nezavisne imaju Bernoullijevu razdiobu, a za varijablu X vrijedi da je njena vrijednost suma svih vrijednosti dobivenih varijabli X_i:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_{i.}$$

Iz navedenih činjenica proizlazi da za matematičko očekivanje i varijancu vrijede sljedeće jednakosti:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np\,;$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p) = npq.$$

Poissonova razdioba temelji se na sličnom principu funkcioniranja kao i binomna jer također broji realizacije promatranog događaja, najčešće u jedinici vremena (vremenskom intervalu). Intenzitet pojavljivanja promatranog događaja u tom vremenskom intervalu označava se s λ, a kada vrijedi da se parametar λ može odrediti ili aproksimirati, radi se o Poissonovoj razdiobi koju označavamo s $P(\lambda)$. Slijedi da su vrijednosti koje tako distribuirana slučajna varijabla može poprimiti jednake: 0,1,2,...,k,..., a pri čemu za pripadajuće vjerojatnosti vrijedi:

$$P[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0,1,2, \ldots\ .$$

Matematičko očekivanje i varijanca jednaki su parametru λ.

$$E(X) = \lambda;$$

$$V(X) = \lambda.$$

U praksi se vrlo često zbog pojednostavljenja rješavanja problema binomna razdioba aproksimira Poissonovom:

$$B(n, p) \sim P(np).$$

Kako bi se taj postupak proveo sa dovoljno velikom točnošću potrebno je da je broj ponavljanja pokusa n velik, a vjerojatnost p mala. Iako greška pri takvoj aproksimaciji uvijek postoji, točnost takvog postupka je zadovoljavajuća za većinu praktičnih inženjerskih problema.

Geometrijska razdioba ($G(p)$) također se temelji na promatranju realizacije događaja A s vjerojatnošću realizacije p te se pretpostavlja da će se pokus ponavljati sve do izvršenja promatranog događaja A. Kako se broj ponavljanja pokusa u takvoj situaciji ne može točno predvidjeti već je slučajan, definira se slučajna varijabla X koja će predstavljati redni broj ponavljanja pokusa u kojem se željeni događaj realizirao.

Za slučajnu varijablu X vrijedi $X \in \{1,2,\ldots,n,\ldots\}$. Slijedi da je vjerojatnost da se događaj prvi put realizira u n - tom ponavljanju jednaka:

$$P[X = n] = p \cdot q^{n-1}, q = 1 - p;$$

pa vrijedi:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n & \ldots \\ p & pq & pq^2 & pq^3 & \ldots & pq^{n-1} & \ldots \end{pmatrix}.$$

Matematičko se očekivanje geometrijske razdiobe računa prema jednakosti:

$$E(X) = \frac{1}{p},$$

a varijanca:

$$V(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Hipergeometrijska razdioba ($H(N,M,n)$) ima vrlo široku praktičnu primjenu u industriji i drugim granama tehnike zbog svojih jedinstvenih karakteristika. Ako se radi o promatranom skupu s N elemenata u kojem M elemenata ima neko promatrano svojstvo također vrijedi da N-M elemenata nema to svojstvo. Slučajna varijabla X kod hipergeometrijske razdiobe tako predstavlja broj elemenata u uzorku koji sadrže promatrano svojstvo. Hipergeometrijska razdioba izračunavanje vjerojatnosti temelji na klasičnoj definiciji vjerojatnosti pa uzoraka s n elemenata od kojih k ima promatrano svojstvo ima

$$\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k},$$

odnosno vjerojatnost događaja $[X=k]$ iznosi:

$$P[X = k] = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Slijedi da za slučajnu varijablu X vrijedi $X\in\{0,1,\ldots,\min(n,M)\}$.

Matematičko očekivanje i varijanca slijedom navedenih činjenica svode se na:

$$E(X) = n\frac{M}{N};$$

$$V(X) = n\frac{M}{N}\frac{N-M}{N}\frac{N-n}{N-1}.$$

U graničnom slučaju, kada vrijedi da je broj elemenata skupa velik, a odabrani uzorak relativno mali, hipergeometrijska razdioba aproksimira se binomnom.

2.5. Osnovne neprekidne razdiobe

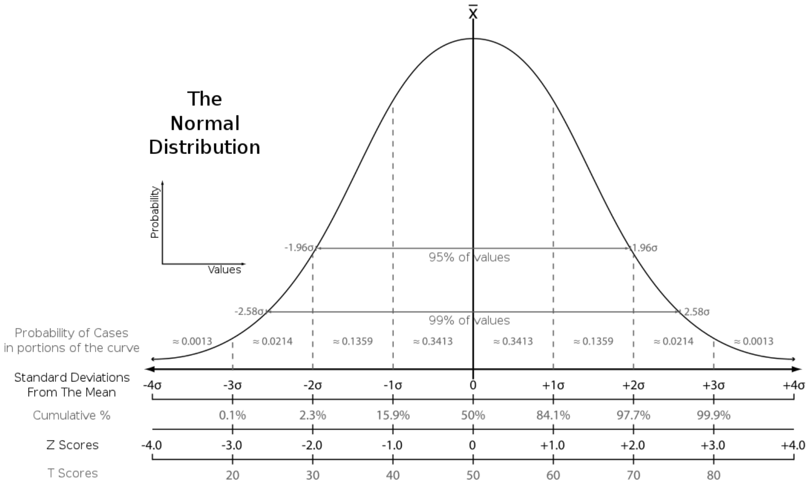
Normalna razdioba zbog svojih svojstava jedna je od najvažnijih u širokoj primjeni, a time i najčešće korištenih razdiobi u raznim granama znanosti, posebice društvenim znanostima, ali i inženjerstvu. Normalnu razdiobu moguće je prikazati Gaussovom krivuljom (još se naziva i normalna krivulja) koja predstavlja funkciju gustoće normalne slučajne varijable, a sama funkcija gustoće dana je s:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2},\ x\ \in R$$

gdje su μ i σ realni brojevi uz uvjet da je $\sigma > 0$. Tada se može reći da je slučajna varijabla X normalno distribuirana, a to se kraće zapisuje kao:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

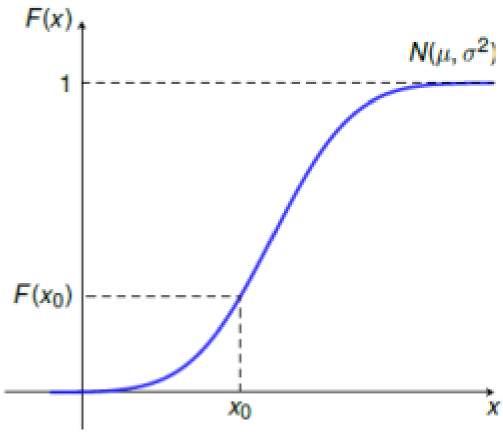
Gaussova krivulja se asimptotski približava x – osi, zvonolikog je oblika, a točke infleksije su u $x = \mu \pm \sigma$.



Slika 2.1. Prikaz normalne razdiobe Gaussovom krivuljom

Fukcija distribucije normalne razdiobe može se definirati pomoću sljedeće funkcije:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dt, \ x \in R,$$



Slika 2.2. Funkcija distribucije normalne razdiobe

Matematičko očekivanje normalne razdiobe iznosi:

$$E(X) = \mu,$$

a varijanca:

$$V(X) = \sigma^2.$$

Kod normalne razdiobe vrlo je bitno još spomenuti pojavu centralnog graničnog teorema. To je teorem prema kojemu se u određenim uvjetima suma (ne nužno normalnih) slučajnih varijabli može aproksimirati normalnom razdiobom, a iznimno je široke primjene u praktičnim statističkim proračunima i problemima zbog univerzalnosti i jednostavnosti normalne razdiobe.

Za **uniformnu razdiobu** kod neprekidnih varijabli, mora vrijediti da je vjerojatnost da slučajna varijabla poprimi vrijednost unutar nekog podintervala proporcionalna samo veličini tog podintervala. Označava se kao $U(a,b)$ pri čemu a i b predstavljaju donju i gornju granicu intervala (skupa). Za funkciju gustoće uniformne razdiobe vrijedi sljedeće:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{inače} \end{cases};$$

dok je funkcija distribucije dana s:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-x}, & a \leq x \leq b. \\ 1, & \text{inače} \end{cases}$$

Prema tome za matematičko očekivanje i varijancu vrijedi:

$$E(x) = \frac{a+b}{2};$$

$$V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Eksponencijalna razdoba $E(\lambda)$ se, slično Poissonovoj, temelji na promatranju ponavljanja pojave događaja u vremenskom intervalu s time da se eksponencijalna fokusira na prvu realizaciju događaja. Moguće je definirati da ukoliko je λ intenzitet ponavljanja događaja u određenom vremenskom intervalu, onda je X slučajna varijabla koja predstavlja vrijeme do njegove prve realizacije. Ovakav se način definiranja razdiobe često koristi kod proračunavanja trajnosti nekih proizvoda, alata ili strojeva u smislu da je moguće mjeriti vrijeme do prvog kvara ili potrebe za zamjenom djelova zbog dotrajalosti. Njena je funkcija gustoće dana kao:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \qquad t > 0;$$

Tako je funkcija distribucije određena s:

$$F_x(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad t > 0.$$

Matematičko očekivanje i varijanca prema tome iznose:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda};$$

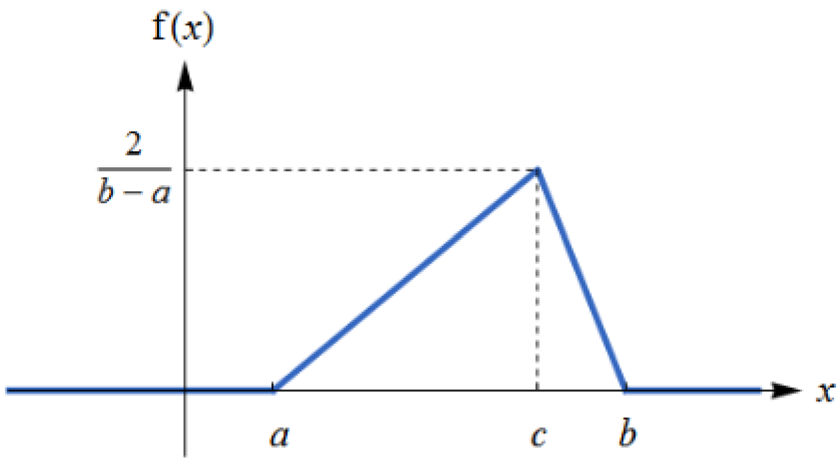
$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Za razumijevanje upotrebe eksponencijalne razdiobe još je potrebno napomenuti da vjerojatnost ostvarivanja promatranog događaja ovisi samo o duljini intervala bez obzira na trenutak u kojem se promatranje započelo pa se za nju kaže da „nema pamćenje“.

Trokutasta razdioba zadana je s tri parametra a, b, i c pa se označava kao $T(a,b,c)$ gdje a i b označavaju donju i gornju granicu intervala u kojem slučajna varijabla poprima vrijednost, dok c označava mod odnosno najčešću vrijednost slučajne varijable. Takva razdioba svoju primjenu nalazi kod procjena o duljini trajanja nekog zadatka, projekta ili nekog drugog posla ovisnog o vremenu. Njena funkcija gustoće može se zapisati kao:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, & a < x \leq c \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}, & c < x \leq b \\ 0, & \text{inače} \end{cases};$$

Grafički prikaz funkcije gustoće prikazan je na slici 2.3.



Slika 2.3. Funkcija gustoće trokutaste razdiobe

3. STATISTIČKI TESTOVI PRILAGODBE RAZDIOBAMA

Za brojne primijenjene probleme u statistici, vrlo često je potrebno točno poznavati razdiobu nekog skupa podataka kako bi se mogla provesti njihova obrada odnosno analiza. U takvim situacijama koristi se niz testova koji se primjenjuju za provjeravanje odgovara li takav skup podataka pripadajućoj razdiobi. Kao što je u prethodnom dijelu vidljivo, postoji značajan broj različitih razdiobi pa u skladu s time postoje i mnogi testovi, odnosno više načina određivanja pripadnosti podataka određenoj razdiobi. U praktičnim problemima najčešće je zastupljena normalna razdioba, pa je tako najčešće potrebno provjeriti / potvrditi ravna li se određeni skup podataka upravo prema normalnoj razdiobi, međutim, ovisno o grani znanosti ili području upotrebe, to ne mora biti isključiv slučaj. U deskriptivnoj statistici takva provjera podrazumijevala bi dobro poklapanje podataka s modelom normalne razdiobe dok se u Bayesovoj statistici pripadnost normalnoj razdiobi računa indirektno, uspoređivanjem vjerojatnosti da se podaci ravnaju prema normalnoj razdiobi (pomoću matematičkog očekivanja i varijance) te vjerojatnosti da se podaci ravnaju prema drugim razdiobama.

Jedan od najjednostavnijih načina provjere pripadnosti podataka normalnoj razdiobi bila bi grafička provjera, a provodi se konstruiranjem histograma frekvencija za zadani uzorak i usporedbom kretanja dobivene distribucije s Gaussovom krivuljom. Kako bi to bilo dugotrajno za provođenje, pogotovo kod velikog broja uzoraka, najčešće se prakticira provjera pomoću testova prilagodbe što osigurava značajno pojednostavljenje i ubrzanje takve provjere ukoliko je dobiveno rješenje zadovoljavajuće točnosti za dani praktični problem. Problem određivanja pripadnosti određenoj razdiobi može se razlikovati s obzirom na broj uzoraka. Tako može postojati problem jednog uzorka, problem dva uzorka te problem K – uzoraka. U ovisnosti o tome, pri provjeri se odabire najbolji test za određenu situaciju.

Neki od najpoznatijih testova prilagodbe razdiobi bili bi**: Pearsonov χ^2** test, **Kolmogorov-Smirnovljev** test, **Anderson-Darlingov** test te Shapiro-Wilkov test. Valja napomenuti da svaki od testova ima neke prednosti i nedostatke tako da je potrebno uzeti u obzir sve poznate okolnosti danih podataka pri postupku odabira određenog testa. Primjerice Pearsonov test, koji je povijesno izuzetno značajan, zahtijeva grupiranje ili kategoriziranje podataka čime opada i kvaliteta testiranja.

U nastavku će detaljnije biti opisani Pearsonov χ^2, Kolmogorov-Smirnovljev i Anderson-Darlingov test, njihove karakteristike, način upotrebe, primjena te prednosti i nedostaci u određenim okolnostima.

4. χ^2 TEST

4.1. Povijest χ^2 testa

Nakon što su se u povijesti pojavila značajna tehnološka i znanstvena otkrića pojavila se potreba za provjerom pripadnosti neke grupe podataka određenoj razdiobi. To je prvenstveno bilo popularno kod bioloških istraživanja jer se do izuma χ^2 testa za sve podatke pretpostavljalo da se ravnaju po normalnoj razdiobi što posljedično može uzrokovati velike netočnosti u proračunima. Krajem 19. stoljeća, engleski matematičar **Karl Pearson** (1857. – 1936.) shvatio je da se ipak svi podaci ne ravnaju prema normalnoj razdiobi već je u njihovoj distribuciji vidljiva jasna asimetrija te zbog toga ne dolazi do preciznih rezultata istraživanja. Tom problemu doskočio je osmišljavanjem i uvođenjem Pearsonove distribucije, skupine različitih distribucija koje su bile predviđene za različite razdiobe podataka. Time je donio značajni doprinos u svijetu znanstvenih istraživanja, a pogotovo statistike jer su njegova otkrića bila temelj za brojne druge testove prilagodbe. Uz to, Pearson je bio i utemeljitelj Odjela za primjenjenu statistiku na Sveučilištu u Londonu 1911. godine koji je kao takav u to doba bio prvi i jedinstveni u svijetu.

4.2. Primjena χ^2 testa

Kao i većina ostalih testova prilagodbe, χ^2 test se temelji na provjeri dane hipoteze i njenom potvrđivanju ili ukoliko se pokaže da ta hipoteza ne vrijedi, njenom odbacivanju. U tom smislu ukoliko je poznata grupa podataka potrebno je pretpostaviti razdiobu prema kojoj se ta grupa podataka ravna. Prema tome, u nastavku je prvo potrebno odrediti mjerodavnu vrijednost razilaženja teoretskih i empirijskih podataka, a ta vrijednost naziva se upravo χ^2. Nakon što je za određeni slučaj uzorka s N elemenata postavljena hipoteza H_0 koja podrazumijeva pripadnost podataka određenoj razdiobi, a podaci grupirani na n_r razreda uz određene njihove pripadajuće frekvencije f_i, za određen broj modela i poznate frekvencije, potrebno je prvo izračunati vjerojatnosti da podaci pripadaju određenom razredu i to prema sljedećim formulama:

$$p_{ti} = P[X = x_i] \text{ za diskretne razdiobe, odnosno}$$

$$p_{ti} = P[x_i < X < x_{i+1}] \text{ za neprekidne razdiobe.}$$

Potrebno je napomenuti da ukoliko su pripadajuće teoretske frekvencije manje od 5, razredi se spajaju. U nastavku je moguće odrediti pripadajuće teoretske frekvencije i to prema formuli:

$$f_{ti} = N \cdot p_{ti}.$$

Definiramo veličinu χ^2 s:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n_r} \frac{(f_i - f_{ti})^2}{f_{ti}}.$$

Potrebno je još odabrati koeficijent pouzdanosti α, za kojeg se obično usvaja $\alpha = 0.01$ ili češće u praksi $\alpha = 0.05$ te odrediti kritičnu vrijednost $\chi^2_{1-\alpha}$ za koju vrijedi $P[\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}] = \alpha$. Prema Pearsonovom teoremu, za veličinu χ^2 vrijedi da razdijeljena prema zakonu gamma (*Γ)* razdiobe čiji je pripadajući stupanj slobode k, a on direktno ovisi o broju razreda, n_r te broju parametara razdiobe koji su određeni iz empirijskih podataka, r. Takva međuzavisnost se kraće zapisuje kao:

$$\chi^2 \sim \Gamma(n_r - r - 1),$$

a za stupanj slobode k vrijedi:

$$k = n_r - r - 1,$$

Prema tome, kritična vrijednost $\chi^2_{1-\alpha}$ određuje se iz tablice 4.1 za gamma razdiobu, $\Gamma(n_0)$.

Tablica 4.1. Kritične $\chi^2_{1-\alpha}$ vrijednosti

n_0 \ α	0,99	0,98	0,9	0,8	0,7	0,5	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	0,297	0,429	0,711	1,064	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,466
5	0,554	0,752	1,145	1,610	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	1,239	1,564	2,167	2,833	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,321
8	1,647	2,032	2,733	3,490	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,124
9	2,088	2,532	3,325	4,168	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	2,558	3,059	3,940	4,865	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	3,053	3,609	4,575	5,578	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	3,571	4,178	5,226	6,304	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	4,107	4,765	5,892	7,041	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,471	27,688	34,527
14	4,660	5,368	6,571	7,790	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	36,124
15	5,229	5,985	7,261	8,547	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,698
16	5,812	6,614	7,962	9,312	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	6,408	7,255	8,672	10,085	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,791
18	7,015	7,906	9,390	10,865	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	7,633	8,567	10,117	11,651	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,819
20	8,260	9,237	10,851	12,443	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,314
21	8,897	9,915	11,591	13,240	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,796
22	9,542	10,600	12,338	14,041	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	10,196	11,293	13,091	14,848	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	10,856	11,992	13,848	15,659	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	11,524	12,697	14,611	16,473	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,619
26	12,198	13,409	15,379	17,292	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,051
27	12,878	14,125	16,151	18,114	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,475
28	13,565	14,847	16,928	18,939	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,892
29	14,256	15,574	17,708	19,768	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,301
30	14,953	16,306	18,493	20,599	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,702

Na kraju se provodi postupak donošenja zaključka pa ako vrijedi da je $\chi^2_0 < \chi^2_{1-\alpha}$ smatra se da su uvjeti za prihvaćanje hipoteze H_0 zadovoljavajući te se ona prihvaća, a u suprotnom, kada vrijedi $\chi^2_0 > \chi^2_{1-\alpha}$ hipoteza H_0 se odbacuje. Za slučaj kada je hipoteza H_0 predstavljala pripadnost podataka određenoj razdiobi, u slučaju prihvaćanja hipoteze zaključuje se da ti podaci pripadaju upravo toj razdiobi odnosno u slučaju odbacivanja ne pripadaju.

4.3. Prednosti i nedostaci χ^2 testa

χ^2 test kao jedan od povijesno najstarijih ujedno je i izuzetno univerzalan pa je stoga pogodan za vrlo široku primjenu. Iako korijeni njegove upotrebe počinju u biologiji, medicini i raznim istraživanjima u društvenim znanostima, danas svoju primjenu nerijetko nalazi i u tehničkim znanostima, industriji pa čak i uslužnim djelatnostima. Njegova primjena najčešće se svodi na provjeru pripadnosti podataka određenoj razdiobi, iako može imati i druge funkcije, a velika prednost mu je potreba za poznavanjem tek malog broja parametara koje je vrlo lako dobiti iz danih podataka. Unatoč tome što je vrlo jednostavan, najveći nedostatak i prepreka te razlog zašto se danas često izbjegava je potreba za grupiranjem podataka u određene razrede čime se kod velike skupine različitih podataka proces proračuna može znatno usporiti pa čak i smanjiti točnost dobivenih rezultata, što je kod nekih drugih testova izbjegnuto. Također, vrlo je jednostavna njegova implementacija u raznim statističkim programima, primjerice *SPSS* ili *Microsoft Excel* gdje se učestalo koristi premda postoje i razni drugi alati.

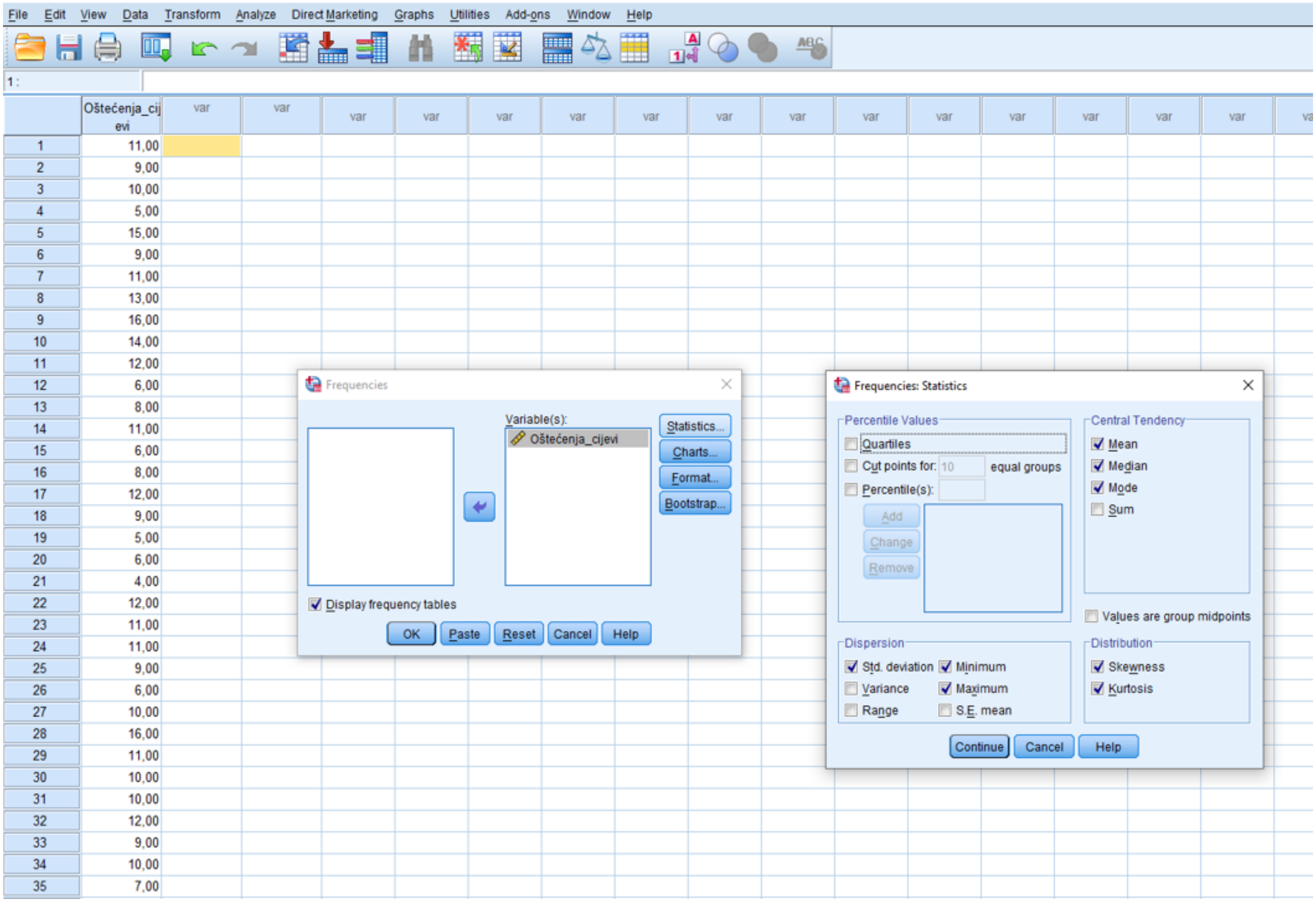
4.4. Upotreba χ^2 testa u *SPSS* – u

Kako računalna tehnologija u doba izuma χ^2 testa još nije bila izumljena, on se isključivo provodio ručno, korak po korak. Za današnja bi istraživanja takav proces bio bi u najmanju ruku dugotrajan i sklon pogreškama, a za brojne slučajeve s velikim brojem podataka i nemoguć. Tako se danas takav proračuni učestalo provode u nekom programu ili aplikaciji.

SPSS Statistics statistički je softverski paket kojeg je razvila tvrtka *IBM*. Koristi se za upravljanje podacima, razne analize, naprednu analitiku pa čak i u kriminalističkim istragama. Kao takav vrlo je često korišten, a sadrži alate za jednostavno provođenje različitih proračuna i testova pa tako sadrži i χ^2 test.

Primjena χ^2 testa na primjeru poznatih podataka u *SPSS* – u relativno je jednostavna, a postupak će u nekoliko koraka biti prikazan u nastavku. Analizira se broj oštećenja po metru cijevi za 200 različitih uzoraka cijevi, a za taj je uzorak potrebno pomoću χ^2 testa odrediti ravnaju li se podaci po Poissonovoj razdiobi. Neka postavljena hipoteza H_0 podrazumijeva pripadnost zadanih podataka Poissonovoj razdiobi.

Prije svega, nakon unosa podataka oštećenja cijevi u program, za zadane je podatke moguće dobiti neke opće statističke podatke poput broja uzoraka, minimuma, maksimuma, standardne devijacije, aritmetičke sredine i slično. Za dobivanje tih parametara potrebno je u izborniku pod *Analyze* odabrati „Oštećenja_cijevi“ kao varijable na kojima se želi izvršiti proračun te u nastavku pod opcijom *Statistics* odabrati sve željene statističke parametre. Također pod opcijom *Charts* moguće je odabrati prikaz različitih mogućih grafova za zadane podatke. Ovaj korak vidljiv je na slici 4.1 i 4.2 u nastavku.



Slika 4.1. Ulazni parametri za izračun osnovnih statističkih parametara

N	Valid	200
	Missing	0
Mean		9.6850
Median		9.5000
Mode		9.00
Std. Deviation		2.91173
Variance		8.478
Skewness		.210
Std. Error of Skewness		.172
Kurtosis		-.409
Std. Error of Kurtosis		.342
Minimum		3.00
Maximum		16.00

Slika 4.2. Dobivene vrijednosti osnovnih statističkih parametara

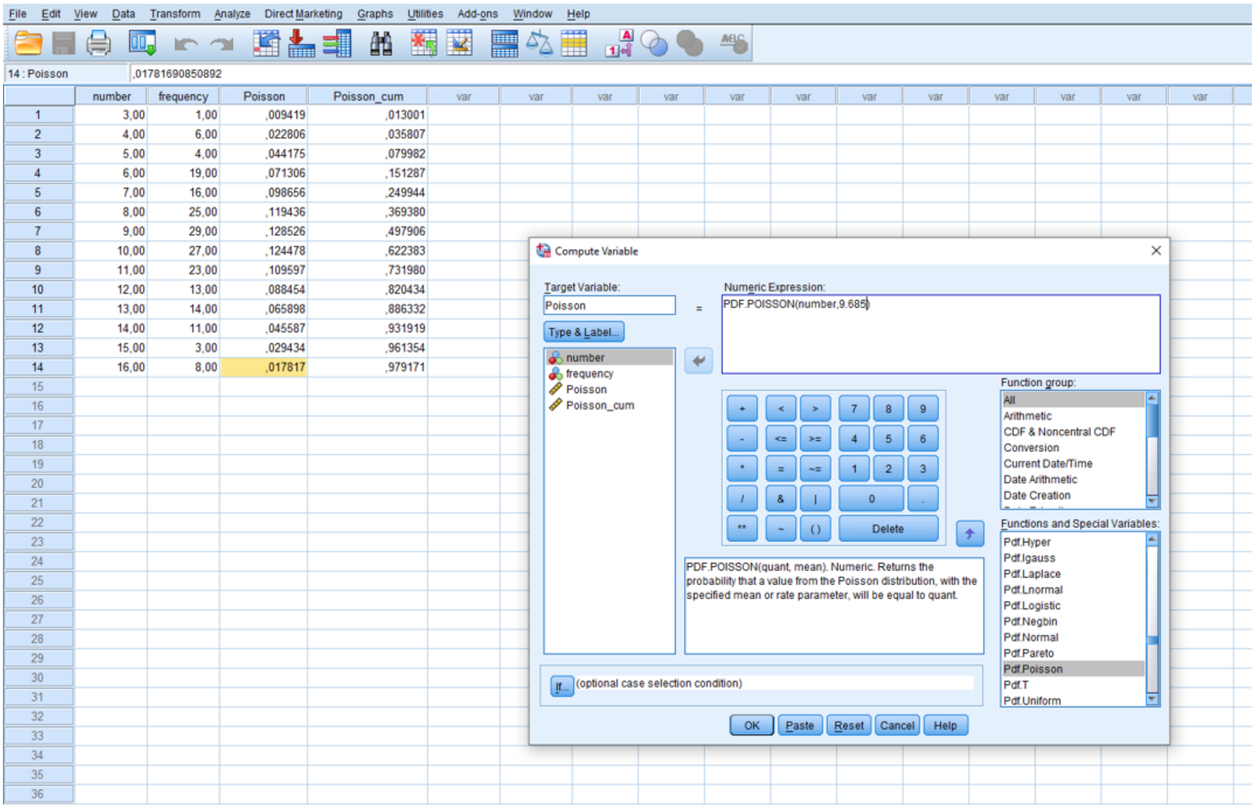
Također, s odabirom opcije „Display frequency tables" potrebno je dobiti vrijednosti pripadajućih frekvencija za zadane podatke, a za ovaj slučaj prikazane su u tablici 4.2.

Tablica 4.2. Pripadajuće frekvencije za zadani broj oštećenja

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	3.00	1	.5	.5	.5
	4.00	6	3.0	3.0	3.5
	5.00	4	2.0	2.0	5.5
	6.00	19	9.5	9.5	15.0
	7.00	16	8.0	8.0	23.0
	8.00	25	12.5	12.5	35.5
	9.00	29	14.5	14.5	50.0
	10.00	27	13.5	13.5	63.5
	11.00	23	11.5	11.5	75.0
	12.00	13	6.5	6.5	81.5
	13.00	14	7.0	7.0	88.5
	14.00	11	5.5	5.5	94.0
	15.00	4	2.0	2.0	96.0
	16.00	8	4.0	4.0	100.0
	Total	200	100.0	100.0	

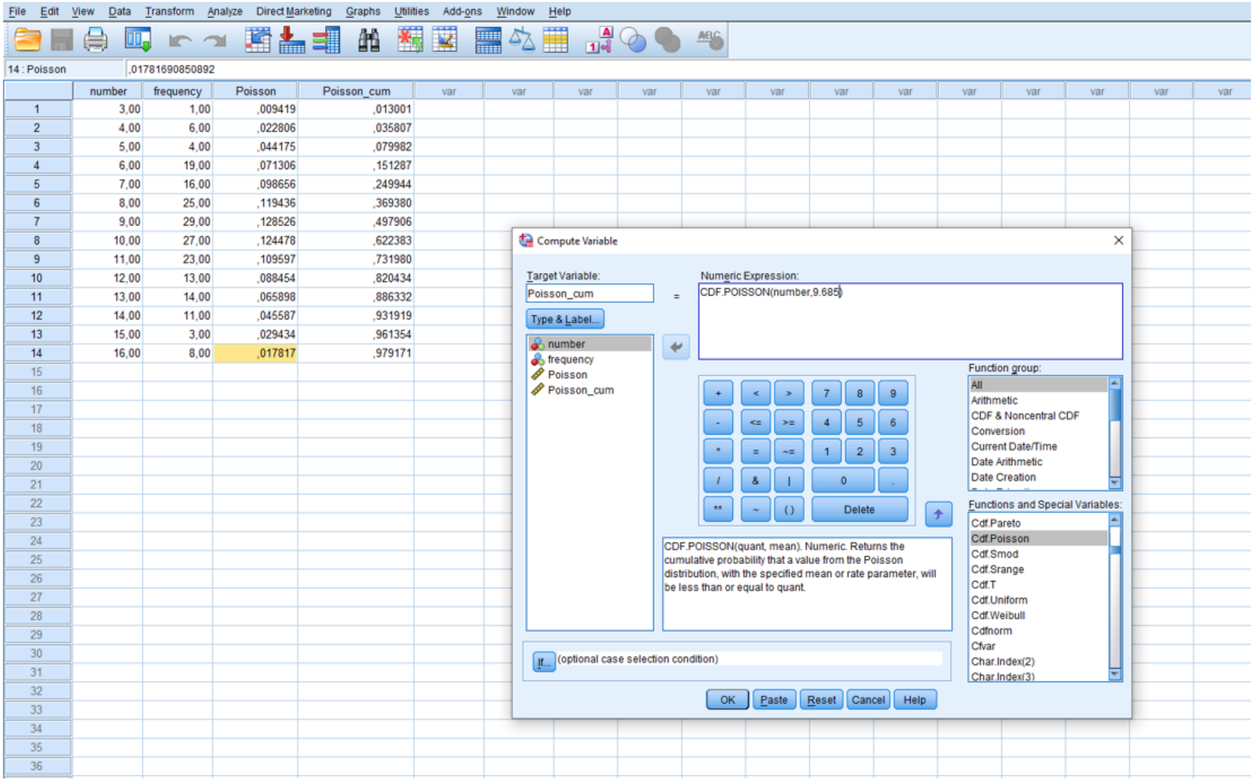
Sljedeći nužan korak je izračunavanje matematičkog očekivanja *E(X)* za koje kod Poissonove razdiobe vrijedi da je jednak procijenjenom parametru λ, a za dani slučaj iznosi $\lambda = 9.685$.

S poznatim matematičkim očekivanjem, dalje je moguće za tako grupirane podatke dobiti Poissonove vjerojatnosti kao i kumulativne Poissonove vjerojatnosti. Pod karticom *Transform* odabire se *Compute Variable* te se u tom prozoru u desnim izbornicima pod *Function group* izabire „All“, a pod *Functions and Special Variables* „Pdf.Poisson“ za Poissonove odnosno „Cdf.Poisson“ za kumulativne Poissonove vjerojatnosti. Parametri koje obje funkcije zahtijevaju za izračun su broj pojedinih uzoraka (u primjeru „number“) te matematičko očekivanje. Prikaz prozora s postavkama za računanje Poissonove i kumulativne Poissonove vjerojatnosti vidljiv je na slikama 4.3 i 4.4.



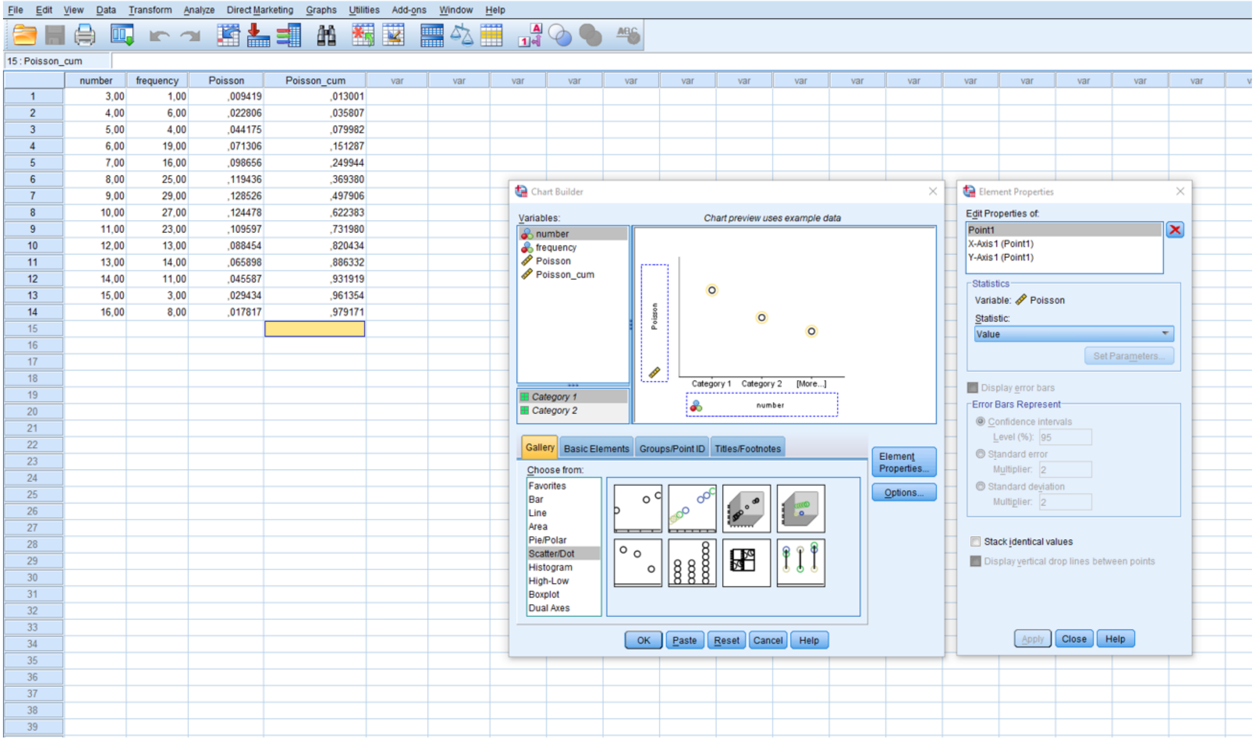
	number	frequency	Poisson	Poisson_cum
1	3,00	1,00	,009419	,013001
2	4,00	6,00	,022806	,035807
3	5,00	4,00	,044175	,079982
4	6,00	19,00	,071306	,151287
5	7,00	16,00	,098656	,249944
6	8,00	25,00	,119436	,369380
7	9,00	29,00	,128526	,497906
8	10,00	27,00	,124478	,622383
9	11,00	23,00	,109597	,731980
10	12,00	13,00	,088454	,820434
11	13,00	14,00	,065898	,886332
12	14,00	11,00	,045587	,931919
13	15,00	3,00	,029434	,961354
14	16,00	8,00	,017817	,979171

Slika 4.3. Izračun Poissonove vjerojatnosti

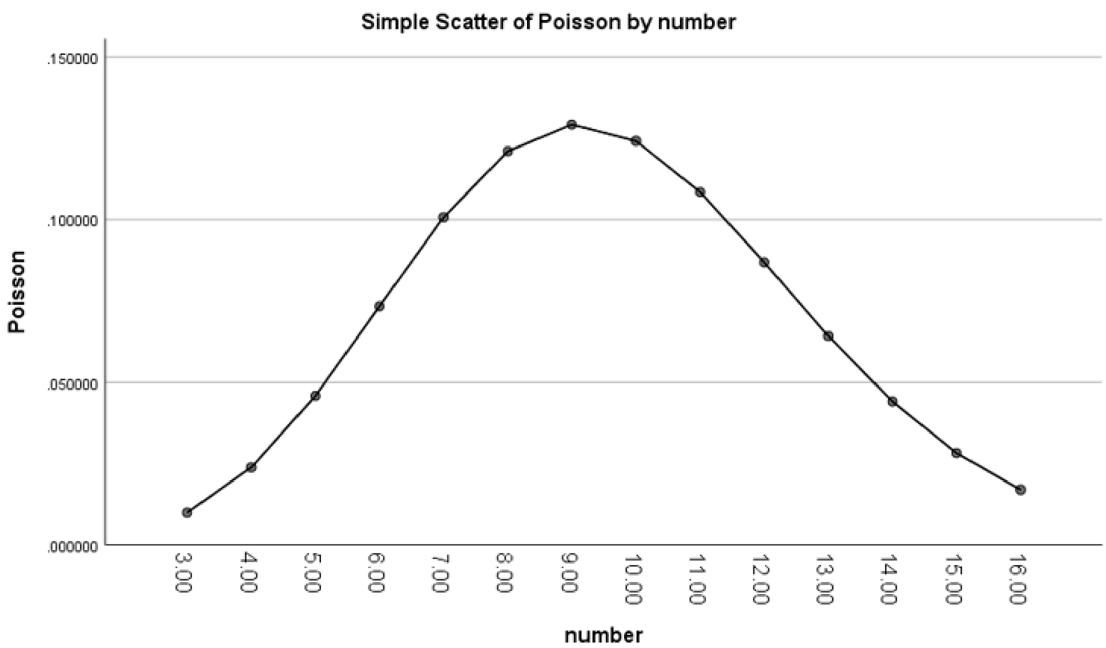


Slika 4.4. Izračun kumulativne Poissonove vjerojatnosti

Vrlo koristan i praktičan dio koji često nalazi primjenu kod statističkih proračuna je mogućnost i jednostavnost dobivanja grafova. Za ovaj slučaj željene je grafove moguće dobiti na sljedeći način. Pod karticom *Graphs* odabire se opcija C*hart builder*. Tu je u prozoru prikazanom na slici 4.5 moguće formiranje grafova željenih karakteristika postavljanjem parametara na osi i odabirom vrste grafa. U ovom slučaju dovoljan je grafički prikaz ovisnosti broja pogrešaka te pripadnih Poissonovih vjerojatnosti njenog pojavljivanja prikazan na slici 4.6.

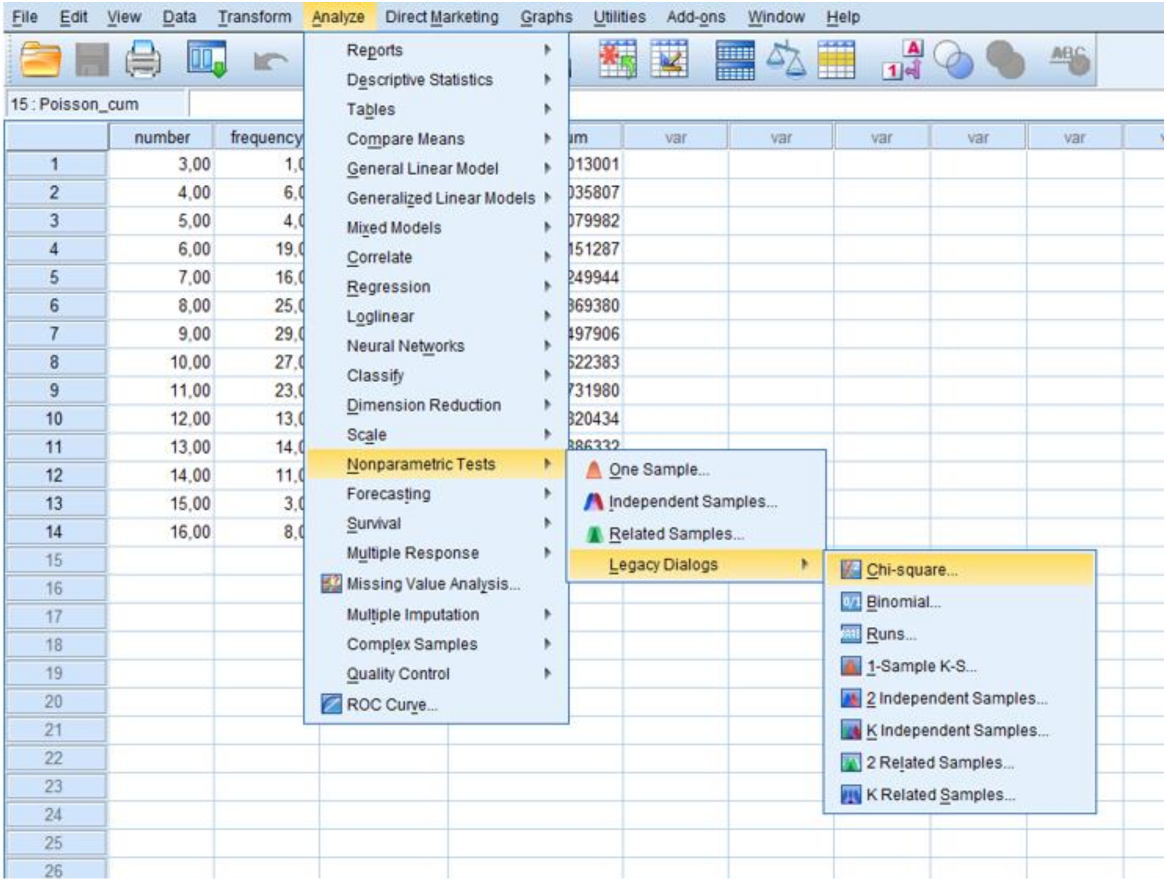


Slika 4.5. Postupak odabira parametara za crtanje grafova



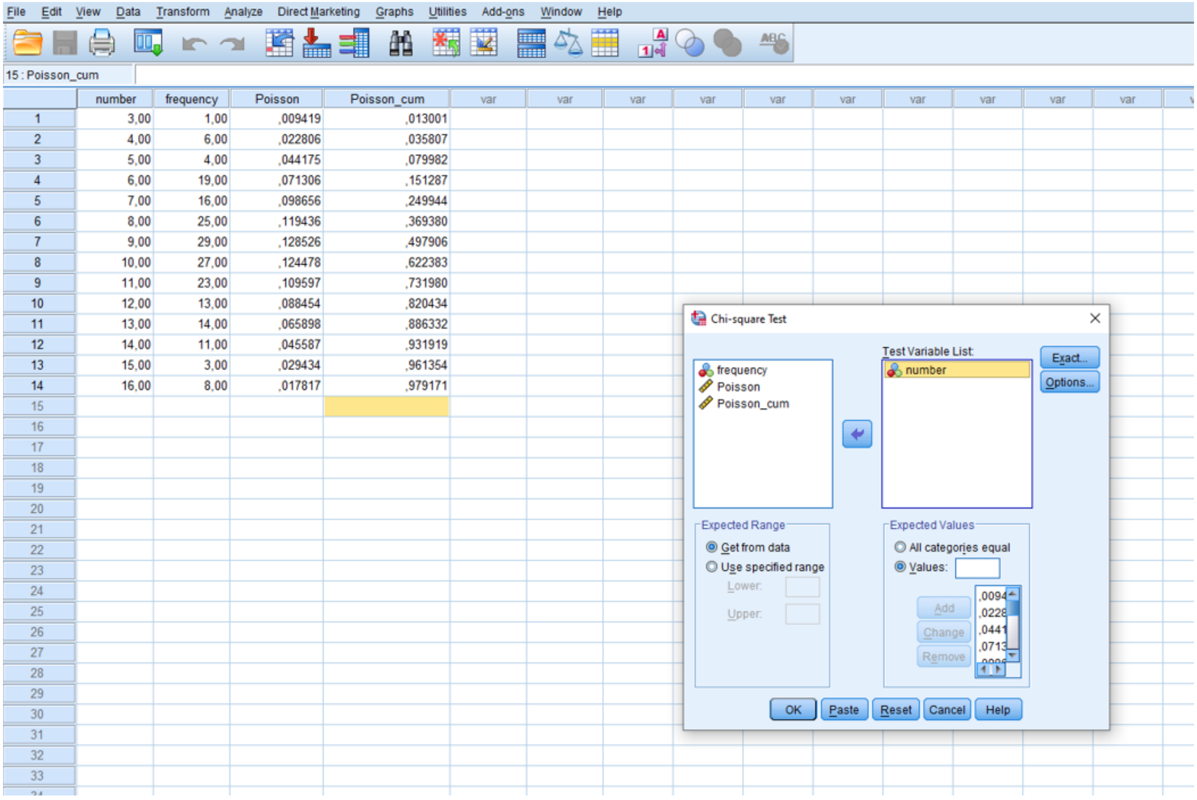
Slika 4.6. Grafički prikaz broja pogrešaka i vjerojatnosti njenog pojavljivanja

Kao zadnji i najbitniji korak potrebno je dobiti pokazatelje na temelju kojih je moguće zaključiti radi li se doista o Poissonovoj razdiobi. Za taj dio pod *Analyze* se odabire *Nonparametric Tests* pa *Legacy Dialogs* i na kraju *Chi – Square* kako je vidljivo iz slike 4.7.



Slika 4.7. Odabir postavki za dobivanje mjerodavnih pokazatelja pripadnosti razdiobi

Odabirom navedenih opcija otvara se prozor, a u njemu se pod *Test variable list* odabire broj pojedinih uzoraka (u primjeru kao „number“), a pod *Expected values* odabiru se pripadne vrijednosti Poissonovih vjerojatnosti. Postupak je vidljiv na slici 4.8.



Slika 4.8. Odabir parametara za izračun mjerodavnih pokazatelja pripadnosti razdiobi

Za ovu skupinu zadanih parametara, i na ovaj način zadane varijable program omogućava vrlo jednostavan ispis izlaznih varijabli odnosno glavnih pokazatelja za donošenje zaključaka: χ^2 vrijednosti, broj stupnjeva slobode i p - vrijednosti. Takav prikaz vidljiv je u tablici 4.3. u nastavku.

Tablica 4.3. Parametri dobiveni χ^2 testom

Test Statistics

	number
Chi-Square	11,689[a]
df	13
Asymp. Sig.	,553

Kako je dobivena p – vrijednost iznosi 0.553 te vrijedi da je veća od 0.05 postavljena se hipoteza H_0 ne odbacuje odnosno zaključuje se da razdioba ovih podataka ne odstupa značajno od Poissonove razdiobe.

5. KOLMOGOROV – SMIRNOVLJEV TEST

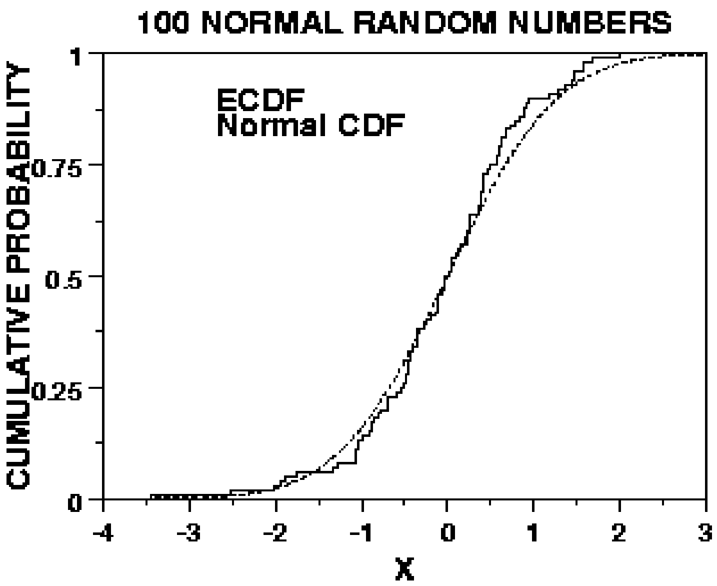
5.1. Povijest Kolmogorov – Smirnovljeva testa

Kolmogorov – Smirnovljev test vremenski gledano jedan je od modernijih testova upotrebljavanih pri provjeri pripadnosti grupe podataka određenoj razdiobi. Test danas postoji u brojnim varijantama dok ga je izvorno osmislio ruski matematičar **Andrej Nikolajevič Kolmogorov** (1903. – 1987.) za jedan uzorak 1933. godine dok je 1939. **Vladimir Ivanovič Smirnov** (1887. – 1974.), također ruski matematičar, osmislio verziju za dva uzorka. Prema njima test i dobiva ime, a uz Anderson – Darlingov test jedan je od najkorištenijih testova prilagodbe u statitstici. Osim izuma Kolmogorov – Smirnovljeva testa, ova dvojica matematičara ostvarila su i brojna druga otkrića koja su uvelike unaprijedila modernu statistiku te se njihov rad smatra izrazito važnim.

5.2. Primjena Kolmogorov – Smirnovljeva testa

Kolmogorov – Smirnovljev test neparametarski je statistički test prilagodbe koji kao metodu procjene pripadnosti podataka određenoj razdiobi koristi sličnosti između dviju zadanih razdioba. Tri su osnovna oblika testa, a to su: test za jedan uzorak koji provjerava pripada li uzorak željenoj razdiobi; test dva uzorka, koji provjerava pripadaju li oba uzorka istoj razdiobi te kao test koji ispituje dolazi li uzorak iz pretpostavljene ili teoretske razdiobe.

Test se temelji na empirijskoj funkciji distribucije za N poznatih uzlazno poredanih podatkovnih točaka: Y_1, Y_2, ..., Y_n odnosno maksimalnoj razlici između kumulativnih funkcija distribucije za dvije razdiobe što je moguće vidjeti na slici 5.1. Slika prikazuje graf usporedbe empirijske funkcije distribucije s normalnom kumulativnom funkcijom distribucije za uzorak od 100 nasumično izabranih brojeva.



Slika 5.1. Graf usporedbe empirijske funkcije distribucije s normalnom kumulativnom funkcijom distribucije

Zbog svojih karakteristika test je vrlo popularan jer ima širok spektar mogućnosti unatoč raznim preprekama u skupinama podataka. Iako je nešto kompleksniji od χ^2 testa danas se u praksi češće koristi upravo zbog omogućavanja preciznijih i bržih rezultata za veći broj uzoraka.

Kao i kod ostalih testova, prije svega je potrebno odrediti hipoteze. Za slučaj kada se testom provjerava pripadnost podataka određenoj razdiobi, hipoteza H_0 podrazumijevala bi pripadnost podataka upravo pretpostavljenoj razdiobi dok bi alternativna hipoteza H_a podrazumijevala da podaci ne pripadaju toj razdiobi. Prema tome, statistika Kolmogorov – Smirnovljev – a testa temelji se na vrijednosti *D*, danoj izrazom:

$$D = \max_{1<i<N}(F(Y_i) - \frac{i-1}{N}, \frac{i}{N} - F(Y_i)),$$

gdje je *F* teorijska kumulativna distribucija testirane razdiobe, koja mora biti kontinuirana i u potpunosti specificirana, *N* broj uzoraka dok i označava i -ti uzorak. Kao i kod ostalih testova, potrebno je odrediti i koeficijent pouzdanosti α, a najčešće se u praksi usvaja kao 0.05.

Kada se dobije vrijednost *D*, potrebno ju je usporediti s kritičnom vrijednošću koje se dobivaju tablično. Postoje razne varijante takvih tablica koje se najčešće koriste u literaturi, a njihove vrijednosti međusobno nisu u potpunosti jednako skalirane pa nekada dolazi do nepodudaranja rezultata. U tom smislu potrebno je osigurati da se vrijednost *D* računa na isti način kao i vrijednosti u tablicama. Primjer takvih tablično prikazanih vrijednosti moguće je vidjeti u tablici 5.1.

Tablica 5.1. Kritične D - vrijednosti mjerodavne za Kolmogorov – Smirnovljev test pri normalnoj razdiobi podataka

n	α = 0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
1	0.421	0.445	0.486	0.519	0.562
2	0.386	0.408	0.446	0.476	0.516
3	0.350	0.370	0.404	0.432	0.468
4	0.321	0.339	0.371	0.395	0.429
5	0.297	0.314	0.343	0.366	0.397
6	0.278	0.294	0.321	0.343	0.371
7	0.262	0.277	0.303	0.323	0.350
8	0.248	0.263	0.287	0.306	0.332
9	0.237	0.250	0.273	0.292	0.316
10	0.227	0.239	0.262	0.279	0.303
11	0.218	0.230	0.251	0.268	0.290
12	0.209	0.221	0.242	0.258	0.280
13	0.202	0.214	0.234	0.249	0.270
14	0.196	0.207	0.226	0.241	0.261
15	0.190	0.201	0.219	0.234	0.254
16	0.184	0.195	0.213	0.227	0.246
17	0.179	0.190	0.207	0.221	0.240
18	0.175	0.185	0.202	0.215	0.233
19	0.171	0.180	0.197	0.210	0.228
20	0.167	0.176	0.192	0.205	0.222
21	0.163	0.172	0.188	0.201	0.218
22	0.159	0.168	0.184	0.196	0.213
23	0.156	0.165	0.180	0.192	0.209
24	0.153	0.162	0.177	0.189	0.204
25	0.150	0.159	0.173	0.185	0.201
26	0.147	0.156	0.170	0.182	0.197
27	0.145	0.153	0.167	0.179	0.193
28	0.142	0.150	0.164	0.175	0.190
29	0.140	0.148	0.162	0.173	0.187
30	0.138	0.146	0.159	0.170	0.184
31	0.136	0.143	0.157	0.167	0.181
32	0.134	0.141	0.154	0.165	0.179
33	0.132	0.139	0.152	0.162	0.176
34	0.130	0.137	0.150	0.160	0.173
35	0.128	0.135	0.148	0.158	0.171
36	0.126	0.134	0.146	0.156	0.169
37	0.125	0.132	0.144	0.154	0.167
38	0.123	0.130	0.142	0.152	0.164
39	0.122	0.129	0.140	0.150	0.162
40	0.120	0.127	0.139	0.148	0.160
41	0.119	0.126	0.137	0.146	0.159
42	0.117	0.124	0.136	0.145	0.157
43	0.116	0.123	0.134	0.143	0.155
44	0.115	0.121	0.133	0.141	0.153
45	0.114	0.120	0.131	0.140	0.152
46	0.112	0.119	0.130	0.138	0.150
47	0.111	0.118	0.128	0.137	0.149
48	0.110	0.116	0.127	0.136	0.147
49	0.109	0.115	0.126	0.134	0.146
50	0.108	0.114	0.125	0.133	0.144

U nastavku, određuje se p – vrijednost koja uz vrijednost D služi kao glavni parametar za odluku o prihvaćanju ili odbacivanju nulte hipoteze. Tako za slučaj kada primjerice vrijednost D premašuje kritičnu vrijednost u mjerodavnoj tablici ili je p – vrijednost manja od koeficijenta pouzdanosti α, nulta hipoteza H_0 se sa sigurnošću može odbaciti u korist alternativne hipoteze H_a. Kao i u prethodnom slučaju, ukoliko se nulta hipoteza odbacuje, moguće je zaključiti da podaci ne pripadaju željenoj razdiobi dok u suprotnom, ukoliko se ona prihvaća, podrazumijeva se da podaci pripadaju željenoj razdiobi.

5.3. Prednosti i nedostaci Kolmogorov – Smirnovljeva testa

Iako Kolmogorov-Smirnovljev test ima brojne prednosti nad raznim drugim testovima, kao najveća prednost obično se ističe njegovo svojstvo da je neparametarski što znači da ne pretpostavlja da se podaci ravnaju po nekoj razdiobi što ga čini univerzalnim i svestranim. Osim toga, vrlo je prikladan za jako male ili s druge strane jako velike uzorke i u oba slučaja osigurava vrlo precizan rezultat, a pri tome ne zahtijeva grupiranje podataka u razrede poput primjerice χ^2 testa. Vrlo je pogodan za implemetaciju u raznim softverima, pa osim što ga se može direktno koristiti, neki kompleksniji softveri ga upotrebljavaju u pozadini kod potrebe za nekim složenijim proračunima. Kod direktne upotrebe vrlo je jednostavan i brz te je lako dobiti ispis tablica i grafičkih prikaza.

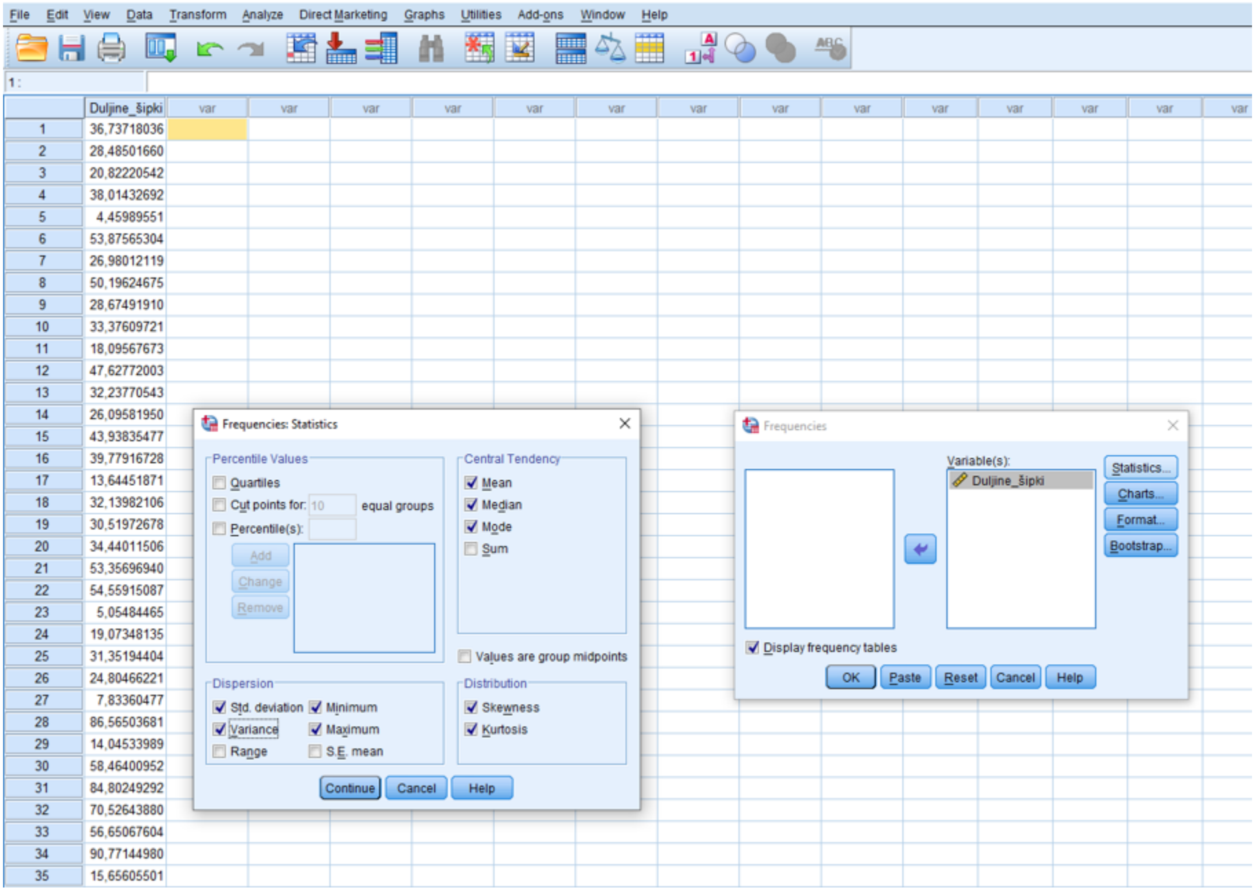
S druge strane, kao jedan od najvećih nedostataka ovog testa može se izdvojiti njegova ograničenost na neprekidne razdiobe odnosno nemogućnost uporabe za proračune nad diskretnim ili kategoričkim podacima što mu jako smanjuje područje primjene. Uz to dosta je osjetljiv na odstupanja u vrijednostima zadanih podataka što nerijetko može izazvati neželjene poteškoće i netočnost krajnjeg rezultata, a iako je pogodan i za male uzorke, nedostatak mu je i to što mu točnost ipak opada smanjenjem broja uzoraka.

5.4. Primjer upotrebe Kolmogorov – Smirnovljeva testa u *SPSS* – u

Kao što je to slučaj za χ^2 test, *SPSS* sadrži sve potrebne alate za proračune pomoću Kolmogorov – Smirnovljeva testa. Osim što je moguće direktno dobiti konkretne proračune vezane za Kolmogorov – Smirnovljev test, program taj test automatski koristi pri brojnim potrebama za razne provjere pripadnosti razdiobama te uklapanja podataka u određeni uzorak za druge složenije proračune.

Postupak provjere pripadnosti razdiobi pomoću Kolmogorov – Smirnovljeva testa biti će prikazan na temelju uzorka od 400 podataka koji prate mjeru duljine proizvedenih šipki kao metodu kontrole ispravnosti stroja. Za tako zadani skup podataka potrebno je provjeriti ravnaju li se zadani podaci prema normalnoj razdiobi. Neka nulta hipoteza H_0 podrazumijeva pripadnost podataka normalnoj razdiobi dok alternativna, H_a podrazumijeva da podaci ne pripadaju normalnoj razdiobi.

Kao i kod χ^2 testa, prije svega moguće je iz upisanih podataka dobiti željene osnovne statističke parametre. Za to je potrebno u izborniku pod *Analyze* odabrati „Duljine_šipki" kao varijable na kojima se želi izvršiti proračun te u nastavku pod opcijom *Statistics* odabrati sve željene statističke parametre kao što je prikazano na slici 5.2.



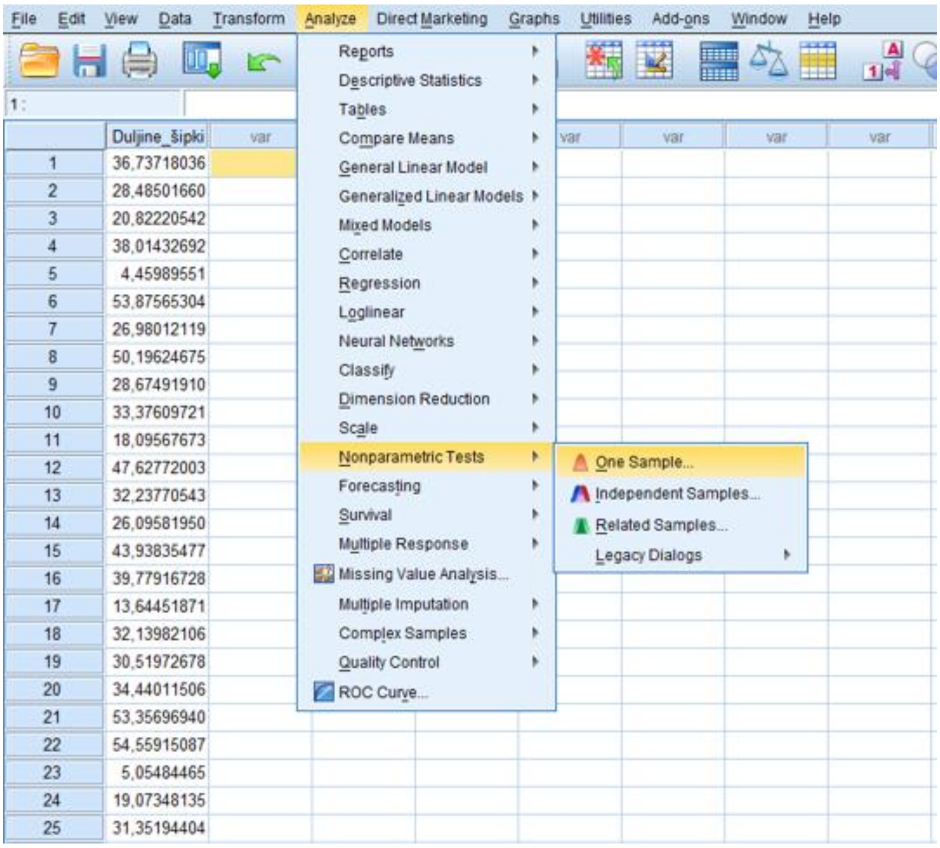
Slika 5.2. Postupak računanja osnovnih statističkih parametara

Iako ovaj korak pri ovakvom testu nije nužno potreban, uvijek ga je dobro napraviti zbog mogućnosti upotrebe podataka u nekim drugim slučajevima ili za različite kontrole. Za konkretni slučaj vrijednosti odabranih parametara prikazani su na slici 5.3.

N	Valid	400
	Missing	0
Mean		45.5418409799
Median		41.7819769350
Mode		1.49851942[a]
Std. Deviation		20.49598314626
Variance		420.085
Skewness		.683
Std. Error of Skewness		.122
Kurtosis		.213
Std. Error of Kurtosis		.243
Minimum		1.49851942
Maximum		112.19175530

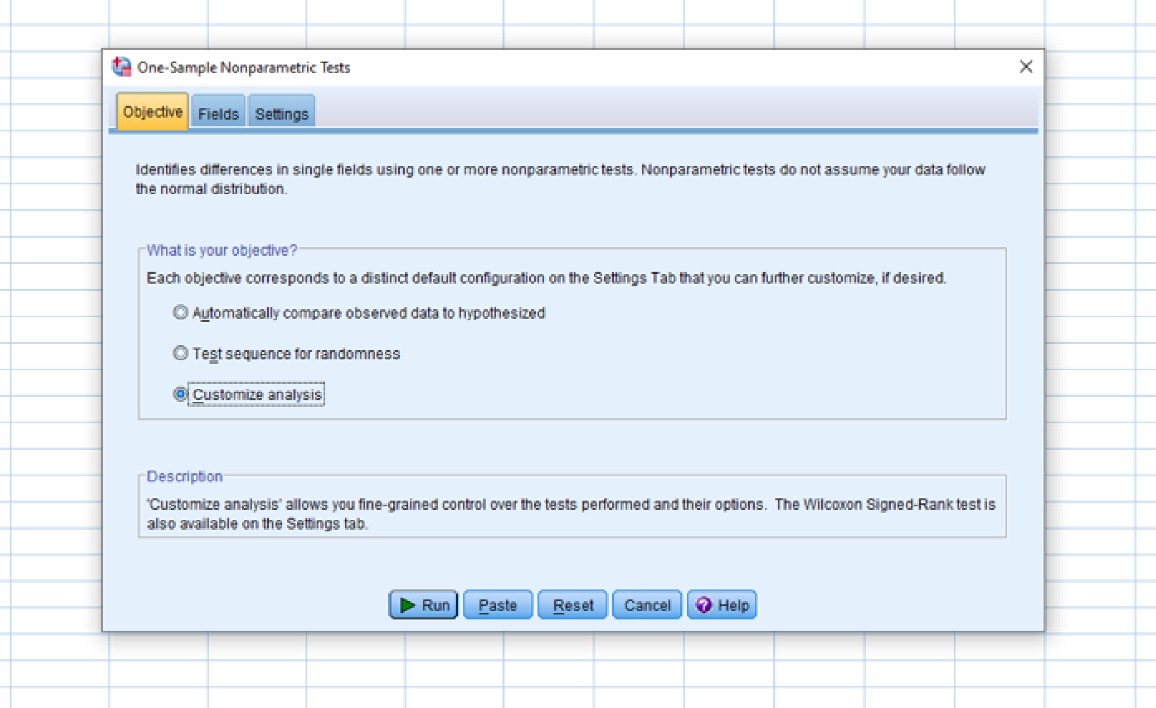
Slika 5.3. Dobivene vrijednosti osnovnih statističkih parametara

U sljedećem je koraku potrebno pod *Analyze* odabrati *Nonparametric Tests* pa *One Sample* kao što je prikazano na slici 5.4.

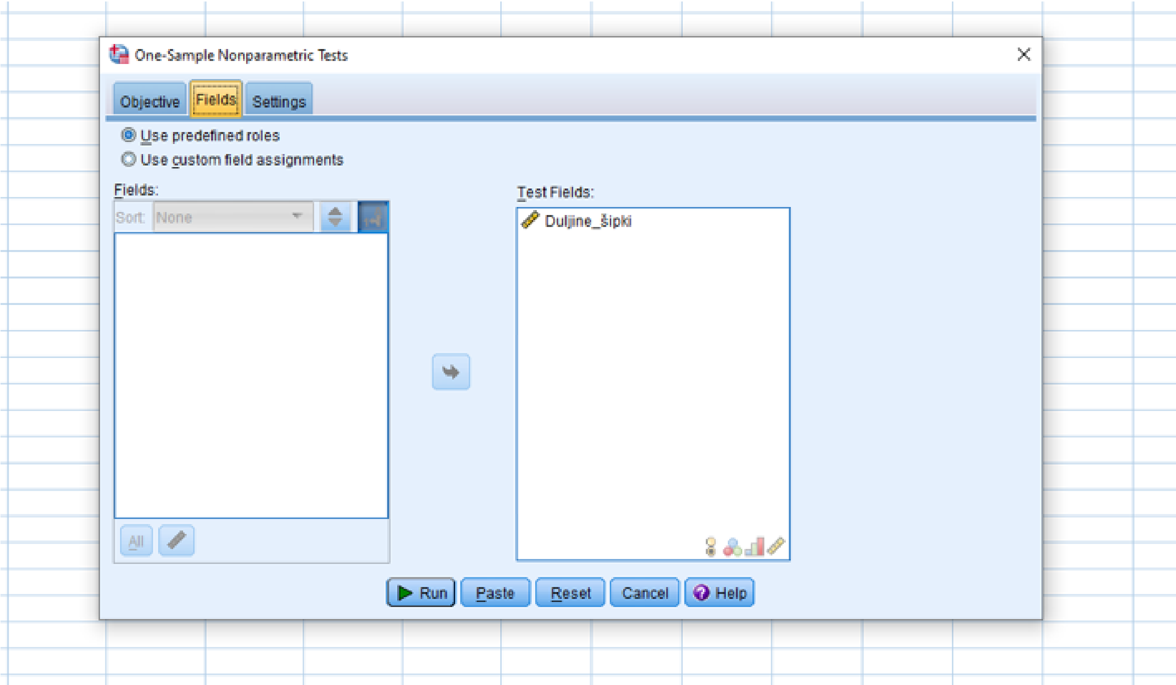


Slika 5.4. Postupak odabira odgovarajućih opcija za Kolmogorov – Smirnovljev test

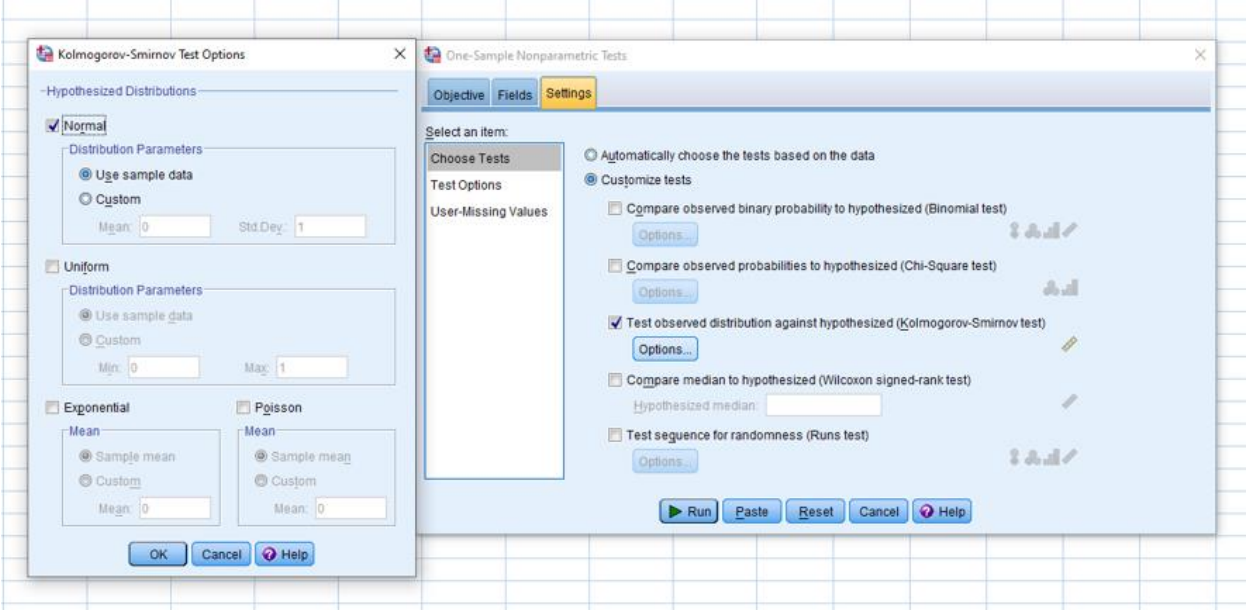
Nakon takvog odabira otvara se prozor *One-Sample Nonparametric Tests* gdje je u ovom slučaju pod opcijom *Objective* potrebno odabrati „Customize analysis" kao na slici 5.5, pod opcijom *Fields* kao testirane varijable odabrati zadane duljine šipki što je moguće vidjeti na slici 5.6, a pod opcijom *Settings* kao test hipoteze odabrati Kolmogorov – Smirnovljev test a za željenu razdiobu se u ovom slučaju izabire normalna razdioba, kao na slici 5.7.



Slika 5.5. Odabir pod „Objective“



Slika 5.6. Odabir pod „Fields“



Slika 5.7. Odabir pod „Settings“

Nakon pritiska na naredbu *Run*, program ispisuje zaključak testa. Iako je putem moguće odabrati još brojne dodatne opcije, za ovaj slučaj glavne informacije dobivene testom prikazane su na slici 5.8.

Hypothesis Test Summary

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of Duljine_šipki is normal with mean 45,54 and standard deviation 20,50.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,009	Reject the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is ,05.

Slika 5.8. Izlazni parametri Kolmogorov – Smirnovljeva testa u SPSS – u

Iako program na temelju podataka već autonomno zaključuje kako se nulta hipoteza odbacuje, to je moguće vidjeti i iz dobivene *p* – vrijednosti koja za ovaj slučaj iznosi 0.009 što je značajno manje od graničnih 0.05 pa se sa sigurnošću može reći da ovaj uzorak ne pripada normalnoj razdiobi te se nulta hipoteza odbacuje u korist alternativne.

6. ANDERSON – DARLINGOV TEST

6.1. Povijest Anderson – Darlingova testa

Anderson-Darlingov test, iako služi za rješavanje više statističkih problema, jedan je od najkorištenijih i najpraktičnijih testova za provjeru pripadnosti podataka određenoj razdiobi. Sam test osmišljen je 1952. godine, čime spada u relativno novu skupinu testova. Osmislili su ga i prvi put primijenili američki statističari **Theodore Wilbur Anderson** (1918. – 2016.) i **Donald Allan Darling** (1915. – 2014.). Temelji se na široj statističkoj klasi poznatoj kao Anderson-Darlingova statistika (danas u još široj skupini, Cramér–von Misesova statistika). Test se može koristiti za provjeru pripadnosti podataka raznim razdiobama, međutim u praksi se najčešće to svodi upravo na normalnu razdiobu.

6.2. Primjena Anderson – Darlingova testa

Kao što je već ranije spomenuto, za analizu podataka i daljnja testiranja potrebno je znati pripadaju li podaci odgovarajućoj razdiobi. To se vrlo lako može odrediti upravo upotrebom Anderson-Darlingova testa. Test ne određuje izravno ravnaju li se ti podaci savršeno točno prema normalnoj ili nekoj drugoj razdiobi, već ravnaju li se dovoljno dobro da bi se naknadno mogli upotrijebiti daljnji statistički postupci bez mogućnosti da rezultat neće biti točan zbog pogreške u razdiobi podataka. U nastavku će problem testiranja biti fokusiran uglavnom na normalnu razdiobu. Tako se Anderson-Darlingov test, kao i prethodni može promatrati kao testiranje hipoteza pri čemu nulta hipoteza, H_0 podrazumijeva da se podaci ravnaju po normalnoj razdiobi, a alternativna hipoteza, H_a podrazumijeva da se podaci razlikuju od podataka koji bi se ravnali po normalnoj razdiobi.

Anderson-Darlingov test bazira se na sljedećoj formuli:

$$AD = -n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)[\ln F(X_i) + \ln(1 - F(X_{n-i+1}))]$$

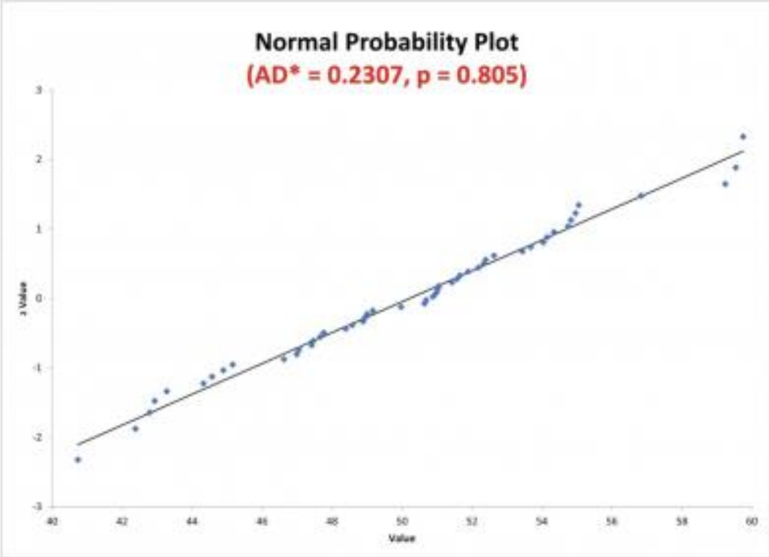
pri čemu vrijedi da je n broj uzoraka, $F(X)$ kumulativna funkcija distribucije s obzirom na traženu distribuciju, a i predstavlja i -ti uzorak s time da podaci moraju biti poredani uzlaznim redoslijedom ($x_1 < x_2 < \ldots < x_n$).

U nastavku je potrebno odabrati koeficijent pouzdanosti, α (ili razinu pouzdanosti, 1- α). Iako se u ovisnosti o okolnostima odnosno željenim rezultatima ta vrijednost može mijenjati najčešće se standardno usvaja kao α = 0,05. Evaluacijom parametara pomoću navedene formule za Anderson-Darlingov test moguće je dobiti odgovarajuću graničnu p – vrijednost. Iako postoji nekoliko mogućih načina za određivanje p – vrijednosti, ona se u praksi najčešće određuje prema formulama za pripadajući interval dobivene AD – vrijednosti prikazanim na slici 6.1.

AD statistic	P-Value Formula
$AD \geq 0.60$	$p = \exp(1.2937 - 5.709(AD) + 0.0186(AD)^2$
$0.34 < AD^* < .60$	$p = \exp(0.9177 - 4.279(AD) - 1.38(AD)^2$
$0.20 < AD^* < .34$	$p = 1 - \exp(-8.318 + 42.796(AD) - 59.938(AD)^2$
$AD \leq 0.20 < AD^* < .34$	$p = 1 - \exp(-13.436 + 101.14(AD) - 223.73(AD)^2$

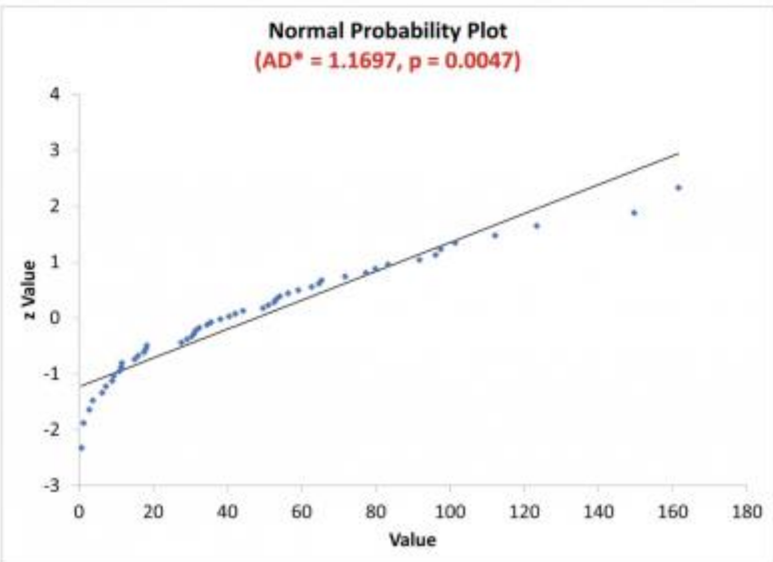
Slika 6.1. Određivanje p – vrijednosti

U tom slučaju ako je dobivena p – vrijednost manja od 0,05 tada pretpostavka ne vrijedi pa odbacujemo nultu hipotezu te se može zaključiti da se dani podaci ne ravnaju prema normalnoj razdiobi. S druge strane ukoliko je dobivena p – vrijednost veća od 0,05, nulta hipoteza se ne odbacuje, već se prihvaća što znači da se vrijednosti danih podataka ravnaju prema normalnoj razdiobi. Primjer takve upotrebe testa moguće je vidjeti na primjerima na slikama 6.1 i 6.2 pri čemu se normalnom razdiobom smatra situacija kada se podaci (označeni plavim točkama) dobro poklapaju s pravcem.



Slika 6.2. Normalna razdioba podataka

Kako je dobivena *p* – vrijednost za zadani slučaj prikazan na slici 6.2 veća od 0,05, može se zaključiti da se podaci uklapaju u normalnu razdiobu. Za slučaj na slici 6.3, dobivena *p* – vrijednost znatno je manja od 0,05 pa se za takvu razdiobu podataka sa sigurnošću može reći da ne spada u normalnu, odnosno odbacuje se nulta hipoteza u korist alternativne hipoteze.



Slika 6.3. Razdioba podataka različita od normalne

6.3. Prednosti i nedostaci Anderson – Darlingova testa

Anderson-Darlingov test izuzetno je koristan alat u statistici zbog svoje jednostavnosti i robusnosti. Ukoliko su poznati broj uzoraka, kumulativna funkcija distribucije te se za svaki uzorak zna koji je po redu počevši od najmanjeg, vrlo je jednostavno softverski izračunati mjerodavnu *p* – vrijednost. Takav test je vrlo pouzdan ako su korišteni podaci pouzdani međutim test ne može točno odrediti ravnaju li se podaci upravo po normalnoj razdiobi već samo određuje koliko su „blizu“ normalnoj razdiobi odnosno koliko odstupaju od nje. To najčešće ne predstavlja problem jer je za većinu praktičnih problema i daljnjih testiranja poznavanje takve informacije sasvim dovoljno. Drugi problem na koji se nailazi kod ovakvog testa je što podaci trebaju biti poredani (uzlaznim redoslijedom) što je u nekim slučajevima otežavajuće ili dugotrajno. Kao još jedna pozitivna strana testa može se navesti jednostavnost dobivanja grafičkog prikaza i usporedbe sa stvarnom normalnom razdiobom pomoću raznih programa.

6.4. Primjer upotrebe Anderson – Darlingova testa u *Microsoft Excel* – u

Kako bi ručno provođenje ovakvog testa bilo u najmanju ruku nepraktično i dugotrajno, a i vjerojatnost pogreške bi takvim postupkom vjerojatno bila povećana, najčešće se upotrebljava unutar nekog od programa ili aplikacija koje omogućavaju razne statističke proračune i analize. Kao neki od programa koji omogućuju takve operacije mogu se izdvojiti *SPSS*, *Python* te jedan od najjednostavnijih ***Microsoft Excel***.

Iako je u *Microsoft Excel* – u relativno lako pomoću Anderson-Darlingova testa provjeriti za zadane podatke ravnaju li se po normalnoj razdiobi potrebno je zadovoljiti nekoliko uvjeta. Test će u nastavku biti prikazan na primjeru mjerne pogreške duljine šipke (u mm) za uzorak od 100 šipki te je potrebno provjeriti jesu li vrijednosti odstupanja normalno distribuirane. Segment danih podataka prikazan je na slici 6.4.

iznos odstupanja
-25,81
-24,13
-23,52
-18,12
-16,07
-15,25
-14,56
-14,06
-13,13
-13,05
-12,89

Slika 6.4. Segment danih podataka mjerne pogreške duljine šipke u mm

Prije svega, kao što je već ranije navedeno, nužno je da su podaci uzlazno poredani, od najmanjeg prema najvećem te da se za svakog zna koji je „po redu“. Ukoliko su dobiveni podaci nasumično poredani, što je najčešće slučaj u praksi, nužno ih je poredati uzlazno. Za to je u *Excel* – u predviđena opcija pod karticom *Home, Sort & Filter* te se odabire „Sort Smallest to Largest“. Kada su podaci posloženi odgovarajućim redoslijedom i numerirani može se započeti s računanjem.

Prvo je potrebno izračunati neke od osnovnih statističkih parametara pri ovakvim proračunima, koji će biti potrebni u nastavku, a to su broj uzoraka, matematičko očekivanje te standardna devijacija, što je vidljivo na slici 6.5.

broj uzoraka	100
mat. očekivanje	-0,9044
standardna dev.	10,11928

Slika 6.5. Broj uzoraka, matematičko očekivanje i standardna devijacija za dani slučaj

Za svaki uzorak potrebno je tada odrediti pripadajući iznos kumulativne funkcije distribucije $F(X_i)$ pomoću funkcije „NORM.DIST“ pri čemu je prvi parametar iznos odstupanja, drugi parametar matematičko očekivanje, treći standardna devijacija, a četvrti se odnosi na potvrdu ili negaciju jesu li vrijednosti kumulativne. Takav postupak za prvih nekoliko uzoraka vidljiv je na slici 6.6.

red.br.	iznos odstupanja	kumul.red.br.	F(Xi)
39	-25,81	1	0,006924
66	-24,13	2	0,010861
46	-23,52	3	0,012712
10	-18,12	4	0,044446

Slika 6.6. Računanje kumulativnih vrijednosti za normalnu razdiobu

U nastavku je potrebno izračunati pripadne 1- $F(X_i)$ što je prikazano na slici 6.7.

red.br.	iznos odstupanja	kumul.red.br.	F(Xi)	1-F(Xi)
39	-25,81	1	0,006924	0,993076
66	-24,13	2	0,010861	0,989139
46	-23,52	3	0,012712	0,987288
10	-18,12	4	0,044446	0,955554

Slika 6.7. Računanje 1 - $F(X_i)$

Potom slijedi izračun pripadajuće funkcijske vrijednost $F(X_{n-i+1})$ za svako pojedino odstupanje pomoću formule „VLOOKUP" gdje je prvi parametar broj svih promatranih odstupanja umanjen za redni broj pripadajućeg promatranog odstupanja te uvećan za 1, drugi parametar obuhvaća sve redne brojeve te cjelokupne kumulativne funkcijske vrijednosti, treći parametar je relativni indeks stupca, a četvrti parametar određuje je li podudaranje točno ili približno (aproksimirano). Izračunate vrijednosti prikazane su na slici 6.8.

red.br.	iznos odstupanja	kumul.red.br.	F(Xi)	1-F(Xi)	F(Xn-i+1)
39	-25,81	1	0,006924	0,993076	0,995055
66	-24,13	2	0,010861	0,989139	0,991322
46	-23,52	3	0,012712	0,987288	0,975803
10	-18,12	4	0,044446	0,955554	0,961333

Slika 6.8. Računanje $F(X_{n-i+1})$

U sljedećem koraku potrebno je izračunati pripadajuću Anderson-Darlingovu vrijednost za svako odstupanje zasebno. Za to se može koristiti nekoliko sličnih formula međutim najčešće se računa kao:

$$AD_i = (2 * i - 1) \cdot \frac{(\ln\big(F(X_i)\big) + \ln(1 - F(X_{n-i+1}))}{n}$$

Postupak je prikazan na slici 6.9.

red.br.	iznos odstupanja	kumul.red.br.	F(Xi)	1-F(Xi)	F(Xn-i+1)	ADi(S)
39	-25,81	1	0,006924	0,993076	0,995055	-0,10282
66	-24,13	2	0,010861	0,989139	0,991322	-0,27808
46	-23,52	3	0,012712	0,987288	0,975803	-0,40434
10	-18,12	4	0,044446	0,955554	0,961333	-0,44564

Slika 6.9. Računanje pripadajućih Anderson-Darlingovih vrijednosti

Ukupnu Anderson-Darlingovu vrijednost za cijeli promatrani slučaj dobiva se prema sljedećoj formuli:

$$AD = -n - \sum_{i=1}^{n} AD_i$$

Nakon toga potrebno je izračunati prilagođenu Anderson-Darlingovu vrijednost prema formuli:

$$AD_{prilagođeno} = AD \cdot (1 - \frac{0{,}75}{n} + \frac{2{,}25}{n^2})$$

Za kraj, potrebno je odabrati relevantnu p – vrijednost za zadani slučaj što je moguće izvesti prema pravilima prethodno prikazanim na slici 6.1.

Kako izračunata prilagođena Anderson-Darlingova vrijedost za dani slučaj spada u interval 0,20 < AD < 0,34, odabire se pripadajuća formula za računanje p – vrijednosti. Iz navedenih formula slijede parametri prikazani slikom 6.10.

AD	0,285099
AD prilagođeno	0,287302
p - vrijednost	0,620938

Slika 6.10. Relevantne vrijednosti Anderson-Darlingova testa za zadani slučaj

Ako je usvojeno da je zadovoljavajuća vrijednost koeficijenta pouzdanosti, α = 0,05, a za dobivenu p – vrijednost vrijedi da je veća od 0,05 može se sa sigurnošću zaključiti da se zadani podaci mjernih odstupanja za šipke ravnaju po normalnoj razdiobi, odnosno nulta hipoteza koja podrazumijeva da se podaci ravnaju po normalnoj razdiobi se u ovom slučaju ne odbacuje. Na slici 6.11 prikazan je cjelokupni postupak do desetog uzorka.

red.br.	iznos odstupanja	kumul.red.br.	F(Xi)	1-F(Xi)	F(Xn-i+1)	ADi(S)			
39	-25,81	1	0,006924	0,993076	0,995055	-0,10282			
66	-24,13	2	0,010861	0,989139	0,991322	-0,27808		broj uzoraka	100
46	-23,52	3	0,012712	0,987288	0,975803	-0,40434		mat. očekivanje	-0,9044
10	-18,12	4	0,044446	0,955554	0,961333	-0,44564		standardna dev.	10,11928
42	-16,07	5	0,066978	0,933022	0,943689	-0,50222			
35	-15,25	6	0,078146	0,921854	0,943577	-0,59664		AD	0,285099
31	-14,56	7	0,088594	0,911406	0,933007	-0,66649		AD prilagođeno	0,287302
34	-14,06	8	0,096791	0,903209	0,925103	-0,73903		p - vrijednost	0,620938
20	-13,13	9	0,113495	0,886505	0,904369	-0,76895			
8	-13,05	10	0,115022	0,884978	0,901826	-0,85189			

Slika 6.11. Segment podataka kod provedbe Anderson-Darlingova testa u Microsoft Excel-u

7. ZAKLJUČAK

Kako su statistički proračuni široko zastupljeni u svim granama ljudske djelatnosti diljem svijeta i neizostavan dio mnogih zanimanja vrlo je bitno da su rezultati koji proizlaze iz proračuna pouzdani. Za to je nužno poznavati uvjete i mogućnosti testova koji se potencijalno mogu upotrebljavati te iskoristiti onaj sa najviše prednosti za određeni slučaj. Iako su ovdje obrađeni testovi tek mali dio velike skupine danas upotrebljavanih testova, vrlo su bitni kako zbog svojih povijesnih, tako i zbog statističkih karakteristika odnosno njihove same upotrebljivosti u praktičnim problemima. Iako je upotreba testova danas gotovo potpuno ograničena na razne softverske pakete, programe i aplikacije što ju čini vrlo jednostavnom, kod profesionalne upotrebe testova potrebno je znati ponešto o njihovim karakteristikama kao i svojstvima podataka koji se žele obraditi te željenim rezultatima kako bi postupak bio što točniji. Kako svaka od metoda ima svoje prednosti i nedostatke, potrebno je odabrati onu koja ima optimalna svojstva za dani slučaj. U skladu s time, može se zaključiti da su χ^2 test, Kolmogorov – Smirnovljev test te Anderson – Darlingov test iznimno važni i nezamjenjivi u modernoj statistici i širokom spektru grana djelatnosti koje u bilo kojem svojem dijelu koriste razne statističke proračune.

LITERATURA

[1.] SPC for Excel Software – „Anderson-Darling Test for Normality“, 2011.

URL: Anderson-Darling Test for Normality - SPC for Excel Software

[2.] ISIXSIGMA – „The Role of Anderson-Darling Test in Assumption Testing“, 2023

URL: The Role of the Anderson-Darling Test in Assumption Testing - isixsigma.com

[3.] Real Statistics Resources – „One Sample Anderson-Darling Test“, 2021

URL: Anderson-Darling Test | Real Statistics Using Excel (real-statistics.com)

[4.] Črnjarić – Žic, N „Inženjerska statistika“, Rijeka: Tehnički fakultet u Rijeci; Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike.

[5.] Huzak, M. (2006.) „Vjerojatnost i matematička statistika“, Predavanja. Zagreb: PMF – Matematički odjel.

[6.] Brkljačić, M. (2022.) „Statistički testovi prilagodbe bazirani na empirijskoj funkciji distribucije“, Diplomski rad. Split: Prirodoslovno-matematički fakultet sveučilišta u Splitu; Odjel za matematiku.

[7.] Scribbr – „Chi-Square Goodness of Fit Test”, 2023.

URL: Chi-Square Goodness of Fit Test | Formula, Guide & Examples (scribbr.com)

[8.] NIST Engineering Statistics Handbook – „Kolmogorov – Smirnov Goodness-of-Fit Test“

URL: https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda35g.htm

[9.] Dataaspirant – „Kolmogorov – Smirnov Test [KS Test]: When and Where to Use”

URL: Kolmogorov-Smirnov Test [KS Test]: When and Where to Use - Dataaspirant

[10.] H. Zar, J (2009.) „Biostatistical Analysis“ – peto izdanje

SAŽETAK

Ovaj rad temelji se na objašnjenju upotrebe i opisu triju važnih testova prilagodbe razdiobama koji su neizostavan dio većine statističkih proračuna. Opisana su tri testa koja se najčešće koriste, a to su χ^2 test, Kolmogorov – Smirnovljev test i Anderson – Darlingov test. Kako je za razumijevanje tih testova i pripadnosti podataka određenim razdiobama nužno poznavati osnovne neprekidne i diskretne razdiobe, one su također opisane u radu, zajedno sa osnovnim numeričkim pokazateljima slučajnih varijabli. Od osnovnih diskretnih razdiobi detaljnije su obrađene sljedeće: uniformna, Bernoullijeva, binomna, Poissonova, geometrijska i hipergeometrijska; a od neprekidnih: normalna, uniformna, eksponencijalna te trokutasta razdioba.

Svaki opisani test prilagodbe uz objašnjenje teoretskog dijela načina upotrebe sadrži i primjer praktične primjene u nekom od mnogih softverskih paketa koji se danas koriste pri proračunima u raznim granama ljudske djelatnosti, pa tako vrlo često strojarstvu i drugim tehničkim znanostima.

Ključne riječi: test prilagodbe, razdioba slučajne varijable, hipoteza, neparametarski test

SUMMARY

This paper is based on an explanation of the use and description of three important goodness of fit tests that are very important part of most statistical calculations. The most often used tests are: the χ^2 Test, the Kolmogorov-Smirnov Test and the Anderson-Darling Test. Since it is necessary to know the basic continuous and discrete probability distributions in order to understand these tests and the belonging of the data to certain distributions, they are also described in the paper, together with the basic numerical indicators of random variables. The basic discrete distributions that are covered in more detail are: Uniform, Bernoulli, Binomial, Poisson, Geometric and Hypergeometric; and continuous: Normal, Uniform, Exponential and Triangular distribution.

Each of the above goodness of fit tests, except as described with an explanation of the theoretical part, also contains an example of practical application in one of the many softwares that are used today for calculations in various branches of human activity, so very often in engineering and other technical sciences.

Key words: goodness of fit test, distribution of random variable, hypothesis, non-parametric test.