ANALITIČKO RJEŠAVANJE JEDNODIMENZIONALNE VALNE JEDNADŽBE FOURIEROVOM METODOM

Bursić, Filip

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

ANALITIČKO RJEŠAVANJE JEDNODIMENZIONALNE VALNE JEDNADŽBE FOURIEROVOM METODOM

Rijeka, rujan 2024.

Filip Bursić
0069092394

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

ANALITIČKO RJEŠAVANJE JEDNODIMENZIONALNE VALNE JEDNADŽBE FOURIEROVOM METODOM

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Rijeka, rujan 2024.

Filip Bursić
0069092394

SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET
POVJERENSTVO ZA ZAVRŠNE ISPITE

Rijeka, 14.03.2024.

Zavod: Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike

Predmet: Inženjerska matematika ET

ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Filip Bursić (0069092394)**

Studij: Sveučilišni prijediplomski studij elektrotehnike (1030)

Zadatak: **Analitičko rješavanje jednodimenzionalne valne jednadžbe Fourierovom metodom / Analytical solution to the one-dimensional wave equation derived by Fourier method**

Opis zadatka:

U radu je potrebno izvesti jednodimenzionalnu valnu jednadžbu, objasniti njenu klasifikaciju, pripadne početne i rubne uvjete te je staviti u kontekst primjene u inženjerstvu. Potrebno je definirati pojam potpunoga i nepotpunoga Fourierova reda te objasniti primjenu Fourierovih redova na rješavanje diferencijalnih jednadžbi. U završnom dijelu rada potrebno je Fourierovom metodom riješiti nekoliko konkretnih primjera inicijalno-rubnih problema povezanih s jednodimenzionalnom valnom jednadžbom s različitim tipovima početnih i rubnih uvjeta.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanja diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Zadatak uručen pristupniku: 20.03.2024.

Mentor:
izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Predsjednik povjerenstva za završni ispit:
prof. dr. sc. Dubravko Franković

IZJAVA

Sukladno članku 7. Stavku 1. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku sveučilišnih prijediplomskih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 4. travnja 2023., izjavljujem da sam samostalno izradio završni rad prema zadatku preuzetom dana 20. ožujka 2024.

Rijeka, 6. rujna 2024.

Filip Bursić

Filip Bursić

Želim se zahvaliti svojim roditeljima koji su mi omogućili akademsko obrazovanje i bili podrška od početka do kraja. Također želim zahvaliti prijateljima koji su mi uljepšali i olakšali ovaj put, te posebna zahvala mentoru izv. prof. dr. sc. Ivanu Dražiću na pomoći, savjetima i vremenu uloženom u ovaj rad.

Sadržaj

1. Uvod

Mnogi fizikalni zakoni i odnosi mogu se izraziti matematički pomoću diferencijalnih jednadžbi koja su osnova za opisivanje različitih sustava i pojava, od električnih krugova do analize dinamike populacija u ekologiji.

U ovom radu upotrijebiti ćemo diferencijalne jednadžbe za modeliranje sustava titrajuće žice u kojem želimo znati u svakom trenutku na svakom mjestu žice njenu deformaciju (položaj), ovisno o njezinoj početnoj deformaciji i početnoj brzini, te početnim i rubnim uvjetima uz zanemarivanje nekih faktora koji neće utjecati na rješenje.

U prvom dijelu rada ćemo objasniti obične i parcijalne diferencijalne jednadžbe kojima ćemo se poslužiti za rješavanje i opisivanje našeg sustava, njihove podjele i metode rješavanja. Opisati ćemo Bernoullijevu metodu separacije varijabli koja se temelji na pretpostavci da se funkcija, koja ovisi o više nezavisnih varijabli, može zapisati kao produkt funkcija koje ovise o svakoj pojedinačnoj varijabli. Ova metoda, razvijena tijekom 18. stoljeća od strane matematičara Johanna Bernoullija, predstavlja temeljni alat u mnogim područjima fizike i inženjerstva, uključujući mehaniku fluida, teoriju topline i teoriju elektromagnetizma.

Drugi dio rada obrađuje Fourierov red za periodične funkcije, te nama bitniji nepotpuni Fourierov red za neperiodične funkcije koji omogućava njihovo proširenje na periodične, što ćemo upotrijebiti za zapis konačnog rješenja analiziranih problema.

Fourierova analiza, koju je prvi put predstavio francuski matematičar Jean-Baptiste Joseph Fourier početkom 19. stoljeća, ključna je metoda u obradi signala, rješavanju diferencijalnih jednadžbi i analizi fizikalnih pojava. Fourierova metoda temelji se na ideji da se gotovo svaka periodična funkcija može izraziti kao zbroj sinusnih i kosinusnih funkcija.

Zadnji i glavni dio rada je modeliranje i rješavanje sustava titrajuće žice, gdje izvodimo valnu jednadžbu. Postaviti ćemo fizikalne pretpostavke i zapisati pripadne jednadžbe, postaviti početne uvjete, te definirati Dirichletove i Neummanove rubne uvjete i uz pomoć njih i Fourierovog reda dobiti konačno rješenje problema. Opisani postupak ilustriramo i na nekoliko primjera.

2. Obične diferencijalne jednadžbe

Obične diferencijalne jednadžbe su jednadžbe koje uključuju funkcije i njihove derivacije. U modelskom smislu, one uključuju i informacije kako se zavisna varijabla mijenja u odnosu na nezavisnu varijablu te se koriste za modeliranje različitih fizičkih, bioloških, ekonomskih i drugih sustava. U ovom radu obične diferencijalne jednadžbe predstavljaju alat za rješavanje puno kompleksnije diferencijalne jednadžbe koja opisuje titranje žice. Ovo poglavlje obrađeno je prema izvorima [1] i [2].

Obične diferencijalne jednadžbe možemo podijeliti prema nekoliko kriterija. Osnovna podjela odnosi se na red diferencijalne jednadžbe, pa tako obične diferencijalne jednadžbe prvog reda sadrže samo prvu derivaciju nepoznate funkcije, dok jednadžbe viših redova sadrže i derivacije viših redova. Tako je primjerice

$$y' = y \sin x \tag{2.1}$$

jednadžba prvog reda, dok je

$$y'' + yy' + e^y = \cos x \tag{2.2}$$

primjer jednadžbe višeg reda.

Najčešći primjeri primjena običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda su: radioaktivni raspad, modeli rasta populacije, brzina kemijskih reakcija i električni krugovi. Primjene običnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda nalazimo kod dinamičke stabilnosti letjelica, modeliranja živčanih impulsa, strujnih krugova te harmonijskih oscilatora.

Prema linearnosti obične diferencijalne jednadžbe mogu biti linearne ili nelinearne. Linearne jednadžbe su linearne u nepoznatoj funkciji i njezinim derivacijama te je njihov opći oblik zadan izrazom:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \tag{2.3}$$

gdje je $y(x)$ nepoznata funkcija, a $a_i(x)$, $i = 1, ..., n$ te $g(x)$ unaprijed zadane poznate funkcije. Svaku običnu diferencijalnu jednadžbu koja se ne može svesti na ovaj oblik zovemo nelinearnom. Tako je primjerice

$$y'' + y^2 = 0 \tag{2.4}$$

nelinearna obična diferencijalna jednadžba drugog reda.

Ako je u (2.3) funkcija $g(x)$ jednaka nuli, takvu ćemo jednadžbu zvati homogenom, a ako je $g(x) \neq 0$ nehomogenom.

Rješenje diferencijalne jednadžbe može biti opće ili partikularno. Opće rješenje predstavlja familiju beskonačno mnogo rješenja krivulja, jedno za svaku vrijednost konstante c. Ako odaberemo specifičnu vrijednost c (npr. $c = 1$, $c = 0$ ili $c = -2$), dobivamo ono što se naziva partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe.

Primjer 2.1. *Riješimo diferencijalnu jednadžbu*

$$y' + ky = 0. \tag{2.5}$$

Ovu jednadžbu rješavamo metodom separacije varijabli. Krećemo od jednakosti

$$y' = \frac{dy}{dx}. \tag{2.6}$$

Uvrštavanjem (2.6) *u* (2.5), *te prebacivanjem varijable* y *na jednu, a varijable* x *na drugu dolazimo do*

$$\frac{dy}{y} = -kdx. \tag{2.7}$$

Nakon integriranja obje strane ovog izraza slijedi

$$\ln|y| = -kx + C, \tag{2.8}$$

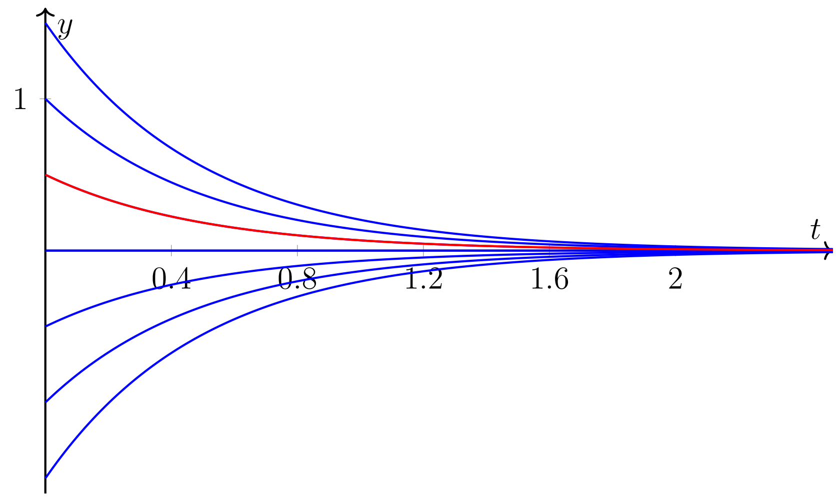
gdje je C *integracijska konstanta. Koristeći se definicijom logaritma ovaj izraz možemo napisati u obliku:*

$$|y| = e^{-kx+C}. \tag{2.9}$$

Na kraju dolazimo do rješenja zadane diferencijalne jednadžbe (2.5)*, odnosno*

$$y = ce^{-kx}, \tag{2.10}$$

gdje je $c = \pm e^C$ *proizvoljna konstanta. Ovaj izraz predstavlja opće rješenje diferencijalne jednadžbe* (2.5) *koje je prikazano na sljedećoj slici.*



Slika 2.1. Grafički prikaz općeg rješenja diferencijalne jednadžbe (2.5) *za* $k = 2$*. Izdvojeno je partikularno rješenje koje dobijemo za* $c = 0.5$*. Izvor: Izrada autora*

Ako bi u (2.10) *uvrstili primjerice* $c = 0.5$ *dobili bi partikularno rješenje oblika*

$$y = 0.5e^{-kx}, \tag{2.11}$$

koje je na slici 2.1 označeno crvenom bojom.

Primjer 2.2. *Riješimo diferencijalnu jednadžbu*

$$y''' = x. \tag{2.12}$$

Ovu jednadžbu možemo riješiti direktnom integracijom. Prvo integriramo (2.12)*. Dobivamo:*

$$y'' = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c_1 \tag{2.13}$$

gdje je c_1 integracijska konstanta.

Zatim integriramo (2.13)*. Slijedi:*

$$y' = \int \left(\frac{x^2}{2} + c_1\right) dx = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2 \tag{2.14}$$

gdje je c_2 druga integracijska konstanta.

Na kraju integriramo (2.14)*:*

$$y = \int \left(\frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2\right) dx = \frac{x^4}{24} + \frac{c_1 x^2}{2} + c_2 x + c_3, \tag{2.15}$$

gdje je c_3 treća integracijska konstanta.

Dakle, opće rješenje diferencijalne jednadžbe (2.12) *je:*

$$y = \frac{x^4}{24} + \frac{c_1 x^2}{2} + c_2 x + c_3 \tag{2.16}$$

gdje su c_1, c_2 i c_3 konstante koje se određuju iz početnih ili rubnih uvjeta, ako su poznati. Iz ovog primjera vidimo da broj konstanti ovisi o redu diferencijalne jednadžbe.

U prethodnom primjeru spomenuli smo početne i rubne uvjete. Početni uvjeti određuju vrijednost rješenja diferencijalne jednadžbe u početnom trenutku, tj. $y(t_0) = y_0$. Rubni uvjeti specificiraju vrijednosti rješenja diferencijalne jednadžbe na granicama intervala na kojem je jednadžba definirana, npr. $y(a) = y_a$ i $y(b) = y_b$. Oba uvjeta mogu se zadati i na derivacije funkcije y ukoliko red diferencijalne jednadžbe to zahtjeva. Tako bi za eliminaciju svih konstanti iz općeg rješenja diferencijalne jednadžbe (2.12) bila potrebna tri uvjeta. Ako bi se radilo o početnim uvjetima tada bi oni primjerice bili oblika:

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(0) = 2, \\ y''(0) = 1. \end{cases} \tag{2.17}$$

Uvrštavanjem tih uvjeta u opće rješenje dobili bi sustav tri jednadžbe s tri nepoznanice čija bi rješenja bila tražene vrijednosti konstanti koje definiraju partikularno rješenje.

Za potrebe ovog rada potrebne su nam homogene obične diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima te njih u nastavku detaljnije obrađujemo.

2.1. Homogene obične diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima

Homogene diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima u svojoj najopćenitijoj formi poprimaju sljedeći oblik:

$$y'' + ay' + by = 0, \tag{2.18}$$

gdje su a i b realne konstante, a $y = y(x)$ nepoznata funkcija.

Kako smo u primjeru 2.1 vidjeli, rješenje homogene obične diferencijalne jednadžbe prvog reda s konstantnim koeficijentima oblika (2.10) glasi

$$y = e^{\lambda x}, \tag{2.19}$$

pa očekujemo da je i rješenje jednadžbe drugog reda sličnog oblika.

Derivirajući (2.19) dobivamo

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \tag{2.20}$$

i

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}. \tag{2.21}$$

Uvrštavanjem tih izraza u (2.18) dobivamo

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0. \tag{2.22}$$

Prema tome, ako je λ rješenje jednadžbe

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0, \tag{2.23}$$

tada je eksponencijalna funkcija (2.19) rješenje jednadžbe (2.18).

Rješenja kvadratne jednadžbe (2.23) imaju oblik:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 - 4b}), \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{a^2 - 4b}), \tag{2.24}$$

koji nas ovisno o diskriminanti jednadžbe (2.23) koja glasi $a^2 - 4b^2$ vodi na tri slučaja:

1. rješenja (2.24) su realna i različita,
2. rješenja (2.24) su realna ali je $\lambda_1 = \lambda_2$,
3. rješenja (2.24) su kompleksna.

Kvadratna jednadžba (2.23) često se naziva karakterističnom jednadžbom.

U prvom slučaju funkcije:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \qquad i \qquad y_2 = e^{\lambda_2 x} \tag{2.25}$$

partikularna su rješenja obične diferencijalne jednadžbe (2.18). Kako njihov omjer nije konstantan, i jedno i drugo partikularno rješenje mora biti uključeno u opće rješenje i ono će biti oblika:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{2.26}$$

U drugom slučaju poznato nam je samo jedno partikularno rješenje:

$$y_1 = e^{\lambda x}. \tag{2.27}$$

Međutim, kako se radi o jednadžbi drugog reda, u skladu s prethodnim slučajem moramo naći još jedno partikularno rješenje i to takvo da omjer tog rješenja i rješenja (2.27) ne bude konstanta. Najjednostavnije takvo rješenje moglo bi biti oblika

$$y_2 = x e^{\lambda x}, \tag{2.28}$$

a uvrštavanjem u (2.18) se lako pokazuje da je to zaista traženo partikularno rješenje. Konačno, traženo opće rješenje u ovom slučaju je oblika:

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}. \tag{2.29}$$

U trećem slučaju je diskriminanta $a^2 - 4b$ jednadžbe (2.23) manja od nule, pa su korijeni (2.24) kompleksni brojevi

$$\lambda_{12} = -\frac{1}{2} a \pm i\omega, \tag{2.30}$$

gdje je $\omega^2 = b - \frac{1}{4} a^2$.

Time bi opće rješenje diferencijalne jednadžbe poprimilo oblik:

$$y = c_1 e^{\left(-\frac{1}{2}a + i\omega\right)x} + c_2 e^{\left(-\frac{1}{2}a - i\omega\right)x} = e^{-\frac{1}{2}ax}\left(c_1 e^{i\omega x} + c_2 e^{-i\omega x}\right). \tag{2.31}$$

Kako je

$$e^{i\omega x} = \cos\omega x + i \sin\omega x, \tag{2.32}$$

i

$$e^{-i\omega x} = \cos\omega x - i \sin\omega x, \tag{2.33}$$

opće rješenje možemo zapisati u obliku

$$y = e^{-ax/2}(A\cos\omega x + B\sin\omega x), \tag{2.34}$$

gdje su $A = c_1 + c_2$ i $B = i(c_1 - c_2)$ proizvoljne konstante.

Pokažimo sada na nekoliko primjera kako se konkretno rješavaju ove jednadžbe.

Primjer 2.3. *Riješimo diferencijalnu jednadžbu*

$$y'' + y' - 2y = 0, \tag{2.35}$$

uz početne uvjete $y(0) = 4$ *i* $y'(0) = -5$.

Karakteristična jednadžba za ovaj primjer glasi

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0, \tag{2.36}$$

a njezini korijeni su:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1^2 + 4 \cdot 2}) = 1 \qquad i \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1^2 + 4 \cdot 2}) = -2. \tag{2.37}$$

Uvrštavanjem ovih vrijednosti u izraz za opće rješenje (2.10)*, dobivamo*

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}. \tag{2.38}$$

Odredimo sada partikularna rješenja temeljem zadanih početnih uvjeta. Ako u opće rješenje, i njegovu derivaciju, uvrstimo zadane uvjete dobivamo sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 4 \\ y'(0) &= c_1 - 2c_2 = -5. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Rješavanjem sustava dobivamo rješenja $c_1 = 1$ *i* $c_2 = 3$*, te traženo partikularno rješenje polazne diferencijalne jednadžbe poprima oblik:*

$$y = e^x + 3e^{-2x}. \tag{2.40}$$

Primjer 2.4. *Riješimo diferencijalnu jednadžbu*

$$y'' + y' + 0.25y = 0, \tag{2.41}$$

uz početne uvjete $y(0) = 3$ *i* $y'(0) = -3.5$.

Za ovaj primjer karakteristična jednadžba glasi

$$\lambda^2 + \lambda + 0.25 = (\lambda + 0.5)^2 = 0, \tag{2.42}$$

te je njeno dvostruko rješenje $\lambda = -0.5$*, a prema* (2.29) *rješenje je*

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-0.5x}. \tag{2.43}$$

Za dobivanje partikularnog rješenja moramo derivirati opće rješenje, te dobivamo

$$y' = c_2 e^{-0.5x} - 0.5(c_1 + c_2 x)e^{-0.5x}. \tag{2.44}$$

Uvrštavajući početne uvjete slijedi

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 3 \\ y'(0) &= c_2 - 0.5c_1 = -3.5. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Rješavanjem ovog sustava jednadžbi slijedi da je $c_1 = 3$ *i* $c_2 = -2$*, te nakon uvrštavanja u* (2.43) *partikularno rješenje glasi*

$$y = (3 - 2x)e^{-0.5x}. \tag{2.46}$$

Primjer 2.5. *Riješimo diferencijalnu jednadžbu*

$$y'' + 0.4y' + 9.04y = 0, \tag{2.47}$$

uz početne uvjete $y(0) = 0$ *i* $y'(0) = 3$.

Kao i u prethodnim primjerima najprije formiramo karakterističnu jednadžbu koja glasi:

$$\lambda^2 + 0.4\lambda + 9.04 = 0. \tag{2.48}$$

Njezini korijeni su

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}(-0.4 + \sqrt{0.4^2 - 4 \cdot 9.04}) = -0.2 + 3i \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}(-0.4 - \sqrt{0.4^2 + 4 \cdot 9.04}) = -0.2 - 3i. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Opće rješenje problema sad poprima oblik:

$$y = e^{-0.2x}(A\cos 3x + B\sin 3x). \tag{2.50}$$

Iz prvog uvjeta $y(0) = 0$*, slijedi da je* $A = 0$*. Drugi uvjet* $y'(0) = 3$ *uvrštavamo u derivaciju rješenja koja glasi*

$$y' = B(-0.2e^{-0.2x}\sin 3x + 3e^{-0.2x}\cos 3x), \tag{2.51}$$

te dobivamo da je $B = 1$*. Konačno, traženo partikularno rješenje glasi*

$$y = e^{-0.2x}\sin 3x. \tag{2.52}$$

3. Parcijalne diferencijalne jednadžbe

Parcijalne diferencijalne jednadžbe (PDJ) su jednadžbe koje sadrže jednu ili više parcijalnih derivacija funkcije koja ovisi o najmanje dvije varijable. Obično je jedna varijabla vrijeme t, a preostale se odnose na prostorne varijable. Jedna od važnijih PDJ je valna jednadžba što je i tema ovog rada. Za ovo poglavlje koristimo izvore [2] i [1].

Kao i obične diferencijalne jednadžbe, parcijalne diferencijalne jednadžbe dijelimo s obzirom na red i linearnost. Red parcijalne diferencijalne jednadžbe definiran je redom najviše parcijalne derivacije koja se pojavljuje u jednadžbi. Tako je primjerice

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{3.1}$$

jednadžba prvog reda, dok je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{3.2}$$

primjer jednadžbe drugog reda.

Prema linearnosti parcijalne diferencijalne jednadžbe mogu biti linearne i nelinearne. Linearne jednadžbe su linearne ako se nepoznata funkcija i njezine parcijalne derivacije pojavljuju u linearnim kombinacijama, na primjer

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0, \tag{3.3}$$

dok nelinearne jednadžbe sadrže nepoznatu funkciju ili njene derivacije u nelinearnom obliku (u^2, $u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$), primjerice

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3.4}$$

Valna jednadžba koju obrađujemo u ovom radu spada u linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda.

3.1. Linearne parcijalne jednadžbe drugog reda

Linearna parcijalna jednadžba drugog reda oblika

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \tag{3.5}$$

ovisno o diskriminanti jednadžbe (3.5) koja glasi $AC - B^2$, klasificira se u tri skupine.

Prvi slučaj predstavlja negativnu diskriminantu, tj. taj slučaj nastupa ako vrijedi $AC - B^2 < 0$. Tada jednadžbu nazivamo hiperboličnom. Takve jednadžbe uglavnom opisuju sustave gdje postoji širenje valova i to je primjerice jednadžba oblika

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{3.6}$$

Drugi slučaj nastupa ako je diskriminanta jednaka nuli, tj. ako vrijedi $AC - B^2 = 0$, a tada jednadžbu nazivamo paraboličnom. Parabolične jednadžbe opisuju sustave gdje postoji difuzija ili primjerice širenje topline, a jedan moguć oblik takve jednadžbe glasi

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{3.7}$$

Treći slučaj događa se kada je diskriminanta pozitivna, tj. ako vrijedi $AC - B^2 > 0$ i tada jednadžbu nazivamo eliptičkom. Njih koristimo za opisivanje statičkih stanja u sustavima (na primjer distribucija potencijala u elektrostatici), a to je primjerice jednadžba oblika

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{3.8}$$

Valna jednadžba koju obrađujemo u ovom radu klasificira se kao hiperbolička jednadžba.

3.2. Početni i rubni uvjeti

Jedinstveno rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe se dobiva pomoću dodatnih uvjeta koji proizlaze iz problema koji se tom jednadžbom modelira. To mogu biti uvjeti da rješenje jednadžbe u poprima određene vrijednosti na rubovima domene (rubni uvjeti). Rubni uvjeti mogu biti Dirichletovi (ako je funkcija u zadana na rubu domene) ili Neumannovi (ako je na rubu domene zadana normalna derivacija funkcije u). Rubni uvjeti mogu biti i složeni te sadržavati kombinaciju Dirichletovih i Neumannovih rubnih uvjeta i takve rubne uvjete zovemo Robinovim rubnim uvjetima.

Drugi dodatni uvjeti pojavljuju se kada se radi o evolucijskim jednadžbama, tj. jednadžbama koje kao nezavisnu varijablu sadrže vrijeme t. U tom slučaju funkcija u i njene derivacije po varijabli t mogu biti definirane u početnom trenutku $t = 0$ (početni uvjeti).

4. Bernoullijeva metoda separacije varijabli

Proces rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi izuzetno je složen i postoji značajan broj metoda kojima se može doći do analitičkog ili numeričkog rješenja problema koji se modeliraju parcijalnim diferencijalnim jednadžbama. Metoda koju ćemo u ovom radu koristiti je Bernoullijeva metoda separacije varijabli.

Temeljna ideja ove metode je svesti parcijalnu diferencijalnu jednadžbu na sustav običnih diferencijalnih jednadžbi, tako da u svakoj jednadžbi tog sustava bude uključena samo jedna nezavisna varijabla. Na taj način problem "separiramo" prema nezavisnim varijablama, kako ćemo pokazati u sljedećim primjerima. Korišteni izvor za ovo poglavlje je [3].

Primjer 4.1. *Neka je funkcija $u(x,t)$ rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe oblika*

$$u_t - cu_{xx} = 0. \tag{4.1}$$

Formirajmo Bernoullijevom metodom separacije varijabli sustav dviju običnih diferencijalnih jednadžbi koje će definirati funkciju $u(x,t)$.

Krećemo od pretpostavke da se funkcija $u(x,t)$ može zapisati u sljedećem obliku

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{4.2}$$

gdje su X i T funkcije varijabli x i t.

Deriviranjem (4.2) *jednom po t i dvaput po x te uvrštavanjem u* (4.1) *dobivamo*

$$XT_t = cX_{xx}T. \tag{4.3}$$

Sljedeći korak je separacija varijabli koju radimo tako da sve funkcije koje ovise samo o x premjestimo na jednu stranu jednadžbe, a one koje ovise samo o t na drugu stranu. Iz toga slijedi

$$\frac{T_t}{cT} = \frac{X_{xx}}{X}. \tag{4.4}$$

Budući da su x i t nezavisne varijable, obje strane moraju biti konstantne jer, ako bi bile varijabilne, promjena x ili t utjecala bi samo na jednu stranu, ostavljajući drugu nepromijenjenom. Stoga postoji konstanta k (koju nazivamo konstantom separacije) takva da vrijedi

$$\frac{T_t}{cT} = \frac{X_{xx}}{X} = k. \tag{4.5}$$

Iz jednadžbe (4.5) *možemo zapisati sustav dviju običnih diferencijalnih jednadžbi*

$$\frac{d^2X}{dx^2} - kX = 0, \tag{4.6}$$

$$\frac{dT}{dt} - kcT = 0, \tag{4.7}$$

te bi nadalje rješavali obične diferencijalne jednadžbe i uz dodatne uvjete došli do rješenja.

Primjer 4.2. *Neka je funkcija $u(x,t)$ rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe oblika*

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0. \tag{4.8}$$

Formirajmo Bernoullijevom metodom separacije varijabli sustav dviju običnih diferencijalnih jednadžbi koje će definirati funkciju $u(x,t)$.

Kao i u prošlom primjeru, želimo jednadžbu zapisati u obliku

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{4.9}$$

Ponovno diferenciramo (4.9)*, ali sada dva puta po x i dva puta po t i uvrštavajući u* (4.8) *dobivamo*

$$XT_{tt} = c^2 X_{xx} T. \tag{4.10}$$

Separacijom varijabli i uvođenjem separacijske konstante slijedi

$$\frac{T_{tt}}{c^2 T} = \frac{X_{xx}}{X} = k. \tag{4.11}$$

Ponovno možemo zapisati sustav dviju običnih diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{d^2X}{dx^2} - kX = 0, \tag{4.12}$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} - kc^2 T = 0. \tag{4.13}$$

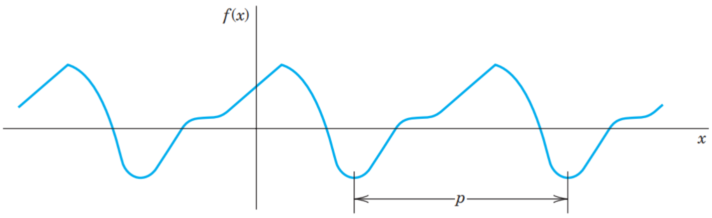
5. Fourierov red

Fourierova analiza se temelji na ideji da bilo koju periodičku funkciju možemo zapisati kao beskonačnu sumu periodičkih funkcija sinusa i kosinusa različitih frekvencija, faza i amplituda. Takva se beskonačna suma naziva Fourierov red i ključna je za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u koje spada i valna jednadžba koju u ovom radu obrađujemo. U ovom poglavlju definiramo Fourierov red i pokazujemo kako se funkcija može zapisati pomoću Fourierova reda. Poglavlje je obrađeno prema izvoru [1].

Osnovni uvjet za dobivanje Fourierovog reda je periodičnost funkcije. Funkcija $f(x)$ je periodična ako je definirana za sve realne brojeve x (osim možda u nekim točkama) i postoji neki pozitivni broj p, koji se zove period funkcije $f(x)$ takav da vrijedi

$$f(x+p) = f(x) \tag{5.1}$$

za svaki x iz domene. Jedna periodična funkcija s periodom p prikazana je na sljedećoj slici.



Slika 5.1. Period periodičke funkcije. Izvor: [1]

Graf periodičke funkcije ima karakteristiku da se cijela funkcija može prikazati periodičnim ponavljanjem njenog grafa u bilo kojem intervalu duljine p. Istaknimo da se najmanji period naziva osnovni period.

Većina funkcija je neperiodična, a najpoznatije periodične funkcije su sinus i kosinus kojima je temeljni period 2π, te tangens i kotangens kojima je temeljni period π. Ako funkcija ima period p, tada ima i period $2p$ jer (5.1) implicira

$$f(x+2p) = f([x+p]+p) = f(x+p) = f(x). \tag{5.2}$$

Općenito vrijedi

$$f(x+np) = f(x) \tag{5.3}$$

za svaki cijeli broj n. Također, ako funkcije f i g imaju period p, tada $af(x) + bg(x)$, gdje su a i b konstante, isto imaju period p.

Ako je $f(x)$ funkcija sa periodom $p = 2L$ i može se zapisati u obliku Fourierova rada, tada je taj red oblika:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \right], \tag{5.4}$$

gdje su a_0, a_n i b_n koeficijenti Fourierovog reda, a računaju se prema formulama

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx, \tag{5.5}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\, dx, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{5.6}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\, dx, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{5.7}$$

Pokažimo na primjeru kako se periodična funkcija zapisuje pomoću Fourierova reda.

Primjer 5.1. *Neka je zadana periodična funkcija $f(x)$ perioda $2L$ definirana na intervalu $[-L, L]$ izrazom:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -L \leq x < 0, \\ -1, & 0 \leq x < L. \end{cases} \tag{5.8}$$

Zapišimo zadanu funkciju pomoću Fourierovog reda.

Prvo računamo koeficijent a_0 prema (5.5)*:*

$$a_0 = \frac{1}{L} \left(\int_{-L}^{0} 1\, dx + \int_{0}^{L} -1\, dx \right) = \frac{1}{L}\, x\big|_{-L}^{0} + \frac{1}{L}\, -x\big|_{0}^{L}, \tag{5.9}$$

pa je

$$a_0 = \frac{1}{L}\left(0 - (-L) + (-L - 0)\right) = \frac{1}{L} \cdot (L - L) = 0. \tag{5.10}$$

Sada računamo koeficijent a_n prema (5.6)*, razdvajajući integral na dva dijela*

$$a_n = \frac{1}{L} \left(\int_{-L}^{0} 1 \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx + \int_{0}^{L} -1 \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx \right). \tag{5.11}$$

Vrijedi

$$\int_{-L}^{0} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx = \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\bigg|_{-L}^{0} = \frac{L}{n\pi}\left(\sin(0) - \sin(-n\pi)\right) = 0, \tag{5.12}$$

te

$$\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx = \frac{L}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L = \frac{L}{n\pi}\left(\sin(n\pi) - \sin(0)\right) = 0. \tag{5.13}$$

Slijedi da je $a_n = 0$ za sve n.

Na kraju računamo koeficijent b_n prema (5.7)*, također razdvajajući izraz na dva integrala*

$$b_n = \frac{1}{L}\left(\int_{-L}^{0} 1\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx + \int_0^L -1\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx\right). \tag{5.14}$$

Za prvi integral vrijedi

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{0}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx &= -\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_{-L}^{0}\\ = -\frac{L}{n\pi}\left(\cos(0) - \cos(-n\pi)\right) &= -\frac{L}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right),\end{aligned} \tag{5.15}$$

dok je za drugi integral

$$\begin{aligned}\int_0^L\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx &= -\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L\\ = -\frac{L}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - \cos(0)\right) &= -\frac{L}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right).\end{aligned} \tag{5.16}$$

Iz toga slijedi da je

$$b_n = \frac{1}{L}\cdot\left(-\frac{L}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) + \frac{L}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right)\right) = -\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n), \tag{5.17}$$

te zaključujemo da za parne n, $b_n = 0$, a za neparne n je

$$b_n = \frac{4}{n\pi}. \tag{5.18}$$

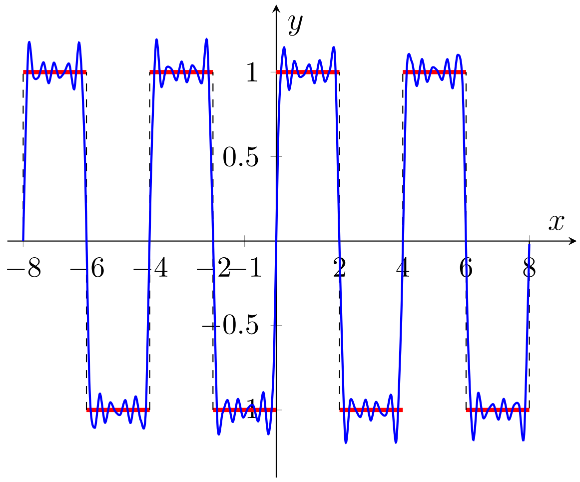
Sada možemo zapisati konačno rješenje koje reprezentira funkciju $f(x)$ pomoću Fourierovog reda, a ono glasi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{5.19}$$

gdje je $n = 2N-1$, $N \in \mathbb{N}$.

Ako u ovoj sumi uzmemo samo konačan broj članova reda dobit ćemo aproksimaciju funkcije $f(x)$ Fourierovim polinomom koja je prikazana na sljedećoj slici.

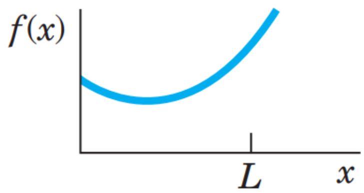
Uočimo da su se u Fourierovu redu iz prethodnog primjera pojavljivali samo sinusni članovi. To se događa jer je funkcija $f(x)$ neparna. Da je funkcija $f(x)$ bila parna, u razvoju bi se pojavljivali samo kosinusni članovi.



Slika 5.2. Aproksimacija funkcije $f(x)$ Fourierovim polinomom s 5 pribrojnika za $L = 2$. Izvor: Izrada autora

5.1. Nepotpuni Fourierov red

U prethodnom primjeru bila nam je zadana periodična funkcija i nju smo prema danim formulama prikazali pomoću Fourierovog reda. U ovom poglavlju razmatramo situaciju kada nas zanima funkcija zadana na intervalu $[0, L]$ kao što prikazuje sljedeća slika.

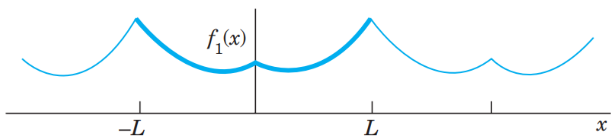


Slika 5.3. Funkcija $f(x)$ definirana na intervalu $[0, L]$. Izvor[1]

Ova funkcija nije periodična i kao takvu je ne možemo razviti u Fourierov red, međutim kako je ona definirana samo na $[0, L]$ možemo je periodično proširiti na čitav skup $\mathbb{R}$.

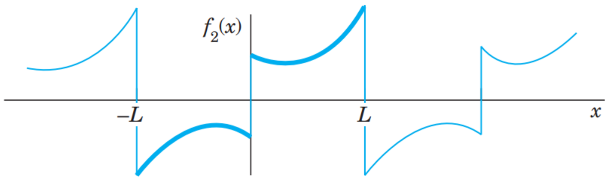
Periodično proširenje može biti specifično, odnosno možemo postići parno ili neparno proširenje funkcije $f(x)$ ali na način da temeljni period proširene funkcije bude $2L$.

Parno proširenje je prikazano na slici 5.4, a neparno na slici 5.5.



Slika 5.4. Parno proširenje funkcije f(x). Izvor[1]

Kako smo već rekli, funkciju se može proširiti i samo s periodom L, ali parno i neparno proširenje je puno elegantnije jer kod parnih funkcija Fourierov red za tu funkciju sadrži samo kosinusne članove. To se događa zato što su kosinusne funkcije same po sebi parne, dok su sinusne funkcije



Slika 5.5. Neparno proširenje funkcije f(x). Izvor[1]

neparne, te sinusni članovi b_n postaju nula. Kod neparnih proširenja Fourierov red za tu funkciju sadrži samo sinusne članove, a kosinusni članovi a_0 i a_n postaju nula.

Fourierovi redovi koji su dobiveni parnim, odnosno neparnim proširenjem zadane funkcije zovu se nepotpuni Fourierovi redovi. Koeficijenti nepotpunog Fourierovog reda koji sadrži samo kosinusne komponente su:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx, \tag{5.20}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\,dx, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{5.21}$$

dok su koeficijenti nepotpuno Fourierovog reda koji sadrži samo sinusne komponente dani s

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\,dx, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{5.22}$$

Razvoj u nepotpuni Fourierov red pokazat ćemo na sljedećem primjeru.

Primjer 5.2. *Odredimo nepotpuni Fourierov red funkcije*

$$f(x) = \begin{cases} kx, & 0 < x < 1, \\ k(2-x), & 1 < x < 2, \end{cases} \tag{5.23}$$

koji sadrži samo kosinusne komponente.

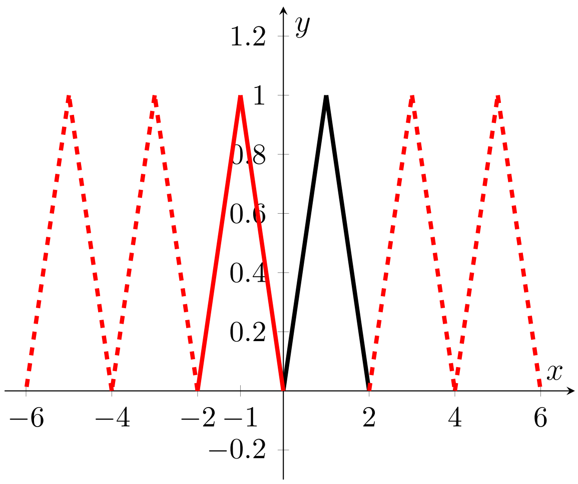
Da bi postigli Fourierov red koji u sebi ima samo kosinusne komponente zadanu funkciju moramo parno proširiti što prikazuje slika 5.6.

Sada možemo računati koeficijente Fourierovog reda. Prvo računamo a_0 prema (5.20).

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 kx\,dx + \int_1^2 k(2-x)\,dx\right] = \frac{k}{2}. \tag{5.24}$$

Sada računamo a_n prema izrazu (5.21).

$$a_n = \int_0^1 kx\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx + \int_1^2 k(2-x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx. \tag{5.25}$$



Slika 5.6. Parno proširenje funkcije $f(x)$ za $k = 1$. Crnom bojom prikazana je osnovna funkcija, crvenom bojom parno proširenje, dok isprekidana linija naglašava periodičnost proširenja. Izvor: Izrada autora

Nakon rješavanja integrala i sređivanja slijedi

$$a_n = \frac{4k}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right) \tag{5.26}$$

Možemo zaključiti da je $a_n = 0$ za sve $n \neq 2, 6, 10, 14, \cdots$, pa rješenje možemo zapisati kao

$$f(x) = \frac{k}{2} - \frac{16k}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos(\pi x) + \frac{1}{6^2}\cos(3\pi x) + \cdots\right). \tag{5.27}$$

Na kraju možemo zaključiti da će nam izraz za nepotpuni Fourierov red za parne funkcije biti

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), n \in \mathbb{N}, \tag{5.28}$$

a za neparne

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), n \in \mathbb{N}. \tag{5.29}$$

6. Valna jednadžba i problem titranja žice

U ovom poglavlju fizikalno ćemo izvesti valnu jednadžbu, pri čemu se služimo izvorima [1] i [3]. Promatramo elastičnu žicu koja je pričvršćena na oba kraja te radi male poprečne vibracije poput žice gitare. Žicu postavljamo duž x-osi, protežemo je do duljine L i pričvršćujemo na krajevima. Tako problem smještavamo u koordinatni sustav gdje će nam x označavati položaj duž mirujuće žice. Zatim deformiramo žicu i u određenom trenutku, nazovimo ga $t = 0$, oslobađamo je i dopuštamo joj vibriranje. Problem je odrediti matematički model titranja žice, odnosno, pronaći njezinu deformaciju u bilo kojoj točki x i u bilo kojem trenutku t, odnosno pronaći funkciju $u(x,t)$ koja predstavlja položaj žice u točki x i trenutku t.

6.1. Fizikalne pretpostavke

Fizikalne pretpostavke koje ćemo postaviti omogućuju nam pojednostavljenje procesa opisivanja titranja žice te zanemarivanje nekih faktora koji praktički ne utječu na konačni rezultat, a one su:

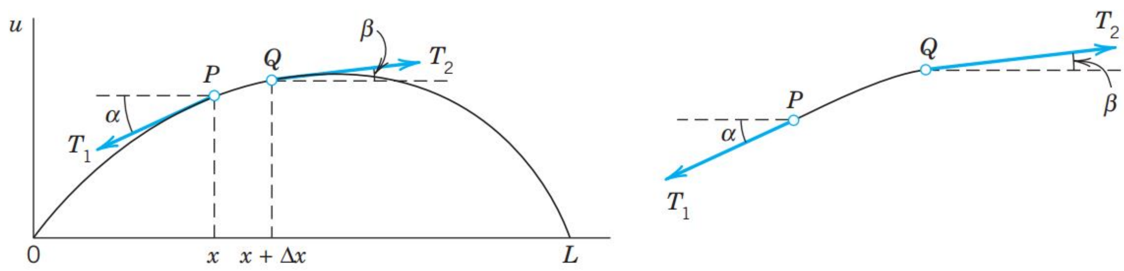
1. Masa žice po jediničnoj duljini je konstantna, odnosno žica je homogena.
2. Žica je potpuno elastična i ne pruža otpor savijanju.
3. Napetost uzrokovana rastezanjem žice prije pričvršćivanja na krajevima tako je velika da se djelovanje gravitacijske sile na žicu (pokušavajući je malo povući prema dolje) može zanemariti.
4. Žica izvodi male poprečne pokrete u vertikalnoj ravnini, odnosno svaka čestica žice kreće se strogo vertikalno tako da deformacija i nagib u svakoj točki žice uvijek ostaju maleni u apsolutnoj vrijednosti.

Kako bismo dobili parcijalnu diferencijalnu jednadžbu koja opisuje gibanje žice razmatramo sile koje djeluju na maleni dio žice kako je prikazano na idućoj slici. Budući da žica ne pruža otpor savijanju, napetost je tangencijalna krivulji žice na svakom mjestu.

Neka T_1 i T_2 budu napetosti na krajevima P i Q promatranog dijela žice. S obzirom da se točke žice kreću vertikalno, nema pokreta u horizontalnom smjeru. Stoga horizontalne komponente napetosti moraju biti konstantne. Tako vrijedi:

$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T = \text{konst.} \tag{6.1}$$

U vertikalnom smjeru djeluju dvije sile -$T_1 \sin\alpha$ i $T_2 \sin\beta$, odnosno, vertikalne komponente napetosti T_1 i T_2, pri čemu se minus pojavljuje jer je komponenta kod točke P usmjerena prema



Slika 6.1. Deformirana žica u fiksnom trenutku t i dio žice između točaka P i Q. Izvor[1]

dolje. Prema drugom Newtonovom zakonu, rezultanta tih dviju sila jednaka je masi m pomnoženom s ubrzanjem a, procijenjenom u nekoj točki između x i $x + \Delta x$ (masu možemo zapisati kao $m = \rho \Delta x$, a akceleraciju $a = \partial^2 u / \partial t^2$). Iz toga dobivamo jednadžbu:

$$T_2 \sin \beta - T_1 \sin \alpha = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{6.2}$$

Koristeći (6.1), možemo (6.2) podijeliti sa $T_2 \cos \beta = T_1 \cos \alpha = T$ i dobiti:

$$\frac{T_2 \sin \beta}{T_2 \cos \beta} - \frac{T_1 \sin \alpha}{T_1 \cos \alpha} = \tan \beta - \tan \alpha = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{6.3}$$

pri čemu $\tan \alpha$ i $\tan \beta$ predstavljaju nagibe žice na x i $x + \Delta x$. Prema tome vrijedi:

$$\tan \alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \bigg|_x \qquad \text{i} \qquad \tan \beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \bigg|_{x+\Delta x}. \tag{6.4}$$

Napomenimo, da ovdje moramo koristiti parcijalne derivacije jer u ovisi i o vremenu t.

Podijelivši (6.3) s Δx, dobivamo:

$$\frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \bigg|_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \bigg|_x \right] = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{6.5}$$

Ako pustimo da Δx teži prema nuli, s lijeve strane jednadžbe dobivamo derivaciju po varijabli x te izraz postaje linearna parcijalna diferencijalna jednadžba

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{6.6}$$

gdje je

$$c^2 = \frac{T}{\rho}. \tag{6.7}$$

Ova jednadžba zbog prirode problema kojeg opisuje naziva se jednodimenzionalna valna jednadžba. Ona u principu opisuje širenje vala samo u jednoj prostornoj dimenziji koja je ovdje označena s x.

Valna jednadžba je prema (3.3) linearna, drugog reda prema (3.2) i prema (3.6) hiperbolična. Fizička konstanta označena T/ρ, zamijenjena je s c^2 (umjesto c) kako bi se označilo da je ova konstanta pozitivna, a ta činjenica će biti ključna za dobivanje rješenja.

6.2. Početni i rubni uvjeti povezani s valnom jednadžbom

Pretpostavimo da je početni položaj žice opisan funkcijom $f(x)$. Tada mora vrijediti

$$u(x,0) = f(x). \tag{6.8}$$

Uz početni položaj moguće je zadati i početnu brzinu pa pretpostavimo da je ona zadana funkcijom $g(x)$. Tada je

$$u_t(x,0) = g(x). \tag{6.9}$$

Ova dva uvjeta opisuju rješenje valne jednadžbe u početnom trenutku $t = 0$, te se stoga nazivaju početni ili inicijalni uvjeti.

Kako se u valnoj jednadžbi pojavljuju četiri derivacije (jedna drugog reda po vremenskoj varijabli te jedna drugog reda po prostornoj varijbli, a svaka se derivacija drugog reda broji duplo), za očekivati je da će za dobivanje jedinstvenog rješenja uz navedene početne uvjete biti potrebno zadati još dva uvjeta.

Obično se dodatno pretpostavlja da je žica na rubovima učvršćena i to se modelira na sljedeći način:

$$u(0,t) = 0, \tag{6.10}$$

$$u(L,t) = 0. \tag{6.11}$$

Kako ovi uvjeti opisuju ponašanje na rubu, njih obično nazivamo rubnim uvjetima. Rubni uvjeti mogu biti Dirichletovi i Neumannovi. Kod Dirichletovih uvjeta zadaje se vrijednost rješenja u rubu, kao što je to bio slučaj kod (6.10) i (6.11).

Kod Neumannovih rubnih uvjeta nameće se vrijednost derivacije funkcije na rubu, pa bi u ovom slučaju oni bili zadani na sljedeći način:

$$u_x(0,t) = 0, \tag{6.12}$$

$$u_x(L,t) = 0. \tag{6.13}$$

Ovi rubni uvjeti fizikalno bi značili da su krajevi žice slobodni za oscilacije.

Kod navedenih rubnih uvjeta desna je strana jednaka nuli i takve ćemo uvjete zvati homogenim rubnim uvjetima. Ako bi na desnoj strani umjesto nule bila neka zadana funkcija tada bi to bili nehomogeni rubni uvjeti.

7. Rješavanje Dirichletovog rubnog problema za valnu jednadžbu

U ovom poglavlju koristeći izvor [1] rješavamo valnu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{7.1}$$

gdje je

$$c^2 = \frac{T}{\rho} \tag{7.2}$$

prije opisana pozitivna konstanta.

Uz jednadžbu zadajemo početne uvjete

$$u(x,0) = f(x), \tag{7.3}$$

$$u_t(x,0) = g(x), \tag{7.4}$$

definirane za $0 \leq x \leq L$, te homogene Dirichletove rubne uvjete zadane s

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \tag{7.5}$$

za sve $t \geq 0$.

Krećemo Bernoullijevom metodom separacije varijabli, objašnjenoj u poglavlju 4. Kao što je u tom poglavlju objašnjeno, rješenje valne jednadžbe u zapisujemo u obliku produkta dviju funkcija:

$$u(x,t) = F(x)G(t), \tag{7.6}$$

od kojih svaka ovisi o jednoj varijabli, F o prostornoj varijabli x, a G o vremenskoj varijabli t.

Prvo diferenciranjem (7.6) dva puta po t i dva puta po x (jer nam jednadžba (7.1) sadrži derivacije drugog reda po t i x) dobivamo jednadžbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\ddot{G} \tag{7.7}$$

i

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G, \tag{7.8}$$

gdje točke označavaju derivacije s obzirom na t, a crtice derivacije s obzirom na x. Sada možemo izraze (7.7) i (7.8) uvrstiti u (7.1). Dobivamo:

$$F\ddot{G} = c^2 F''G. \tag{7.9}$$

Nadalje, dijeljenjem (7.9) s c^2FG dobivamo jednakost

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F}. \tag{7.10}$$

Varijable ove jednakosti su odvojene, odnosno lijeva strana ovisi samo o t, a desna strana samo o x. Stoga obje strane moraju biti konstantne jer, ako bi bile varijabilne, promjena t ili x utjecala bi samo na jednu stranu, ostavljajući drugu nepromijenjenom. Stoga, možemo zapisati

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k, \tag{7.11}$$

gdje k predstavlja odvojenu konstantu separacije koja je još uvijek proizvoljna.

Zadnji nam je korak dobiti dvije obične diferencijalne jednadžbe, a njih ćemo dobiti tako da (7.11) pomnožimo s nazivnicima. Slijedi:

$$F'' - kF = 0 \tag{7.12}$$

i

$$\ddot{G} - c^2 k G = 0. \tag{7.13}$$

Rješenja ove dvije obične diferencijalne jednadžbe će predstavljati rješenje našeg problema.

7.1. Pomoćni rubni problem

U prethodnom dijelu dobili proveli smo postupak separacije varijabli na jednadžbi (7.1). Taj ćemo postupak sada provesti na rubnim uvjetima. Vrijedi:

$$u(0,t) = F(0)G(t) = 0, \tag{7.14}$$

$$u(L,t) = F(L)G(t) = 0, \tag{7.15}$$

za svaki t.

Ako je $G(t) = 0$, tada je

$$u(x,t) = F(x)G(t) = 0, \tag{7.16}$$

što nije moguće jer bi to značilo da žica miruje. Dakle, $G(t) \neq 0$, a tada prema (7.14) i (7.15) slijedi

$$F(0) = F(L) = 0. \tag{7.17}$$

Sada rješavamo pomoćni rubni problem zadan s

$$\begin{cases} F''(x) - kF(x) = 0, \\ F(0) = F(L) = 0. \end{cases} \tag{7.18}$$

Najprije ćemo odrediti koeficijent k. Ako uzmemo da je $k = 0$, obična diferencijalna jednadžba iz rubnog problema (7.18) poprima oblik

$$F''(x) = 0. \tag{7.19}$$

Jednadžbu (7.19) možemo riješiti metodom direktne integracije kao u primjeru 2.2. Slijedi

$$F(x) = ax + b, \tag{7.20}$$

gdje su a i b konstante.

Uvrstimo li u (7.20) rubne uvjete iz (7.18) dobivamo sustav

$$\begin{cases} b = 0, \\ aL + b = 0, \end{cases} \tag{7.21}$$

pa je $a = b = 0$, a to povlači da je $F(x) = 0$, a posljedično i da je $u(x,t) = 0$ za što smo već rekli da nema smisla.

Sada ćemo pretpostaviti da je konstanta k pozitivna, tj. da vrijedi $k = \mu^2$. Sada nam jednadžba iz rubnog problema (7.18) poprima oblik

$$F''(x) - \mu^2 F(x) = 0, \tag{7.22}$$

što je jednadžba oblika (2.19) opisana u poglavlju 2.1. Kako je u poglavlju 2.1. opisano, najprije formiramo karakterističnu jednadžbu koja poprima oblik

$$\lambda^2 - \mu^2 = 0. \tag{7.23}$$

Rješenja karakteristične jednadžbe u ovom slučaj su $\lambda_{1,2} = \pm\mu$ te prema postupku opisanom u primjeru 2.3 zaključujemo da je opće rješenje jednadžbe (7.22) oblika

$$F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}, \tag{7.24}$$

gdje su A i B konstante.

Uvrstimo li u (7.20) rubne uvjete iz (7.18) dobivamo sustav

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ Ae^{\mu L} + Be^{-\mu L} = 0, \end{cases} \tag{7.25}$$

odakle je $A = -B$ te

$$Ae^{\mu L} - Ae^{-\mu L} = 0, \tag{7.26}$$

$$A\left(e^{\mu L} - e^{-\mu L}\right) = 0, \tag{7.27}$$

što znači da je $A = 0$. Iz toga slijedi i da je $B = 0$, odnosno da je $F(x) = 0$, što kao i u prošlom slučaju vodi na rješenje $u(x,t) = 0$ koje nema smisla.

Ostaje nam mogućnost da je k negativan, tj. da vrijedi $k = -p^2$. Tada jednadžba iz rubnog problema (7.18) poprima oblik

$$F''(x) + p^2 F(x) = 0, \tag{7.28}$$

što je isti oblik jednadžbe kao i slučaju kada je k bio negativan, ali je njena karakteristična jednadžba oblika

$$\lambda^2 + p^2 = 0. \tag{7.29}$$

Rješenje ove karakteristične jednadžbe su kompleksni brojevi $\lambda_{1,2} = \pm ip$, pa je opće rješenje jednadžbe (7.22) oblika

$$F(x) = A\cos(px) + B\sin(px), \tag{7.30}$$

gdje su A i B konstante.

Uvrstimo li u (7.30) rubne uvjete iz (7.18) dobivamo sustav

$$\begin{cases} A = 0, \\ A\cos(pL) + B\sin(pL) = 0, \end{cases} \tag{7.31}$$

odakle slijedi

$$B\sin(pL) = 0. \tag{7.32}$$

Moramo uzeti da je $B \neq 0$ jer je inače $F = 0$ i dolazimo do rješenja koje nema smisla. Stoga mora vrijediti

$$\sin(pL) = 0, \tag{7.33}$$

pa je

$$pL = n\pi, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{7.34}$$

odnosno

$$p = \frac{n\pi}{L}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{7.35}$$

Temeljem toga zaključujemo da su rješenja pomoćnog rubnog problema (7.18)

$$F_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{7.36}$$

za sve $n \in \mathbb{N}$.

7.2. Bazna rješenja

Sada možemo riješiti običnu diferencijalnu jednadžbu po vremenskoj varijabli, odnosno jednadžbu (7.13). Uvrštavanjem izraza

$$k = -p^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \tag{7.37}$$

u (7.13) dobivamo niz običnih diferencijalnih jednadžbi zadan s

$$\ddot{G}_n(t) + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 G_n(t) = 0. \tag{7.38}$$

Ova jednadžba rješava se pomoću karakteristične jednadžbe, na isti način kao i diferencijalna jednadžba (8.25). Pripadna karakteristična jednadžba poprima oblik

$$\lambda^2 + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 = 0, \tag{7.39}$$

a njena su rješenja dana s

$$\lambda_{1,2} = \pm\frac{cn\pi}{L}i. \tag{7.40}$$

Opće rješenje jednadžbe (7.38) sada glasi

$$G_n(t) = C_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + D_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right). \tag{7.41}$$

Uočimo da smo ovime dobili niz rješenja valne jednadžbe (7.1) koja zadovoljavaju Dirichletove rubne uvjete (7.5). Ta se rješenja nazivaju bazna rješenja i poprimaju sljedeći oblik:

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(C_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + D_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right), \tag{7.42}$$

odnosno

$$u_n(x,t) = \left(E_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + F_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{7.43}$$

pri čemu je

$$E_n = B_n \cdot C_n, \tag{7.44}$$

a

$$F_n = B_n \cdot D_n. \tag{7.45}$$

Naglasimo da ovime još nismo riješili čitav inicijalno-rubni problem. Naime, bazna rješenja zadovoljavaju rubne, ali ne i početne uvjete. Konačno rješenje inicijalno-rubnog problema dobivamo u sljedećem dijelu.

7.3. Rješenje valne jednadžbe

Kako smo već naglasili, baznim rješenjima dobili smo rješenja valne jednadžbe koja zadovoljavaju rubne uvjete. U ovom dijelu formirati ćemo konačno rješenje koje zadovoljava i početne uvjete.

Kod formiranja konačnog rješenja koristit ćemo se sljedećim teoremom, koji se često naziva princip superpozicije.

Teorem 7.1. *Neka su $u_n(x,t)$, $n \in \mathbb{N}$ linearno nezavisna rješenja valne jednažbe. Tada je i njihova suma također rješenje valne jednadžbe.*

Dokaz. Ako su $u_n(x,t)$ rješenja valne jednadžbe, vrijedi

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \tag{7.46}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Zbrajanjem ovih jednadžbi dobivamo

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_1 + u_2 + ...) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_1 + u_2 + ...), \tag{7.47}$$

što znači da je i funkcija

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \tag{7.48}$$

rješenje valne jednadžbe, pod uvjetom da dobiveni red konvergira. □

Temeljem ovog teorema kao rješenje zadanog inicijalno-rubnog problema promatramo funkciju

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + F_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \tag{7.49}$$

Preostaje nam još odrediti konstante E_n i F_n za koje će funkcija (7.49) zadovoljavati početne uvjete (7.3) i (7.4).

Uvrštavanjem uvjeta (7.3) u (7.49) slijedi

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x), \tag{7.50}$$

za $0 \le x \le L$.

Usporedimo li ovaj izraz s (5.29) zaključujemo da su E_n koeficijenti nepotpunog Fourierova razvoja funkcije $f(x)$ po sinusima. Stoga prema (5.22) vrijedi

$$E_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx. \tag{7.51}$$

za $n \in \mathbb{N}$.

Za uvrštavanje uvjeta (7.4) u (7.49), funkciju $u(x,t)$ iz (7.49) najprije trebamo derivirati po varijabli t. Dobivamo

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-E_n \frac{cn\pi}{L} \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + F_n \frac{cn\pi}{L} \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \tag{7.52}$$

Uvrštavanjem $t = 0$ u (7.52), uvažavajući uvjet (7.4), slijedi:

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{cn\pi}{L} \sin\frac{n\pi x}{L} = g(x). \tag{7.53}$$

Vidimo da se ponovno radi o nepotpunom Fourierovom redu koji sadrži samo sinusne komponente, pa ćemo koeficijente F_n također računati prema (5.22). Slijedi

$$F_n = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{L}{cn\pi} g(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{7.54}$$

odnosno

$$F_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{7.55}$$

7.4. Primjeri Dirchletovih problema povezanih s valnom jednadžbom

Pokazati ćemo na konkretnim primjerima rješavanje valne jednadžbe samo sa zadanom početnom deformacijom, samo sa zadanom početnom brzinom i sa zadanom i početnom deformacijom i početnom brzinom

Primjer 7.1. *Riješimo valnu jednadžbu koja opisuje titranje žice ako je zadana duljina žice $L = 5$, konstanta $c = 1$ i ima početni pomak $f(x) = \sin(\frac{\pi}{5}x)$, a početna brzina je $g(x) = 0$.*

Kako je početna brzina $g(x) = 0$, prema (7.55) *zaključujemo da je $F_n = 0$, te računamo koeficijente E_n prema* (7.51)*:*

$$E_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{5} \int_0^5 \sin \frac{\pi x}{5} \sin \frac{n\pi x}{5} dx. \tag{7.56}$$

Za rješavanje ovog integrala koristimo identitet za produkt sinusnih funkcija:

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} \left[\cos(A - B) - \cos(A + B) \right]. \tag{7.57}$$

Dobivamo:

$$E_n = \frac{2}{5} \int_0^5 \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi x(1-n)}{5} \right) - \cos\left(\frac{\pi x(1+n)}{5} \right) \right] dx = \tag{7.58}$$

$$\frac{1}{5} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi x(1-n)}{5}\right)}{\frac{\pi(1-n)}{5}} \Bigg|_0^5 - \frac{\sin\left(\frac{\pi x(1+n)}{5}\right)}{\frac{\pi(1+n)}{5}} \Bigg|_0^5 \right] = \tag{7.59}$$

$$\frac{1}{5} \left[\frac{5}{\pi(1-n)} \left(\sin(\pi(1-n)) - \sin(0) \right) - \frac{5}{\pi(1+n)} \left(\sin(\pi(1+n)) - \sin(0) \right) \right]. \tag{7.60}$$

Ovan je izraz definiran za $n \neq 1$ i tada je

$$E_n = 0, \qquad n \neq 1, \tag{7.61}$$

pa preostaje izračunati koeficijent E_1:

$$E_1 = \frac{2}{L} \int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx = \frac{2}{5} \int_0^5 \sin^2 \frac{\pi x}{5} dx. \tag{7.62}$$

Koristeći jednakost

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}, \tag{7.63}$$

dolazimo do

$$E_1 = \frac{1}{5}\int_0^5 \left(1-\cos\left(\frac{2\pi x}{5}\right)\right)\,dx = \frac{1}{5}\left[\int_0^5 1\,dx - \int_0^5 \cos\left(\frac{2\pi x}{5}\right)\,dx\right]. \tag{7.64}$$

Rješenje prvog integrala u zagradi je 5, a za drugi integral imamo:

$$\int_0^5 \cos\left(\frac{2\pi x}{5}\right)\,dx = \left.\frac{\sin\left(\frac{2\pi x}{5}\right)}{\frac{2\pi}{5}}\right|_0^5 = \frac{5}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi x}{5}\right)\Bigg|_0^5 = 0. \tag{7.65}$$

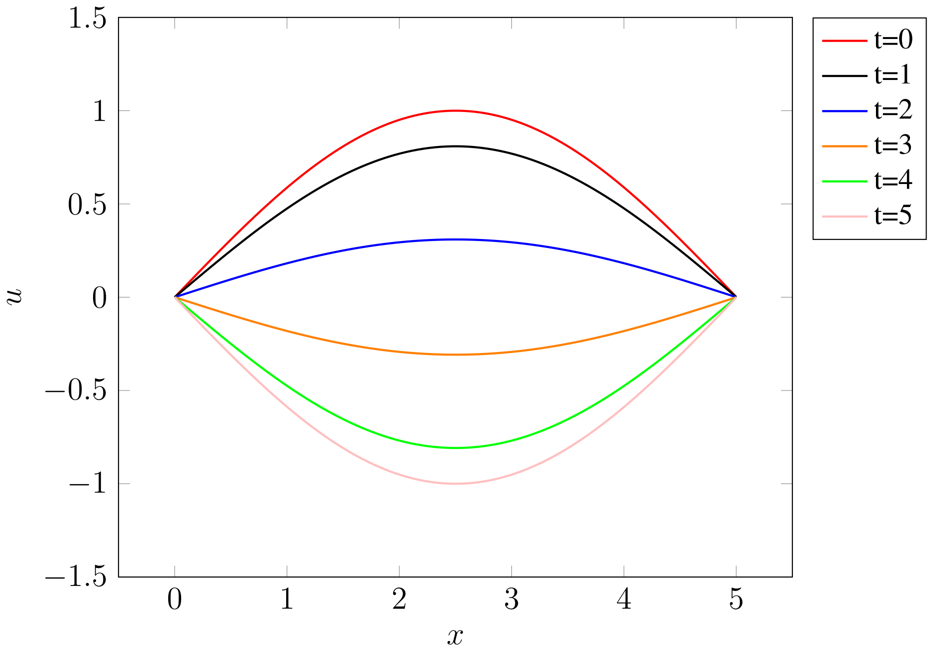
Slijedi da je

$$E_1 = \frac{1}{5}(5-0) = 1, \tag{7.66}$$

te iz (7.49) *dobivamo konačno rješenje:*

$$u(x,t) = u_1(x,t) = \cos\frac{\pi t}{5}\sin\frac{n\pi x}{5} \tag{7.67}$$

koje je prikazano na sljedećoj slici.



Slika 7.1. Grafički prikaz položaja žice u u prostoru x kroz vrijeme t

Primjer 7.2. *Riješimo valnu jednadžbu koja opisuje titranje žice ako je početni pomak $f(x) = 0$, duljina žice $L = \pi$, konstanta $c = 1$ dok je početna brzina zadana funkcijom*

$$g(x) = \begin{cases} 0.01x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0.01(\pi - x), & \frac{\pi}{2} < x \le \pi. \end{cases} \tag{7.68}$$

Pošto je početni pomak $f(x) = 0$, prema (7.51) slijedi da je $E_n = 0$, te nam preostaju za izračunati koeficijenti F_n. Prema (7.54) slijedi

$$F_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi g(x) \sin(nx)\, dx. \tag{7.69}$$

Uvrštavanjem funkcije $g(x)$ razdvajamo rješenje na dva integrala:

$$F_n = \frac{0.02}{\pi} \left[\int\limits_0^{\pi/2} x \sin(nx)\, dx + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \sin(nx)\, dx \right]. \tag{7.70}$$

Riješiti ćemo svaki integral posebno koristeći izraz za parcijalnu integraciju

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du, \tag{7.71}$$

gdje će nam u prvom integralu biti $u = x$ i $dv = \sin(nx)\, dx$. Tada je $du = dx$ i $v = -\dfrac{\cos(nx)}{n}$ te slijedi

$$\int\limits_0^{\pi/2} x \sin(nx)\, dx = -x \frac{\cos(nx)}{n} \Bigg|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos(nx)}{n}\, dx = -\frac{\pi}{2n} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right). \tag{7.72}$$

Isti postupak radimo i kod drugog integrala, samo što uzimamo da je $u = \pi - x$ i $du = -dx$, pa slijedi

$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \sin(nx)\, dx = -(\pi - x) \frac{\cos(nx)}{n} \Bigg|_{\pi/2}^{\pi} - \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n}\, dx \tag{7.73}$$

$$= \frac{\pi}{2n} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n^2} \sin(n\pi) + \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2n} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right). \tag{7.74}$$

Zbrajanjem (7.72) *i* (7.74)*, prema* (7.70) *dobivamo*

$$F_n = \frac{0.04}{\pi n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right). \tag{7.75}$$

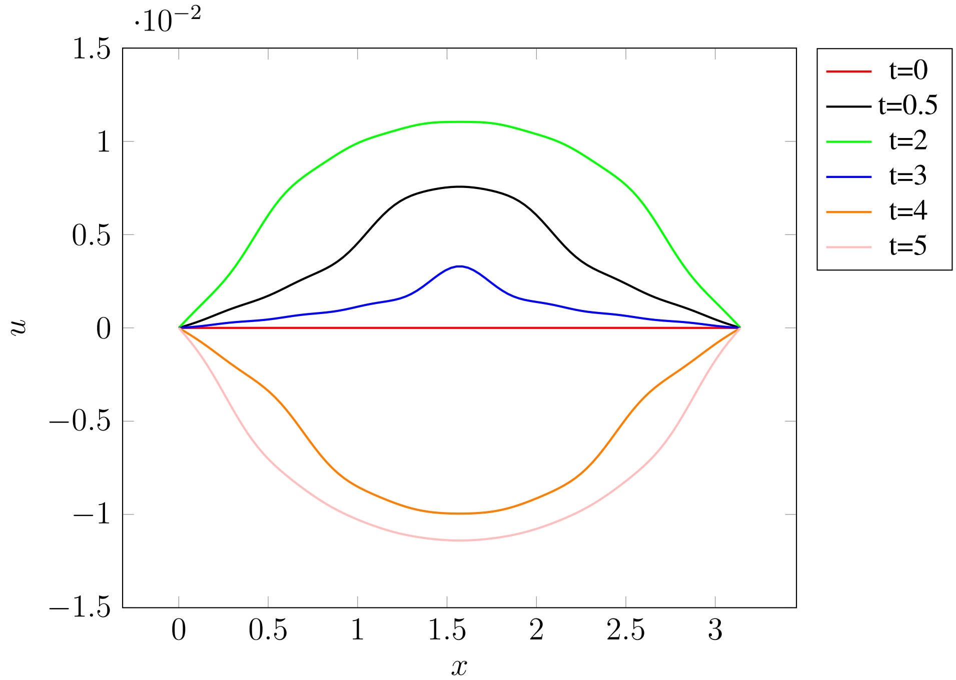
Uočimo da je ovaj izraz jednak nuli za sve parne n zbog čega je

$$F_n = F_{2n-1} = \frac{0.04}{\pi(2n-1)^2} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) = \frac{0.04}{\pi(2n-1)^2} (-1)^{n-1}. \tag{7.76}$$

Uvrštavanjem koeficijenta F_n u (7.49) *rješenje zadanog problema je*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0.04(-1)^{n-1}}{\pi(2n-1)^2} \sin((2n-1)x) \sin((2n-1)t), \tag{7.77}$$

i prikazano je na sljedećoj slici.



Slika 7.2. Grafički prikaz položaja žice u u prostoru x kroz vrijeme t

Primjer 7.3. *Riješimo valnu jednadžbu koja opisuje titranje žice ako je zadana duljina žice* $L = 10$, *konstanta* $c = 3$, *početni pomak*

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{10}x\right) \tag{7.78}$$

te početna brzina

$$g(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{5}x\right). \tag{7.79}$$

Sada imamo i početni pomak pa moramo računati oba koeficijenta E_n *i* F_n. *Prvo ćemo izračunati* E_n *prema* (7.51)*:*

$$E_n = \frac{2}{10}\int_0^{10} \sin\left(\frac{\pi}{10}x\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right)\, dx. \tag{7.80}$$

Ovaj se integral rješava analogno kao i integral (7.56), *pa zaključujemo da je*

$$E_n = 0, \qquad n \neq 1. \tag{7.81}$$

Preostaje izračunati koeficijent E_1 *na isti način kao i integral* (7.62). *Dobivamo:*

$$E_1 = \frac{2}{10}\int_0^{10} \sin^2\frac{\pi x}{10}dx = \frac{1}{10}\int_0^{10}\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{10}\right)\right) dx = 1. \tag{7.82}$$

Sada izračunavamo koeficijente F_n *prema izrazu* (7.55). *Dobivamo:*

$$F_n = \frac{2}{3n\pi}\int_0^{10}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{5}\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right)\, dx \tag{7.83}$$

$$= \frac{2}{3n\pi}\left[\int_0^{10} \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right)\,dx - \int_0^{10} \cos\left(\frac{\pi x}{5}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right)\,dx\right]. \tag{7.84}$$

Za prvi integral u gornjem izrazu vrijedi:

$$\int_0^{10} \sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right)\,dx = -\frac{10}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{10}\right)\Big|_0^{10} = \frac{10}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]. \tag{7.85}$$

Sada računamo drugi integral. Pomoću formule za umnožak kosinusa i sinusa

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right]. \tag{7.86}$$

možemo zapisati

$$\int_0^{10} \cos\left(\frac{\pi x}{5}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{10}\left[\sin\left(\frac{(n+2)\pi x}{10}\right) + \sin\left(\frac{(n-2)\pi x}{10}\right)\right]dx \tag{7.87}$$

$$= -\frac{5}{(n+2)\pi}\cos\left(\frac{(n+2)\pi x}{10}\right)\Big|_0^{10} - \frac{5}{(n-2)\pi}\cos\left(\frac{(n-2)\pi x}{10}\right)\Big|_0^{10} \tag{7.88}$$

$$= -\frac{5}{(n+2)\pi}[(-1)^n-1] - \frac{5}{(n-2)\pi}[(-1)^n-1] = \frac{10n}{(n^2-4)\pi}[1-(-1)^n] \tag{7.89}$$

za $n \neq 2$.

Za $n = 2$ *dani integral poprima oblik:*

$$\int_0^{10} \cos\left(\frac{\pi x}{5}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{10}\right)\,dx = \int_0^{10} \cos\left(\frac{\pi x}{5}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{5}\right)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{10}\sin\left(\frac{2\pi x}{5}\right)\,dx \tag{7.90}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi x}{5}\right)\Big|_0^{10} = 0. \tag{7.91}$$

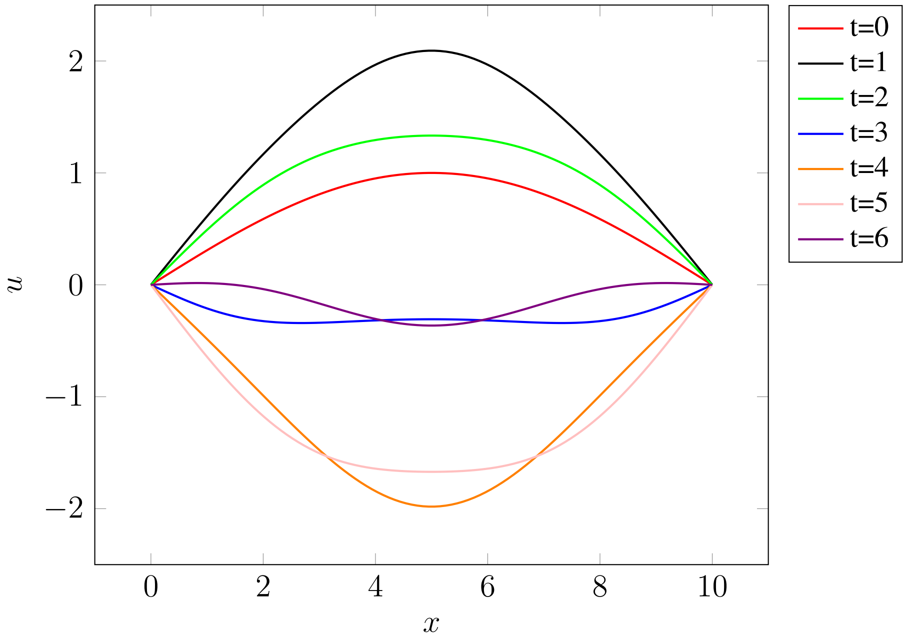
Iz dobivenih izraza zaključujemo da je $F_n = 0$ *za sve parne* n. *Za neparne* n *dobiva se*

$$F_n = \frac{2}{3n\pi}\left[\frac{20}{n\pi} - \frac{20n}{(n^2-4)\pi}\right] = \frac{-160}{3\pi^2 n^2(n^2-4)}. \tag{7.92}$$

Uvrštavajući koeficijente E_1 *i* F_n *u* (7.49) *dolazimo do rješenja zadanog inicijalno-rubnog problema:*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \cos\left(\frac{3\pi}{10}t\right)\sin\left(\frac{\pi}{10}x\right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-160}{3\pi^2(2n-1)^2(4n^2-4n-3)}\sin\left(\frac{3(2n-1)\pi}{10}t\right)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{10}x\right). \end{aligned} \tag{7.93}$$

Dobiveno rješenje grafički je prikazano na idućoj slici.



Slika 7.3. Grafički prikaz položaja žice u u prostoru x kroz vrijeme t

8. Rješavanje Neummanovog rubnog problema za valnu jednadžbu

Preostaje nam još objasniti Neumannov rubni problem za valnu jednadžbu koji ćemo obraditi pomoću izvora [1]. Znamo iz poglavlja 3.2. da Neummanovi rubni uvjeti (za razliku od Dirichletovih koji definiraju funkciju na rubu domene) definiraju normalnu derivaciju funkcije u rubovima domene. Fizikalno, to znači da su krajevi žice slobodni za kretanje, tj. da nisu fiksirani ili zategnuti.

Prema navedenom analiziramo sljedeći inicijalno-rubni problem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{8.1}$$

$$u(x, 0) = f(x), \tag{8.2}$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \tag{8.3}$$

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \tag{8.4}$$

za $0 \leq x \leq L, t \geq 0$.

Problem rješavamo istim postupkom kao i za Dirichletove uvjete, Bernoullijevom metodom separacije varijabli, tj. pretpostavljamo da vrijedi

$$u(x, t) = F(x)G(t). \tag{8.5}$$

Deriviranjem izraza (8.5) dva puta po t i dva puta po x (jer nam jednadžba (8.49) sadrži derivacije drugog reda po t i x) dobivamo ponovno jednadžbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\ddot{G} \tag{8.6}$$

i

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G, \tag{8.7}$$

gdje točke označavaju derivacije s obzirom na t, a crtice derivacije s obzirom na x. Dolazimo ponovno do dvije obične diferencijalne jednadžbe:

$$F''(x) - kF(x) = 0 \tag{8.8}$$

i

$$\ddot{G}(t) - c^2 kG(t) = 0, \tag{8.9}$$

gdje je k vrijednost konstante koju treba odrediti.

8.1. Pomoćni rubni problem

Kao i kod Dirichletovog rubnog problema, provodimo separaciju varijabli. Taj ćemo postupak sada provesti na rubnim uvjetima. Vrijedi:

$$u_x(x,t) = F'(x)G(t), \tag{8.10}$$

pa je

$$u_x(0,t) = F'(0)G(t) = 0, \tag{8.11}$$

$$u_x(L,t) = F'(L)G(t) = 0, \tag{8.12}$$

za svaki t.

Kod Dirchletovog problema smo pokazali da je $G(t) \neq 0$, pa je

$$F'(0) = F'(L) = 0. \tag{8.13}$$

Sada rješavamo pomoćni rubni problem zadan s

$$\begin{cases} F''(x) - kF(x) = 0, \\ F'(0) = F'(L) = 0. \end{cases} \tag{8.14}$$

Najprije ćemo odrediti koeficijent k. Ako uzmemo da je $k = 0$, kao i kod Dirichletovog problema dobivamo da je

$$F(x) = ax + b, \tag{8.15}$$

gdje su a i b konstante. Tako je

$$F'(x) = a, \tag{8.16}$$

Uvrstimo li u (8.16) rubne uvjete iz (8.14) odmah dobivamo da je

$$a = 0, \tag{8.17}$$

a to povlači da je $F(x) = b$, a posljedično i da je $u(x,t) = bG(t)$. Sada je

$$u_x(x,t) = 0, \tag{8.18}$$

što je u kontradikciji s (8.3). Prema tome, koeficijent k ne može biti jednak nuli.

Sada ćemo pretpostaviti da je konstanta k pozitivna, tj. da vrijedi $k = \mu^2$. Sada nam jednadžba iz rubnog problema (8.14) poprima oblik

$$F''(x) - \mu^2 F(x) = 0, \tag{8.19}$$

pa kao i kod Dirichelтovog problema slijedi da je

$$F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}, \tag{8.20}$$

gdje su A i B konstante. Deriviranjem slijedi

$$F'(x) = A\mu e^{\mu x} - B\mu e^{-\mu x}, \tag{8.21}$$

Uvrstimo li u (8.21) rubne uvjete iz (8.14) dobivamo sustav

$$\begin{cases} A - B = 0, \\ Ae^{\mu L} - Be^{-\mu L} = 0, \end{cases} \tag{8.22}$$

odakle je $A = B$ te

$$Ae^{\mu L} - Ae^{-\mu L} = 0, \tag{8.23}$$

$$A\left(e^{\mu L} - e^{-\mu L}\right) = 0, \tag{8.24}$$

što znači da je $A = 0$. Iz toga slijedi i da je $B = 0$, odnosno da je $F(x) = 0$, što vodi na rješenje $u(x,t) = 0$ koje nema smisla.

Ostaje nam mogućnost da je k negativan, tj. da vrijedi $k = -p^2$. Tada jednadžba iz rubnog problema (8.14) poprima oblik

$$F''(x) + p^2 F(x) = 0, \tag{8.25}$$

kao i kod Dirichletovog rubnog problema, pa vrijedi

$$F(x) = A\cos(px) + B\sin(px). \tag{8.26}$$

Deriviranjem slijedi

$$F'(x) = -Ap\sin(px) + Bp\cos(px). \tag{8.27}$$

Uvrstimo li u ovaj izraz rubne uvjete iz (8.14) dobivamo sustav

$$F'(0) = Bp = 0, \tag{8.28}$$

$$F'(L) = -Ap\sin(pL) + Bp\cos(pL) = 0. \tag{8.29}$$

Pošto je $p \neq 0$, iz prve jednadžbe sustava slijedi da je $B = 0$. Druga jednadžba sustava tada postaje

$$-Ap\sin(pL) = 0. \tag{8.30}$$

Kako A i B ne mogu oba biti nula, slijedi da $\sin(pL) = 0$, odnosno $pL = n\pi$ za $n = 0, 1, 2.....$

Zaključujemo da su rješenja rubnog problema (8.14) dana s

$$F_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{8.31}$$

za sve $n \in \mathbb{N}_0$.

Primijetimo da za razliku od Dirichletova problema gdje je zbrajanje počinjalo od 1, ovdje zbrajanje počinje od 0. Razlog je u tome što kosinusna funkcija u nuli ne iščezava pa je i za $n = 0$ treba uključiti u analizu.

8.2. Bazna rješenja

Kako je obična diferencijalna jednadžba po vremenskoj varijabli (8.9) jednaka jednadžbi (7.13), onda nam je i njezino rješenje jednako, odnosno

$$G_n(t) = C_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + D_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right), \tag{8.32}$$

za $n \in \mathbb{N}$.

Međutim, kako $G_n(t)$ postoji i za $n = 0$ do njega dolazimo uvrštavajući $n = 0$ u (8.9). Kako $n = 0$ povlači da je $p = 0$ pa i $k = 0$, tako iz (8.9) dobivamo da je

$$\ddot{G}_0(t) = 0. \tag{8.33}$$

Direktnom integracijom slijedi:

$$G_0(t) = C_0 + D_0 t, \tag{8.34}$$

gdje su C_0 i D_0 konstante.

Ovime smo dobili niz rješenja valne jednadžbe (8.49) koja zadovoljavaju Neummanove rubne uvjete (8.4). Ta se rješenja nazivaju bazna rješenja i poprimaju sljedeći oblik:

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(C_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + D_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right), \tag{8.35}$$

za $n \in \mathbb{N}_0$ te

$$u_0(x,t) = F_0(x)G_(t) = A_0\left(C_0 + D_0 t\right), \tag{8.36}$$

odnosno

$$u_n(x,t) = \left(E_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + F_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{8.37}$$

$$u_0(x,t) = E_0 + F_0 t, \tag{8.38}$$

pri čemu je

$$E_n = A_n \cdot C_n, \tag{8.39}$$

i

$$F_n = A_n \cdot D_n. \tag{8.40}$$

Ovime još nismo riješili čitav inicijalno-rubni problem. Naime, bazna rješenja zadovoljavaju rubne, ali ne i početne uvjete. Konačno rješenje inicijalno-rubnog problema dobivamo u sljedećem dijelu.

8.3. Rješenje valne jednadžbe

Kako smo već naglasili, baznim rješenjima dobili smo rješenja valne jednadžbe koja zadovoljavaju rubne uvjete. U ovom dijelu formirati ćemo konačno rješenje koje zadovoljava i početne uvjete.

Kod formiranja konačnog rješenja ponovno ćemo koristiti teorem 7.1. Temeljem ovog teorema kao rješenje zadanog inicijalno-rubnog problema promatramo funkciju

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t), \tag{8.41}$$

odnosno

$$u(x,t) = E_0 + F_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + F_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \tag{8.42}$$

Preostaje nam još odrediti konstante E_n i F_n za koje će funkcija (8.42) zadovoljavati početne uvjete (8.2) i (8.3).

Uvrštavanjem uvjeta (8.2) u (8.42) slijedi

$$u(x,0) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x), \tag{8.43}$$

za $0 \leq x \leq L$.

Usporedimo li ovaj izraz s (5.28) zaključujemo da su E_n koeficijenti nepotpunog Fourierova razvoja funkcije $f(x)$ po kosinusima. Stoga prema (5.20) i (5.21) vrijedi

$$E_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx, \quad \text{i} \quad E_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx. \tag{8.44}$$

Za uvrštavanje uvjeta (8.3) u (8.42), funkciju $u(x,t)$ iz (8.42) najprije trebamo derivirati po varijabli t. Dobivamo

$$u_t(x,t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-E_n \frac{cn\pi}{L} \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + F_n \frac{cn\pi}{L} \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \tag{8.45}$$

Uvrštavanjem $t = 0$ u (8.45), uvažavajući uvjet (8.3), slijedi:

$$u_t(x,0) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{cn\pi}{L} \cos\frac{n\pi x}{L} = g(x). \tag{8.46}$$

Vidimo da se ponovno radi o nepotpunom Fourierovom redu koji sadrži samo kosinusne komponente, pa ćemo koeficijente F_n također računati prema (5.20) i (5.21). Slijedi

$$F_0 = \frac{1}{L}\int_0^L g(x)\,dx \quad \text{i} \quad F_n \frac{cn\pi}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \tag{8.47}$$

odnosno

$$F_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx. \tag{8.48}$$

8.4. Primjer Neumannovog problema povezanog s valnom jednadžbom

Sada ćemo pokazati kako izgleda rješenje Neumannovog problema povezanog s valnom jednadžbom.

Primjer 8.1. *Riješimo sljedeći inicijalno-rubni problem*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{8.49}$$

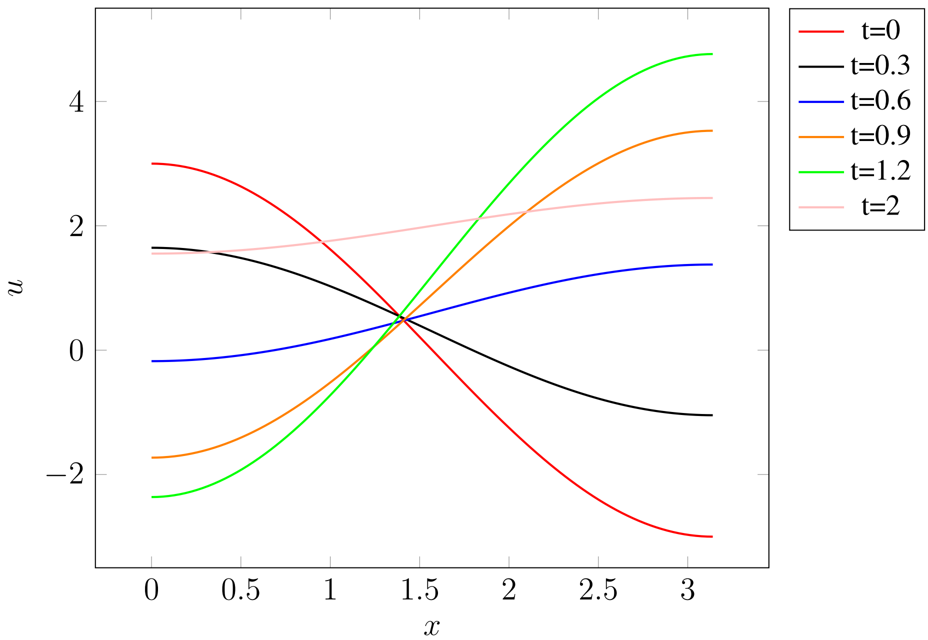
$$u(x,0) = 3\cos(x), \tag{8.50}$$

$$u_t(x,0) = 1 - 4\cos(x), \tag{8.51}$$

$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \tag{8.52}$$

za $0 \le x \le \pi$, $t \ge 0$.

Prikažimo najprije grafički rješenje ovog problema.



Slika 8.1. Grafički prikaz položaja žice u u prostoru x kroz vrijeme t

Sada ćemo odrediti i analitičko rješenje. Prvo ćemo prema (8.44) *izračunati koeficijente* E_0 *i* E_n*:*

$$E_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 3\cos(x)\,dx = \frac{3}{\pi}\sin(x)\Big|_0^\pi = 0, \tag{8.53}$$

$$E_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 3\cos(x)\cos(nx)\,dx. \tag{8.54}$$

Za rješavanje ovog integrala koristimo identitet za produkt kosinusnih funkcija:

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]. \tag{8.55}$$

Dobivamo:

$$E_n = \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x(1-n))\,dx + \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x(1+n))\,dx = \tag{8.56}$$

$$\frac{3}{\pi}\left[\frac{\sin(x(1-n))}{1-n} + \frac{\sin(x(1+n))}{1+n}\right]\Bigg|_0^{\pi} = 0, \tag{8.57}$$

za $n \neq 0$.

Preostaje još odrediti E_1. *Uvrštavanjem* $n = 1$ *u* (8.56) *slijedi*

$$E_1 = \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi} dx + \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(2x)\,dx = \frac{3}{\pi}x\Big|_0^{\pi} + \frac{3}{\pi}\frac{1}{2}\sin(2x)\Big|_0^{\pi} = 3. \tag{8.58}$$

Sada izračunavamo koeficijente F_0 *i* F_n *prema* (8.47).

$$F_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos(4x))dx = \frac{1}{\pi}\left(x - \frac{1}{4}\sin(4x)\right)\Bigg|_0^{\pi} = 1. \tag{8.59}$$

Nadalje je

$$F_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}(1-4\cos(x))\cos(nx)\,dx = \frac{1}{n\pi}\left[\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx - 4\int_0^{\pi}\cos(x)\cos(nx)\right]. \tag{8.60}$$

Drugi integral u ovom izrazu istog je oblika kao integral u (8.54) *te je on jednak nuli za sve* $n \neq 1$. *Za prvi integral dobivamo*

$$\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx = \frac{1}{n}\sin(nx)\Big|_0^{\pi} = 0, \tag{8.61}$$

pa zaključujemo da je $F_n = 0$ *za* $n \neq 1$. *Za* $n = 1$ *iz* (8.60) *slijedi da je*

$$F_1 = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\cos x\,dx - 4\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx\right]. \tag{8.62}$$

Prvi integral u ovom izrazu identičan je integralu iz (8.61) *te je on jednak nuli. Drugi integral rješavamo pomoću formule*

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}. \tag{8.63}$$

Slijedi

$$\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\right)\,dx = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}, \tag{8.64}$$

pa je $F_1 = -2$.

Uvrštavanjem dobivenih koeficijenata u (8.42) *slijedi*

$$u(x,t) = t + (3\cos(2t) - 2\sin(2t))\cos(x)\,, \tag{8.65}$$

što odgovara grafičkom prikazu na slici 8.1.

9. Zaključak

Cilj rada je bio detaljno modelirati i analitički riješiti inicijalno-rubne probleme povezane s valnom jednadžbu uporabom nepotpunog Forierovog reda. Pokazali smo da diferencijalne jednadžbe služe za modeliranje i opisivanje fizikalnih pojava i sustava, te kao takve imaju veliku primjenu u inženjerstvu, unatoč tome što proces njihova rješavanja može biti iznimno kompliciran.

Bernoullijeva metoda separacije varijabli ključna je za rješavanje valne jednadžbe, budući njenom primjenom od jedne parcijalne diferencijalne jednadžbe dvije obične diferencijalne jednadžbe koje su jednostavnije za rješavanje.

Glavni alat za dobivanje rješenja bio je nepotpuni Fourierov red. Naime, pokazali smo da se u rješenju promatranih problema pojavljuju razvoji početnih uvjeta u nepotpuni Fourierov red. Ipak, treba napomenuti da taj postupak ovisi o kompleksnosti početnih uvjeta pa u nekim slučajevima izračun pripadnih koeficijenata Fouirerova reda može biti izuzetno zahtjevan i u analitičkom i u numeričkom smislu.

Opisane metode temelj su za rješavanje većine problema koji u osnovi imaju valni proces (kao na primjer elektromagnetizam, akustika, kvantna mehanika...), te i neki puno zahtjevniji problemi (nelinearna valna jednadžba, sustavi s promjenjivim parametrima), ali se za takve složenije sustave ipak češće koriste približne metode. Opisani postupci mogli bi se primijeniti i na druge tipove parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, kao što su jednadžba provođenja topline ili Laplaceova jednadžba.

Bibliografija

[1] Kreyszig, E: "Advanced Engineering Mathematics", John Wiley & Sons, LTD, 8. prosinca 2010.

[2] Farlow, S.J.: "Partial Differential Equations", Dover PublicationsS, INC., 1982.

[3] Pinchover, Y.; Rubinstein, J.:" An Introduction to Partial Differential Equations", Cambridge University Press, 2005.

[4] Grigoryan, V.: "Partial Differential Equations", s Interneta, prosinac 2010.

[5] Fourier, J.: "The Analytical Theory of Heat", Cambridge University Press, 1882.

[6] s Interneta, https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Fourier, 8. rujna 2024.

[7] s Interneta, https://en.wikipedia.org/wiki/Johann_Bernoulli, 8. rujna 2024.

[8] Strauss, W. A.: "Partial Differential Equations: An Introduction", John Wiley & Sons, LTD, 2007.

Sažetak i ključne riječi

U ovom smo radu pomoću parcijalnih diferencijalnih jednadžbi modelirali problem titrajuće žice. Nakon postavljanja pripadnog inicijalno-rubnog problema, isti smo riješili metodom separacije varijabli. Ova metoda vodila je na rješenje koje u pozadini ima razvoj početnih uvjeta u nepotpuni Fourierov red, što smo koristili kod zapisa konačnog rješenja problema. U radu se napravila analiza problema za Dirichletove i Neumannove rubne uvjete te je riješeno nekoliko praktičnih primjera.

Ključne riječi: Valna jednadžba, diferencijalne jednadžbe, Beroullijeva metoda separacije varijabli, Fourierov red, Dirichletovi rubni uvjeti, Neummanovi rubni uvjeti

Summary and key words

In this paper, we model the vibrating wire problem using partial differential equations. After formulating the corresponding initial boundary value problem, we solved it using the method of separation of variables. This approach resulted in a solution based on the expansion of the initial conditions into an incomplete Fourier series, which was employed in expressing the final solution. The paper analyzes the problem under both Dirichlet and Neumann boundary conditions and includes several practical examples to illustrate the application of these methods.

Keywords: Wave equation, differential equations, Bernoulli's method of separation of variables, Fourier series, Dirichlet boundary condition, Neumann boundary condition