REDOVI FUNKCIJA I PRIMJENA U APROKSIMACIJI

Starčević, Andrija

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

REDOVI FUNKCIJA I PRIMJENA U APROKSIMACIJI

Rijeka, rujan 2024.

Andrija Starčević
0069092763

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

REDOVI FUNKCIJA I PRIMJENA U APROKSIMACIJI

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Komentor: doc. dr. sc. Angela Bašić-Šiško

Rijeka, rujan 2024.

Andrija Starčević
0069092763

SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET
POVJERENSTVO ZA ZAVRŠNE ISPITE

Rijeka, 13.03.2024.

Zavod: Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike

Predmet: Inženjerska matematika ET

ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Andrija Starčević (0069092763)**

Studij: Sveučilišni prijediplomski studij elektrotehnike (1030)

Zadatak: **Redovi funkcija i primjena u aproksimaciji / Function series and applications in approximation**

Opis zadatka:

U ovom radu potrebno je definirati pojam reda brojeva, reda funkcija i konvergencije reda. Potrebno je opisati različite kriterije konvergencije redova i definirati pojam radijusa konvergencije reda funkcija. Potrebno je uvesti neke poznatije redove funkcija, specifično red potencija, odnosno Taylorov red te red trigonometrijskih funkcija, odnosno Fourierov red. Opisati metodu aproksimacije funkcija korištenjem redova funkcija te je primijeniti u apstraktnim problemima i problemima iz inženjerstva.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanja diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Zadatak uručen pristupniku: 20.03.2024.

Mentor:
izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Predsjednik povjerenstva za završni ispit:
prof. dr. sc. Dubravko Franković

Komentor:
doc. dr. sc. Angela Bašić-Šiško

IZJAVA

Sukladno članku 7. Stavku 1. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku sveučilišnih prijediplomskih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 4. travnja 2023., izjavljujem da sam samostalno izradio završni rad prema zadatku preuzetom dana 16. travnja 2024.

Rijeka, 7. rujna 2024.

Andrija Starčević

Ovim putem želim se zahvaliti svojoj obitelji na pruženoj podršci tijekom cijelog školovanja. Veliko hvala svim mojim prijateljima i kolegama koji su bili uz mene u dobrim i lošim trenucima, kao i na svoj pomoći koju su mi pružili tijekom ove tri akademske godine. Zahvaljujem se i mentoru izv. prof. dr. sc. Ivanu Dražiću na prihvaćanju uloge mentora. Na kraju, posebno bih zahvalio komentorici doc. dr. sc. Angeli Bašić-Šiško na velikoj pomoći, strpljenju i razumijevanju tijekom pisanja ovog završnog rada.

Sadržaj

1. Uvod

Redovi funkcija su beskonačni zbrojevi koji predstavljaju funkcije kao niz članova, obično izraženih u obliku polinoma ili trigonometrijskih funkcija. Neki od najpoznatijih redova funkcija su Taylorov i Fourierov red. Brook Taylor bio je poznati engleski matematičar, zapamćen po tome što je dao osnovu za aproksimaciju funkcija polinomima, danas poznatu kao Taylorov red. Jean-Baptiste Joseph Fourier bio je jedan od najpoznatijih francuskih matematičara i fizičara te je dao osnovu za razlaganje periodičnih funkcija na trigonometrijske nizove, koje danas poznajemo kao Fourierove redove.

Ovaj rad bavit će se redovima funkcija i njihovom primjenom u inženjerstvu, s posebnim fokusom na dva najpoznatija — Taylorov i Fourierov red. Na početku rada opisat ćemo što su kompleksni brojevi, zašto ih uvodimo te kako radimo osnovne matematičke operacije s njima. Nakon toga, definirat ćemo nizove i redove kompleksnih brojeva te navesti neke od kriterija konvergencije. Uvest ćemo i pojam redova potencija kao uvod u Taylorov red. Taylorov red je matematička metoda koja omogućuje aproksimaciju funkcije kao beskonačnog zbroja njezinih derivacija u određenoj točki. Svaki član Taylorovog reda predstavlja sve točniju aproksimaciju funkcije u blizini te točke. Ova tehnika koristi se u različitim granama znanosti, uključujući matematiku, fiziku i inženjerstvo, za analizu funkcija. Detaljno ćemo opisati Taylorov polinom i Taylorov red, uz objašnjenje pripadajućih pogrešaka i radijusa konvergencije. U radu ćemo moći vidjeti kako izračunavamo koeficijente Taylorovog reda te zašto funkcije moraju biti glatke i bez prekida. Na kraju poglavlja o Taylorovom redu, navest ćemo i neke primjene u inženjerstvu.

Nakon obrade Taylorovog reda, opisat ćemo Fourierov red i načine njegova zapisa. Fourierov red je matematička metoda koja omogućuje razlaganje periodičnih funkcija u beskonačni zbroj sinusa i kosinusa različitih frekvencija. Ova tehnika koristi se u analizi signala, fizici, inženjerstvu i mnogim drugim područjima za aproksimaciju složenih periodičnih funkcija te za bolje razumijevanje njihovih frekvencijskih komponenti. Ukratko ćemo opisati glavne razlike između Taylorovog i Fourierovog reda kao i funkcije kod kakvih se koriste. Kao zadnje poglavlje, opisat ćemo primjenu Fourierovih redova u inženjerstvu, posebno u analizi signala. Primjena redova u aproksimaciji koristi se u mnogim područjima, uključujući numeričku analizu za rješavanje diferencijalnih jednadžbi, teoriju signala za obradu i kompresiju signala, kvantnu mehaniku za aproksimaciju valnih funkcija, računalnu grafiku za simulacije, te statistiku za procjenu funkcija gustoće vjerojatnosti i modeliranje podataka.

Cilj ovog rada bit će pokazati važnost matematike u inženjerstvu. Rad će biti potkrijepljen primjerima i grafovima radi lakšeg razumijevanja teoretski objašnjenih pojmova.

2. Kompleksni brojevi

U ovom poglavlju definirat ćemo što su kompleksni brojevi, zašto ih uvodimo i koje vrste prikaza kompleksnih brojeva postoje. Pokazat ćemo kako se izvršavaju neke od osnovnih računskih operacija s njima. Na kraju ove cjeline opisat ćemo kako izgleda kompleksna ravnina.[1]

2.1. Prikaz kompleksnog broja

Kompleksni brojevi su algebarski izrazi oblika $z = x + yi$ u kojem $x \in \mathbb{R}$ predstavlja realni dio kompleksnog broja, a $y \in \mathbb{R}$ imaginarni dio kompleksnoga broja. Imaginarna jedinica i oznaka je za izraz broja $\sqrt{-1}$ uvedena je kako bi mogli dobiti riješenje kvadratne jednadžbe $x^2 + 1 = 0$. Uz algebarski oblik također postoje trigonometrijski i eksponencionalni zapisi kompleksnoga broja. Trigonometrijski zapis kompleksnog broja prikazujemo kao $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ tako da r predstavlja modul kompleksnog broja $r = |z|$ i računa se prema formuli $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, dok kut θ predtsavlja argument kompleksnog broja $\theta = \arg z$ te ga je moguće izraziti formulom $\tan\theta = \frac{y}{x}$. Kako bi prikazali eksponencijalni prikaz kompleksnog broje moramo uvesti simbol $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Eksponencijalni oblik kompleksnog broja glasi $z = re^{i\theta}$. Skup kompleksnih brojeva označavamo $\mathbb{C}$.

Kompleksne brojeve također možemo zapisati i u polarnom sustavu. Polarni sustav definiran je točkom O (ishodište) i polupravcem p s početkom u ishodištu. Recimo da imamo neku točku A u polarnom sustavu koja je definirana sa dvije polarne koordinate (r, θ). Koordinata r je zapravo modul kompleksnoga broja dok je koordinata θ argument kompleksnog broja što zapravo proizlazi iz trigonometrijskog odnosno eksponencijalnog zapisa kompleksnog broja. Polarni prikaz kompleksnog broja prikazan je slikom (2.1.).

Primjer 2.1. *Prikazati u trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku broj $z = 1 + \sqrt{3}i$.*

Modul kompleksnog broja:

$$r = |i + \sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2 \tag{2.1}$$

Argument kompleksnog broja:

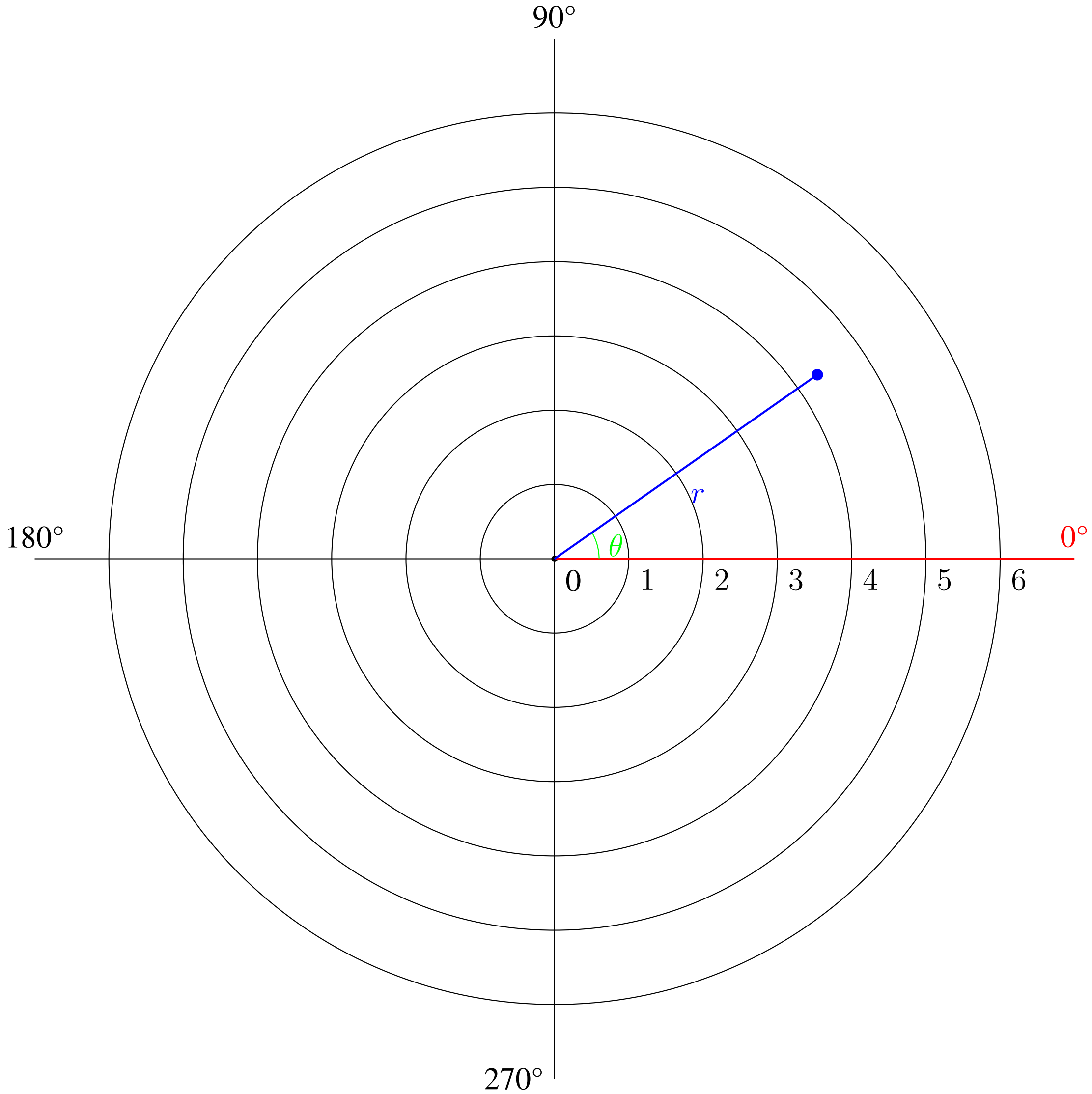
$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \tan\frac{\pi}{6}, \theta = \frac{\pi}{6} \tag{2.2}$$

Trigonometrijski zapis kompleksnog broja:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \tag{2.3}$$

Eksponencijalni zapis kompleksnog broja:

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \tag{2.4}$$



Slika 2.1. Polarni sustav, izvor: autor.

2.2. Osnovne operacije kompleksnih brojeva

Uzmimo za primjer dva kompleksna broja $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Zbroj tih dvaju brojeva definira se sa:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \tag{2.5}$$

Množenje dvaju kompleksnih brojeva definira se s:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2). \tag{2.6}$$

Oduzimanje kompleksnih brojeva definira se kao zbrajanje sa negativnim brojem $-z = -x - yi$. Stoga za oduzimanje kompleksnih brojeva vrijedi sljedeći izraz:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \tag{2.7}$$

Kod kompleksnih brojeva postoji i konjugacija. Konjugirana vrijednost kompleksnog broja $z = x + yi$ iznosi $\overline{z} = x - yi$. Kažemo da je broj $\overline{z}$ konjugirana vrijednost broja z i obrnuto. Stoga za brojeve $\overline{z}$ i z kažemo da čine par kompleksno-konjugiranih brojeva.

2.3. Potenciranje i korjenovanje kompleksnih brojeva

Ranije je napisano da je $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, stoga ako je:

$$\begin{aligned} &(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi + i(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi) \\ &= \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi) \end{aligned} \tag{2.8}$$

dobivamo da je $e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$. Iz ovoga se može zaključiti da vrijedi formula koju nazivamo de Moivreova formula koja glasi:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta). \tag{2.9}$$

Potenciranje kompleksnih brojeva računa se prema formuli:

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)), \tag{2.10}$$

gdje je $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ trigonometrijski zapis kompleksnog broja. Analogno tome možemo napisati izraz za računanje n-tog korjena komplaksnog broja:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), k = 0, 1, ..., n-1 \tag{2.11}$$

Primjer 2.2. *Izračunati:* $(\sqrt{3} + i)^{120}$

Riješenje.

Za početak potrebno je broj $z = \sqrt{3} + i$ *zapisati u trigonometrijskom obliku:*

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{3+1} = 2 \\ \tan\theta &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}, \theta = \frac{\pi}{6} \\ z &= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Sada kada smo broj z zapisali u trigonometrijskom obliku možemo primjeniti formulu za potenciranje kompleksnog broja (2.4):

$$\begin{aligned} z^{120} &= 2^{120}\left(\cos\left(120 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(120 \cdot \frac{\pi}{6}\right)\right) \\ z^{120} &= 2^{120}(\cos(20\pi) + i\sin(20\pi)). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Znamo da je $\cos(20\pi) + i\sin(20\pi) = 1$ *te dobivamo riješenje:*

$$(\sqrt{3}+i)^{120} = 2^{120}. \tag{2.14}$$

2.4. Kompleksna ravnina

Kompleksna ravnina ili kako je dosta često nazivamo Gaussova ravnina slična je kartezijevoj na način da x os u kartezijevoj ravnini predstavlja realnu os u kompleksnoj, dok y os u kartezijevoj predstavlja imaginarnu os u kompleksnoj ravnini. Na taj način točka $z = x + iy$ u Gaussovoj ravnini bila bi točka (x, y) u kartezijevom koordinatnom sustavu.
Modul kompleksnog broja $|z|$ u kompleksnoj ravnini jednak je udaljensti ishodišta i točke (x, y). Stoga udaljenost između dvaju točaka u kompleksnoj ravnini možemo izračunati prema izrazu:

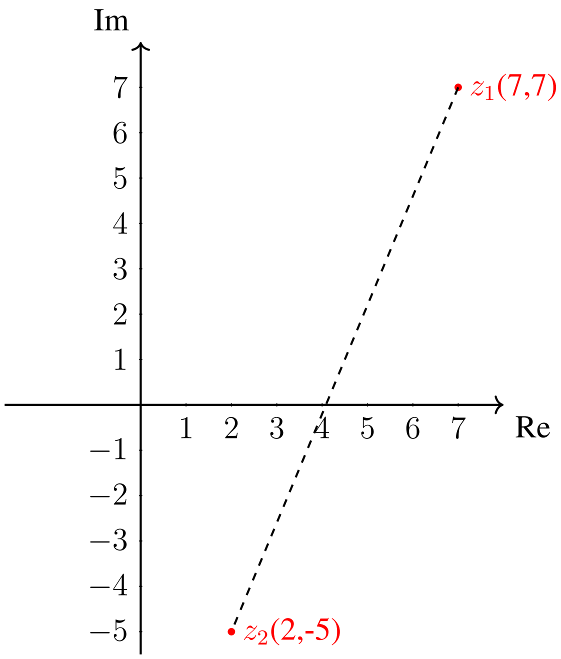
$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \tag{2.15}$$

gdje je $z_1 = x_1 + iy_1$ prvi kompleksni broj, a $z_2 = x_2 + iy_2$ je drugi kompleksni broj.

Primjer 2.3. *Izračunati udaljenost između dva kompleksna broja:* $z_1 = 7 + 7i$ *i* $z_2 = 2 - 5i$.

Riješenje. Udaljenost dvaju točaka možemo izračunati korištenjem formule (3.1).

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \\ &= \sqrt{(7-2)^2 + (7-(-5))^2} \\ &= \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13 \end{aligned} \tag{2.16}$$



Slika 2.2. Prikaz točaka u kompleksnom sustavu, izvor: autor.

3. Nizovi i redovi kompleksnih brojeva

Nizovi brojeva su uređeni skupovi brojeva u kojima svaki broj slijedi određen zakon ili pravilo, a svaki član ima svoj indeks, odnosno redni broj. Redovi brojeva predstavljaju zbroj elemenata nekog niza, pri čemu se broj članova niza može protezati u beskonačnost. Ako zbroj članova niza teži određenoj konačnoj vrijednosti kada broj članova raste, red je konvergentan; u suprotnom, red je divergentan.[1][2]

3.1. Nizovi kompleksnih brojeva

Općenita definicija niza je skup brojeva poredanih prema nekom pravilu. Nizove kompleksnih brojeva obično označavamo sa z_N te takvi nizovi imaju vrijednosti u skupu $\mathbb{C}$.

Konvergencija kompleksnih nizova definira se jednako kao i za realne nizove. Za niz z_N kažemo da konvengira prema broju z_0 ako se u svakoj okolini toga broja nalaze svi članovi toga niza, izuzev možda njih konačno mnogo.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N_0 \in \mathbb{N})(\forall N \in \mathbb{N}), N > N_0 \Rightarrow |z_N - z_0| < \epsilon \tag{3.1}$$

Broj z_0 nazivamo limoesom niza i pišemo:

$$z_0 = \lim_{N \to \infty} z_N. \tag{3.2}$$

Konvergenciju niza kompleksnih brojeva možemo gledati i kao konvergenciju dvaju realnih nizova tako da posebno gledamo realni i imaginarni dio. Ako kompleksni niz zapišemo kao $z_N = x_N + iy_N$ tada niz z_N konvergira ako konvergiraju i realni nizovi x_N i y_N te tada vrijedi $\lim z_N = \lim x_N + i \lim y_N$.

3.2. Redovi kompleksnih brojeva

Red je općenito prema definiciji suma beskonačno mnogo članova nekoga niza. Najčešća oznaka komplesnoga reda je $\sum_{N=1}^{\infty} z_N$. Kompleksni red je konvergentan ako limes parcijalnih suma ima konačnu vrijednost gdje je N-ta parcijalna suma:

$$S_N = z_1 + ... + z_N S = \lim_{N \to \infty} S_N \tag{3.3}$$

te se takav limes onda zove suma reda i pišemo:

$$S = \sum_{N=1}^{\infty} z_N \tag{3.4}$$

Ako red pozitivnih brojeva $\sum_{N=1}^{\infty}|z_N|$ konvergira tada za taj red kažemo da je apsolutno konvergentan. Za redove koji konvergiraju, ali ne konvergiraju apsolutno kažemo da konvergiraju uvjetno. Promatramo li kompleksni niz $z_N = x_N + iy_N$, tada red $\sum_{N=1}^{\infty}|z_N|$ konvergira ako konvergiraju redovi $\sum_{N=1}^{\infty}|x_N|$ i $\sum_{N=1}^{\infty}|y_N|$ te vrijedi:

$$\sum_{N=1}^{\infty} z_N = \sum_{N=1}^{\infty} x_N + i\sum_{N=1}^{\infty} z_N. \tag{3.5}$$

Nužan uvjet za konvergenciju reda je da limes toga niza jednak nuli $\lim_{N\to\infty} z_N = 0$. Ako je limes reda različit od nule $\lim z_N \neq 0$ onda za taj red kažemo da divergira. Kod ispitivanja apsolutne konvergencije najčešće koristimo kriterije konvergencije. U nastavku ovog poglavlja dajemo pregled različitih kriterija konvergencije.

3.2.1. D'Almbertov kriterij konvergencije

Ako je z_N niz kompleksnih brojeva tada D'Almbertov kriterij konvergencije glasi:

$$L = \lim_{N\to\infty}\left|\frac{z_{N+1}}{z_N}\right|. \tag{3.6}$$

Kriterij kaže da red apsolutno konvergira ako je limes (4.5) strogo manji od jedan ($L < 1$). Za slučaj da je limes (4.5) ($L > 1$) strogo veći od jedan tada red divergira u ovome slučaju red će divergirati čak i ako je limes $+\infty$. U slučaju da je limes (4.5) ($L = 1$) jednako jedan tada nam ovaj kriterij ne donosi odluku.

3.2.2. Cauchyjev kriterij

Nis kompleksnih brojeva z_N Cauchyjev kriterij glasi:

$$L = \lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{|z_N|}. \tag{3.7}$$

Ovaj kriterij kaže da kada je vrijednost limesa (4.6) strogo veća od jedan tada će prema Cauchjevu kriteriju red divergirati ($L > 1$), dok za vrijednost limesa strogo manje od jedan red će apsolutno konvergirati ($L < 1$). Za limes jedako jedan Cauchyjev kriterij ne daje odluku ($L = 1$).

3.2.3. Usporedni kriterij

Neka su redovi $\sum_{N=1}^{\infty} z_N$ i $\sum_{N=1}^{\infty} a_N$ redovi sa pozitivnim članovima i neka je sljedeći limes:

$$L = \lim_{N\to\infty}\frac{z_N}{a_N} \in [0, +\infty]. \tag{3.8}$$

Ako je $L \in [0, +\infty\rangle$, tada će red $\sum_{N=1}^{\infty} z_N$ konvergirati ako konvergira i red $\sum_{N=1}^{\infty} a_N$ te ako je $L \in \langle 0, +\infty]$, onda će red će red $\sum_{N=1}^{\infty} z_N$ divergirati ako divergira i red $\sum_{N=1}^{\infty} a_N$.

3.2.4. Raabeov kriterij

Ako je $\sum_{N=1}^{\infty} z_N$ red sa pozitivnim čanovima tada prema Raabeovu kriteriju trebamo izračunati sljedeći limes:

$$L = \lim_{N\to\infty} N\left(\left| \frac{z_N}{z_N + 1} \right| - 1 \right). \tag{3.9}$$

U slučaju da je vrijednost limesa veća od jedan $(L > 1)$ tada red apsolutno konvergira, dok ako je limes strogo manje od jedan $(L < 1)$ tada red divergira.
Raabeov kriterij se najčešće koristi u slučaju kad nam D'Alambertov kriterij ne donosi odluku.

3.2.5. Gaussov kriterij

Ako se $\frac{z_N}{z_{N+1}}$ zapiše u obliku:

$$\frac{z_N}{z_{N+1}} = \alpha + \frac{\beta}{N} + \frac{\gamma_N}{N^2} \tag{3.10}$$

gdje su α i β brojevi neovisni o n (konstante). Red apsolutno konvergira ako je $\alpha > 1$ ili pak ako je $\alpha = 1$ i $\beta > 1$, dok će za $\alpha < 1$ ili $\alpha = 1$ i $\beta \leq 1$ red će divergirati.

Primjer 3.1. *Dokazati da navedeni red apsolutno konvergira koristeći Gaussov kriterij (4.8).*

$$\sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{(2N-1)!!z}{(2N)!!} \right)^2, |z| < 1 \tag{3.11}$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\left| \frac{z_N}{z_N + 1} \right| &= \left(\frac{2N+2}{(2N+1)|z|} \right)^2 \\
&= \frac{1}{|z|^2} \left(1 + \frac{1}{2N+1} \right)^2 \\
&= \frac{1}{|z|^2} \left(1 + \frac{2}{2N+1} + \frac{1}{(2N+1)^2} \right) \\
&= \alpha + \frac{\beta}{N} + \frac{\gamma_N}{N^2} \\
\alpha &= \frac{1}{|z|^2}, \beta = \frac{1}{|z|^2}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Kako nam je $\alpha < 1$, prema Gaussovom kriteriju ovaj red divergira.

4. Redovi potencija

Redovi potencija su beskonačni zbrojevi u kojima se članovi izražavaju kao potencije varijable. Redovi potencija omogućuju aproksimaciju funkcija u obliku polinoma unutar određenog intervala konvergencije. Primjenjuju se u raznim područjima matematike i inženjerstva za modeliranje, aproksimaciju funkcija te analizu diferencijalnih jednadžbi. Taylorov red je primjer reda potencija koji se koristi za razvoj funkcija oko određene točke.[1][2][3]

Red potencija oko točke z_0 izgleda ovako:

$$\sum_{N=0}^{\infty} a_N(z-z_0)^N = a_0 + a_1(z-z_0) + ... \tag{4.1}$$

Brojevi $a_0, a_1, ...a_N...$ nazivaju se koeficijentima reda potencije. Ako red konvergira za neki $z = z_1 \in \mathbb{C}$ tada on apsolutno konvergira za svaki $z \in \mathbb{C}$ za koji vrijedi $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$. Ako red divergira $z = z_1 \in \mathbb{C}$ tada on divergira za svaki $z \in \mathbb{C}$ za koji vrijedi $|z-z_0| > |z_1 - z_0|$.

Teorem 4.1. *Neka je zadan red potencija $\sum_{N=0}^{\infty} a_N(z-z_0)^N$ i neka je*

$$r = \frac{1}{\limsup_{N\to\infty} \sqrt[N]{|a_N|}} \tag{4.2}$$

pri čemu je $r = 0$ ako je $\limsup_{N\to\infty} \sqrt[N]{|a_N|} = +\infty$ odnosno $r = +\infty$ ako je $\limsup_{N\to\infty} \sqrt[N]{|a_N|} = 0$. Tada vrijedi sljedeće:

1. *Red $\sum_{N=0}^{\infty} a_N(z-z_0)^N$ apsolutno konvergira na krugu $K(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < r\}$.*
2. *Red $\sum_{N=0}^{\infty} a_N(z-z_0)^N$ divergira za svaki $z \in \mathbb{C}$ za koji je $|z-z_0| > r$.*

Broj r zove se radijus konvergencije, a $K(z_0, r)$ krug konvergencije reda.

Radijus konvergencije reda moguće je računati i po formuli:

$$r = \lim_{N\to\infty} \left| \frac{a_N}{a_{N+1}} \right|. \tag{4.3}$$

Primjer 4.1. *Odrediti radijus konvergencije reda $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{N!}{N^N} z^N$.*

Koristiti ćemo formulu (4.2).

$$\frac{a_N}{a_{N+1}} = \frac{\frac{N!}{N^N}}{\frac{(N+1)!}{(N+1)^{N+1}}} = \frac{(N+1)^{N+1}}{N^N \cdot (N+1)} \tag{4.4}$$

$$= \left(\frac{N+1}{N}\right)^N = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N \tag{4.5}$$

$$r = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = e \tag{4.6}$$

Dakle, radijus konvergencije reda je $r = e$.

5. Taylorov red

Taylorov red omogućava aproksimaciju funkcije pomoću beskonačnog niza polinoma, izraženih kao zbroj derivacija funkcije u nekoj točki. Taylorov red je posebno koristan kada je funkcija složena i teško je direktno računati njezine vrijednosti. Primjenjuje se u fizici, inženjerstvu i drugim područjima za rješavanje nelinearnih jednadžbi i aproksimiranju funkcija.[9][10]

Ako je funkcija f analitička u okolini točke x_0, tada se ona može prikazati pomoću Taylorovog reda oko točke x_0.

$$f(x) = \sum_{N=0}^{\infty} a_N (x - x_0)^N. \tag{5.1}$$

Koeficijenti a_N se računaju formulom:

$$a_N = \frac{1}{N!} f^{(N)}(x_0). \tag{5.2}$$

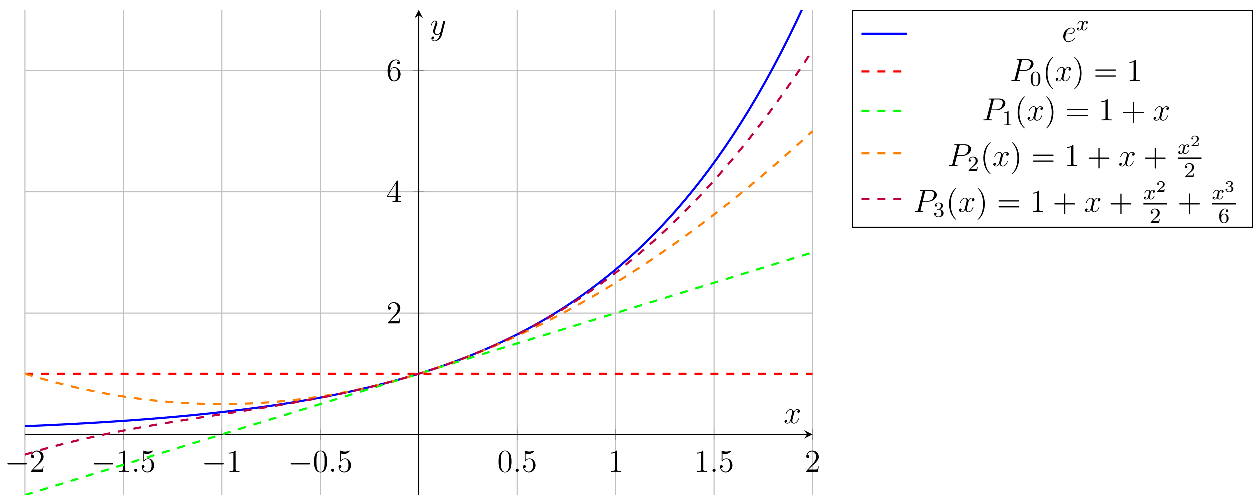
5.1. Taylorov polinom i pripadajuća greška

Taylorov polinom je suma prvih nekoliko članova Taylorovog reda i može se koristiti za aproksimaciju funkcije. Ako je funkcija $f(x)$ derivabilna n puta onda tu funkciju možemo aproksimirati pomoću Taylorovog polinoma n tog stupnja koji je definiran s:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n. \tag{5.3}$$

Međutim pri aproksimiranju funkcije Taylorovim polinomom javlja se greška u odnosu na orginalnu funkciju. Tu grešku moguće je smanjiti povećanjem stupnja Taylorovog polinoma. U nastavku ćemo vidjet primjer grafa funkcije $f(x)$ te prvih nekoliko stupnjeva Taylorovog polinoma iste.

Primjer 5.1. *Na slici (5.1.) vidimo graf funkcije e^x te prva četiri Taylorova polinoma navedene funkcije.*



Slika 5.1. Slika prikazuje graf zadane funkcije i prvih nekoliko Taylororvih polinoma, izvor: autor

Grešku odnosno ostatak Taylorovog polinoma četvertog stupnja u odnosu na orginalnu funkciju f koja ima $n+1$ derivaciju moguće je izračunati pomoću Cauchyjevog ostatka:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{5.4}$$

gdje je ξ neka točka između a i x.

Primjer 5.2. *Primjenom Taylorovog polinoma aproksimirati ćemo funkciju $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiranu kao $f(x) = \sqrt{x}$ i odrediti pripadnu grešku, kako bismo procijenili vrijednost $f(5)$. Koristiti ćemo $a = 4$.*

Za početak trebamo izračunati derivacije funkcije f(x)=$\sqrt{x}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
f''(x) &= -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \\
f'''(x) &= \frac{3}{8\sqrt{x^5}} \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{15}{16\sqrt{x^7}} \\
f^{(5)}(x) &= \frac{105}{32\sqrt{x^9}}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Zatim računamo vrijednost derivacija u točki $a = 4$:

$$
\begin{aligned}
f(4) &= 2 \\
f'(4) &= \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} \\
f''(4) &= -\frac{1}{4 \cdot \sqrt{4^3}} = -\frac{1}{32} \\
f'''(4) &= \frac{3}{8\sqrt{4^5}} = \frac{3}{256} \\
f^{(4)}(4) &= -\frac{15}{16\sqrt{x^7}} = -\frac{15}{2048} \\
f^{(5)}(4) &= \frac{105}{32\sqrt{4^9}} = \frac{105}{16384}.
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Na kraju koristeći formulu (6.3) dobivamo:

$$
P_4(a) = f(4) + f'(4)(a-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \frac{f'''(4)}{3!}(a-4)^3 + \frac{f^{(4)}(4)}{4!}(a-4)^4 \tag{5.7}
$$

$$
P_4(5) = 2 + \frac{1}{4}(5-4) - \frac{1}{64}(5-4)^2 + \frac{1}{1536}(5-4)^3 - \frac{5}{4096}(5-4)^4 \approx 2.234. \tag{5.8}
$$

Da bismo izračunali grešku u aproksimaciji pomoću Taylorovog polinoma četvrtog stupnja, koristimo Cauchyjev razmak(6.4):

$$
R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-4)^5
$$

$$
R_4(5) \leq \frac{f^{(5)}(4)}{5!} \cdot (5-4)^5 = \frac{\frac{105}{16384}}{120} \cdot 1^5 = \frac{105}{1966080} \approx 5.34 \times 10^{-5}.
$$

5.2. Radijus konvergencije

Radijus konvergencije R je najveće odstupanje od točke a za koje Taylorov red konvergira prema funkciji $f(x)$ u olonini neke točke a. Taylorov red će konvergirati za sve točke x koje zadovoljavaju izraz:

$$
|x-a| < R. \tag{5.9}
$$

Izvan tog intervala, Taylorov red može divergirati ili konvergirati prema nekoj drugoj funkciji koja nije $f(x)$.

Radijus konvergencije može se izračunati koristeći Cauchy-Hadamardovu formulu koju smo spomenuli u prijašnjim poglavljima.

5.3. Taylorovi redovi osnovnih funkcija

Taylorov red predstavlja metodu za aproksimaciju funkcije pomoću beskonačnog zbroja polinoma. Svaka dovoljno glatka funkcija u okolini neke točke može biti aproksimirana polinomom određenog stupnja te što je veći stupanj polinoma to je veća točnost aorpksimacija. Stoga je ova metoda izrazito korisna jer možemo složenu funkciju prikazati pomoću reda te tako uvelike olakšati računaje.
Taylorov red funkcije e^x oko $x = 0$ glasi:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{5.10}$$

$$e^0 = 1 \tag{5.11}$$

Ako funkciju deriviramo dobijemo:

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x. \tag{5.12}$$

Derivacija funkcije e^x se ne mjenja bez obzira koliko ju puta derivilrali, stoga su svi Taylorovi koeficijenti jednaki jedinici.

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)(x-0) + \frac{1}{2!}f''(0)(x-0)^2 + \cdots + f^{(n)}(0)(x-0)^n\frac{1}{n}x^n \tag{5.13}$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n \tag{5.14}$$

Na kraju ako izraz (5.14) napišemo u obliku sume dobili smo Taylorov red funkcije e^x u okolini točke $x = 0$.

Da bismo odredili radijus konvergencije ovog reda, koristiti ćemo Cauchy-Hadamardovu formulu:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{5.15}$$

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \tag{5.16}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0 \tag{5.17}$$

Na kraju dobivamo da je radijus konvergencije:

$$R = \frac{1}{0} = \infty. \tag{5.18}$$

U nastavku su nabrojani Taylorovi redovi osnovnih funkcija oko $a = 0$.

$$\sin(x) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N}{(2N+1)!} x^{2N+1} \tag{5.19}$$

$$\cos(x) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N}{(2N)!} x^{2N} \tag{5.20}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^{N-1}}{N} x^n, \quad |x| < 1 \tag{5.21}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{N=0}^{\infty} \binom{\alpha}{N} x^N \tag{5.22}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{N=0}^{\infty} x^N \tag{5.23}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{N=0}^{\infty} (-1)^N x^N \tag{5.24}$$

Primjer 5.3. *Razviti u Taylorov red u okolini točke $a = 0$ funkciju $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$.*

$$f(x) = \frac{1}{4-x^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{N=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{4}\right)^N = \sum_{N=0}^{\infty}\frac{x^{2N}}{4^{N+1}} \tag{5.25}$$

5.4. Primjena Taylorovog reda u inženjerstvu

Taylorov red ima brojne primjene u inženjerstvu, gdje se koristi za aproksimaciju funkcija koje se ne mogu jednostavno izraziti i pri rješavanju kompleksnih problema. Koristan je i za linearnu aproksimaciju nelinearnih sustava oko neke radne točke. U obradi signala koristimo ga za analizu i dizajniranje filtera. U analizi električnih krugova, Taylorov red se može koristiti za aproksimaciju prijenosnih funkcija i u analizi frekvencijskih odziva. Taylorov red se često koristi za aproksimaciju trigonometrijskih funkcija što je posebno korisno u inženjerskim proračunima kada su kutovi vrlo mali. Kada su kutevi vrlo mali vrijede sljedeći izrazi:

Taylorov red za sinus izgleda ovako:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \tag{5.26}$$

Za male vrijednosti x, možemo aproksimirati korištenjem Taylorovog polinoma prvog stupnja:

$$\sin(x) \approx x \tag{5.27}$$

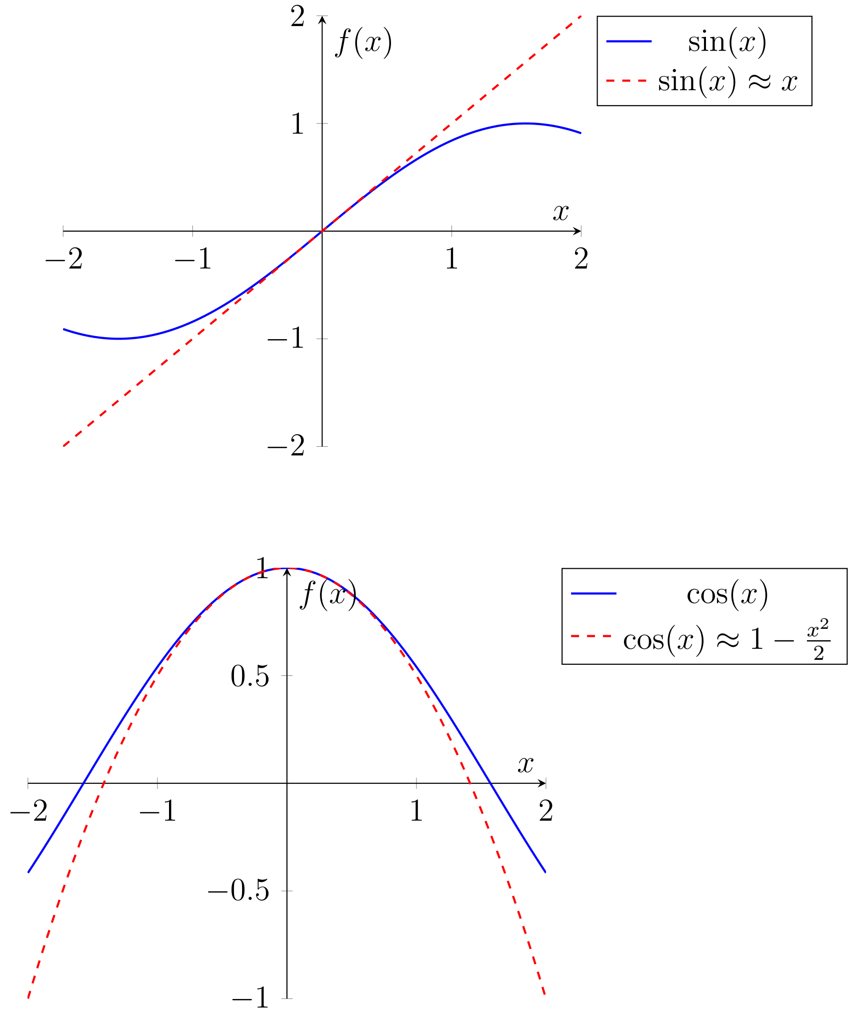
Taylorov red za kosinus glasi ovako:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \tag{5.28}$$

Za male vrijednosti x, aproksimacija Taylorovim polinomom drugog stupnja je:

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} \tag{5.29}$$

U nastavku na slici (5.2.) možemo vidjeti grafove orginalnih funkcija sinusa i kosinusa te njihove aproksimacije za male kuteve gdje možemo primjetiti da je graška koja nastaje u aproksimaciji kuteva oko nule vrlo mala.



Slika 5.2. Slika nam prikazuje funkcije sinusa i kosinusa te njihove aproksimacije Taylorovim polinomom, Izvor: autor

Primjer 5.4. *U ovom primjeru vidjeti ćemo primjenu Taylorovog reda kod jednostavnog matematičkog njihala.*

Jednadžba gibanja za jednostavno matematičko njihalo je dana kao:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0. \tag{5.30}$$

Za male kutove ($\theta \to 0$), možemo koristiti aproksimaciju $\sin(\theta) \approx \theta$, što dovodi do linearnog oblika jednadžbe:

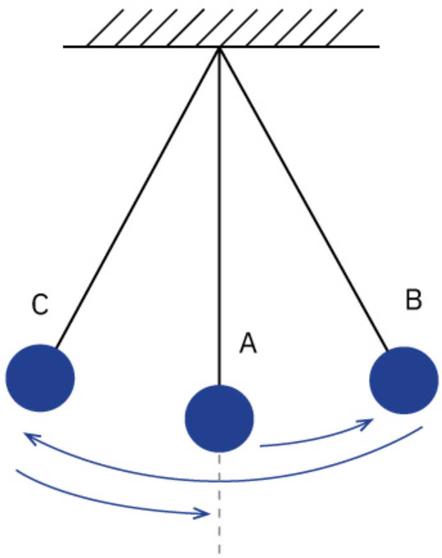
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0. \tag{5.31}$$

Rješenje ove diferencijalne jednadžbe je:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right). \tag{5.32}$$

Period jednostavnog matematičkog njihala je:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \tag{5.33}$$



Slika 5.3. Matematičko njihalo, Izvor:[11]

6. Fourierov red

Fourierov red je način da se periodnične funkcije napišu preko zbroja sinusa i kosinusa. Ova metoda se najčešće koristi u obradi signala i kao metoda rješavanja diferencijalnih jednadžbi. Fourierov red može se koristiti i za neperiodnične funkcije tako što ih pretvorimo u periodnične funkcije no više o tome reći ćemo u nastavku. Za početak ćemo definirati Fourierov red periodičnih funkcija.[4][5][6][7][8]

Definicija 6.1. *Za funkciju kažemo da je periodična s periodom $T > 0$ ako je za svaki x iz domene funkcije $f(x)$ i $f(x+T)$ u domeni i vrijedi $f(x+T) = f(x)$. T se naziva temeljnim periodom funkcije $f(x)$.*

6.1. Trigonometriski Fourierov red

Recimo da je naša funkcije $f(x)$ periodnična sa periodom $T = 2\pi$ tada se njen Fourierov red može definirati kao:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_0 nx) + b_n \sin(\omega_0 nx)) \tag{6.1}$$

gdje su: a_0, a_n i b_n koeficjenti koji se određuju pomoću ispod navedenih formula:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx. \tag{6.2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \tag{6.3}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx, \tag{6.4}$$

Skalarni umnožak funkcija f i g, gdje su $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, definiran je:

$$\langle f, g \rangle = \int_{a}^{b} f(x)g(x)\, dx. \tag{6.5}$$

Prije samog izvoda Fourierovih koeficijenata potrebno je definirati da su funkcije iz

skupa $\{\cos(nx), \sin(nx) \mid n \in \mathbb{N}\}$ međusobno okomite odnosno za njih vrijede sljedeći izrazi:

$$\langle \sin(nx), \cos(mx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx)\, dx = 0, \tag{6.6}$$

$$\langle \cos(nx), \cos(mx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = 0, \tag{6.7}$$

$$\langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = 0. \tag{6.8}$$

Za funkcije iz skupa $\{\cos(nx), \sin(nx) \mid n \in \mathbb{N}\}$ također vrjede izrazi:

$$\langle \sin(nx), \sin(nx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx = \pi, \tag{6.9}$$

$$\langle \cos(nx), \cos(nx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx = \pi. \tag{6.10}$$

Nakon što smo definirali skalarni umnožak funkcija i izraze ua međusobno ortogonalne funkcije, izvod koeficijenta a_0 glasi:

$$\begin{aligned} \langle f(x), \cos(0x) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \langle \cos(nx), \cos(0x) \rangle + b_n \langle \sin(nx), \cos(0x) \rangle) = \\ a_0 \langle \cos(0x), \cos(0x) \rangle = a_0 \cdot 2\pi, \\ a_0 = \frac{1}{2\pi} \langle f(x), \cos(0x) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Izvod koeficijenta a_n glasi:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \langle \cos(nx), \cos(mx) \rangle + b_n \langle \sin(nx), \cos(mx) \rangle) = \\ a_m \langle \cos(mx), \cos(mx) \rangle = a_m \pi, \\ a_n = \frac{1}{\pi} \langle f(x), \cos(nx) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Izvod keficijenata b_n glasi:

$$\begin{aligned} \langle f(x), \sin(mx) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \langle \cos(nx), \sin(mx) \rangle + b_n \langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle) = \\ b_m \langle \sin(mx), \sin(mx) \rangle = b_m \pi, \\ b_n = \frac{1}{\pi} \langle f(x), \sin(nx) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, \quad n > 0. \end{aligned} \tag{6.13}$$

6.1.1. Trigonometriski Fourierov red za parne funkcije

Kod izračunavanja koeficjenata: a_0, a_n i b_n uvelike nam pomaže ako znamo da li je funkcija parna ili neparna. Za parne funckije vrijedi da je:

$$f(-x) = f(x) \tag{6.14}$$

Funkcija $\sin(nx)$ je neparna funkcija, što znači da:

$$\sin(-nx) = -\sin(nx) \tag{6.15}$$

Korištenjem simetrije $f(x)$ i $\sin(nx)$:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx\right] \tag{6.16}$$

Zamenjujući x sa $-x$ u prvom integralu dobivamo:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx\right] \tag{6.17}$$

$$I = \int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \tag{6.18}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-I + I\right] = 0 \tag{6.19}$$

Dakle, za parne funkcije, koeficijenti b_n su uvijek jednaki nuli. Koeficijent a_n također možemo pojednostaviti za parne funkcije. Zbog svojstva simetrije integral možemo računati na intervalu $[0, \pi]$ te ga pomnožiti sa dvam, tada integral glasi:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad n \geq 0. \tag{6.20}$$

6.1.2. Trigonometriski Fourierov red za neparne funkcije

Neparne funkcije su one za koje vrijedi:

$$f(-x) = -f(x). \tag{6.21}$$

Kod neparnih funkcija koeficijenti a_0 i a_n su jednaki nuli što ćemo i dokazati.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \tag{6.22}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\, dx \right] \tag{6.23}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[-\int_{0}^{\pi} f(x)\, dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\, dx \right] \tag{6.24}$$

$$I = \int_{0}^{\pi} f(x)\, dx \tag{6.25}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[-I + I \right] = 0. \tag{6.26}$$

Koeficijent a_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx. \tag{6.27}$$

Kada je $f(x)$ neparna i $\cos(nx)$ je parna funkcija, njihov produkt je neparna funkcija:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} f(x) \cos(nx)\, dx + \int_{0}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \right] \tag{6.28}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{0}^{\pi} -f(-x) \cos(-nx)\, dx + \int_{0}^{\pi} f(-x) \cos(-nx)\, dx \right] \tag{6.29}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{0}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx - \int_{0}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \right] \tag{6.30}$$

$$I = \int_{0}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \tag{6.31}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \left[I - I \right] = 0. \tag{6.32}$$

Dakle, a_n je nula za neparne funkcije.

6.1.3. Trigonometrijski zapis Fourierovog reda za funkiju s periodom različitim od 2π

Periodične funkcije ne moraju nužno imati temeljni period $T = 2\pi$ i biti definirane na intervalu $[-\pi, \pi]$. Funkcje kojima je temeljni period različit od $T = 2\pi$ definiramo na intervalu od $[-L, L]$ te je njihov temeljni period $T = 2L$. Takve funkcije definiramo Fourierovim redom koji glasi:

$$f(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\right). \tag{6.33}$$

Koeficijente takvog Fourierovog red računamo navedenim izrazima:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y)\, dy, \tag{6.34}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\, dy, \tag{6.35}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\, dy. \tag{6.36}$$

6.2. Fourierov polinom

Polinom Fourierovog reda je suma sinusnih i kosinusnih funkcija koje aproksimiraju periodičnu funkciju do određenog reda N. Fourierov polinom je zapravo nešto što se koristi više nego Fourierov red jer funkciju možemo aproksimirati do određenog red a ne na beskonacno mnogo redova. Za funkciju $f(x)$ Fourierov polinom definiran je:

$$f_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_0 x)\right). \tag{6.37}$$

Primjer 6.1. *Aproksimirajmo funkciju $f(x) = e^{-x/2}$ koja je periodična $f(x) = f(x+\pi)$ na intervalu $[0, \pi]$ koristeći trigonometriski fourierov red.*

Prvo moramo izračunati koficijente a_0, a_n i b_n:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-x/2}\, dx \tag{6.38}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[-2e^{-x/2}\right]_0^{\pi} = \frac{2 - 2e^{-\pi/2}}{\pi} = 0.504 \tag{6.39}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-x/2} \cos(2nx)\, dx \tag{6.40}$$

Nakon rješavanja integrala dobili smo:

$$a_n = \frac{4e^{-\pi/2}\left(e^{\pi/2} - \cos(2n\pi) + 4n\sin(2n\pi)\right)}{(1+16n^2)\pi}. \tag{6.41}$$

Primjetiomo da je izraz $\cos(2n\pi)$ *za svaki* n *jednak* 1 *te da je* $4n\sin(2n\pi)$ *za svaki* n *jednak* 0. *Sada izraz možemo pojednostaviti te na kraju dobivamo:*

$$a_n = 0.504\left(\frac{2}{1+16n^2}\right), \tag{6.42}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi e^{-x/2}\sin(2nx)\,dx \tag{6.43}$$

.

Rješavanjem integrala dobili smo:

$$b_n = -\frac{4e^{-\pi/2}\left(-4e^{\pi/2}n + 4n\cos(2n\pi) + \sin(2n\pi)\right)}{(1+16n^2)\pi} \tag{6.44}$$

zatim ćemo napraviti istu stvar kao i kod računanja koeficijenta a_n *te na kraju dobivamo:*

$$b_n = 0.504\left(\frac{8n}{1+16n^2}\right). \tag{6.45}$$

Fourierov red glasi:

$$S(x) = 0.504 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(0.504\left(\frac{2}{1+16n^2}\right)\cos(2nx) + 0.504\left(\frac{8n}{1+16n^2}\right)\cos(2nx)\right) \tag{6.46}$$

Primjer 6.2. *Korištenjem Fourierovog polinoma drugog stupnja aproksimirati funkciju iz primjera (6.1.)*

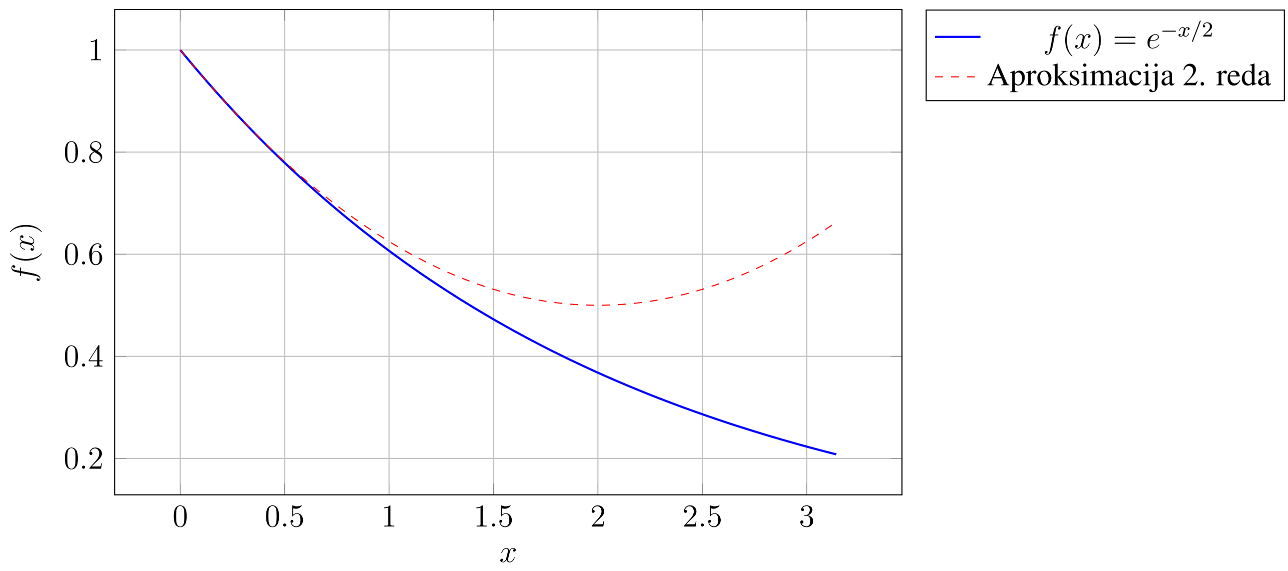
$$f(x) = 0.504 + 0.059\cos(2x) + 0.016\cos(4x) + 0.237\sin(2x) + 0.124\sin(4x). \tag{6.47}$$

6.3. Eksponencijalni Fourierov red

Do eksponencijalnog zapisa Fourierovog reda možemo doći korištenjem Eulerove formule:

$$e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx). \tag{6.48}$$

Eksponencijalni zapis Fourierovog reda periodične funkcije $f(x)$ sa temeljnim periodom $T = 2\pi$ izgleda ovako:



Slika 6.1. Funkcija $f(x) = e^{-x/2}$ i njena Fourierova aproksimacija drugog reda na području od 0 do π, izvor: autor.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{6.49}$$

gdje su Fourierovi koeficijenti c_n definirani izrazom:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx. \tag{6.50}$$

Red $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n$ konvergira ako apsolutno konvergiraju redovi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}$.

Poveznica koeficijenata Fourierovog reda u trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku dobiva se korištenjem Eulerove formule koja je navedena iznad u tekstu (6.48). U nastavku su navedene formule koje povezuju koeficijente trigonomerijskog Fourierovog reda a_n i b_n sa koeficijentima eksponencijalnog Fourierovog reda c_n

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad \text{za } n > 0 \tag{6.51}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \quad \text{za } n < 0 \tag{6.52}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \tag{6.53}$$

6.4. Kompaktni trigonometriski Fourierov red

Osim iznad definiranog trigonometriskog fourierovog reda postoji još i takozvani kompaktni trigonometrijski Fourierov red. Kako vrijedi da je:

$$a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_0 x) = D_n \cos(n\omega_0 x + \theta_n) \tag{6.54}$$

tada izraz za trigonometrijski Fourierov red možemo zapisati:

$$f(x) = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\omega_0 x + \theta_n). \tag{6.55}$$

Ovakav oblik Fourierovog reda najjednostavnije dobivamo pomoću koeficijenata klasičnog trigonometrijskog Fourierovog reda, gdje se D_n i θ_n računaju izrazima:

$$D_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \tag{6.56}$$

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right). \tag{6.57}$$

Koeficijent D_0 jenak a_0.

Primjer 6.3. *Aproksimirajmo funkciju $f(x) = e^{-x/2}$ na intervalu $[0, \pi]$ koristeći kompaktni trigonometriski Fourierov red.*

Koristiti ćemo se prethodno izračunatim koeficijentima a_0, a_n i b_n iz primjera 7.3.

$$a_0 = 0.504 \tag{6.58}$$

$$a_n = 0.504\left(\frac{2}{1+16n^2}\right) \tag{6.59}$$

$$b_n = 0.504\left(\frac{8n}{1+16n^2}\right). \tag{6.60}$$

$$D_0 = a_0 = 0.504 \tag{6.61}$$

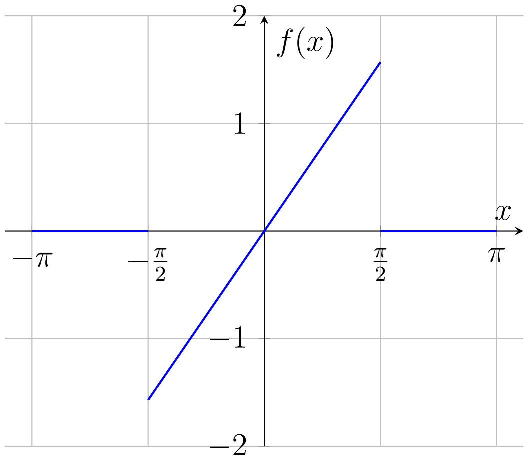
$$D_n = 0.504 \cdot \sqrt{\frac{4}{(1+16n^2)^2} + \frac{64n^2}{(1+16n^2)^2}} = 0.504 \cdot \frac{2}{\sqrt{1+16n^2}} \tag{6.62}$$

$$\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) = \tan^{-1}(-4n) = -\tan^{-1}(4n) \tag{6.63}$$

$$\begin{aligned} f(x) = 0.504 + 0.244\cos(2x - 75.96^\circ) + 0.125\cos(4x - 82.87^\circ) \\ +0.084\cos(6x - 85.24^\circ) + 0.063\cos(8x - 86.42^\circ) \end{aligned} \tag{6.64}$$

Primjer 6.4. *Funkcija $f(x)$ periodički se ponavlja $f(x+2\pi) = f(x)$ graf funkcije $f(x)$ nalazi se na slici (6.2.) i definirana je kao:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \\ x, & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases} \tag{6.65}$$



Slika 6.2. Graf funkcije $f(x)$ iz primjera (6.4.), izvor: autor.

Za ovu funkciju izračunati ćemo prva tri člana Fourierovog polinoma. Iz razloga što je zadana funkcija neparna što lako možemo uočiti na grafu, odmah smo izračunali koeficijente a_0 i a_n.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0, \tag{6.66}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = 0 \tag{6.67}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} x \sin(nx)\, dx \tag{6.68}$$

$$u = x,\ dv = \sin(nx)\, dx \quad \Rightarrow \quad du = dx,\ v = -\frac{1}{n}\cos(nx) \tag{6.69}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left(\left[-\frac{x}{n} \cos(nx) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\, dx \right) \tag{6.70}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2n} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\right) \tag{6.71}$$

$$b_n = \left(-\frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \tag{6.72}$$

Sada možemo izračunati prva tri koeficijenta i zapisati Fourierov red zadane funkcije.

$$b_1 = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} \tag{6.73}$$

$$b_2 = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi \cdot 2^2}\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cos(\pi) + \frac{2}{4\pi}\sin(\pi) \tag{6.74}$$

$$b_2 = -\frac{1}{2}\cdot(-1) + \frac{2}{4\pi}\cdot 0 = \frac{1}{2} \tag{6.75}$$

$$b_3 = -\frac{1}{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi \cdot 3^2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \tag{6.76}$$

$$b_3 = -\frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{2}{9\pi}\cdot(-1) = -\frac{2}{9\pi} \tag{6.77}$$

$$S(x) = \frac{2}{\pi}\sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{2}{9\pi}\sin(3x) + \cdots \tag{6.78}$$

S obzirom da smo koristili samo prva tri člana Fourierovog reda vidimo poveća odstupanja od orginalne funkcije pogotovo u skokovima. Zbog čega se događaju veća odstupanja u skokovima i prekidima opisat ćemo u narednim lekcijama.

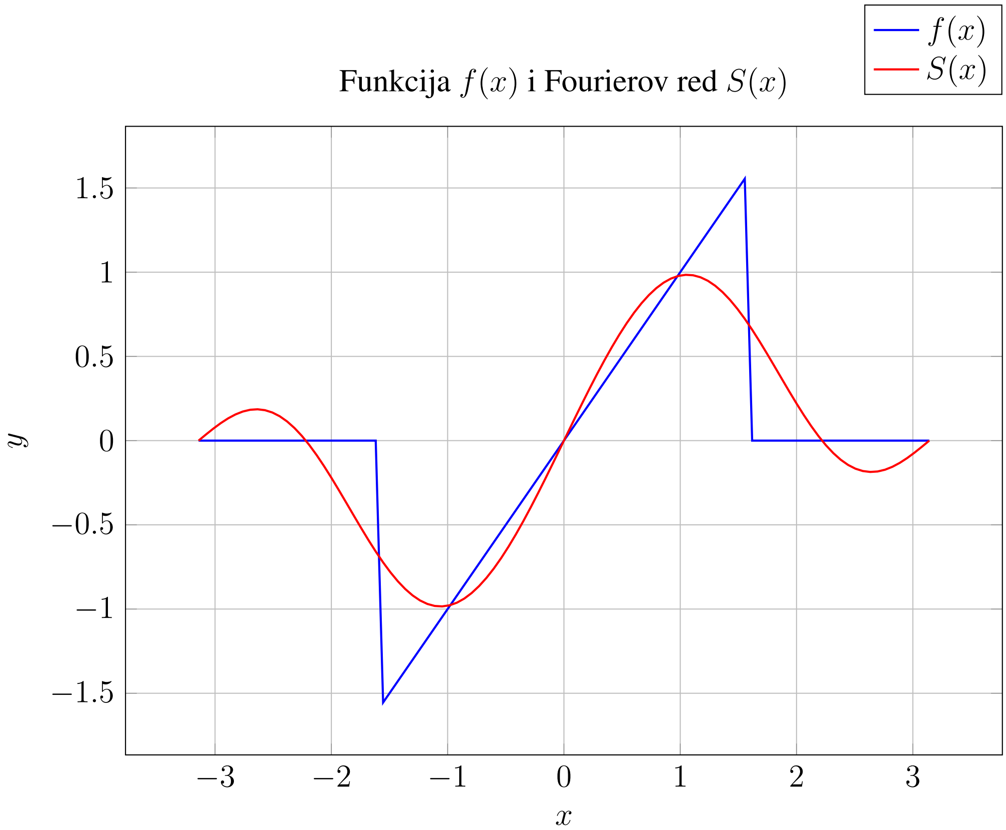
6.5. Konvergencija Fourierovog reda

Fourierov red postoji za integrabilne funkcije no da bi smo precizno definirali uvijete postojanja Fourierovog reda potrebno nam je da funkcija zadovoljava Dirichletove uvjete. Funkcija $f(x)$ zadovoljava Dirichletove uvjete na određenom intervalu ako vrijedi da je $f(x)$ po dijelovima neprekinuta ili ako su njezni prekidi prve vrste takozvani skokovi i funkcija $f(x)$ mora biti monotona. Ako su zadovoljeni Dirichletovi uvjeti tada Fourierov red $S(x)$ konvergira ka funkciji $f(x)$ u svim točkama u kojima je ona neprekidna, međutim u skokovima vrijedi:

$$S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}. \tag{6.79}$$

Primjer 6.5. *Za primjer izračunavanja Fourierovog reda u skokovima koristiti ćemo se funkcijom iz Primjera 7.4. Prisjetimo se da je funkcija iz prethodnog primjera imala skokove u točkama* $\frac{\pi}{2}$ *i* $-\frac{\pi}{2}$*. U skokovima Fourierov red računamo koristeći formulu (7.17).*

Prvo računamo vrijednost Fourierovog reda u $\frac{\pi}{2}$



Slika 6.3. Graf funkcije $f(x)$ i Fourierovog reda $S(x)$ sa prva tri člana, izvor: autor.

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)}{2} \tag{6.80}$$

S obzirom na to da je $f\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{2}$ i $f\left(\frac{\pi}{2}+0\right) = 0$, imamo:

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{\pi}{2}+0}{2} = \frac{\pi}{4} \neq f(pi/2) = \pi/2 \tag{6.81}$$

Sada računamo vrijednost Fourierovog reda u $x = -\pi/2$:

$$S\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{f\left(-\frac{\pi}{2}-0\right)+f\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)}{2} \tag{6.82}$$

S obzirom na to da je $f\left(-\frac{\pi}{2}-0\right) = -\frac{\pi}{2}$ i $f\left(-\frac{\pi}{2}+0\right) = 0$, imamo:

$$S\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\frac{\pi}{2}+0}{2} = -\frac{\pi}{4} \neq f(-\pi/2) = 0 \tag{6.83}$$

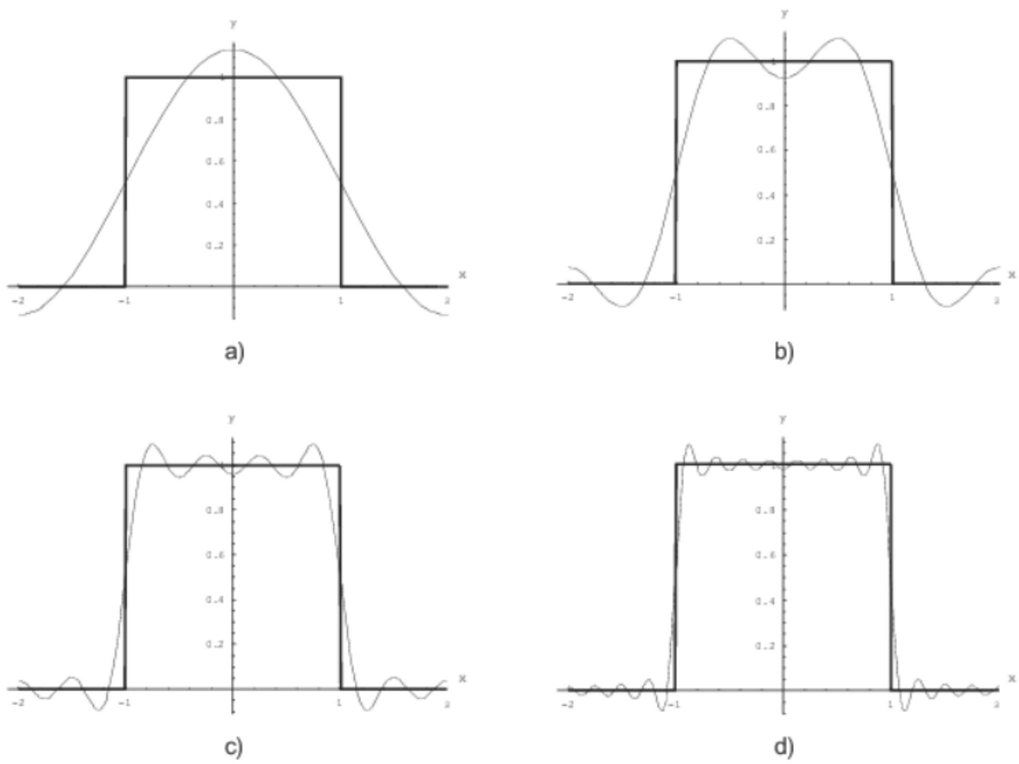
U točkama $[-\pi,\pi] \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}\}$ vrijedi $f(x) = S(x)$.

6.6. Razlike u aproksimacijama

Taylorov red se koristi za aproksimaciju funkcija koje su glatke i diferencijabilne u okolini određene točke. On razlaže funkciju u beskonačnu sumu polinoma. Fourierov red se koristi za aproksimaciju periodičnih funkcija. Fourierov red razlaže funkciju u beskonačnu sumu sinusa i kosinusa, što je posebno korisno za funkcije koje imaju prekide. Fourierova aproksimacija je pogodna za periodične funkcije na čitavom intervalu, dok je Taylorova aproksimacija lokalna i daje najbolji rezultat u blizini točke proširenja. Kod Fourierove aproksimacije za razliku od Taylorove nije potrebno računati derivacije osnovne funkcije. Taylorova aproksimacija koristi se u analizi, optimizaciji i numeričkoj matematici dok se Fourierov red Koristi u analizi signala, obradi slike, i rešavanju diferencijalnih jednadžbi.

7. Primjena Fourierrovog reda u analizi signala

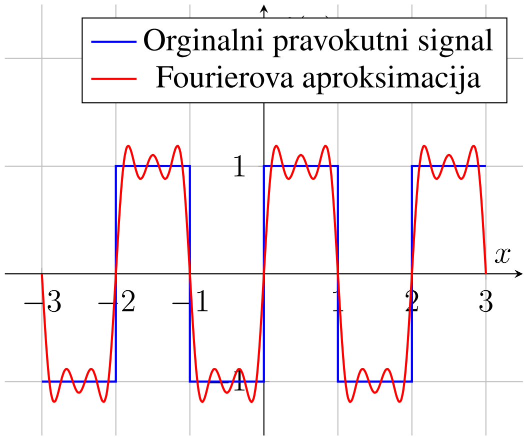
Fourierov red kao što smo već ranije definirali koristan je za aproksimaciju periodičnih funkcija koje mogu imati prekide što mu daje primjenu u analizi signala. Signali su najčeće periodične funkcije i mogu biti raznih oblika. Kako bismo sa signalom određenog oblika mogli bilo što računati za početak ga je potrebno i matematički definirati te u tu svrhu koristimo Fourierov red.



Slika 7.1. Aproksimacija pravokutne funkcije, izvor: [12].

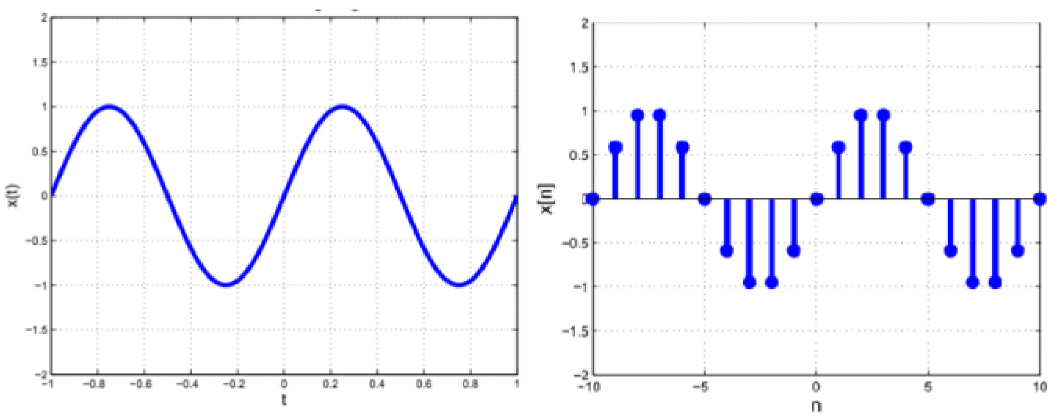
Slika (7.1.) nam prikazuje aproksimaciju takozvane pravokutne funkcije korištenjem Fourierovog reda. Na slici vidimo za istu funkciju rectangle korištenjem različitog broja harmonika: a) $n = 2$, b) $n = 4$, c) $n = 8$ i d) $n = 16$. Primjetimo što više komponenti Fourierovog reda uzmemo to je aproksimacija točnija. Naravno aproksimacija nikad neće biti u potpunosti ista kao i osnovni oblik signala. Najveći problem nastaje pri naglim promjenama signala u vremenu odnosno takozvanim skokovima i pravokutnim signalima kao što je ovakav sa slike iznad. Greška koja nastaje pri aproksimaciji pravokutnih signala naziva se Gibbsov fenomen. Gibbsov fenomen je zapravo greška na mjestima gdje se događa nagla promjena signala u vremenu te se ne može maknuti povećanjem broja harmonika. Ovakav tip greške moguće je stabilizirati na određenoj amplitudi. Još jedna od grešaka koja je česta u obradi signala je ograničena konvergencija. Fourierov red za neke funkcije koje nisu glatke može konvergirati sporo te da bi se precizno aproksimirala funkcija potreban je veći broj harmonika što je jako neefikasno i zahtijeva korištenje puno većeg broja resursa.

Na slici (7.2.) prikazan je primjer pravokutnog signala i njegove Fourierove transformacije gdje je vidljiva greška na dijelovima koji se naglo mijenjaju u vremenu.



Slika 7.2. Periodična stepenasta funkcija i njena Fourierova aproksimacija, izvor:autor.

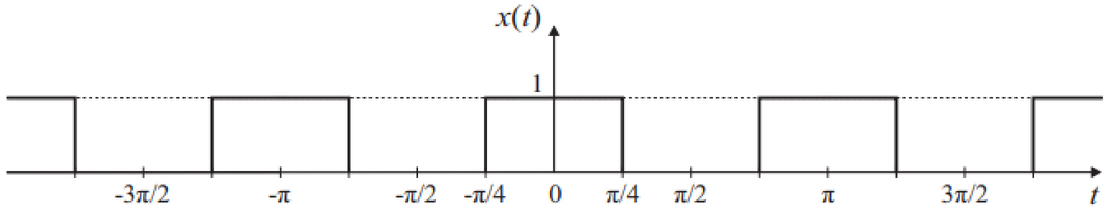
Kada koristimo Fourierov red pretpostavljamo da je signal periodičan i dostupan u cijelosti no sa realnim signalima to najčešće nije slučaj te tada može doći do curenja spektra i netočnih rezultata. Postoje dvije vrste signala kada gledamo podijelu u vremenu. To su kontinuirani i diskretni.



Slika 7.3. Prikaz kontinuiranog i diskretnog signala, izvor:[4].

Na slici (7.3.) vidimo primjer kontinuiranog signala koji se nalazi lijevo i diskretnog signala koji se nalazi desno. Postupak dobivanja diskretnog signala iz kontinuiranog naziva se diskretizacija. Tijekom postupka diskretizacije signala ako uzorci nisu dovoljno gusti može doći do pojave aliasinga. Alias efekt je stvaranje lažne frekvencijske komponente u Fourierovom redu koje u stvarnom signalu zapravo ne postoje. Ovakvu grešku možemo primijetiti tjekom slušanja glazbe. Za riješavanje ovakvog problema najvažnije je koristiti odgovarajući antialiasing filter. Iako je Fourierov red izrazito koristan u analizi signala treba paziti da ne dođe do nekih od mogućih grešaka zbog ograničenja koje ima Fourierov red.

Primjer 7.1. *Potrebno je odrediti kompaktni trigonometrijski Fourierov red i eksponencijalni Fourierov red za signal prikazan slikom (7.4.). Za početak je potrebno odrediti koeficijente trigono-*



Slika 7.4. Slika signala iz primjera (7.1.), izvor:[8].

metriskog Fourierovog reda.

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} dt = \frac{1}{2} \tag{7.1}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cos(\omega_0 n t)\,dt \tag{7.2}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2nt)\,dt \tag{7.3}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\sin(2nt)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} \tag{7.4}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)\right) \tag{7.5}$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \tag{7.6}$$

Koeficijenti b_n su jednaki nuli zbog toga što je signal parna funkcija. Trigonometriski oblik Fourierovog reda glasi:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos(2t) - \frac{1}{3}\cos(6t) + \frac{1}{5}\cos(10t) - \frac{1}{7}\cos(14t) + \cdots\right). \tag{7.7}$$

Kako su koeficijenti $b_n = 0$ tada vrijedi da je $D_n = a_n$. Koeficjent D_0 jednak je a_0 te nam preostaje odrediti samo θ_n

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) = \pm 180^\circ. \tag{7.8}$$

Konačno kompaktni trigonometrijski Fourierov red signala glasi:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos(2t) + \frac{1}{3}\cos(6t \pm 180^\circ) + \frac{1}{5}\cos(10t) + \frac{1}{7}\cos(14t \pm 180^\circ) + \cdots\right). \quad (7.9)$$

Za izračunavanje eksponencialnog fourierovog reda koristit ćemo formule:

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad (7.10)$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}. \quad (7.11)$$

S obzirom da je b_n jednak nuli koeficijenti c_n i c_{-n} su isti i glase:

$$c_n = \frac{a_n}{2} = \frac{1}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right). \quad (7.12)$$

Konačno eksponencijalni Fourierov red signala glasi:

$$x(t) = \frac{1}{\pi}\left(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t} + \frac{1}{3}e^{j2\pi t} + \frac{1}{3}e^{-j2\pi t} + ...\right). \quad (7.13)$$

8. Zaključak

Ovaj rad opisuje redove funkcija i njihovu primjenu u inženjerstvu, s posebnim fokusom na Taylorov i Fourierov red.

Na početku rada opisani su kompleksni brojevi, uključujući što su oni i zašto ih uvodimo. Također su opisane glavne računskih operacije s njima te je definirana kompleksna ravnina. U sljedećim poglavljima definirani su nizovi i redovi kompleksnih brojeva, uz usporedbu s nizovima i redovima realnih brojeva. Uveden je pojam konvergencije, te su navedeni neki od kriterija koje možemo primjenjivati pri ispitivanju konvergencije. Rad se zatim bavi redovima potencija, čime smo pripremili teren za Taylorov red kao jedan od primjera redova potencija. Opisali smo Taylorov polinom i Taylorov red, uključujući radijus konvergencije. Na kraju poglavlja o Taylorovom redu navedene su primjene u inženjerstvu, s posebnim naglaskom na primjenu u aproksimaciji trigonometrijskih funkcija.

Nakon Taylorovog reda, uveden je pojam Fourierovog polinoma i Fourierovog reda kao primjer aproksimacije periodičnih funkcija. Definirani su različiti načini zapisa Fourierovog reda, te je opisana njegova konvergencija. U daljnjem dijelu rada opisane su glavne razlike između Taylorovog i Fourierovog reda u kontekstu aproksimacija i primjena, s obzirom na vrstu funkcije koju aproksimiramo. Na kraju su navedene primjene Fourierovog reda u inženjerstvu, s posebnim fokusom na analizu signala.

Zaključak je da primjenom redova funkcija možemo značajno pojednostaviti zapis složenih funkcija i signala uz minimalne pogreške.

Literatura

[1] Elezović, N; Petrizio, D.: "Funkcije kompleksne varijable - zbirka zadataka": Zagreba 1994.

[2] Kreyszig, E.: "Advanced Engineering Mathematics", Wiley 2011.

[3] Stoji, M stojic@math.hr http://web.math.hr/ stojic Ožujak 2019.

[4] Sučić, V.: Predavanje "Signali: klasifikacija i svojstva" iz kolegija Signali i sustavi, Sveučilište u Rijeci, Tehnicki fakultet, Rijeka 2023

[5] Sučić, V.: Predavanje "Signali: osnovni signali i modeli signala" iz kolegija Signali i sustavi, Sveucilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Rijeka, 2023.

[6] Dražić, I.: "Fourierovi redovi - skripta":26. studenoga 2017.

[7] N. Črnjarić-Žic, S. Mačešić, M. Štefan Trubić.:"Inženjerska matematika ET-zbirka zadataka": Rijeka, listopad 2011.

[8] V. Jurdana.: Auditorna vježba 6:"Fourierova analiza periodiˇcnih signala" iz kolegija Signali i sustavi.

[9] s Interneta, https://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/Pendulum/Pendula.html, 6.9.2024.

[10] s Interneta, https://www.pmf.unizg.hr/download/repository/ch33.pdf, 10.8.2024.

[11] s Interneta https://edutorij-admin-api.carnet.hr/storage/extracted/a46bb23b-608e-45b5-b7f6-c952a83441fa/matematicko-njihalo.html 3.9.2024.

[12] s interneta, http://e.math.hr/mathearticle/br19/matijevic, 5.9.2024.

Sažetak i ključne riječi

U ovom radu smo dali kratak uvod u kompleksne brojeve i osnovne računske operacije s njima. Opisali smo nizove i redove kompleksnih brojeva te definirali kriterije konvergencije. Također smo definirali i objasnili Taylorov red i njegovu primjenu, uz navođenje redova nekih elementarnih funkcija. Pored Taylorovog reda, detaljno je opisan i Fourierov red, uključujući vrste njegova zapisa i primjene u inženjerstvu. Također je objašnjena razlika između Taylorove i Fourierove aproksimacije.

Ključne riječi: kompleksni brojevi, nizovi i redovi kompleksnih brojeva, kompleksna ravnina, redovi potencija, Taylorov red, Fourierov red

Summary and key words

In this paper, we provided a brief introduction to complex numbers and basic arithmetic operations with them. We described series and sequences of complex numbers and defined criteria for convergence. We also defined and explained the Taylor series and its applications, including the series of some elementary functions. In addition to the Taylor series, we provided a detailed description of the Fourier series, including its different forms of representation and applications in engineering. The differences between Taylor and Fourier approximations were also explained.

Keywords: Complex numbers, sequences and series of complex numbers, complex plane, power series, Taylor series, Fourier series