SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Sveučilišni prijediplomski studij elektrotehnike

Završni rad

GEOMETRIJA PLOHA I NEKE PRIMJENE PLOHA U ELEKTROTEHNICI

Rijeka, rujan 2024.

Andrej Antić

0069090706

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Sveučilišni prijediplomski studij elektrotehnike

Završni rad

GEOMETRIJA PLOHA I NEKE PRIMJENE PLOHA U ELEKTROTEHNICI

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Komentor: Vanja Čotić Poturić, dipl. ing., v. pred.

Rijeka, rujan 2024.

Andrej Antić

0069090706

SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET
POVJERENSTVO ZA ZAVRŠNE ISPITE

Rijeka, 13. ožujka 2023.

Zavod: **Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike**
Predmet: **Inženjerska matematika ET**
Grana: **1.01.07 primijenjena matematika i matematičko modeliranje**

ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Andrej Antić (0069090706)**
Studij: Sveučilišni prijediplomski studij elektrotehnike

Zadatak: **Geometrija ploha i neke primjene ploha u elektrotehnici**

Opis zadatka:

U radu je potrebno objasniti načine zadavanja ploha u Kartezijevom koordinatnom sustavu (eksplicitno, implicitno i parametarski) te navesti neke češće korištene klasifikacije ploha. Potrebno se osvrnuti na temeljna svojstva ploha kao što je primjerice zakrivljenost ploha te izračun geometrijskih mjera povezanih s plohama (površina plohe i volumen tijela kojeg ploha definira).
U praktičnom dijelu rada potrebno je detaljno opisati nekoliko značajnih ploha s posebnim naglaskom na plohe koje se koriste u elektrotehnici.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Antić

Zadatak uručen pristupniku: 20. ožujka 2023.

Mentor:

Izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Vanja Čotić Poturić

Vanja Čotić Poturić, dipl. ing., v. pred.
(komentor)

Predsjednik povjerenstva za završni ispit:

Prof. dr. sc. Dubravko Franković

IZJAVA

Sukladno članku 7. Stavku 1. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku sveučilišnih prijediplomskih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci, izjavljujem da sam samostalno izradio završni rad prema zadatku preuzetom dana 20. ožujka 2023.

Rijeka, rujan 2024. ________________________________

Andrej Antić

Sadržaj

1. Uvod

Geometrija ploha je grana matematike koja proučava oblik, površinu i volumen trodimenzionalnih objekata, poznatih kao plohe. Ploha se definira kao glatka, zakrivljena površina koja može biti ravna ili zakrivljena u prostoru. Primjeri ploha su sfere, cilindri, stošci, torusi i mnoge druge složenije strukture. Geometrija ploha bavi se proučavanjem svojstava ovih površina, uključujući njihovu zakrivljenost, topologiju i načine na koje se mogu transformirati u prostoru. Matematički alati koji se koriste u ovom području uključuju diferencijalnu geometriju, topologiju i algebarsku geometriju, što omogućava precizno opisivanje i analiziranje različitih vrsta ploha.

Geometrija ploha u matematici ima ključnu ulogu u mnogim primijenjenim i teorijskim područjima. Ona matematičarima omogućava da izvršavaju analize i modeliranje oblika u trodimenzionalnom prostoru, što je od velike važnosti za razumijevanje kompleksnih struktura i sistema. Na primjer, u diferencijalnoj geometriji, matematičkoj disciplini koja se bavi istraživanjem zakrivljenosti i oblika ploha, matematičari mogu proučavati osobine prostora koji su višedimenzionalni i kompleksniji od trodimenzionalnog prostora koji je direktno percipiran. Također, ova grana matematike ima značajnu ulogu u teorijskoj fizici, pomoću koje se modelira površina tijela, površina na kojima se odvija gibanje i druge geometrijske strukture, koje imaju veliki značaj za teoriju relativnosti i kvantnu fiziku.

Geometrija ploha ima izrazito veliku primjenu u inženjerstvu jer je od iznimne važnosti za dizajn i analizu različitih inženjerskih struktura i sistema. U građevinarstvu, inženjeri koriste geometriju ploha za projektiranje mostova, zgrada i drugih konstrukcija koje zahtijevaju precizno razumijevanje oblika i površina. U strojarstvu, plohe se koriste za dizajn strojeva i njihovih dijelova, gdje je neophodno precizno modeliranje trodimenzionalnih oblika kako bi se osigurala njihova izdržljivost i pravilno funkcioniranje. U zrakoplovstvu, geometrija ploha je ključna za dizajn aerodinamičkih oblika aviona i raketa, jer zakrivljenost i glatkoća površina direktno utječu na njihove performanse i efikasnost. Također, u području računarstva, temelj za razvoj trodimenzionalne grafike i modeliranja u virtualnoj stvarnosti je geometrija ploha, jer je potrebno precizno simulirati realistične oblike i površine.

Geometrija ploha, koja je osnovna disciplina u matematici, neophodna je u širokom spektru inženjerskih primjena iz razloga što pruža ključne alate i metode za analizu i dizajn složenih trodimenzionalnih objekata.

Tema ovog završnog rada je geometrija ploha i neke primjene ploha u elektrotehnici. Najprije se navode načini zadavanja ploha te primjeri nekih važnijih ploha. Zatim se opisuju osnovni pojmovi vezani za geometriju ploha te se na primjeru objašnjava što je parametrizacija plohe. U nastavku se pojašnjavaju geometrijske transformacije ploha kao što su translacija, rotacija, skaliranje, refleksija i smicanje. Nakon toga navode se primjene numeričkih metoda te se opisuju dvije takve metode, metoda konačnih elemenata i metoda graničnih elemenata. Zatim će se u završnom radu osvrnuti na primjene geometrije ploha u elektrotehnici. Biti će obrazložena njezina važnost u ovoj znanstvenoj disciplini te će se detaljnije opisati kako geometrija ploha utječe na antene i kondenzatore. Za kraj će se navesti Maxwellove jednadžbe koje služe za analizu i razumijevanje elektromagnetskih polja.

2. Načini zadavanja ploha

Plohe se mogu zadati, odnosno matematički opisati i predstaviti, na različite načine. Osnovni načini zadavanja plohe su implicitno, eksplicitno i parametarski. Svaki način ima svoje specifične primjene, prednosti i nedostatke koji se opisuju u nastavku poglavlja.

2.1. Implicitno

Implicitno zadavanje ploha je način u kojem se u jednoj jednadžbi uključuju sve tri prostorne koordinate x, y i z, te je ploha definirana kao skup svih točaka (x, y, z) koje zadovoljavaju tu jednadžbu. Implicitna jednadžba plohe ima slijedeći oblik:

$$F(x, y, z) = 0. \tag{2.1}$$

Jednadžba (2.1) povezuje koordinate u prostoru te se ploha sastoji od svih točaka u trodimenzionalnom prostoru koje zadovoljavaju tu jednadžbu. Ovim načinom zadavanja ploha jednostavno se određuje gdje se točka nalazi, na plohi, unutar nje ili izvan nje, tako da se provjeri zadovoljava li točka zadanu jednadžbu [1].

Implicitne jednadžbe omogućuju opisivanje složenih i nepravilnih ploha koje bi se teško opisale eksplicitno ili parametarski. Također, zbog svoje jednostavnosti, često se koriste pri traženju presjeka između različitih ploha i drugih geometrijskih objekata.

S druge strane, ovako zadane plohe se mogu teže vizualizirati i interpretirati te se teže može odrediti konkretna točka na plohi ili izračunati tangenta, normala i druge geometrijske osobine jer jednadžba ne daje eksplicitnu formu površine.

Implicitno zadavanje ploha ima različite primjene u praksi. U optici se ovakav oblik jednadžbi koristi za modeliranje površina objektiva i ogledala. Isto tako, u topologiji su implicitno zadane plohe imaju veliku ulogu za opisivanje i proučavanje oblika i njihovih svojstava u različitim prostorima.

2.2. Eksplicitno

Eksplicitno zadavanje ploha je način u kojem se pomoću funkcije izražava jedna koordinata (npr. z) u ovisnosti o druge dvije koordinate (npr. x i y). Ploha je određena kao skup svih točaka (x, y, z) gdje je z funkcija od x i y, a eksplicitna jednadžba ima slijedeći oblik:

$$z = f(x, y). \tag{2.2}$$

Funkcija $z = f(x, y)$ za svaku kombinaciju vrijednosti x i y daje odgovarajuću vrijednost z, čime je definirana površina u trodimenzionalnom prostoru [1].

Eksplicitni oblik jednadžbi pogodan je za vizualizaciju ploha jer omogućava brzo razumijevanje kako se ploha ponaša u prostoru. Funkcija (2.2) omogućuje relativno jednostavno računanje mnogih svojstava plohe, kao što su nagib ili točke presjeka s ravninama xz ili yz.

Eksplicitno zadavanje ploha ima i svoje nedostatke. U nekim slučajevima zadavanje ploha na ovaj način je nepraktično ili nemoguće. Na primjer, sfera se ne može zadati eksplicitno u standardnom Kartezijevom koordinatnom sustavu. Može doći do ograničavanja mogućnosti modeliranja složenih ploha koje imaju višestruke vrijednosti z za iste vrijednosti x i y.

Ovaj oblik jednadžbe plohe se često primjenjuje u inženjerstvu kada je potrebno kontrolirati jednu varijablu u odnosu na druge dvije, kao što su površine u građevinskim konstrukcijama ili modeli terena. Ovaj način zadavanja ploha ima primjenu u geometrijskom modeliranju, obradi signala, računalnoj grafici, geodeziji i inženjerskom dizajnu, ponajviše kod modeliranja terena, valova ili drugih površina koje imaju jasnu zavisnost između tri koordinate. Za primjer se može uzeti građevinarstvo u kojem se eksplicitno zadane plohe koriste pri dizajniranju krovnih konstrukcija, mostova i cesta, gdje je visina plohe definirana u odnosu na njen položaj u osnovnom planu.

2.3. Parametarski

Parametarsko zadavanje ploha je način koji opisuje plohe u trodimenzionalnom prostoru pomoću jedne ili više parametarskih funkcija koje određuju sve tri koordinate (x, y, z) u ovisnosti o jednom ili dva parametra. Parametri, koji se najčešće označavaju s u i v, koriste se za definiranje svih točaka na plohi koja je tada definirana kao skup točaka (x, y, z) i može se opisati slijedećim izrazom:

$$r(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big). \tag{2.3}$$

U (2.3) funkcije $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ određuju koordinate točaka na plohi u ovisnosti o parametrima u i v [1].

Ovaj način je pogodan za opisivanje raznih ploha, uključujući složene plohe koje bi bilo teško opisati implicitnim ili eksplicitnim jednadžbama. Oblik plohe može se precizno kontrolirati ovim načinom zadavanja što je potrebno pri dizajniranju i analiziranju složenih struktura.

S druge strane, postoje i neki nedostaci u parametarskom zadavanju ploha. Ovaj način može biti izrazito kompleksan i složen, pogotovo za plohe sa složenom geometrijom kojima se trebaju opisati sve točke. Također, pri parametarskom zadavanju ploha može biti potrebno više računalnih resursa za generiranje i manipulaciju ploha, pogotovo ako se radi o detaljnom modelu.

Primjena u praksi ovog načina zadavanja ploha nije zanemariva. Široko se primjenjuje u animaciji, računalnoj grafici i industrijskom dizajnu, gdje se učestalo koristi za modeliranje složenih površina. Neke od tih složenih površina su: automobilski dijelovi, arhitektonske strukture te avionske površine.

3. Primjeri ploha

Plohe su vrlo važni geometrijski objekti u matematici, fizici, inženjerstvu i brojnim drugim znanstvenim disciplinama. Opisuju se kao ravne ili zakrivljene površine u prostoru i dolaze u mnogo oblika. Primjeri nekih ploha su ravnina, sfera, cilindar i paraboloid. Svaka od njih ima svoje jedinstvene geometrijske karakteristike koje se navode u nastavku poglavlja [2].

3.1. Ravnina

Ravnina je ploha koja je potpuno ravna, bez zakrivljenosti, te se u prostoru može odrediti na tri načina:

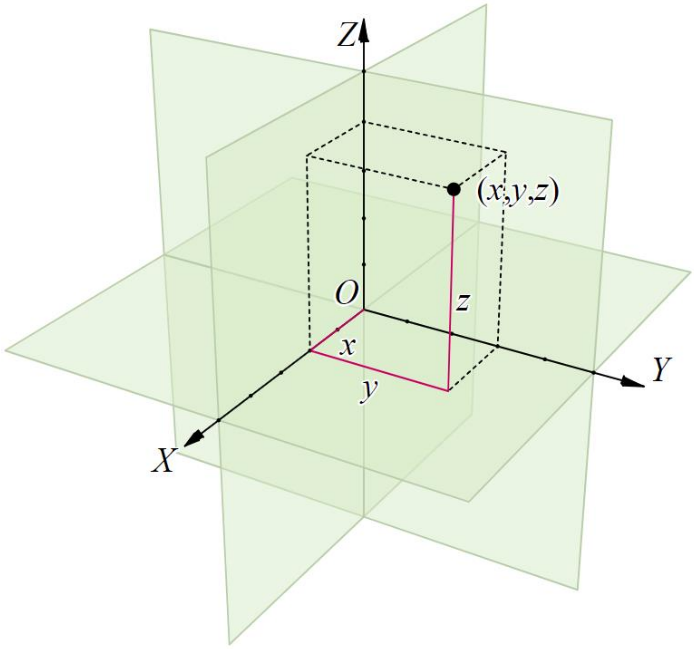
- pomoću tri nekolinearne točke (koje ne pripadaju istom pravcu),
- pomoću pravca i točke izvan tog pravca,
- pomoću dva usporedna pravca.

Neka od glavnih svojstva ravnine su slijedeća:

- cijeli pravac leži u ravnini ako ravnina i pravac imaju dvije zajedničke točke,
- ako dvije ravnine imaju jednu zajedničku točku onda imaju i jedan cijeli zajednički pravac,
- dvije se različite ravnine mogu sjeći u jednom pravcu ili mogu biti paralelne.

Zbog svoje jednostavne geometrijske strukture, ravnine su ključne za gradnju zidova, podova, dijelova strojeva i drugih struktura koje zahtijevaju stabilnost i jednostavnost izgradnje.

Na slici 3.1. svijetlozelenom bojom su prikazane tri ravnine, xy, yz i xz u Kartezijevom koordinatnom sustavu u prostoru. Ovaj koordinatni sustav je definiran trima međusobno okomitim pravcima x, y i z koji se sijeku u ishodištu O. Koordinata na osi x se naziva apscisa, na osi y ordinata te na osi z aplikata.



Slika 3.1. Ravnine xy, yz i xz u Kartezijevom koordinatnom sustavu u prostoru [3].

Implicitni oblik jednadžbe za ravninu glasi:

$$ax + by + cz + d = 0. \tag{3.1}$$

U jednadžbi (3.1) konstante a, b, c i d definiraju nagib i položaj ravnine u prostoru. Vektor (a, b, c) je vektor normale ravnine koji je okomit na svaki pravac koji pripada ravnini. Svaka točka (x, y, z) koja zadovoljava jednadžbu (3.1) pripada ravnini.

Eksplicitno zadavanje ravnine određuje se slijedećim izrazom:

$$z = ax + by + c. \tag{3.2}$$

Najčešći slučaj jest da se koordinata z izražava kao funkcija od x i y, kao što je i prikazano u (3.2). U izrazu (3.2) a, b i c su konstante kojima je definiran nagib ravnine i njezin presjek s osi z.

Jednadžba za parametarsko zadavanje ravnine ima slijedeći oblik:

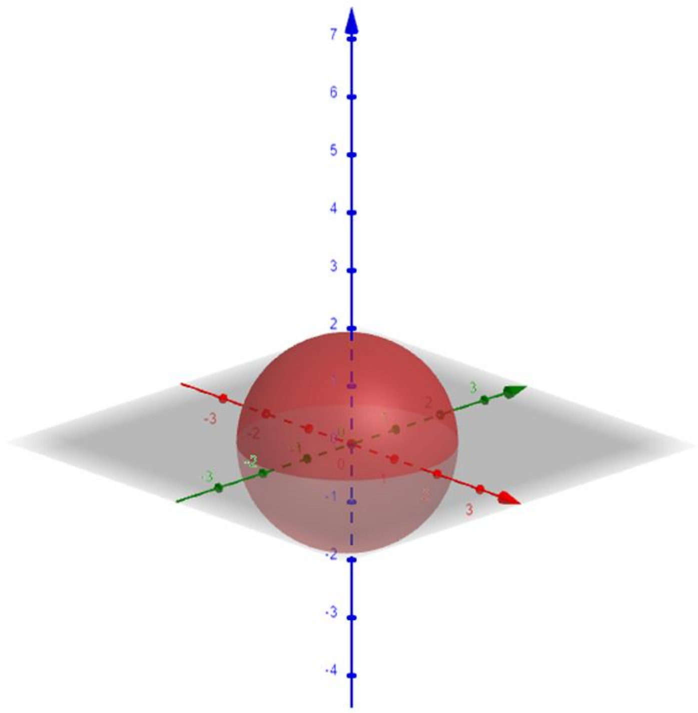
$$r(u,v) = r_0 + uv_1 + vv_2. \tag{3.3}$$

U ovoj jednadžbi r_0 predstavlja vektor pozicije početne točke na ravnini, a vektori koji definiraju smjerove unutar ravnine su vektori v_1 i v_2. Parametarske varijable u i v diktiraju kako se koordinate mijenjaju duž prethodno spomenutih vektora.

3.2. Sfera

Sfera je vrsta zakrivljene plohe koja se definira kao skup točaka u prostoru koje su na jednakoj udaljenosti od središta iz čega se može zaključiti da su ove plohe u potpunosti simetrične i imaju istu zakrivljenost u svim smjerovima. Sfere nemaju orijentaciju i iz svakog smjera izgleda jednako. Točke sfere su od središta udaljene za udaljenost koja se naziva polumjer. Najveća udaljenost, između točaka na sferi, zove se promjer.

Ova vrsta plohe ima veliku primjenu u raznim područjima, kao što su astronomija i optika. Astronomi nebeska tijela, planete i zvijezde, modeliraju kao sferne objekte kako bi precizno mogli izračunati njihove orbite i kretanja. U optici se koriste površine sfernih oblika jer su pogodne za fokusiranje svijetlosti u određenu točku što je ključno za teleskope, mikroskope i kamere. Na slici 3.2. prikazana je sfera u Kartezijevom koordinatnom sustavu.



Slika 3.2. Sfera u prostoru [3].

Opći oblik jednadžbe sfere sa središtem u točki (x_0, y_0, z_0) i radijusom r glasi:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2. \tag{3.4}$$

Ovom jednadžbom se dokazuje da je svaka točka (x, y, z) koja se nalazi na površini sfere jednako udaljena od njezinog središta i to za udaljenost jednaku njezinom radijusu.

Sfera se ne zadaje eksplicitno u Kartezijevom koordinatnom sustavu jer se ne može prikazati eksplicitnom jednadžbom. Općenito, eksplicitni oblik ove plohe koristi se u koordinatnim sustavima kao što su cilindrični ili sferni. Međutim, postoji situacija kada se sfera presječe ravninom $z = c$ te se tada presjek, koji je krug, može zadati eksplicitno u odnosu na koordinate x i y. Jednadžba (3.5) vrijedi kada se sfera presječe s ravninom $z = 0$:

$$z = \pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}. \tag{3.5}$$

Kod parametarskog zadavanja sfere koriste se parametri u i v koji opisuju sve točke koje se na njoj nalaze. Opći oblik izraza parametarskog zadavanja sfere sa središtem u točki (x_0, y_0, z_0) i radijusom r glasi:

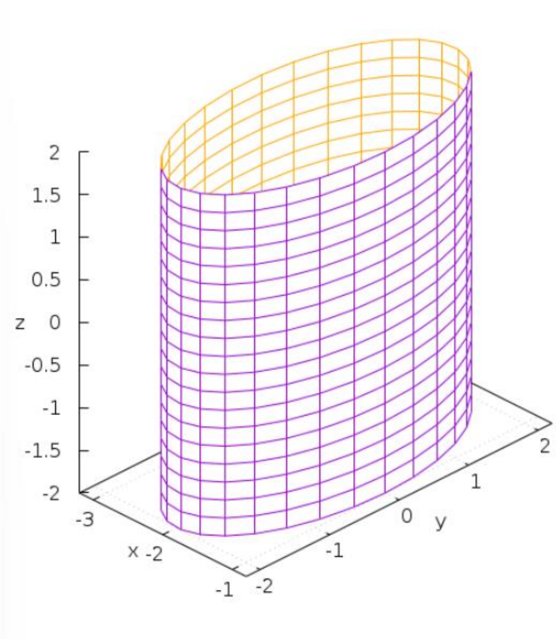
$$\begin{aligned} x(u, v) &= x_0 + r \sin u \cos v \\ y(u, v) &= y_0 + r \sin u \sin v \\ z(u, v) &= z_0 + r \cos u. \end{aligned} \tag{3.6}$$

U pravilu, sfera se parametarski opisuje pomoću sfernih koordinata u kojima su parametri u i v kutovi. Parametar u pripada intervalu $[0, \pi]$ i naziva se polarni kut, od vrha do dna sfere, a parametar v pripada intervalu $[0,2\pi]$ i naziva se azimutalni kut, kružni kut oko osi.

3.3. Cilindar

Cilindar je vrsta zakrivljene plohe koju opisuje pravac, zvan generatrisa ili izvodnica, kada klizi uzduž zadane krivulje, koja se zove direktrisa ili ravnalica, te pritom ostaje stalno istog smjera. Može se opisati i kao geometrijski objekt koji je sastavljen od dvije paralelne baze, u pravilu su to krugovi te se tada cilindar naziva pravim ili kružnim cilindrom, i zakrivljene površine koja ih spaja. Baze leže u paralelnim ravninama i u potpunosti su iste, a površina cilindra je na konstantnoj udaljenosti od osi koja prolazi kroz središta baza.

Cilindrične plohe imaju raznovrsnu primjenu u praksi. U tehničkoj industriji imaju ključnu ulogu pri dizajniranju cijevi, osovina te brojnih drugih rotacijskih dijelova. Također, u arhitekturi imaju veliku važnost jer se na temelju njih izrađuju stupovi, tornjevi i njima slični dijelovi. Neke od vrsta cilindara su eliptički, hiperbolički i parabolički cilindar, a na slici 3.3. je prikazan eliptički cilindar u Kartezijevom koordinatnom sustavu.



Slika 3.3. Eliptički cilindar u Kartezijevom koordinatnom sustavu [4].

Cilindrična ploha se često opisuje kao beskonačna, ali se može ograničiti na određeni raspon visine. Implicitna jednadžba (3.7) odnosi se na cilindar s radijusom r i s osi uzduž osi z te je cilindar beskonačan u smjeru osi z:

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{3.7}$$

Eksplicitno zadavanje cilindra je teško ostvariti u Kartezijevom koordinatnom sustavu jer se ne može jednostavno izraziti pomoću eksplicitne funkcije. Međutim, ako cilindar presiječemo ravninom koja je paralelna s njegovom osi, tada se presjek, koji je zapravo krug, može opisati eksplicitno kao u (3.8).

$$z = z_0 \tag{3.8}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

U (3.8) z_0 predstavlja konstantu, a r predstavlja radijus cilindra.

Za parametarsko zadavanje cilindra koriste se dva parametra u i v kako bi se opisale sve točke koje se nalaze na njegovoj površini. Ovaj način zadavanja cilindrične plohe se često koristi jer se njime u potpunosti opiše njegov oblik. Opći izraz za parametarsko zadavanje cilindra s radijusom r, visinom h i osi uzduž osi z glasi:

$$x(u,v) = r\cos u$$
$$y(u,v) = r\sin u \tag{3.9}$$
$$z(u,v) = v$$

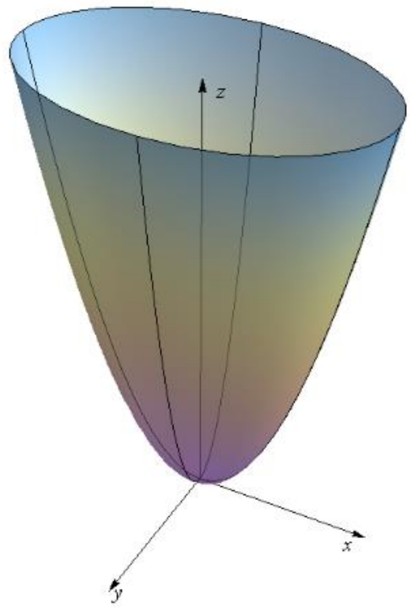
U (3.9) parametar u predstavlja kut oko osi z i nalazi se na intervalu $[0,2\pi]$, a parametar v predstavlja visinu cilindra duž osi z i nalazi se na intervalu $[z_1, z_2]$.

3.4. Paraboloid

Paraboloid je jedna od ploha drugog reda koja nema središte i ima jednu os simetrije. Osnovna podjela paraboloida uključuje eliptičke (koji kao podtip obuhvaćaju rotacijske paraboloide) i hiperboličke paraboloide. Na eliptičkim paraboloidima sve točke su eliptičke, dok su točke na hiperboličkim paraboloidima hiperboličke. Realni presjeci eliptičkih paraboloida mogu biti elipse, kružnice ili parabole, dok presjeci hiperboličkih paraboloida mogu biti parabole, hiperbole ili dva realna pravca. Kada beskonačno daleka ravnina presijeca paraboloide, to čini duž dva pravca. Ako su ti pravci imaginarni, paraboloid je eliptički, a ako su realni, paraboloid je hiperbolički.

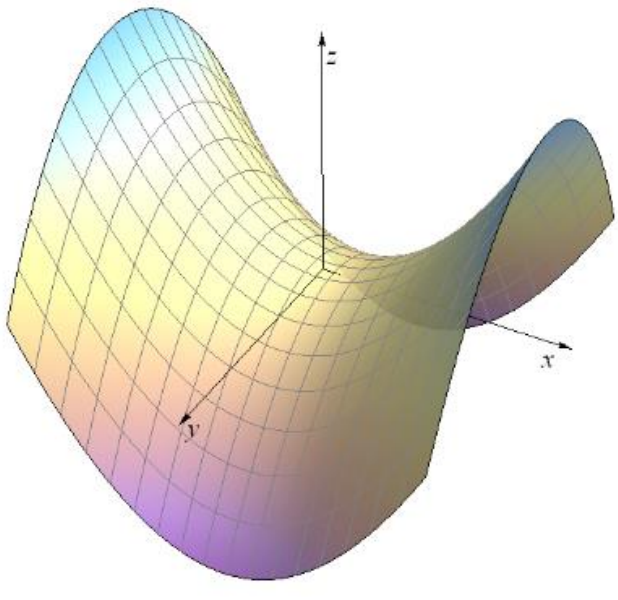
Paraboloidi se primjenjuju prilikom dizajniranja reflektora i antena, kao što su satelitske antene i teleskopi, iz razloga što imaju mogućnost reflektiranja paralelnih zraka svijetlosti ili radiovalova u jednu žarišnu točku.

Eliptični paraboloid nastaje, na primjer, kada se jedna parabola paralelno pomiče dok se njezino tjeme kreće duž druge parabole, pri čemu osi obje parabole ostaju međusobno paralelne i zadržavaju istu orijentaciju. Presjeci eliptičnog paraboloida s ravninama koje prolaze kroz njegovu os rezultiraju parabolama, dok presjeci s ravninama okomitim na tu os daju elipse. Kada se parabola rotira oko svoje osi, nastaju specijalni oblici eliptičnih paraboloida, poznati kao rotacijski paraboloidi. Ova vrsta paraboloida ima oblik „zdjele“ i prikazana je na slici 3.4.



Slika 3.4. Eliptički paraboloid u Kartezijevom koordinatnom sustavu [5].

Hiperbolični paraboloid nastaje na sličan način kao i eliptični paraboloid, ali s razlikom da dvije parabole imaju osi koje su orijentirane u suprotnim smjerovima. Presjeci ove plohe s ravninama paralelnim s osi paraboloida su parabole, dok presjeci s ravninama okomitima na tu os rezultiraju hiperbolama. Hiperbolični paraboloid je također pravčasta ploha, koja se može opisati pravcem koji se u prostoru pomiče tako da ostaje paralelan zadanoj ravnini dok istovremeno siječe dva mimosmjerna pravca. Ova vrsta paraboloida ima oblik „sedla" te je prikazana na slici 3.5.



Slika 3.5. Hiperbolički paraboloid u Kartezijevom koordinatnom sustavu [5].

Implicitna jednadžba koja opisuje eliptični paraboloid ima oblik:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \tag{3.10}$$

U jednadžbi (3.10) konstante a i b određuju oblik paraboloida uzduž osi x i y. U slučaju kada je $a = b$ paraboloid je rotacijski simetričan oko osi z te ima naziv kružni paraboloid.

Implicitna jednadžba za hiperbolički paraboloid se razlikuje od (3.10) te glasi:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \tag{3.11}$$

Ovom jednadžbom se opisuje površina plohe sedlastog oblika, gdje se parabole u smjeru osi x zakrivljuju prema gore, a parabole u smjeru osi y prema dolje.

Eksplicitno zadavanje paraboloida izražava visinu paraboloida z kao funkciju x i y, čime se olakšava njihova vizualizacija i analiza površine.

Eksplicitni izraz za eliptični paraboloid glasi:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \tag{3.12}$$

Eksplicitni izraz za hiperbolički paraboloid glasi:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \tag{3.13}$$

Parametarskim zadavanjem paraboloida opisuju se sve točke na površini plohe koristeći dva parametra, u i v.

Eliptički paraboloid se parametarski može zadati pomoću slijedećih izraza:

$$\begin{aligned} x(u,v) &= u\cos v \\ y(u,v) &= u\sin v \\ z(u,v) &= \frac{u^2}{c} \end{aligned} \tag{3.14}$$

U (3.14) c određuje oblik paraboloida u smjeru osi z, a parametri imaju slijedeće karakteristike: $u \geq 0$ i $v \in [0, 2\pi]$.

Hiperbolički paraboloid se parametarski može zadati pomoću slijedećih izraza, te u njima parametri u i v slobodno variraju:

$$x(u,v) = u$$
$$y(u,v) = v \tag{3.15}$$
$$z(u,v) = \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}$$

4. Osnovni pojmovi geometrije ploha

Ovo poglavlje govori o svojstvima ploha, koja se koriste u mnogim znanstvenim disciplinama (matematici, fizici, inženjerstvu,…). Glavna svojstva ploha su: površina, zakrivljenost i njezini smjerovi, konfiguracija, ravnoteža i simetrija, tangente i normalne te interakcija s valovima.

Postoji mnogo kriterija, kao što su oblik, zakrivljenost, geometrija i primjena, po kojima se određuju vrste ploha. Najopćenitija podjela plohi jest podjela na ravnu i zakrivljenu plohu.

Najjednostavnija vrsta plohe je ravna ploha. Ona se proteže u dvije dimenzije bez zakrivljenosti u svim smjerovima što znači da se u svakoj ravnoj plohi može povući linija. Ravna ploha nema kraj, to znači da se proteže u beskonačnost u bilo kojem smjeru. Iz tog razloga se pri rješavanju problema iz stvarnog svijeta koriste ograničeni dijelovi ravne plohe koji imaju konstantnu debljinu u svakoj točki, jer bi zakrivljenost izazvala varijacije u debljini. Njezina primjena je velika i raznovrsna. Koristi se kao temelj za brojne geometrijske koncepte, uključujući pravilne geometrijske oblike poput pravokutnika, kvadrata i trokuta, te se primjenjuje u mnogim geometrijskim teoremima i postupcima. Također, njezina primjena pojavljuje se i u aspektima svakodnevnog života kao što su: konstrukcija građevinskih objekata, izrada planova i karti, dizajniranje parketa i pločica, izrada tehničkih crteža, i mnoge druge primjene [6].

Zakrivljena ploha je površina koja nije ravna, već se razlikuje u obliku i zakrivljenosti u odnosu na ravnu površinu. Ove plohe mogu imati raznolike oblike i stupnjeve zakrivljenosti, a njihova svojstva zavise od specifične geometrije i načina na koji su zakrivljene. Zakrivljenost ovih ploha nije konstantna, već se mijenja od jedne tačke do druge, pri čemu može biti pozitivna (kuglasta), negativna (konkavna) ili nula (ravna). Površina zakrivljene plohe može se značajno razlikovati od površine ravne plohe, a često se izračunava pomoću integralnih metoda. Ove plohe mogu poprimiti različite geometrijske oblike, kao što su kugle, elipsoidi, parabole, hiperbole, i mnogi drugi, pri čemu svaki od tih oblika ima svoje specifične karakteristike [6].

U zavisnosti od zakrivljenosti, zakrivljene plohe mogu biti konveksne (zakrivljene prema vani) ili konkavne (zakrivljene prema unutra) u odnosu na određeni pravac ili točku. Svaka točka na zakrivljenoj plohi ima svoj vektor normale, koji je okomit na površinu u toj točki. Ovi vektori normale igraju ključnu ulogu u analizi osvjetljenja, refleksije i drugih svojstava površine. Zakrivljene plohe također posjeduju različite topološke osobine, kao što su broj rupa, komponenata i druge karakteristike koje se proučavaju u topologiji. Primjeri zakrivljenih ploha uključuju sfere, elipsoide, parabole, hiperbole i druge oblike, svaki sa svojim jedinstvenim svojstvima i primjenama.

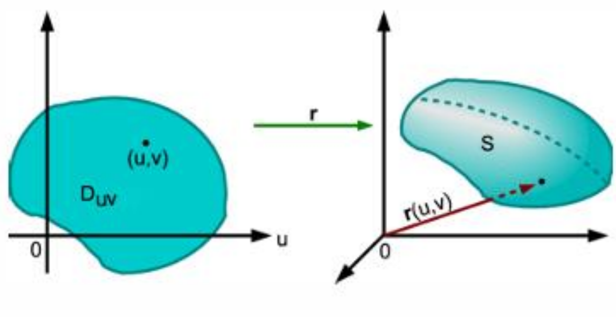
Svojstvo površine odnosi se na ukupnu površine plohe, te se u matematičkom kontekstu površina može izračunati pomoću geometrijskih metoda ili integrala. Promjene u smjeru ili konveksnosti površine plohe opisuje svojstvo zakrivljenosti. Mogu postojati različiti smjerovi zakrivljenosti u određenim točkama ploha te se oni često opisuju pomoću parametara kao što su glavne zakrivljenosti i vektori normale. Konfiguracija plohe je svojstvo koje se odnosi na njezin oblik i položaj u prostoru. Ono uključuje nagib, orijentaciju i položaj plohe u odnosu na druge objekte. Izučavanje ravnoteže i simetrije plohe pomaže pri analizi kako se promjene u obliku ili veličini površine reflektiraju na njenu ravnotežu i simetriju. Linije ili vektori koji su ortogonalni na plohu u određenoj točki nazivaju se tangente i normale te one imaju ključnu ulogu u analizi i izračunima vezanim za plohe. U područjima kao što su optika i elektromagnetizam, plohe se koriste za analizu interakcije svjetlosti ili elektromagnetskih valova s površinama, što uključuje pojave poput refleksije i loma.

Proces kojim se opisuje površina pomoću matematičkih parametara i funkcija naziva se parametrizacija plohe. Ovim procesom se omogućuje matematičko modeliranje i analiza različitih površina, ravnih, zakrivljenih i složenijih geometrijskih oblika [7].

Ako je zadana neka vektorska funkcija dviju varijabli:

$$\vec{r}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big), \qquad (u,v) \in D_{uv} \tag{4.1}$$

Ova vektorska funkcija $\vec{r}(u,v)$ zajedno s domenom $D_{uv} \subseteq R^2$ u kojoj leže parametri (u, v) zove se parametrizacija plohe (slika 4.1.).



Slika 4.1. Parametrizacija plohe [7].

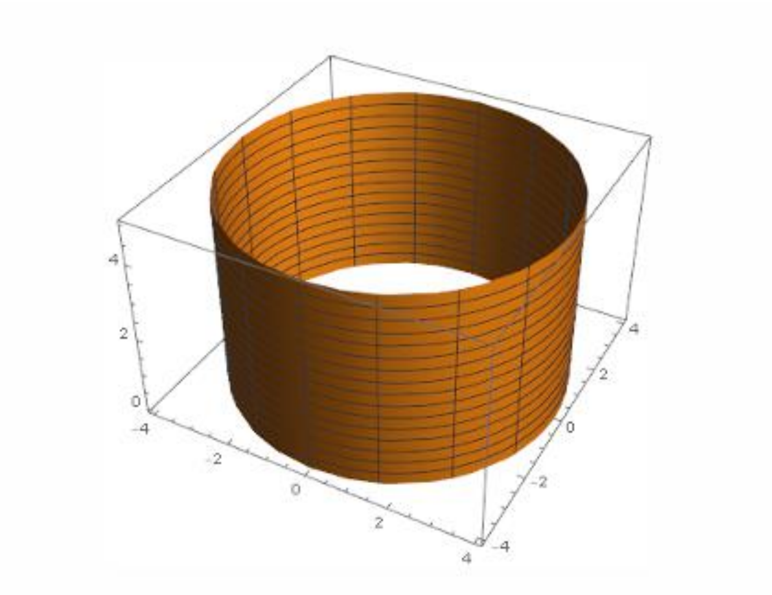
Prilikom parametrizacije plohe uvode se parametarske varijable, koje se obično označavaju s u i v, te se kreću u određenom rasponu kako bi opisale točke na površini. Pomoću uvedenih parametara definiraju se parametarske funkcije $x(u,v), y(u,v)$ i $z(u,v)$ i one opisuju koordinate točaka na plohi u odnosu na parametre u i v. Ove funkcije često čine sustav parametarskih jednadžbi. Granice parametarskih varijabli mogu se razlikovati ovisno o obliku plohe te one određuju domenu na kojoj parametarske funkcije opisuju plohu.

Parametrizacijom se može utjecati na orijentaciju plohe u prostoru, a to je važno pri analizi refleksije svijetlosti i drugih fenomena. Također, parametrizacija omogućuje opisivanje linija i krivulja koje leže na plohi, što koristi pri analiziranju različitih svojstava plohe.

Za primjer parametrizacije može se prikazati parametrizacija cilindra polumjera R i visine h (slika 4.2.), u kojem su u i v parametarske varijable koje opisuju svaku točku u valjku, a funkcije $x(u,v), y(u,v)$ i $z(u,v)$ definiraju koordinate tih točaka u trodimenzionalnom prostoru.

$$\begin{aligned} x(u,v) &= R \cdot \cos u \\ y(u,v) &= R \cdot \sin u \\ z(u,v) &= v \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\vec{r}(u,v) = (R \cdot \cos u\,, R \cdot \sin u\,, v), 0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le h$$



Slika 4.2. Parametrizacija cilindra polumjera R i visine h [7].

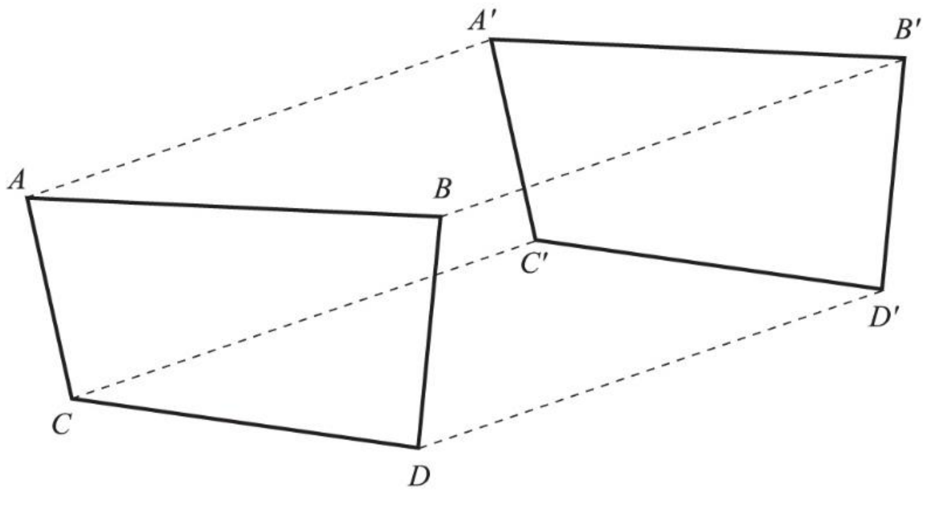
5. Geometrijske transformacije ploha

Geometrijske transformacije se mogu definirati kao matematičke operacije pomoću kojih se mijenja oblik, veličina, položaj ili orijentacija plohe u trodimenzionalnom prostoru. Transformacije se primjenjuju na točke koje se nalaze na plohama. Ove transformacije su važne jer se pomoću njih stvaraju animacije, analiziraju naprezanja i deformacije u raznim strukturama te se proučavaju simetrije, izometrije i druga važna svojstva ploha. Neke od geometrijskih transformacija o kojima se govori u nastavku ovog poglavlja su translacija, rotacija, skaliranje, refleksija i smicanje.

5.1. Translacija

Translacija je jedna od vrsta transformacije plohe kojom se ploha pomiče iz jednog mjesta na drugo, te se pritom ne mijenja njezin oblik, veličina i orijentacija. Ostvaruje se na način da se svaka točka plohe pomiče za istu udaljenost u istom smjeru. Matematički, točka r na zadanoj plohi se translatira za vektor t te je nova pozicija točke r'. Na slici 5.1. prikazana je translacija plohe ABCD.

$$
\begin{gathered}
r(x,y,z) \\
t = \left(t_x, t_y, t_z\right) \\
r'(x,y,z) = r(x,y,z) + t
\end{gathered}
\tag{5.1}
$$



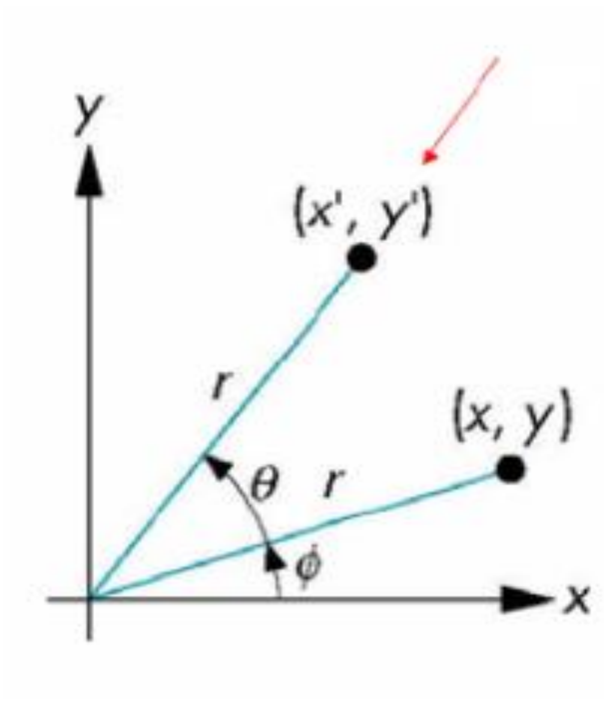
Slika 5.1. Translacija plohe ABCD [8].

5.2. Rotacija

Rotacijom se ploha okreće oko određene osi u trodimenzionalnom prostoru. Ta os može biti os x, os y, os z ili bilo koja druga os koja je definirana vektorom. Ploha se može rotirati u smjeru kazaljke na satu, što predstavlja negativan kut rotacije, ili se može rotirati u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, što predstavlja pozitivan kut rotacije. Ova transformacija se matematički može izraziti pomoću matrica, koje su prikazane u (5.2) i to redom za rotaciju oko osi x, osi y i naposlijetku osi z.

$$
\begin{gathered}
\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
\end{gathered}
\tag{5.2}
$$

U matricama iz (5.2) (x', y', z') predstavljaju koordinate točke nakon rotacije, (x, y, z) predstavljaju koordinate točaka plohe prije rotacije i θ predstavlja kut za koji se ploha rotira. Na slici 3.2. je prikazana rotacija točke za kut θ u Kartezijevom koordinatnom sustavu.



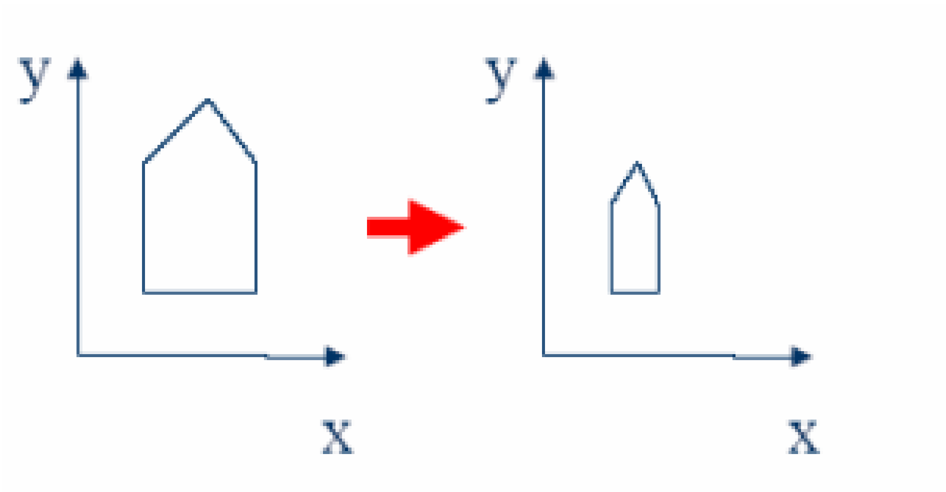
Slika 5.2. Primjer rotacije točke za kut θ [9].

5.3. Skaliranje

Skaliranje je transformacija kojom se mijenja veličina plohe, te pri tome njezine proporcije mogu ostati iste ili se mogu promijeniti ovisno o faktorima skaliranja duž različitih osi. U slučaju kada su faktori skaliranja isti duž svih osi, ploha se proporcionalno povećava ili smanjuje pritom zadržavajući svoj oblik. Ako se faktori razlikuju, dolazi do distorzije plohe. Skaliranje s faktorima s_x, s_y i s_z uzduž osi x, y i z prikazano je matricom (5.3).

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

U izrazu (5.3) (x, y, z) su koordinate točke plohe prije skaliranja, a (x', y', z') su koordinate nakon. Na slici 3.3. prikazano je skaliranje plohe u Kartezijevom koordinatnom sustavu.



Slika 5.3. Primjer skaliranja plohe [9].

5.4. Refleksija

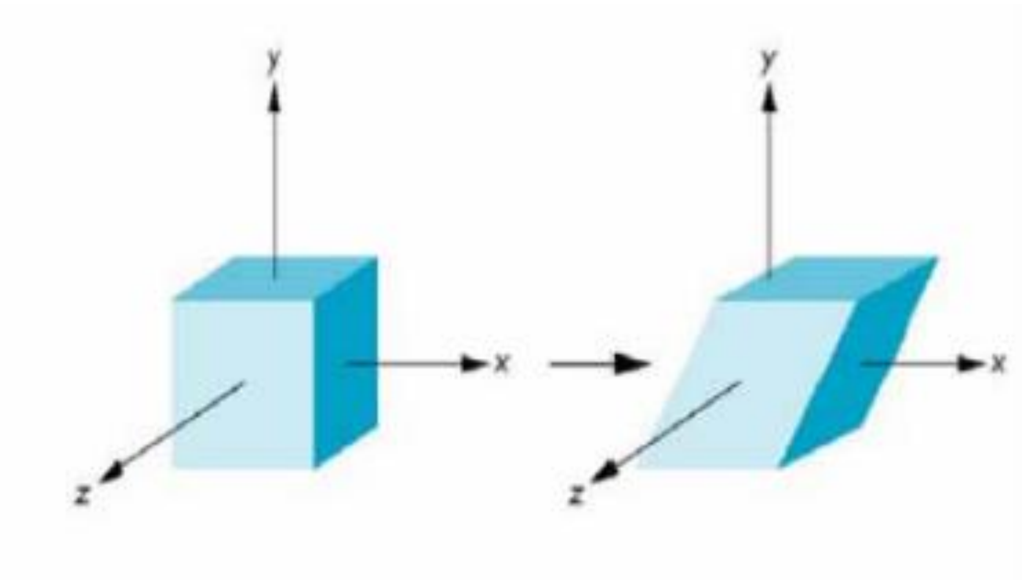
Refleksija, zvana i zrcaljenje, je vrsta transformacije kojom se ploha preslikava preko određene ravnine te tako stvara njezin zrcalni prikaz. Može se izvesti preko ravnine xy, yz, xz ili bilo koje druge ravnine u prostoru. Na primjer, refleksija plohe preko ravnine xy mijenja predznak koordinate z što je prikazano slijedećim izrazom:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

5.5. Smicanje

Smicanjem se ploha nagiba u smjeru jedne osi dok preostale osi ostaju nepomične čime ploha poprima kosi oblik. Ova transformacija je korisna pri modeliranju deformacija ili za izradu određenih efekata u grafici.

Na slici 5.4. prikazano je smicanje kocke, koja se nalazi u Karttezijevom koordinatnom sustavu, u smjeru osi x.



Slika 5.4. Smicanje kocke u smjeru osi x [9].

Matrica koja opisuje smicanje u smjeru osi x je

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_{xy} & k_{xz} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{5.5}$$

U (5.5) (x', y', z') su koordinate točke na plohi nakon provođenja transformacije, (x, y, z) su koordinate iste točke prije smicanja, a k_{xy} i k_{xz} su koeficijenti kojima je određen stupanj smicanja.

6. Numeričke metode za analizu ploha

Skup algoritama i tehnika koje se koriste za približno rješavanje matematičkih problema koje je nemoguće ili teško riješiti analitičkim putem definicija je numeričkih metoda. Ovim metodama rješavaju se linearne i nelinearne jednadžbe, diferencijalne jednadžbe, integriraju se funkcije, provodi se optimizacija i mnogi drugi matematički zadaci. U ovim metodama često se koriste iterativni postupci, koji započinju s početnim aproksimacijama i postepeno poboljšavaju točnost rješenja. Međutim, točnost i pouzdanost ovih metoda ovisi o korištenim algoritama, odabiru početnih uvjeta i računalnih resursa. Potrebno je razumijevanje određenog problema kako bi se zadali pravilni početni podaci na temelju kojih numeričke metode dođu do željenih rješenja. U suprotnom, postoji mogućnost da se dobiju pogrešna rješenja što može rezultirati problemima u praksi. Neke od numeričkih metoda su metoda konačni elemenata (FEM) i metoda graničnih elemenata (BEM) o kojima se govori u nastavku poglavlja.

Primjena numeričkih metoda je od velike važnosti u mnogim znanstvenim i inženjerskim disciplinama. U fizici, inženjerstvu i drugim područjima često se pojavljuju diferencijalne jednadžbe, integrali ili optimizacijski problemi koje je nemoguće riješiti ručno ili standardnim matematičkim tehnikama. Numeričkim metodama se stvaraju računski modeli koji analiziraju i predviđaju ponašanje takvih složenih sustava, kao što su na primjer simulacija klimatskih promjena ili optimizacija aerodinamičkih svojstava zrakoplova. Ove metode u financijama olakšavaju proračune cijena opcija, upravljanje portfeljem i procjenu rizika. Korisne su i prilikom raznih istraživanja jer numeričke metode pomažu u rješavanju problema koji zahtijevaju obradu velikih količina podataka ili složene modele koji se ne mogu analizirati analitički.

6.1. Metoda konačnih elemenata

Metoda konačnih elemenata (FEM – Finite element method) jedna je od najkorištenijih numeričkih metoda koja se koristi za rješavanje raznih složenih problema u fizici, matematici, inženjerstvu i drugim znanstvenim disciplinama. Najčešće se koristi za analizu naprezanja u strukturama, za toplinske i elektromagnetske analize, analizu fluida i mnoge druge probleme koji uključuju parcijalne diferencijalne jednadžbe.

Osnovni princip ove metode je podjela kontinuiranog problema na manji broj konačnih elemenata. Svaki od tih elemenata ima jednostavnu geometriju i oblik, poput trokuta, četverokuta ili tetraedra, u trodimenzionalnom prostoru. Problem nad kojim se vrši analiza, kao što može biti raspodjela naprezanja u konstrukciji, rješava se unutar svakog pojedinačnog elementa, te se zatim rezultati tih elemenata kombiniraju kako bi se dobilo rješenje za cijeli sustav. U nastavku će biti navedeni glavni koraci koji se obavljaju pri primjeni ove metode [10].

Rješavanje problema metodom konačnih elemenata započinje diskretizacijom domene, odnosno dijeljenjem područja koje se analizira na konačan broj malih, jednostavnih elemenata. Svaki od tih elemenata zatim dobiva svoje jednadžbe kojima je opisano njegovo ponašanje, kao što su naprezanje ili toplinski tok.

Nakon toga, pomoću jednadžbi svih elemenata formira se veliki sustav linearnih ili nelinearnih jednadžbi koje opisuju cijeli sustav. Ovaj sustav jednadžbi se zatim rješava korištenjem numeričkih metoda, poput metode Gaussove eliminacije ili iterativnih metoda, kako bi se dobilo konačno rješenje.

Na kraju, slijedi analiza i interpretacija rezultata, s naglaskom na vizualizaciju naprezanja, pomaka, temperatura ili drugih varijabli koje su izračunate pomoću metode.

Primjena metode konačnih elemenata je veoma široka. Koristi se za analizu naprezanja, vibracija i deformacija u strukturama kao što su mostovi, zgrade, automobili i avioni. U građevinarstvu služi za proučavanje stabilnosti i nosivosti konstrukcija, temelja i zgrada. Korisna je za analiziranje prijenosa topline i toplinskog toka u različitim uređajima i materijalima. U biomedicini se koristi za modeliranje biomehaničkih sustava, poput kostiju, zglobova i protetskih uređaja. Primjenjuje se i u području elektrotehnike, tu se metoda konačnih elemenata koristi za proučavanje elektromagnetskih polja i struja u električnim komponentama [11].

6.2. Metoda graničnih elemenata

Metoda graničnih elemenata (BEM – Boundary element method) je numerička metoda koja se primjenjuje za rješavanje različitih vrsta inženjerskih i fizičkih problema, posebno onih koji uključuju probleme s rubnim uvjetima na granici domene. U metodi konačnih elemenata diskretizira se cijela domena problema, dok se metoda graničnih elemenata fokusira samo na diskretizaciju granica, odnosno ruba problema, što može dovesti do značajnih ušteda u računalnim resursima za određene vrste problema.

Osnovna ideja ove metode je da se parcijalne diferencijalne jednadžbe, koje opisuju zadani fizikalni problem, transformiraju u integralne jednadžbe koje se odnose samo na granicu domene. Za pretvorbu parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u integralne jednadžbe koriste se Greenove funkcije. Korištenjem ove metode ne rješava se problem unutar cijelog volumena, nego se rješenje traži samo na površini, odnosno rubu domene. Slijede ključni koraci koji se provode pri primjeni ove metode.

Prvo, granica problema, koja može biti linija u dvodimenzionalnom ili površina u trodimenzionalnom prostoru, dijeli se na male segmente ili elemente. U dvodimenzionalnom prostoru, ovi elementi su obično linijski segmenti, a u trodimenzionalnom prostoru su trokutasti i četverokutni elementi.

Zatim se diferencijalne jednadžbe, kao što su Laplaceova, Helmholtzova ili Poissonova jednadžba, kojima je opisan problem, transformiraju u integralnu jednadžbu koristeći odgovarajuće Greenove funkcije. Ova integralna jednadžba, koja opisuje fizikalni problem, rješava se numerički, što uključuje formuliranje sustava linearnih jednadžbi koje se mogu riješiti standardnim numeričkim metodama, kao što je metoda Gaussove eliminacije. Nakon rješavanja integralne jednadžbe na granici, ako je potrebno i rješenje unutar domene, ono se može izračunati pomoću Greenovih funkcija [12].

Metoda graničnih elemenata se primjenjuje u različitim znanstvenim disciplinama. U termodinamici se koristi za analiziranje prijenosa topline u situacijama gdje su potrebni rubni uvjeti, na primjer prilikom radijacije ili konvekcije na površini. U mehanici fluida se primjenjuje pri analiziranju potencijalnog toka fluida, pogotovo ako se traži rješenje za beskonačne domene. Ova metoda je korisna i za područje akustike kada se rješavaju problemi zvučnih valova te kada se analiziraju akustički rezonatori. Problemi raspršenja i zračenja tijekom analize elektromagnetskih polja također se rješavaju metodom graničnih elemenata.

7. Primjene geometrije ploha u elektrotehnici

U elektrotehnici, geometrija ploha ima veliki utjecaj u analizi, dizajnu i optimizaciji mnogih električnih i elektromagnetskih uređaja i sustava. Postoje mnoge komponente koje u tim uređajima i sustavima imaju geometriju koja se može opisati kao plošna ili je povezana s ponašanjem električnih i magnetskih polja na plohama.

Oblik i veličina plohe uvelike utječe na dizajn antena i kondenzatora, na analize elektromagnetnih polja, radara, komunikacijskih mreža i drugih složenijih sustava. Geometrija ploha se koristi za optimizaciju radnih karakteristika uređaja, fokusiranje i usmjeravanje elektromagnetskih valova i analizu površinskih efekata. Za optimizaciju uređaja, kao što su antene, kondenzatori i senzori, geometrija ploha omogućuje precizno modeliranje i analizu raspodjele električnih i magnetskih polja jer oblik i veličina plohe izravno utječe na efikasnost i druge radne karakteristike uređaja. Neke vrste ploha se koriste za fokusiranje i usmjeravanje elektromagnetskih valova te se geometrijom ploha omogućava kontrola nad usmjeravanjem i intenzitetom zračenja što je od velike važnosti za prijenos informacija na velikim udaljenostima. Geometrijom ploha se analiziraju površinski efekti, kao što su smetnje ili prijenos topline, a to je od velike važnosti prilikom dizajniranja zaštitnih kućišta, disipacije topline u elektroničkim komponentama i prilikom sprječavanja elektromagnetskih interferencija.

Primjena geometrije ploha u elektrotehnici ima veliku važnost zbog sljedećih razloga. Optimizacija i precizno modeliranje ploha rezultira s uređajima koji imaju veću efikasnost, što je od velike važnosti kada su potrebne izuzetno dobre radne karakteristike uz minimalnu potrošnju energije. Geometrija ploha se koristi za kontrolu elektromagnetskih polja na način da omogućava detaljnu analizu raspodjele elektromagnetskih polja. Ovo je od velike važnosti za kontrolu smetnji, optimizaciju prijenosa energije te za poboljšanje sigurnosti uređaja.

Korištenje i razumijevanje geometrije ploha služi za inovacije u industrijama kao što u telekomunikacije, energetika i zdravstvo jer omogućava razvoj novih tehnologija kao što su visoko precizne antene, napredni senzori i kompaktni energetski sustavi. Također, primjenom geometrije ploha mogu se smanjiti troškovi i mase materijala. Ovo je važno u zrakoplovstvu i automobilskoj industriji jer su težina i troškovi u ovim industrijama ključni faktori.

Jedna od najvažnijih primjena geometrije ploha u elektrotehnici jest dizajn antena. Tijekom dizajniranja antena, geometrija ploha ima ključnu ulogu u odabiru oblika antene koji će najbolje odgovarati njezinoj funkciji. Oblik antene, koji je često u obliku zakrivljenih ploha kao što su elipsoidi ili paraboloidi, izravno utječe na karakteristike njezinog zračenja. Optimizacijom geometrije plohe omogućuje se antenama da primaju ili odašilju signale s maksimalnom efikasnošću, smanjujući gubitke i poboljšavajući radne karakteristike.

Za dizajniranje kondenzatora gdje oblik i raspored ploha određuju kapacitet uređaja, geometrija ploha ima veliki utjecaj. Kondenzatori su uređaji koji se sastoje od dvije paralelne plohe između kojih se pohranjuje električna energija u obliku elektrostatskog polja. Promjenom karakteristika tih ploha, kao što su promjena udaljenosti između ploha ili promjena njihove geometrije, uvelike se može utjecati na kapacitet i efikasnost kondenzatora.

Geometrija ploha se primjenjuje i na vodiče. Njihova zakrivljenost i raspored utječu na raspodjelu struje i generiranje elektromagnetskih polja što je ključno za projektiranje transformatora, motora i drugih električnih uređaja. Također, korištenjem geometrije ploha prilikom dizajna vodiča mogu se optimizirati kako bi se smanjili njihovi otpori i gubici.

U nastavku poglavlja će se detaljnije opisati primjene geometrije ploha na ovim uređajima.

7.1. Antene

Antena se definira kao pasivni ili aktivni element koji u sklopu s elektroničkim uređajima, kao što su radarski ili radijski prijemnici ili odašiljači, pretvara elektromagnetsku energiju, koja je vezana za električne vodove ili valovodove, u prostorni elektromagnetski val ili obrnuto. Ova pretvorba se postiže u određenim intervalima frekvencija za koje je antena namijenjena. Sukladno tome, antene se mogu podijeliti na uskopojasne, odnosno rezonantne, i na širokopojasne, odnosno aperiodske. Izvedba i oblik antene zavisi o energiji koja ju pobuđuje, a ponajviše o valnoj duljini za koju je antena projektirana. Prema ovom kriteriju razlikuju se dugovalne, srednjovalne, kratkovalne, ultrakratkovalne i mikrovalne antene [13].

Geometrija ploha je od ključne važnosti za dizajn, analizu i optimizaciju antena. Oblik i geometrija antena utječu na njihove radne karakteristike, kao što su učinkovitost, karakteristike zračenja, frekvencijski odziv i mnoge druge karakteristike koje su vezane za njihovo funkcioniranje. Različite vrste ploha omogućuju inženjerima da dizajniraju antene sukladno njezinoj traženoj funkciji. Ovime se mogu značajno poboljšati performanse antena, mogu se smanjiti smetnje te omogućiti bolji prijenos i prijem signala. Nadalje, optimizacija geometrije ploha može dovesti do smanjenja troškova proizvodnje antena, što je poželjno u većini industrija.

Jedna od najučestalijih primjena geometrije ploha na antenama je dizajniranje paraboličnih reflektorskih antena (slika 7.1). U ovim antenama se koristi reflektor u obliku paraboloida, plohe kojoj je svojstveno da fokusira paralelne zrake u jednu točku, koja je poznata kao žarište. Ova geometrijska karakteristika omogućava ovim vrstama antena da imaju visoku usmjerenost. To ih čini idealnim za prijem i prijenos signala na velikim udaljenostima, kao što su satelitske komunikacije, radarski sustavi i radioastronomija.

Slika 7.1. Parabolična antena [14].

Reflektor, koji je glavni dio antene, ima oblik paraboloida. Njegova dubina, promjer i žarišna duljina određuju radne karakteristike antene, kao što su njezina direktivnost, dobitak i širina snopa. Zbog ovakvog oblika reflektora omogućuje se da se sve zrake koje paralelno dolaze na njega reflektiraju u jednu točku koja se naziva žarište. Žarište je točka u kojoj se sve reflektirane zrake konvergiraju te je mjesto na kojem se žarište postavlja ključno za maksimalnu iskoristivost antene. U njemu se može nalaziti prijemnik ili odašiljač [15].

Parabolične antene imaju široku primjenu. Koriste se u satelitskim komunikacijama za prijem i prijenos signala između satelita i Zemlje. Njihova direktivnost omogućuje koncetraciju signala prema satelitu, i pri tome smanjuje gubitke i omogućuje pouzdanu komunikaciju na velikim udaljenostima. Primjenjuju se u radarskim sustavima jer ova vrsta antena ima mogućnost usmjeravanja elektromagnetskog snopa prema određenom cilju te detekciju reflektiranih signala. Također, astronomima parabolične antene služe za prikupljanje slabih radio signala iz svemira, čime se omogućava detekcija galaksija i drugih udaljenih astronomskih objekata. Nadalje, parabolične antene su svoju primjenu pronašle i u prijemu televizijskih signala sa satelita. Ovime je omogućeno primanje visokokvalitetnih signala na udaljenim lokacijama.

7.2. Kondenzatori

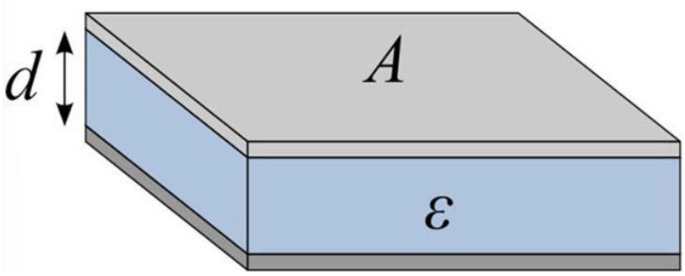
Električni kondenzator je komponenta električnog strujnog kruga čija je glavna funkcija pohrana energije u obliku električnog naboja. Ovaj naboj se stvara kada se električni napon primijeni između dvije vodljive plohe, elektrode ili kondenzatorske ploče, koje su odvojene nevodljivim slojem, izolatorom ili dielektrikom. Ova sposobnost kondenzatora da pohranjuje energiju naziva se električni kapacitet. Električni naboj koji se nakuplja na jednoj ploči kondenzatora jednak je po apsolutnoj vrijednosti naboju na suprotnoj ploči, ali s obrnutim predznakom [16].

Kondenzatori se razlikuju prema vrsti izolatora koji može biti zrak, ulje, papir, tinjac, staklo, plastika, keramika. Također, razlikuju se prema obliku i izvedbi elektroda, pa kondenzatori na temelju ovog kriterija mogu biti pločasti, cilindrični ili sferni.

Geometrija ploha kondenzatora izravno utječe na njegove glavne radne karakteristike. Oblik i veličina kondenzatorskih ploča određuje ukupnu površinu koja je dostupna za pohranu naboja. Što su ploče veće i što je udaljenost između njih manja, povećava se kapacitet kondenzatora te se time omogućava veća pohrana energije.

Udaljenost između ploča i oblik rubova ploča utječu na napon proboja kondenzatora. Ako ploče imaju oštre rubove može doći do stvaranja koncentracije električnog polja što dovodi do proboja dielektrika pri nižim naponima. Ako ploče imaju zaobljene rubove i ako se pravilno odabrala udaljenost između ploča, može se povećati napon proboja, poboljšavajući pouzdanost kondenzatora. Geometrija ploha kondenzatora utječe i na raspodjelu električnog polja na rubovima pri čemu može doći do pojave efekata koji smanjuju kapacitet kondenzatora i uzrokuju neželjene gubitke [17].

Pločasti kondenzator, prikazan na slici 7.2, jedan je od najjednostavnijih i najčešće korištenih tipova kondenzatora u električnim strujnim krugovima. Ovaj kondenzator se sastoji od dvije paralelne vodljive ploče, elektrode, koje su odvojene tankim slojem dielektrika, odnosno izolatora. Na kondenzatorske ploče se primjenjuje električni napon što dovodi do nakupljanja naboja na pločama. Na jednoj ploči se akumulira pozitivni naboj, dok se na drugoj ploči akumulira negativni naboj. Na ovaj način se stvara električno polje između tih dviju ploča čime se pohranjuje energija u kondenzatoru. Kada bi se izvor napona uklonio, u kondenzatoru bi se zadržao akumulirani naboj.



Slika 7.2. Pločasti kondenzator [18].

Električni kapacitet pločastog kondenzatora, kojim se definira njegova sposobnost pohranjivanja električnog naboja, definira se izrazom

$$C = \varepsilon \cdot \frac{A}{d} \tag{7.1}$$

gdje je

C – kapacitet kondenzatora [F],

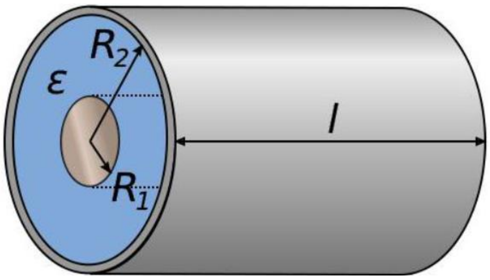
ε – permitivnost, svojstvo dielektrika između ploča [F/m].

A – površina jedne ploče [m^2],

d – udaljenost između ploča [m].

Iz izraza (7.1) se može zaključiti da geometrija ploča kondenzatora direktno utječe na njegovu radnu karakteristiku, odnosno kapacitet. Što je veća površina ploča, to je veći kapacitet kondenzatora. Razlog toga je da veća površina omogućuje veću količinu naboja koji se može pohraniti na pločama. Ploče su često izrađene u obliku tankih metalnih listova kako bi se povećala površina unutar ograničenih dimenzija uređaja. Smanjenje udaljenosti između ploča povećava kapacitet kondenzatora jer na manjoj udaljenosti može postojati jače električno polje što omogućava kondenzatoru da pohrani više naboja za isti napon. Međutim, postoji praktično ograničenje u tome koliko se ploče mogu približiti prije nego što se dogodi električni proboj dielektrika.

Cilindrični kondenzator, prikazan na slici 7.3, se sastoji od dva cilindrična vodiča gdje jedan cilindar djeluje kao unutarnja elektroda, a drugi cilindar djeluje kao vanjska elektroda. Između njih se nalazi dielektrični materijal koji omogućava pohranu električne energije. Princip rada cilindričnog kondenzatora veoma je sličan principu rada pločastog kondenzatora. Na njegove elektrode se primjeni napon što dovodi do nakupljanja naboja na unutarnjoj i vanjskoj elektrodi. Time se stvara električno polje između njih, odnosno u prostoru dielektrika, te se energija pohranjena u njemu može iskoristiti kada se kondenzator isprazni.



Slika 7.3. Cilindrični kondenzator [18].

Električni kapacitet cilindričnog kondenzatora definira se pomoću sljedećeg izraza:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \frac{l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \tag{7.2}$$

gdje je:

C – kapacitet kondenzatora [F],

ε – permitivnost, svojstvo dielektrika između ploča [F/m],

l – duljina cilindra [m],

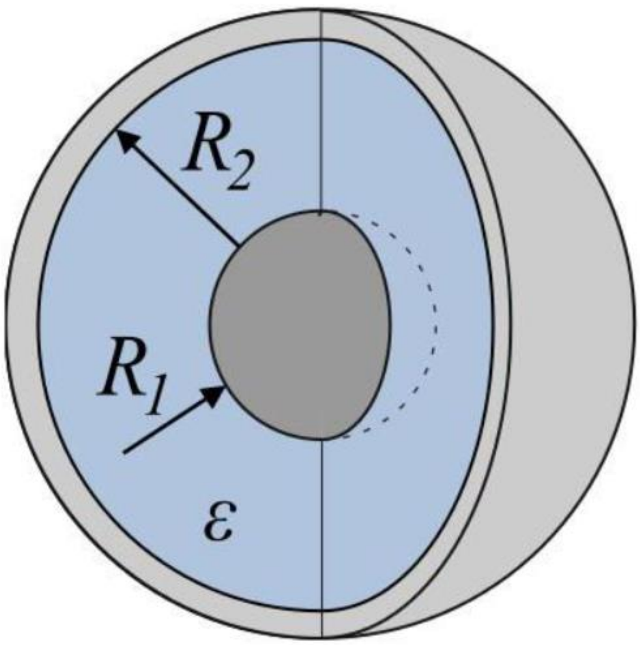
R_1 – radijus unutarnje elektrode [m],

R_2 – radijus vanjske elektrode [m].

Iz izraza (7.2) može se zaključiti da kapacitet cilindričnog kondenzatora ovisi o geometrijskim parametrima ploha, odnosno o radijusima i duljini unutarnje i vanjske elektrode. Omjer radijusa unutarnje i vanjske elektrode obrnuto proporcionalno utječe na kapacitet kondenzatora. Manji omjer radijusa, odnosno smanjenje razmaka između elektroda, povećava kapacitet, dok veći omjer radijusa, odnosno veći razmak između elektroda smanjuje kapacitet. Također, ovaj omjer utječe i na intenzitet električnog polja unutar kondenzatora. Duljina cilindra ima veliku ulogu u određivanju kapaciteta. Ako cilindar ima veću duljinu, cilindrični kondenzator ima veći kapacitet jer može pohraniti više naboja. Iz ovoga se može zaključiti da duljina cilindra, uz konstantan promjer, proporcionalno povećava kapacitet kondenzatora.

Sferni kondenzator, prikazan na slici 7.4, je vrsta kondenzatora koja se sastoji od dvije koncentrične sferne vodljive ljuske. Unutarnja ljuska predstavlja prvu elektrodu, a vanjska ljuska drugu elektrodu. Između tih sfernih ljuski nalazi se dielektrični materijal koji se ponaša kao izolator i omogućuje pohranu električne energije.

Princip rada ove vrste kondenzatora sličan je principima rada prethodno navedenih kondenzatora. U sfernom kondenzatoru se pohranjuje energija u obliku električnog polja, a to polje nastaje između dvije elektrode kada se na njima primjeni električni napon. Geometrija ovih kondenzatora rezultira specifičnom raspodjelom električnog polja, koje se širi radijalno od unutarnje prema vanjskoj ljusci.



Slika 7.4. Sferni kondenzator [18].

Električni kapacitet sfernog kondenzatora računa se pomoću sljedeće formule:

$$C = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1} \tag{7.3}$$

gdje je:

C – kapacitet kondenzatora [F],

ε – permitivnost, svojstvo dielektrika između ploča [F/m],

R_1 – radijus unutarnje sfere [m],

R_2 – radijus vanjske sfere [m].

Iz formule (7.3) se vidi da geometrija ploha u sfernim kondenzatorima ima veliku ulogu u određivanju kapaciteta kondenzatora. Kapacitet kondenzatora raste s povećanjem radijusa unutarnje sfere R_1 i vanjske sfere R_2. Ako je manja razlika između radijusa, onda dolazi do povećavanja kapaciteta, jer se omogućuje veća koncentracija naboja u manjem volumenu. Optimalan izbor radijusa omogućava postizanje visokog kapaciteta uz minimalne dimenzije uređaja. Debljina dielektričnog sloja između sfera, koja ovisi o razlici $R_2 - R_1$, također je od ključne važnosti za kapacitet. Kada je dielektrični sloj tanji, tada se povećava kapacitet, ali se i smanjuje otpornost na visoke napone. Odabir odgovarajuće debljine dielektrika je kompromis između kapaciteta i naponske otpornosti.

8. Analiza elekromagnetskih polja

Maxwellove jednadžbe su skup od 4 složene jednadžbe koje opisuju svijet elektromagnetike. Ove jednadžbe opisuju kako se električna i magnetska polja šire, međusobno djeluju i kako na njih utječu objekti. Maxwellove jednadžbe su ključne za razumijevanje antena i elektromagnetizma, iako su same jednadžbe dosta kompleksne i teško razumljive.

Maxwellove jednadžbe su zakoni, odnosno pravila koja se koriste za upravljanje ponašanjem električnih i magnetskih polja. Protok električne struje proizvest će magnetsko polje. Ako protok struje varira s vremenom, kao u bilo kojem valnom ili periodičnom signalu, magnetsko polje će također dovesti do električnog polja. Maxwellove jednadžbe pokazuju da odvojeni naboj, pozitivan i negativan, dovodi do električnog polja, a ako i ono varira u vremenu, također će dovesti do širenja električnog polja, što dalje dovodi do širenja magnetskog polja [19].

8.1. Gaussov zakon

Gaussov zakon je prva od Maxwellovih jednadžbi koja diktira kako se električno polje ponaša oko električnih naboja. Gaussov zakon može se napisati pomoću gustoće električnog toka D i gustoće električnog naboja ρ_V u sljedećem obliku:

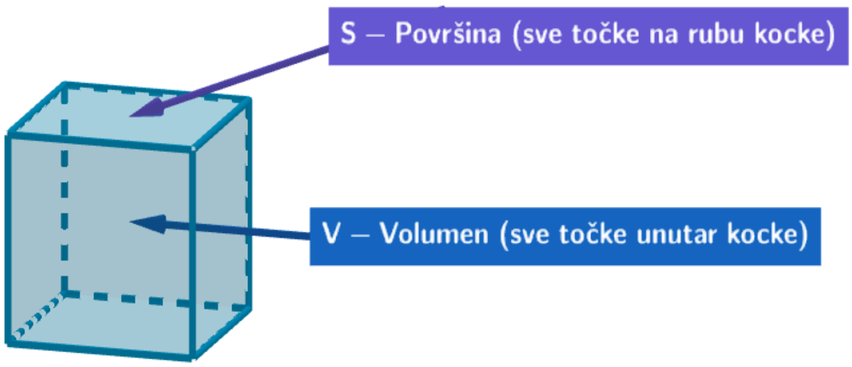
$$\nabla \cdot D = \rho_V \tag{8.1}$$

Jednadžba (8.1) predstavlja Gaussov zakon u točkastom obliku. To znači da je jednadžba istinita u bilo kojoj točki prostora. Odnosno, ako negdje postoji električni naboj, tada je divergencija D u toj točki različita od nule, inače je jednaka nuli.

Kako bi se ovaj zakon malo bolje razumio, prikazat će se njegov integralni oblik. Pretpostavit će se neki proizvoljni volumen V koji ima granicu S. Integriranjem gore navedene jednadžbe preko volumena V dobiva se Gaussov zakon u integralnom obliku:

$$\int_V (\nabla \cdot D) dV = \int_V \rho_V dV \ \rightarrow \int_S D \cdot dS = Q_{enc} \tag{8.2}$$

Kako bi se bolje razumjela ova jednadžba, popratit će se sa primjerom na slici 8.1. Na slici je prikazana kocka volumena V i ploha S predstavlja granicu ove kocke, odnosno šest ravnih ploha koje čine granicu volumena. Gore prikazana jednadžba opisuje da je količina naboja Q_{enc} unutar volumena V jednaka ukupnoj količini električnog toka D koji izlazi na površinu S. To jest, kako bi se odredio električni tok koji napušta područje V, potrebno je znati koliko je električnog naboja unutar volumena.



Slika 8.1. Prikaz volumena V s rubnom plohom S [19].

8.2. Gaussov zakon magnetizma

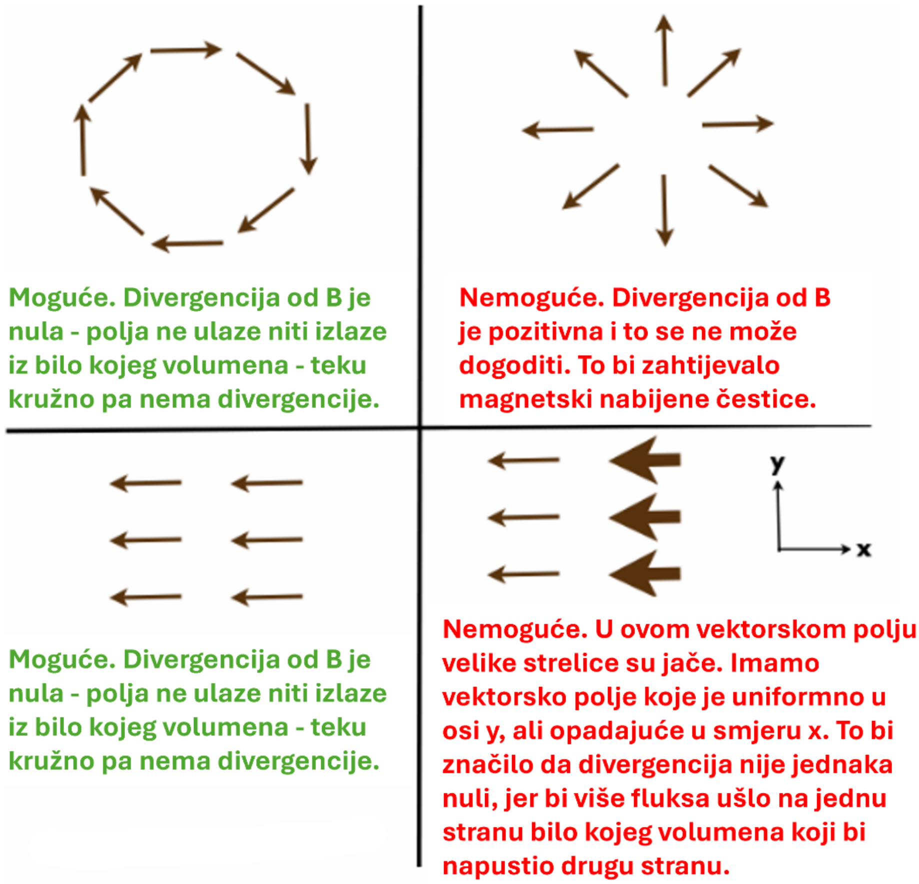
Druga Maxwellova jednadžba jest Gaussov zakon magnetizma koji se može opisati slijedećim jednadžbama:

$$\nabla \cdot B = 0 \tag{8.3}$$

$$\nabla \cdot H = 0$$

Ove dvije jednadžbe (8.3) govore kako je divergencija gustoće magnetskog polja B i divergencija magnetskog polja H uvijek jednaka nuli kroz bilo koji volumen.

Na slici 8.2 prikazani su slučajevi kada magnetska polja mogu i ne mogu postojati, kao posljedica Gaussovog zakona magnetizma. Ovaj zakon tvrdi kako magnetski monopoli ne postoje te kako magnetska polja teku u zatvorenoj petlji. Ovo vrijedi i za ravne valove, koji imaju petlju beskonačnog radijusa.



Slika 8.2. Moguća i nemoguća magnetska polja [19].

8.3. Faradayev zakon

Faradayev zakon pokazuje da promjenjivo magnetsko polje unutar petlje dovodi do inducirane struje, koja je posljedica sile ili napona unutar tog kruga. Ovaj zakon može se prikazati pomoću sljedećeg izraza:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} . \tag{8.4}$$

Jednadžba (8.4) opisuje kako promjena magnetskog polja B u vremenu t inducira vrtložno električno polje E.

Iz Fardayevog zakona se može zaključiti nekoliko stvari. Električna struja stvara magnetska polja i ta polja oko kruga uzrokuju električnu struju. Nadalje, magnetsko polje koje se mijenja u vremenu stvara električno polje koje kruži oko njega. Također, cirkulirajuće električno polje u vremenu stvara magnetsko polje koje se mijenja u vremenu.

8.4. Amperov zakon

Amperov zakon može se zapisati u obliku sljedeće jednadžbe:

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} + J . \tag{8.5}$$

Izvedba ovog zakona je dosta kompleksna, ali zaključci koji se mogu izvući iz ovog zakona su sljedeći. Tekuća električna struja J stvara magnetsko polje H koje kruži strujom. Gustoća električnog toka D koja se mijenja u vremenu t stvara magnetsko polje H koje kruži oko polja D.

9. Zaključak

Plohe igraju ključnu ulogu u mnogim aspektima našeg svakodnevnog života i profesionalnih aktivnosti. One čine temeljne koncepte koji omogućuju razumijevanje i modeliranje prostora i oblika. Bez ploha, mnoge industrije, uključujući inženjering, arhitekturu, dizajn i znanstvena istraživanja, suočavale bi se s velikim poteškoćama. Plohe nam omogućuju precizno opisivanje i analizu površina, što je neophodno za razvoj inovativnih rješenja, dizajn kvalitetnih proizvoda i pravilno razumijevanje znanstvenih i matematičkih koncepata. Također, služe kao alat za vizualizaciju i komunikaciju, te na taj način pomažu u prenošenju ideja i informacija drugima. Na kraju, razumijevanje ploha i njihova primjena ključni su za napredak u mnogim disciplinama, omogućujući nam rješavanje izazova i postizanje ciljeva u različitim područjima ljudskog djelovanja.

Plohe se mogu matematički opisati i predstaviti na različite načine, ovisno o specifičnim potrebama i primjenama. Svaka metoda zadavanja plohe nudi svoje prednosti i koristi se u različitim kontekstima. Osnovni načini zadavanja plohe su implicitni, eksplicitni i parametarski. Implicitno zadavanje ploha je metoda u kojoj se ploha opisuje jednadžbom koja povezuje sve tri prostorne koordinate x, y i z. Eksplicitno zadavanje ploha je metoda u kojoj se jedna koordinata, najčešće z, izražava kao funkcija druge dvije koordinate, obično x i y. Parametarsko zadavanje ploha je metoda koja opisuje plohe u trodimenzionalnom prostoru pomoću parametarskih funkcija koje određuju sve tri koordinate (x, y, z) u ovisnosti o jednom ili dva parametra. U završnom radu su na ove načine zadane neke vrste ploha.

Geometrijske transformacije, kao što su translacija, rotacija, skaliranje, refleksija i smicanje, su bitne jer se njihovim korištenjem stvaraju animacije, analiziraju naprezanja i deformacije u raznim strukturama te se proučavaju simetrije, izometrije i druga važna svojstva ploha.

Numeričke metode predstavljaju skup algoritama i tehnika osmišljenih za približno rješavanje matematičkih problema koji su previše složeni ili nemogući za analitičko rješavanje. Ove metode omogućavaju rješavanje linearnih i nelinearnih jednadžbi, diferencijalnih jednadžbi, integraciju funkcija, optimizaciju i drugih složenih matematičkih zadataka. Često se oslanjaju na iterativne postupke, koji počinju s početnim aproksimacijama i postupno poboljšavaju preciznost rješenja kroz niz iteracija. Međutim, preciznost i pouzdanost numeričkih metoda uvelike ovise o korištenim algoritmima, pravilnom izboru početnih uvjeta te raspoloživim računalnim resursima. U ovom završnom radu detaljnije su opisane metoda konačnih elemenata i metoda graničnih elemenata.

U elektrotehnici, geometrija ploha igra ključnu ulogu u analizi, dizajnu i optimizaciji brojnih električnih i elektromagnetskih uređaja i sustava. Mnoge komponente unutar ovih sustava imaju geometriju koja se može opisati kao plošna ili je izravno povezana s ponašanjem električnih i magnetskih polja na plohama. Oblik i veličina plohe značajno utječu na dizajn antena i kondenzatora, kao i na analizu elektromagnetskih polja, radara, komunikacijskih mreža i drugih složenih sustava. Razumijevanje i primjena geometrije ploha omogućava inženjerima da optimiziraju performanse ovih sustava, poboljšavajući njihovu efikasnost i funkcionalnost. Detaljnije se opisalo kako geometrija ploha utječe na antene, ponajviše na parabolične antene, i kako utječe na različite vrste kondenzatora.

Maxwellove jednadžbe predstavljaju skup od četiri temeljne jednadžbe koje opisuju svijet elektromagnetike. Ove jednadžbe detaljno prikazuju kako se električna i magnetska polja šire, kako međusobno djeluju i kako ih različiti objekti mogu mijenjati. Iako su Maxwellove jednadžbe složene i zahtijevaju duboko razumijevanje za njihovu potpunu interpretaciju, one su ključne za razumijevanje elektromagnetizma i rada antena. Ove jednadžbe funkcioniraju kao zakoni koji upravljaju ponašanjem električnih i magnetskih polja, čineći ih neizostavnim alatima u elektrotehnici i fizici.

Literatura

[1] »https://www.grad.hr/nastava/matematika/mat2/node23.html,« [Mrežno]. [Pokušaj pristupa 20 8 2024].

[2] »https://www.enciklopedija.hr/clanak/ploha,« [Mrežno]. [Pokušaj pristupa 20 8 2024].

[3] »https://www.grad.hr/geometrija/udzbenik/index.html,« [Mrežno]. [Pokušaj pristupa 19 8 2024].

[4] »http://lavica.fesb.unist.hr/matematika2/predavanja/node55.html,« [Mrežno]. [Pokušaj pristupa 19 8 2024].

[5] »https://www.grad.hr/geometrija/udzbenik/3/3-1-4c.html,« [Mrežno]. [Pokušaj pristupa 19 8 2024].

[6] »https://www.enciklopedija.hr/clanak/ploha,« [Mrežno]. [Pokušaj pristupa 20 8 2024].

[7] izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić, *Plošni integrali skalarnih i vektorskih polja,* Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Katedra za primijenjenu matematiku i fiziku.

[8] »https://www.enciklopedija.hr/clanak/translacija,« [Mrežno]. [Pokušaj pristupa 21 8 2024].

[9] »https://www.etf.ues.rs.ba/~ognjen/Racunarska%20grafika/Profesorka/Publikovano/RG-Transfomacije-4.pdf,« [Mrežno]. [Pokušaj pristupa 21 8 2024].

[10] »https://www.comsol.com/multiphysics/finite-element-method,« [Mrežno]. [Pokušaj pristupa 23 8 2024].

[11] »https://www.jousefmurad.com/fem/the-finite-element-method-beginners-guide/,« [Mrežno]. [Pokušaj pristupa 23 8 2024].

[12] »https://perso.univ-rennes1.fr/martin.costabel/publis/Co_PrinciplesBEM.pdf,« [Mrežno]. [Pokušaj pristupa 23 8 2024].

[13] W. L. a. G. A. T. Stutzman, Antenna Theory and Design, John Wiley & Sons, 2012.

[14] »https://hr.wikipedia.org/wiki/Paraboli%C4%8Dna_antena,« [Mrežno]. [Pokušaj pristupa 30 8 2024].

[15] C. A. Balanis, Antenna Theory: Analysis and Design, John Wiley & Sons, 2016.

[16] »https://enciklopedija.hr/clanak/elektricni-kondenzator,« [Mrežno]. [Pokušaj pristupa 1 9 2024].

[17] S. J. R. W. a. T. V. D. Ramo, Fields and Waves in Communication Electronics, John Wiley & Sons, 1994.

[18] »https://hr.puntomarinero.com/what-is-capacitance-capacitance/,« [Mrežno]. [Pokušaj pristupa 1 9 2024].

[19] »https://www.maxwells-equations.com/ampere/amperes-law.php,« [Mrežno]. [Pokušaj pristupa 1 9 2024].

Sažetak i ključne riječi

Plohe imaju ključnu ulogu u mnogim segmentima našeg svakodnevnog života i profesionalnog rada. One predstavljaju osnovne koncepte koji omogućuju jasno razumijevanje i precizno modeliranje prostora i oblika. Bez njih bi bilo znatno teže analizirati i opisivati različite geometrijske površine, što je neophodno u industrijama kao što su arhitektura, inženjering, dizajn i znanstvena istraživanja.

U ovom završnom radu obrađena je tematika geometrije ploha i primjena ploha u elektrotehnici. Objašnjena su svojstva plohe, načini na koje se ona može zadati i geometrijske transformacije. Numeričke metode pružaju mogućnost rješavanja linearnih i nelinearnih jednadžbi, diferencijalnih jednadžbi, integracije funkcija, optimizacije, kao i drugih kompleksnih matematičkih problema. Primjena geometrije ploha je izrazito važna u elektrotehnici jer uvelike olakšava analizu, dizajn i optimizaciju brojnih električnih i elektromagnetskih uređaja i sustava. Detaljnije su opisane antene i kondenzatori te kako različite vrste ploha utječu na njihovo funkcioniranje. Na kraju završnog rada su spomenute Maxwellove jednadžbe koje se koriste pri analiziranju elektromagnetskih polja.

Ključne riječi: geometrija ploha, ploha, geometrijske transformacije, numeričke metode, antena, kondenzator

Summary and key words

Surfaces play a key role in many areas of our daily lives and professional work. They are fundamental concepts that enable a clear understanding and precise modeling of space and form. Without them, it would be much more difficult to analyze and describe different geometric surfaces, which is necessary in industries such as architecture, engineering, design and scientific research.

This bachelor thesis deals with the topic of surface geometry and the application of surfaces in electrical engineering. The properties of surfaces, methods for their definition and geometric transformations are explained. Numerical methods offer the possibility of solving linear and non-linear equations, differential equations, function integration, optimization and other complex mathematical problems. The application of surface geometry is particularly important in electrical engineering as it greatly facilitates the analysis, design and optimization of numerous electrical and electromagnetic devices and systems. Antennas and capacitors are described in detail, and it reference to Maxwell's equations used in the analysis of electromagnetic fields.

Keywords: surface geometry, surface, geometric transformations, numerical methods, antenna, capacitor