

# Gaussova integracija

---

Žefran, Daniel

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:190:046451>

Rights / Prava: [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-12-25**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Engineering](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI

**TEHNIČKI FAKULTET**

Sveučilišni prijediplomski studij elektrotehnike

Završni rad

**GAUSSOVA INTEGRACIJA**

Rijeka, rujan 2024.

Daniel Žefran  
0069090587

SVEUČILIŠTE U RIJECI

**TEHNIČKI FAKULTET**

Sveučilišni prijediplomski studij elektrotehnike

Završni rad

**GAUSSOVA INTEGRACIJA**

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Komentor: doc. dr. sc. Angela Bašić-Šiško

Rijeka, rujan 2024.

Daniel Žefran  
0069090587

Rijeka, 13.03.2024.

Zavod: Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike  
Predmet: Inženjerska matematika ET

## ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Daniel Žefran (0069090587)**  
Studij: Sveučilišni prijediplomski studij elektrotehnike (1030)

Zadatak: **Gaussova integracija / Gaussian integration**

Opis zadatka:

U ovom radu potrebno je opisati problem numeričke integracije, osnovne elemente opće Gaussove integracijske formule te stupanj egzaktnosti integracijske formule. Potrebno je definirati pojam ortogonalnosti funkcija, napraviti pregled različitih klasa ortogonalnih polinoma te obrazložiti vezu između nultočaka ortogonalnih polinoma i čvorova Gaussovih integracijskih formula. Potrebno je opisati postupak za određivanje težina integracijske formule. Obradenu metodu potrebno je primijeniti za približno izračunavanje vrijednosti integrala u apstraktnim primjerima i primjerima iz inženjerstva.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanja diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Zadatak uručen pristupniku: 20.03.2024.

Mentor:  
izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Komentor:  
doc. dr. sc. Angela Bašić-Šiško

Predsjednik povjerenstva za  
završni ispit:  
prof. dr. sc. Dubravko Franković

# IZJAVA

Sukladno članku 7. Stavku 1. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku sveučilišnih prijediplomskih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 4. travnja 2023., izjavljujem da sam samostalno izradio završni rad prema zadatku preuzetom dana 20.03.2024.

Rijeka, 10.rujna.2024



---

Daniel Žefran

*Zahvaljujem se mentoru izv. prof. dr. sc. Ivanu Dražiću i komentorici doc. dr. sc. Angeli Bašić-Šiško na izrazitoj pristupačnosti, podršci i razumijevanju ne samo prilikom pisanja završnoga rada već tokom cjelokupnog trajanja studija. Također bi se htio zahvaliti svim kolegama, prijateljima i obitelji koji su mi pružali podršku tada kada je bila najpotrebnija.*

## Sadržaj

<b>1. Uvod</b>	<b>3</b>
<b>2. Osnovno o numeričkoj matematici</b>	<b>4</b>
2.1. Primjena numeričke matematike . . . . .	4
2.2. Greška . . . . .	5
2.2.1. Vrste grešaka . . . . .	5
2.3. Konvergencija . . . . .	6
2.4. Stabilnost . . . . .	7
2.4.1. Opći primjer stabilnosti . . . . .	7
2.5. Ortogonalnost . . . . .	8
2.5.1. Ortogonalni polinomi . . . . .	8
<b>3. Integralne sume</b>	<b>10</b>
3.1. Zadani primjer . . . . .	10
3.2. Riemannova integralna suma . . . . .	11
3.2.1. Izračun pomoću Riemannove integralne sume . . . . .	13
3.3. Trapezno pravilo . . . . .	15
3.3.1. Izračun pomoću Trapeznoga pravila . . . . .	16
3.4. Simpsonovo pravilo . . . . .	18
3.4.1. Izračun pomoću Simpsonovog pravila . . . . .	19
<b>4. Gaussovo integracijsko pravilo</b>	<b>21</b>
4.1. Podjela Gaussovih kvadrature pravila . . . . .	22
4.2. Gauss-Legendreovo integracijsko pravilo . . . . .	22
4.2.1. Promjena intervala integracije . . . . .	24
4.2.2. Primjer Gauss-Legendreove integracije . . . . .	25
4.3. Gauss-Čebiševljevo integracijsko pravilo . . . . .	26
4.3.1. Transformacija funkcije i promjena intervala . . . . .	27
4.3.2. Primjer Gauss-Čebiševljevog integracijskog pravila . . . . .	28
4.4. Gauss-Laguerre integracijsko pravilo . . . . .	30
4.4.1. Transformacija za integraciju . . . . .	31
4.4.2. Primjer Gauss-Laguerrove integracije . . . . .	33
4.5. Gauss-Hermitovo integracijsko pravilo . . . . .	36

4.5.1. Transformacija za integraciju . . . . .	37
4.5.2. Primjer Gauss-Hermitove integracije . . . . .	37
<b>5. Primjena u inženjerstvu</b>	<b>41</b>
<b>6. Zaključak</b>	<b>45</b>
<b>Literatura</b>	<b>46</b>
<b>Sažetak i ključne riječi</b>	<b>48</b>
<b>Summary and key words</b>	<b>49</b>



## 1. Uvod

Kvadratura je povijesni matematički pojam koji označava računanje nekakve površine. U staroj Grčkoj, kvadratura je podrazumijevala konstrukciju geometrijskog kvadrata s jednakom površinom kao neki zadani oblik, koristeći samo šestar i ravnalo. Takav način računanja bio je prikladan za izračun površina pravokutnih oblika, ali za krivuljaste figure, poput kruga, postupak je bio znatno složeniji te je u 19. stoljeću bilo dokazano da je kvadratura kruga nemoguća.

U srednjovjekovnoj Europi, kvadratura je označavala izračun površine pomoću različitih metoda, najčešće metodom nedjeljivosti. Ova metoda omogućila je Galileu<sup>1</sup> i drugim matematičarima da izračunaju površine složenih oblika, poput cikloide i hiperbole. Razvoj integralnog računa omogućio je univerzalnu metodu za računanje površina, čime je termin kvadratura zamijenjen modernijim pojmom "numerička integracija".

U modernome svijetu numerička integracija se koristi za izračun integrala u kojima je funkcija koja se integrira poznata samo u određenim točkama i/ili je izračun integrala te funkcije kompleksan ili nemoguć. Ponekad je i moguće izračunati integral, ali ga je lakše i brže numerički aproksimirati, posebno ako se računa integral sa beskonačnim intervalom integracije.

Numerička integracija se općenito svodi na podjelu intervala integracije na konačan broj segmenata na čijim se rubovima računaju vrijednosti podintegralnih funkcija koje se sumiraju kako bi se dobila aproksimacija integrala. Ukoliko su svi segmenti unutar intervala integracije jednakih veličina onda se za izračun integrala koriste integralne sume kao što je najosnovnija Riemannova suma ili kompleksnije Newton-Cotesove formule. Međutim, da bi se postigla željena točnost, ponekada je potrebno podijeliti interval integracije na jako veliki broj segmenata što značajno usporava računanje. Ovdje se pojavljuje pojam Gaussove integracije pošto se ona temelji na tome da su segmenti intervala integracije različitih veličina što omogućuje da se optimalno rasporede točke u kojima se računa vrijednost podintegralne funkcije. Takvom podjelom segmenata mogu se dobiti precizniji rezultati uz značajno manji broj točaka što ubrzava cjelokupan proces računanja i smanjuje šansu pogreške pri izračunu.

U nastavku rada napisan je uvod u numeričku integraciju kao i njeni osnovni pojmovi. Opisane se integralne sume od kojih su predstavljene Riemannova suma, Trapezno pravilo i Simpsonovo pravilo. Dalje je opisana Gaussova integracija te njena integracijska pravila od kojih su izvedeni Gauss-Legendre, Gauss-Čebišev, Gauss-Laguerre te Gauss-Hermite. Sva navedene vrste numeričke integracije su korištene na istome primjeru kako bi se mogle međusobno usporediti također kao i na primjerima u kojima su vidljive vrline svake vrste integracije.

---

<sup>1</sup>Galileo Galilei, punim imenom Galileo di Vincenzo Bonaiuti de' Galilei (15. veljače 1564. – 8. siječnja 1642.), bio je talijanski matematičar, fizičar, astronom, polihistor i filozof.

## 2. Osnovno o numeričkoj matematici

Numerička matematika, ili numerička analiza, razlikuje se od osnovnog algebarskog rješavanja problema tj. rješavanja pomoću diferencijalnog računa. Dok sa algebarskim ili osnovnim diferencijalnim rješavanjem zadataka često postoji vrlo malo izbora kako riješiti nekakav problem i dobiveno rješenje je algebarsko, u numeričkoj matematici postoji mnogo više izbora, a rješenja su prikazana kao tablice vrijednosti ili grafikoni. Primjerice, problemi iz numeričke integracije često se svode na podjelu intervala integracije na konačni broj segmenata, na čijim se rubovima računaju vrijednosti podintegralne funkcije i množe s određenim težinskim koeficijentima, kako bi se dobila aproksimacija za traženu vrijednost integrala. Točke u kojima se računaju vrijednosti funkcije nazivaju se čvorovi integracije. Važno je napomenuti da za razliku od osnovnog algebarskog rješavanja koje pruža egzaktno rješenje sva dobivena rješenja numeričke analize imaju određenu razinu pogreške tj. gotovo nikada se neće dobiti egzaktno već samo aproksimacijsko rješenje. Kako bi se ostvarilo zadovoljavajuće rješenje potrebno je pažljivo izabrati koju numeričku metodu ili algoritam koristiti s obzirom na to koliko precizan rezultat je potreban, s kojom početnom vrijednošću se želi započeti računanje i druge čimbenike [4]. Ovo poglavlje prikazuje osnovan prijelaz s algebarskog tipa matematike na numerički tip matematike.

### 2.1. Primjena numeričke matematike

Unutar inženjerskih područja, možemo se susresti s problemima elastičnosti i trebati riješiti jednadžbu poput  $x \cosh(x) = 1$  ili složeniji problem gdje je potrebno pronaći korijen višeg polinoma. Također, može se naići na integral kao što je

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx, \quad (2.1)$$

koji se ne može riješiti osnovnim algebarskim računom. Takvi problemi, koje je teško ili nemoguće riješiti algebarski, često se pojavljuju u svim matematičkim područjima. Oni zahtijevaju numeričke metode, odnosno sustavne metode koje su prikladne za numeričko rješavanje problema na računalima ili kalkulatorima. Takva rješenja rezultiraju tablicama brojeva, grafičkim prikazima ili oboje. Tipične numeričke metode su iterativne prirode i, za dobro odabran problem i dobru početnu vrijednost, često će rezultirati željenim odgovorom. Proces od zadanog problema unutar nekog područja rada do aproksimacije prikladne za numeričku analizu do konačnog odgovora obično zahtijeva sljedeće korake:

1. Modeliranje: Postavlja se matematički model problema, kao što je integral, sustav jednadžbi ili diferencijalna jednadžba.

2. Odabir numeričke metode i parametara: Bira se numerička metoda i parametri (npr. veličina koraka), uz moguću preliminarnu procjenu pogreške.
3. Programiranje: Ovisno o problemu može se koristiti algoritam za pisanje odgovarajućeg programa pomoću kojega će se računati problem.
4. Računanje: Provođi se računanje.
5. Interpretacija rezultata: Rezultati se tumače u fizičkim ili drugim izrazima, te se odlučuje hoće li se ponoviti računanje ako su potrebni dodatni rezultati.

Koraci 1 i 2 su povezani. Mala promjena modela često može omogućiti učinkovitiju metodu. Da bi se odabrale odgovarajuće metode, prvo ih je potrebno upoznati. Kroz rad će se detaljno objasniti i prikazati osnovne te često korištene metode za numeričko integriranje, kao što su Newton-Cotesove formule te računanje Gaussovom integracijom i njezinim varijacijama, uz algebarske primjere.

Kako bi se bolje razumjela priroda numeričkog rada, nastaviti će se s nekim jednostavnim općim pojmovima.

## 2.2. Greška

Konačni rezultati izračuna nepoznatih veličina općenito su aproksimacije; to jest, nisu točni, već uključuju greške. Takva greška može biti rezultat kombinacije sljedećih učinaka [4]:

- Greške zaokruživanja koje nastaju pri zaokruživanju brojeva.
- Eksperimentalne greške su greške u početnim podacima (vjerojatno nastale uslijed mjerenja).
- Greške uslijed skraćivanja nastaju kada prekinemo računanje prijevremeno, primjerice kada zamijenimo Taylorov red zbrojem njegovih prvih nekoliko članova.
- Ove greške ovise o korištenoj metodi i moraju se posebno razmotriti za svaku metodu.

### 2.2.1. Vrste grešaka

**Definicija 2.1.** *Ako je  $\tilde{a}$  aproksimacijska vrijednost čija egzaktna vrijednost je  $a$ , njihovu razliku*

$$\epsilon = a - \tilde{a}, \quad (2.2)$$

*nazivamo greškom od  $\tilde{a}$ , to jest*

$$a = \tilde{a} + \epsilon. \quad (2.3)$$

**Primjer 2.1.** Na primjer, ako je  $\tilde{a} = 10.5$  aproksimacija vrijednosti  $a = 10.2$ , njezina greška iznosi  $\epsilon = -0.3$ .

**Definicija 2.2.** Relativna greška  $\epsilon_r$  od  $\tilde{a}$  je definirana kao

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{a} = \frac{a - \tilde{a}}{a} = \frac{\text{Greška}}{\text{Stvarna vrijednost}}, \quad (a \neq 0). \quad (2.4)$$

Ovo djeluje beskorisno jer je  $a$  nepoznat, ali ako je  $|\epsilon|$  puno manji od  $|\tilde{a}|$  onda se može koristiti  $\tilde{a}$  umjesto  $a$  i dobiva se

$$\epsilon_r \approx \frac{\epsilon}{\tilde{a}}. \quad (2.5)$$

Ovaj izraz također izgleda problematično jer je  $\epsilon$  nepoznat, no u praksi se može izračunati ocjena greške  $\beta$  na sljedeći način

$$|\epsilon| \leq \beta, \quad \text{što znači} \quad |a - \tilde{a}| \leq \beta. \quad (2.6)$$

Ovo nam govori koliko daleko aproksimacijska vrijednost  $\tilde{a}$  može biti od stvarne vrijednosti  $a$  u najgorem slučaju. Slično za relativnu grešku, ocjena greške je vrijednost  $\beta_r$  koja glasi

$$|\epsilon_r| \leq \beta_r, \quad \text{što znači} \quad \frac{|a - \tilde{a}|}{a} \leq \beta. \quad (2.7)$$

### 2.3. Konvergencija

**Definicija 2.3.** Neka je  $a_n$ , niz realnih brojeva. Kaže se da niz  $a_n$  konvergira prema  $a \in \mathbb{R}$  ako za svako  $\epsilon > 0$  postoji pozitivan cijeli broj  $\mathbb{N}$  takav da za svaki  $n \in \mathbb{N}$  za koji je  $n \geq N$  vrijedi

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \text{ili ekvivalentno,} \quad a - \epsilon < a_n < a + \epsilon. \quad (2.8)$$

U tom slučaju, broj  $a$  naziva se limes niza i piše se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Ako niz  $a_n$  ne konvergira, kaže se da je niz divergentan.

Iz definicije izravno slijedi, koristeći Arihmedovo svojstvo<sup>1</sup>, da niz  $a_n$  konvergira prema  $a$  ako i samo ako za svako  $\epsilon > 0$  postoji realan broj  $n$  takav da za svaki  $n \in \mathbb{N}$  za koji je  $n > \mathbb{N}$  vrijedi

$$(a_n - a) < \epsilon. \quad (2.9)$$

**Primjer 2.2.** Neka  $a_n = \frac{1}{n}$  za  $n \in \mathbb{N}$ . Tvrdi se da  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . To će se potvrditi koristeći definiciju.

Neka je  $\epsilon > 0$ . Izabire se cijeli broj  $\mathbb{N} > \frac{1}{\epsilon}$ . (Takav cijeli broj  $\mathbb{N}$  postoji zbog Arihmedovog svojstva.) Tada, ako je  $n \leq \mathbb{N}$ , dobiva se

$$|a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\mathbb{N}} < \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon. \quad (2.10)$$

<sup>1</sup>Arihmedovo svojstvo jedan je od temeljnih teorema u matematičkoj analizi koji tvrdi da za bilo koja dva pozitivna realna broja  $a$  i  $b$  postoji prirodan broj  $n$  takav da je  $n \cdot a = b$ . Iz teorema odmah slijedi da, primjerice, skup prirodnih brojeva nije ograničen odozgo. Grubo govoreći, ovo je svojstvo nepostojanja beskonačno velikih (ili beskonačno malih) elemenata u skupu realnih brojeva [30].

Konvergencija je ključni pojam u numeričkoj analizi koji opisuje svojstvo numeričkog algoritma da se približava točnom rješenju problema s povećanjem broja iteracija ili koraka algoritma. Bitno je razumjeti konvergenciju kako bismo mogli procijeniti koliko je algoritam učinkovit i pouzdan u rješavanju specifičnog matematičkog problema [12].

## 2.4. Stabilnost

U području numeričke analize, numerička stabilnost je općenito poželjno svojstvo numeričkih algoritama. Precizna definicija stabilnosti ovisi o kontekstu. Jedan kontekst je numerička linearna algebra, a drugi su algoritmi za rješavanje običnih i parcijalnih diferencijalnih jednadžbi diskretnom aproksimacijom. U numeričkoj linearnoj algebri, glavna briga su nestabilnosti uzrokovane blizinom singularnosti različitih vrsta, kao što su vrlo male ili jako bliske svojstvene vrijednosti.

S druge strane, u numeričkim algoritmima za diferencijalne jednadžbe briga je rast pogrešaka zaokruživanja i/ili malih fluktuacija u početnim podacima koje mogu uzrokovati veliko odstupanje konačnog rezultata od točnog rješenja. Neki numerički algoritmi mogu prigušiti male fluktuacije (pogreške) u ulaznim podacima, dok ih drugi ih mogu povećati. Izračuni za koje se može dokazati da ne povećavaju aproksimacijske pogreške nazivaju se numerički stabilnima. Jedan od uobičajenih zadataka numeričke analize je pokušati odabrati algoritme koji su robusni – to jest, ne proizvode drastično različit rezultat za vrlo malu promjenu u ulaznim podacima [13].

### 2.4.1. Opći primjer stabilnosti

Za primjer će se uzeti izračun korijena iz 2 ( $\sqrt{2} = 1.41421$ ) na način da postoji početna aproksimacija  $x_0$  te se zatim računaju poboljšane aproksimacije  $x_1, x_2, \dots$ . Prva metoda koja će se koristiti je Babilonska metoda, definirana kao

$$x_{k+1} = \frac{x_k + \frac{2}{x_k}}{2}. \quad (2.11)$$

Druga metoda je izmišljena za primjer i nazvana "Metoda X" te je definirana kao

$$x_{k+1} = (x_k^2 - 2)^2 + x_k. \quad (2.12)$$

Nekoliko iteracija svake metode prikazano je u Tablici 2.1, s početnim pretpostavkama  $x_0 = 1,4$  i  $x_0 = 1,42$  [6].

Tablica 2.1. Primjer stabilnosti dvaju metoda

Babilonska	Babilonska	Metoda X	Metoda X
$x_0 = 1.4$	$x_0 = 1.42$	$x_0 = 1.4$	$x_0 = 1.42$
$x_1 = 1.4142857\dots$	$x_1 = 1.41422535\dots$	$x_1 = 1.4016$	$x_1 = 1.42026896$
$x_2 = 1.414213564\dots$	$x_2 = 1.41421356242\dots$	$x_2 = 1.4028614\dots$	$x_2 = 1.42056\dots$
		...	...
		$x_{1000000} = 1.41421\dots$	$x_{27} = 7280.2284\dots$

Iz tablice se može zaključiti da mala promjena početnog uvjeta Babilonske metode nije dovela do značajne promjene u rezultatu, što ukazuje na njezinu stabilnost. S druge strane, Metoda X predstavlja primjer nestabilne metode jer je promjena početnog uvjeta rezultirala potpuno drugačijim ishodom.

## 2.5. Ortogonalnost

U matematici, ortogonalne funkcije su funkcije koje su međusobno "nezavisne" u smislu da se jedna funkcija ne može prikazati pomoću druge te njihov skalarni produkt iznosi nula. Ove funkcije pripadaju funkcijskom prostoru, tj. skupu funkcija koje dijele neka zajednička svojstva, poput mogućnosti zbrajanja ili množenja s nekim brojem.

Kada u funkcijskom prostoru funkcija ima interval kao svoju domenu, skalarni umnožak može biti integral umnoška funkcija preko tog intervala što izgleda sljedeće:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)}g(x)dx. \quad (2.13)$$

Funkcije  $f$  i  $g$  su ortogonalne ako je ovaj umnožak jednak nuli, tj. ako vrijedi  $\langle f, g \rangle = 0$  kada je  $f \neq g$ , što znači da su te funkcije "nezavisne" jedna od druge [14].

### 2.5.1. Ortogonalni polinomi

Ortogonalni polinomi su skupina polinoma gdje je svaki par različitih polinoma međusobno ortogonalan u odnosu na neku težinsku funkciju, odnosno kada se ti polinomi množe i njihov se produkt integrira preko određenog intervala, rezultat je jednak nuli.

**Primjer 2.3.** *Na primjer, Legenderevi polinomi su definirani kao ortogonalni sustav s obzirom na težinsku funkciju  $w(t) = 1$  na intervalu  $[-1, 1]$ .  $P_n(x)$  je polinom sa stupnjem  $n$ , takav da*

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)w(t)dx = 0 \quad \text{ako } n \neq m. \quad (2.14)$$

*Uz dodatni uvjet  $P_n(1) = 1$ , svi koeficijenti svakog polinoma mogu se sustavno odrediti, što dovodi do eksplicitne reprezentacije u potencijama  $1, x, x^2, x^3 \dots$  temeljem čega se dobiju potpuna svojstva polinoma.*

Najčešće korišteni ortogonalni polinomi su klasični ortogonalni polinomi, koji uključuju Hermiteove polinome, Laguerreove polinome i Jacobijeve polinome. Gegenbauerovi polinomi čine najvažniju klasu Jacobijevih polinoma, oni uključuju Čebiševljeve polinome i Legendreove polinome kao posebne slučajeve. Svaka vrsta napomenutih polinoma ima svoju specifičnu težinsku funkciju u kombinaciji sa različitim intervalima integracije [15].

Područje ortogonalnih polinoma razvilo se krajem 19. stoljeća iz proučavanja lančanih razlomaka koje je započeo P. L. Čebišev<sup>2</sup>. Ortogonalni polinomi nalaze primjenu u raznim područjima: numeričkoj analizi (integracijska pravila), teoriji vjerojatnosti, teoriji reprezentacije (Liejevih grupa, kvantnih grupa i srodnih objekata), enumerativnoj kombinatorici, algebarskoj kombinatorici, matematičkoj fizici (teorija slučajnih matrica, integrabilni sustavi itd.) i teoriji brojeva [16].

---

<sup>2</sup>Pafnuty Lvovich Chebyshev (16. svibnja 1821. – 8. prosinca 1894.) [2] je bio ruski matematičar i smatra se ocem ruske matematike.

### 3. Integralne sume

Jedan od pristupa za izračunavanje integrala koristi koncept integralne sume. Taj proces uključuje podjelu ukupnog intervala zadanog integrala na više dijelova ili podintervala, a unutar svakog podintervala odabire se točka, poznata kao integracijska točka. Tada se površina nad svakim podintervalom izračunava kao umnožak širine podintervala i vrijednosti funkcije na odabranoj integracijskoj točki. Zbroj svih takvih umnožaka daje integralnu sumu, koja se koristi kao aproksimacija za integral.

Točnost integralne sume ovisi o broju podintervala i načinu odabira integracijskih točaka. Ako se povećava broj podintervala, rezultat postaje precizniji, ali i računski kompleksniji. U slučaju kada broj podintervala teži beskonačnosti i njihova se podintervalna duljina smanjuje prema nula, integralna suma konvergira prema točnoj vrijednosti integrala [17].

Načinom odabira različitih integracijskih točaka dobivamo različita pravila integracije pomoću integralnih suma neke od kojih glase:

- Riemannove sume, najosnovnije, koriste pravokutnike za aproksimaciju
- Trapezno pravilo, preciznije, koristi trapeze za aproksimaciju
- Simpsonovo pravilo, najpreciznije, koristi parabolu za aproksimaciju

Trapezno i Simpsonovo pravilo spadaju pod Newton-Cotesove formule koje su skup metoda za numeričku integraciju (također poznatu kao kvadratura) koje su osmišljene za izračunavanje integrala uzimanjem uzoraka integranda na jednako udaljenim točkama. Ove metode su nazvane po Isaacu Newtonu<sup>1</sup> i Rogeru Cotesu<sup>2</sup>.

Newton–Cotesove formule su posebno korisne kada su vrijednosti integrala dane na jednako udaljenim točkama. Međutim, ako postoji mogućnost odabira točaka na kojima se integral aproksimira, alternativne metode poput Gaussove integracije općenito su učinkovitije i točnije [18].

#### 3.1. Zadani primjer

Kroz cijeli rad će se koristiti sljedeći primjer kako bi se mogla usporediti svaka spomenuta metoda integracijskih suma i kasnije svako pravilo Gaussove integracije. Kao primjer će se računati

---

<sup>1</sup>Isaac Newton (Woolsthorpe, 25. prosinca 1642. – Kensington, 20. ožujka 1727.), engleski fizičar, matematičar i astronom.

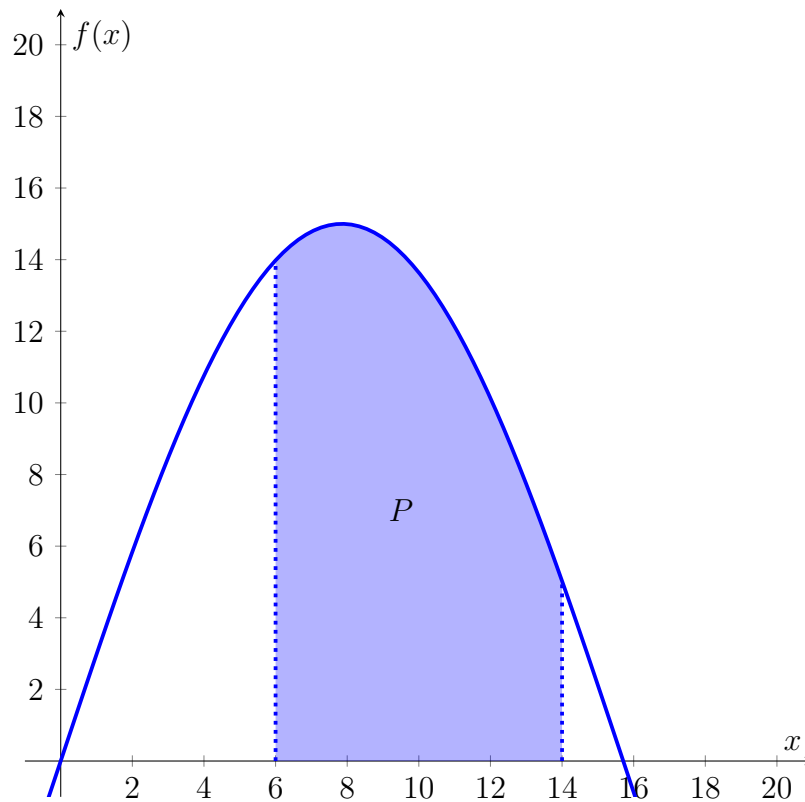
<sup>2</sup>Roger Cotes (10. srpanj 1682. – 5. lipanj 1716.) bio je engleski matematičar poznat sa svojom suradnjom sa Isaac Newtonom



površina  $P$  ispod funkcije  $f(x) = 15 \sin \frac{x}{5}$  na intervalu od  $[6, 14]$ , integral ovog primjera izgleda sljedeće:

$$\int_6^{14} 15 \sin \left( \frac{x}{5} \right) dx = 15 \int_6^{14} \sin \left( \frac{x}{5} \right) dx. \quad (3.1)$$

Njegov grafički prikaz je prikazan na sljedećoj slici gdje je površina  $P$  koja se računa osjenčana plavom bojom. (Slika 3.1)



Slika 3.1. Grafički prikaz površine  $P$  iz danog primjera. Izvor: Izrada autora

Prilikom analize biti će vidljive različite prednosti i nedostaci svake pojedine metode. Ključni aspekt analize svake numeričke metode integracije je proučavanje ponašanja greške aproksimacije, tj. metoda koja ima malu grešku za mali broj podintervala se smatra boljom od metode koja ima malu grešku za veliki broj podintervala.

S obzirom na to da izračunavanje svakog pojedinog podintervala traje određeno vrijeme, a integral može biti izuzetno složen zbog velikog broja oscilacija funkcije i/ili velike duljine intervala, složenost integrala postaje značajan faktor pri izboru metode numeričke integracije.

### 3.2. Riemannova integralna suma

**Definicija 3.1.** Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija definirana na zatvorenom intervalu  $[a, b]$  realnih brojeva, i neka je  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  particija intervala  $[a, b]$ , tj.  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ .

Riemannov zbroj  $S$  funkcije  $f$  preko intervala  $[a, b]$  s particijom  $P$  definiran je kao:

$$S = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i, \quad (3.2)$$

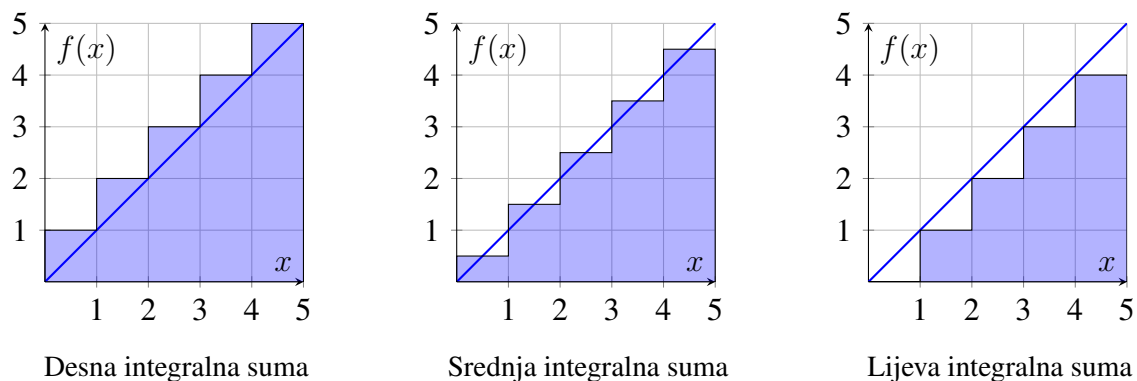
gdje je  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  i  $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ . Mogu se proizvesti različiti Riemannovi zbrojevi ovisno o tome koji se  $x_i^*$  odabere. Na kraju, to neće biti važno ako je funkcija integrabilna, tj. kada razlika ili širina suma  $\Delta x_i$  teži nuli.

Riemannove sume su nastale kao rješenje problema određivanja površine geometrijskih figura koje je postavio Arhimed<sup>3</sup> i to rješenje se smatra jednim od prvih značajnijih rezultata matematičke analize. Naziv su dobile po njemačkom matematičaru Georg Friedrich Bernhard Riemannu<sup>4</sup> koji ih je prvi definirao.

Korištenjem Riemannove integralne sume kao metodu aproksimacije integrala potrebno je interval određenog integrala  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , podijeliti na jednake podintervale gdje je konačan skup točaka  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  takav da je  $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$ . Svakome podintervalu odredimo njegovu integracijsku točku  $f(\xi_0), f(\xi_1) \dots f(\xi_n)$ . Sumom svih širina podintervala pomnoženim sa vrijednostima funkcije na odabranim integracijskim točkama dobivamo matematički izraz za Riemannovu integralnu sumu koji glasi:

$$\sigma(f) = \sum_{n=1}^{k-1} (x_{n+1} - x_n) \cdot f(\xi_n). \quad (3.3)$$

Postoje tri osnovne vrste određivanja integralnih suma prikazane na slici 3.2. Ove varijante se razlikuju po načinu na koji podijeljeni podintervali dodiruju zadanu funkciju [1].



Slika 3.2. Prikaz vrsta integralnih suma. Izvor: Izrada autora

<sup>3</sup>Arhimed (oko 287.-212. pr. Kr.), poznat i kao Arhimed iz Sirakuze, bio je starogrčki fizičar, astronom i jedan od najvećih matematičara staroga vijeka, navodno jedan od trojice najgenijalnijih matematičara svih vremena [28].

<sup>4</sup>Georg Friedrich Bernhard Riemann (17. rujna 1826. – 20. srpnja 1866.) je bio njemački matematičar [29].

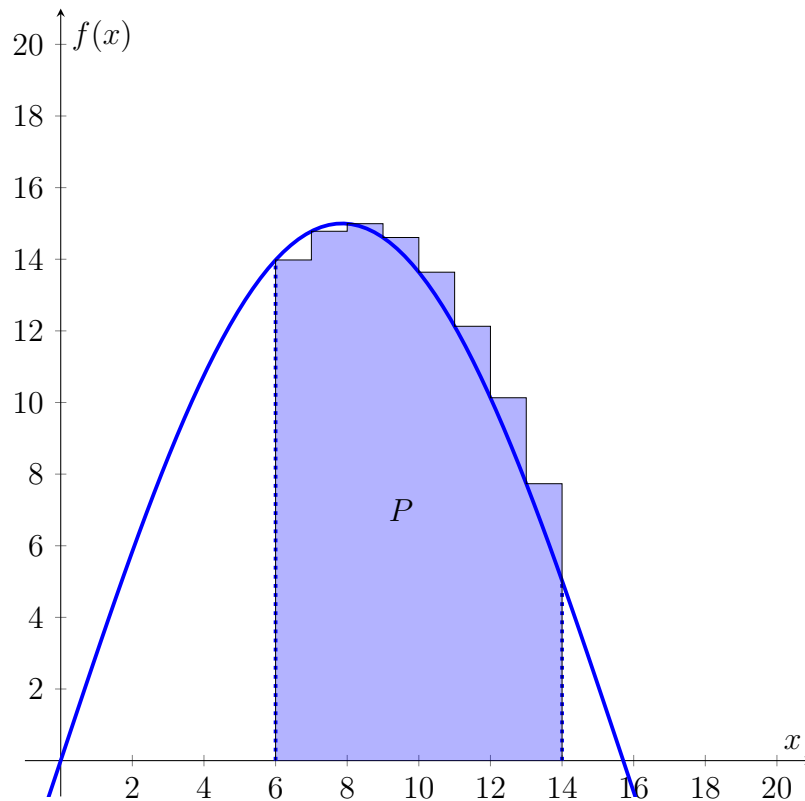
### 3.2.1. Izračun pomoću Riemannove integralne sume

Sljedeće će se izračunati površina  $P$  koja je zadana u primjeru na slici 3.1. Za izračun površine će se koristiti lijeva Riemannova integralna suma. Iz slike se vidi da je područje integracije  $[6, 14]$  tako da bi se uzele točke  $a = 6 \leq 7 \leq 8 \leq \dots \leq 13 \leq 14 = b$ . Modificirana formula koja će se koristiti za izračun glasi

$$P_{\text{lijeva}} = \sum_{n=1}^k (x_{n+1} - x_n) \cdot f(\xi_n), \quad (3.4)$$

gdje  $k$  označava brojeve uzetih podintervala u ovom slučaju  $0 > k \leq 9$ ,  $x_n$  označava točke funkcije i  $f(\xi_n)$  označava vrijednost funkcije na odabranoj integracijskoj točki.

Za primjer slijedi pripadajući grafički prikaz lijeve Riemannove integralne sume gdje je površina  $P$  određena lijevom Riemannovom sumom osijenčana plavom bojom. (Slika 3.3) Prikaz srednje i desne Riemannove sume izgledao bi slično ali bi se razlikovao u točki dodira podintervala sa funkcijom kao prikazano na slici 3.2.



Slika 3.3. Grafički prikaz površine  $P$  određenu lijevom Riemannovom sumom. Izvor: Izrada autora

Točke podintervala su poznate te se trebaju odrediti vrijednosti funkcije na svim integracijskim točkama  $f(\xi_n)$ .

Njihov izračun glasi:

$$\begin{aligned}
 f(\xi_6) &= 15 \cdot \sin\left(\frac{6}{5}\right) \approx 13.98, \\
 f(\xi_7) &= 15 \cdot \sin\left(\frac{7}{5}\right) \approx 14.78, \\
 f(\xi_8) &= 15 \cdot \sin\left(\frac{8}{5}\right) \approx 14.99, \\
 f(\xi_9) &= 15 \cdot \sin\left(\frac{9}{5}\right) \approx 14.61, \\
 f(\xi_{10}) &= 15 \cdot \sin\left(\frac{10}{5}\right) \approx 13.64, \\
 f(\xi_{11}) &= 15 \cdot \sin\left(\frac{11}{5}\right) \approx 12.13, \\
 f(\xi_{12}) &= 15 \cdot \sin\left(\frac{12}{5}\right) \approx 10.13, \\
 f(\xi_{13}) &= 15 \cdot \sin\left(\frac{13}{5}\right) \approx 7.73, \\
 f(\xi_{14}) &= 15 \cdot \sin\left(\frac{14}{5}\right) \approx 5.02.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Sljedeće se sve vrijednosti uvrštavaju u formulu i dobiva se rezultat:

$$\begin{aligned}
 P_{lijeva} &= \sum_{n=6}^{14} (x_{n+1} - x_n) \cdot f(\xi_n) = [(7 - 6) \cdot 13.98] + [(8 - 7) \cdot 14.78] + \\
 &[(9 - 8) \cdot 14.99] + [(10 - 9) \cdot 14.61] + [(11 - 10) \cdot 13.64] + \\
 &[(12 - 11) \cdot 12.13] + [(13 - 12) \cdot 10.13] + [(14 - 13) \cdot 7.73] + \\
 &[(15 - 14) \cdot 5.02] = 107.01.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Stvarna vrijednost površine P iznosi:

$$P = \int_6^{14} 15 \sin\left(\frac{x}{5}\right) = 97.84. \tag{3.7}$$

Analizom računa i grafičkog prikaza može se primjetiti da je dobivena vrijednost površine iznimno gruba aproksimacija stvarne vrijednosti. Da bi se približili stvarnoj vrijednosti morali bi uzeti puno veći broj podintervala, no tolikim povećanjem broja podintervala bi se značajno odužilo vrijeme izračuna. Zbog navedenog ograničenja u preciznosti i efikasnosti, Riemannova integralna suma nije često prisutna u modernim matematičkim izračunima.

### 3.3. Trapezno pravilo

Trapezno pravilo temelji se na principu izračuna integrala pomoću odabira neke dekompozicije  $D$  koja dijeli interval  $[a, b]$  na  $n$  jednakih dijelova,  $D = a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ , gdje je prirast jednak

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}. \quad (3.8)$$

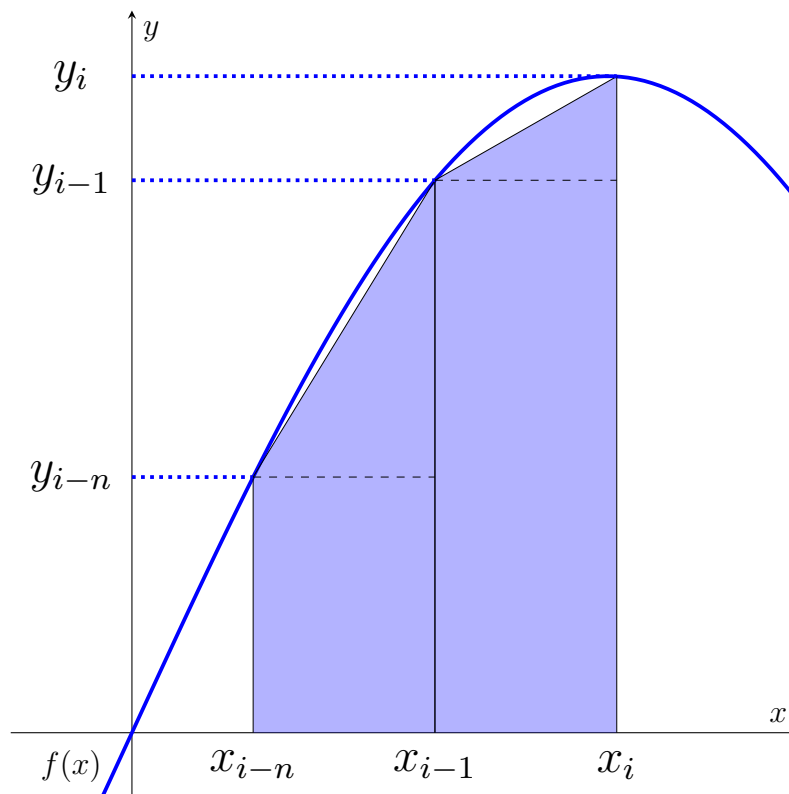
Zadana krivulja  $y = f(x)$  aproksimira se izlomljenom crtom koja nastaje spajanjem točaka  $(x_{i-1}, y_{i-1})$  i  $(x_i, y_i)$ , a integral  $\int_a^b f(x)dx$  aproksimira se s tako dobivenom integralnom sumom  $J_n$ . Površina  $i$ -tog trapeza računa se kao zbroj površine pravokutnika i trokuta, što daje

$$\begin{aligned} J_n &= \sum_{i=1}^n \left( \Delta x \cdot y_{i-1} + \Delta x \cdot \frac{y_i - y_{i-1}}{2} \right) = \Delta x \sum_{i=1}^n \frac{y_{i-1} + y_i}{2} = \\ &= \Delta x \cdot \left( \frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

odnosno, pojednostavljeno trapezno pravilo glasi:

$$J_n = \Delta x \left( \frac{y_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{y_n}{2} \right). \quad (3.10)$$

Trapezno pravilo je najjednostavnije pravilo u skupu Newton-Cotes-ovih formula. Trapezno pravilo također se može promatrati kao rezultat dobiven uzimanja prosjeka lijeve i desne Riemannove sume, a ponekad se i definira na ovaj način [3].



Slika 3.4. Primjer trapeznoga pravila. Izvor: Izrada autora

Slično kao i kod Riemannove sume interval zadanog integrala se dijeli na jednake podintervale, no unutar svakog podintervala je trapez sačinjen od pravokutnika čija se površina računa umnoškom  $\Delta x \cdot y_{i-1}$  i trokuta izračunat umnoškom

$$\Delta x \cdot \frac{(y_i - y_{i-1})}{2}, \quad (3.11)$$

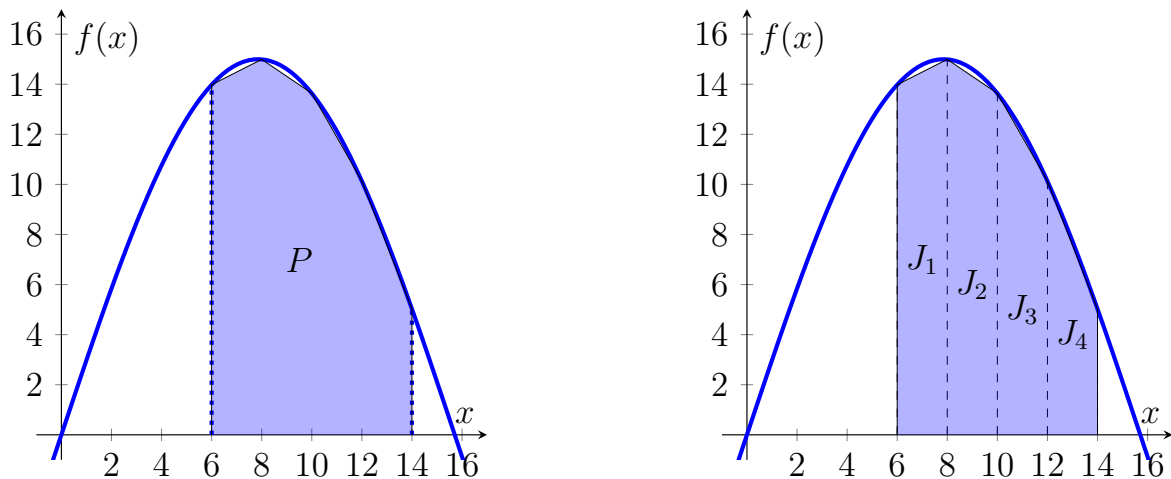
prikazanim u slici 3.4. Sumom svih izračunanih trapeza dobivamo aproksimacijsku površinu koju omeđuje zadana funkcija. Također vrijedi da povećanjem broja intervala greška aproksimacije se smanjuje ali na trošak vremena računanja.

### 3.3.1. Izračun pomoću Trapeznoga pravila

Sljedeće će se uz pomoć Trapeznog pravila izračunati površina  $P$  iz danog primjera na slici 3.1. Kao i u prijašnjem izračunu sa Riemannovom sumom iz slike se vidi da je površina omeđena točkama  $[6, 14]$  no sada će se uzeti duplo manje točaka  $a = 6 \leq 8 \leq 10 \leq 12 \leq 14 = b$ . Za izračun će se koristiti pojednostavljeno Trapezno pravilo koje glasi:

$$J_p = \sum_{i=1}^n (J_n) = \sum_{i=1}^n \left[ \Delta x_n \cdot \left( \frac{y_n + y_{n+1}}{2} \right) \right]. \quad (3.12)$$

Grafički prikaz Trapezne formule na zadanom primjeru prikazana je na slici 3.5.



Slika 3.5. Grafički prikaz površine  $P$  određenu Trapeznim pravilom (lijevo) i prikaz segmenata  $J_n$  koji čine površinu  $P$  (desno). Izvor: Izrada autora

Iz grafičkoga prikaza izlučujemo sljedeće:

$$\begin{aligned}
 y_6 &= f(6) = 15 \cdot \sin\left(\frac{6}{5}\right) \approx 13.98, \\
 y_8 &= f(8) = 15 \cdot \sin\left(\frac{8}{5}\right) \approx 14.99, \\
 y_{10} &= f(10) = 15 \cdot \sin\left(\frac{10}{5}\right) \approx 13.64, \\
 y_{12} &= f(12) = 15 \cdot \sin\left(\frac{12}{5}\right) \approx 10.13, \\
 y_{14} &= f(14) = 15 \cdot \sin\left(\frac{14}{5}\right) \approx 5.02.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Zbog pojednostavljenja svaki segment (trapez) će se izračunati pojedinačno kao prikazano na slici 3.5:

$$\begin{aligned}
 J_n &= \Delta x_n \cdot \left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right), \\
 J_1 &= (8 - 6) \cdot \frac{13.98 + 14.99}{2} = 28.9, \\
 J_2 &= (10 - 8) \cdot \frac{14.99 + 13.64}{2} = 28.63, \\
 J_3 &= (12 - 10) \cdot \frac{13.64 + 10.13}{2} = 23.77, \\
 J_4 &= (14 - 12) \cdot \frac{10.13 + 5.02}{2} = 15.15.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Zbrajanjem svih segmenata  $J_n$  dobiva se vrijednost  $J_p$  koja je aproksimacija vrijednosti površine  $P$  te iznosi:

$$\begin{aligned}
 J_p &= \sum_{i=1}^n (J_n) = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = \\
 &= 28.97 + 28.63 + 23.77 + 15.15 = \\
 &= 96.52.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Usporedbom sa stvarnom vrijednosti:

$$P = \int_6^{14} 15 \sin\left(\frac{x}{5}\right) = 97.84. \tag{3.16}$$

Može se primijetiti značajno približavanje stvarnoj vrijednosti korištenjem duplo manjeg broja točaka u usporedbi s računom uz pomoć Riemannove sume. Da se koristio isti broj točaka, dobila bi se vrijednost s gotovo zanemarivom razinom pogreške, ali bi se za računanje potrošilo više vremena. Još veći napredak će se moći primijetiti na izračunu uz pomoć Simpsonove formule.

### 3.4. Simpsonovo pravilo

Simpsonovo pravilo je metoda numeričke integracije koja se koristi za približno izračunavanje određenog integrala. Ako je funkcija  $f(x)$  definirana na intervalu  $[a, b]$ , tada se integral funkcije  $f(x)$  može aproksimirati kao:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + f(b)], \quad (3.17)$$

gdje je  $h = \frac{(b-a)}{n}$  širina intervala.

Za slučaj kada je interval  $[a, b]$  podijeljen na  $n$  jednakih segmenata (gdje je  $n$  paran broj), proširena verzija Simpsonovog pravila je:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(a) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{n-2})) + f(b)], \quad (3.18)$$

gdje je  $h = \frac{b-a}{n}$  širina svakog segmenta, a  $x_i$  su točke na segmentima:

$$x_i = a + ih \quad \text{za} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (3.19)$$

Simpsonovo pravilo, imenovano po Thomasu Simpsonu<sup>5</sup>, spada pod Newton-Cotesove formule za aproksimaciju integrala funkcije  $f$  koristeći kvadratne polinome tj. parabolne lukove umjesto pravih linija koje se koriste u trapezoidnom pravilu. Simpsonovo pravilo može se derivirati integriranjem Lagrangeovog interpolacijskog polinoma trećeg reda prilagođenog funkciji na tri jednako udaljene točke. Konkretno, neka je funkcija  $f$  tablična u točkama  $x_0$ ,  $x_1$  i  $x_2$  koje su jednako udaljene s razmakom  $h$ , i označimo  $f_n = f(x_n)$ . Tada Simpsonovo pravilo kaže da

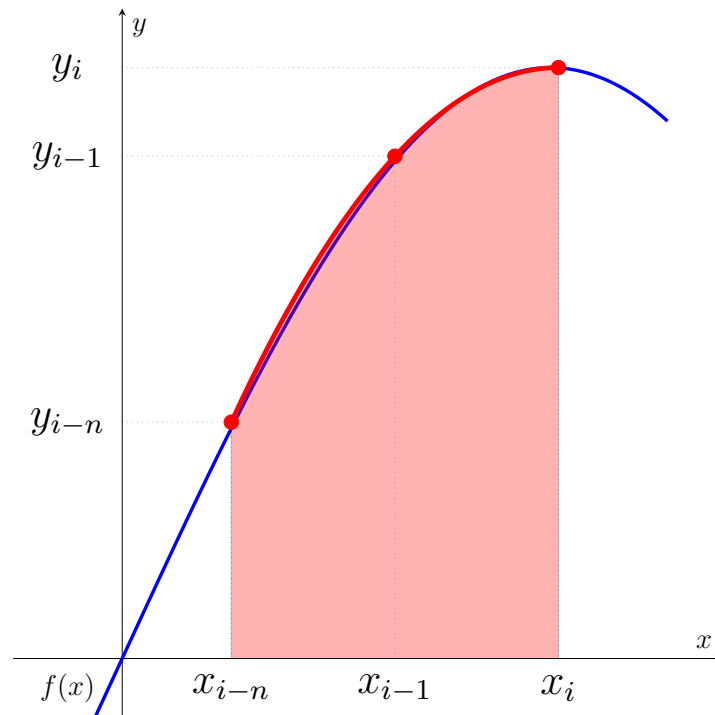
$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_0+2h} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]. \quad (3.20)$$

Budući da koristi kvadratne polinome za aproksimaciju funkcija, Simpsonovo pravilo zapravo daje točne rezultate kada se koristi za aproksimaciju integrala polinoma do kubnog reda [19].

Na grafičkom prikazu na slici 3.6 vidljivo je kako izgleda parabola koja prolazi kroz tri jednako razmaknute točke pomoću koje bi se računao integral. Što se više točaka uzme parabola će biti sve bliža izgledu funkcije koja se integrira te će aproksimacija biti preciznija.

<sup>5</sup>Thomas Simpson (20. kolovoza 1710. – 14. svibnja 1761.) bio je britanski matematičar i izumitelj poznat po Simpsonovom pravilu, koje se koristi za aproksimaciju određenih integrala.





Slika 3.6. Grafički prikaz parabole (crveno) Simpsonovog pravila. Izvor: Izrada autora

### 3.4.1. Izračun pomoću Simpsonovog pravila

Sada će se pomoću Simpsonovog pravila izračunati integral funkcije  $f = 15 \sin\left(\frac{x}{5}\right)$  na intervalu od  $[6, 14]$ . Za izračun će se uzeti četiri  $n = 4$  jednako raspoređene točke iste kao i kod trapeznog pravila  $a = 6 \leq 8 \leq 10 \leq 12 \leq 14 = b$ . Izračun će glasiti sljedeće:

$$\begin{aligned}
 \int_6^{14} 15 \sin\left(\frac{x}{5}\right) dx &= \frac{1}{3} \cdot \frac{b-a}{n} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{14-6}{4} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] \\
 &= \frac{2}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)].
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Izračun funkcije na zadanim točkama:

$$\begin{aligned}
 f(x_0) &= f(6) = 15 \sin\left(\frac{6}{5}\right) \approx 13.98059, \\
 f(x_1) &= 4f(8) = 4 \cdot 15 \sin\left(\frac{8}{5}\right) \approx 59.97442, \\
 f(x_2) &= 2f(10) = 2 \cdot 15 \sin\left(\frac{10}{5}\right) \approx 27.27892, \\
 f(x_3) &= 4f(12) = 4 \cdot 15 \sin\left(\frac{12}{5}\right) \approx 40.52779, \\
 f(x_4) &= 2f(14) = 15 \sin\left(\frac{14}{5}\right) \approx 5.02482.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Dobivene rezultate potrebno je uvrstiti u izračun (3.21), te dobiva se sljedeće:

$$\begin{aligned} \int_6^{14} 15 \sin\left(\frac{x}{5}\right) dx &= \frac{2}{3} [13.98059 + 59.97442 + 27.27892 + 40.52779 + 5.02482] \\ &= \frac{2}{3} [146.78654]. \\ &= 97.85769 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Usporedbom sa stvarnom vrijednosti:

$$P = \int_6^{14} 15 \sin\left(\frac{x}{5}\right) = 97.84. \tag{3.24}$$

Može se primijetiti poboljšanje aproksimacije u odnosu na trapezno pravilo kod istog broja točaka i značajno manje kompleksan te brži izračun. Vidljivo je da je do sada Simpsonovo pravilo očit izbor za izračun integrala pomoću integralnih suma pošto nudi najbržu i najprecizniju aproksimaciju integrala.

U sljedećem poglavlju će se prikazati kako je moguće povećati preciznost i istovremeno smanjiti broj potrebnih točaka za aproksimaciju uz pomoć Gaussovih integracijskih pravila.

## 4. Gaussovo integracijsko pravilo

U numeričkoj analizi formule za integraciju koje smo dosad vidjeli koriste vrijednosti funkcija na unaprijed određenim tj. jednako udaljenim čvorovima i daju točne rezultate za polinome do određenog stupnja. No, u integraciji pomoću Gaussovog integracijskog pravila čvorovi funkcije nisu unaprijed određeni već se mogu optimalno rasporediti tako da numerička integracija daje točnije rezultate upotrebom manjeg broja točaka, što omogućava postizanje bržih i preciznijih rezultata [20].

Gaussovo integracijsko pravilo ili drukčije Gaussovo kvadrturno pravilo, nazvano po Carlu Friedrichu Gaussu<sup>1</sup>, je integracijsko pravilo konstruirano da daje točan rezultat za polinome stupnja  $2n - 1$  ili manje, odabirom odgovarajućih čvorova  $x_i$  i težinskih funkcija  $w_i$  za vrijednosti  $i = 1, \dots, n$ . Moderna formulacija koja koristi ortogonalne polinome razvijena je od strane Carla Gustava Jacobi<sup>2</sup> 1826. godine. Gaussova integracija temelji se na sljedećoj formuli:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i), \quad (4.1)$$

gdje je  $f(x)$  ne-negativna funkcija koja je integrabilna na intervalu  $[a, b]$ ,  $w_i$  su težinski koeficijenti dok su  $x_i$  čvorovi integracije. Može se pokazati da su kvadrturni čvorovi  $x_i$  korijeni polinoma koji pripada klasi ortogonalnih polinoma (klasa ortogonalna s obzirom na ponderirani unutarnji produkt). Ovo je ključno opažanje za izračunavanje Gaussovih kvadrturnih čvorova i težina [9].

**Definicija 4.1.** *Stupanj preciznosti integralne formule je najveći broj  $m \in \mathbb{N}$  takav da je  $E(x^k) = 0$ , za svaki  $k = 0, 1, \dots, m$ , ali je  $E(x^{m+1}) \neq 0$ . Vrijednost integrala  $I = \int_a^b f(x)dx$  aproksimira se integralnom formulom općenitog oblika*

$$I^* = \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i). \quad (4.2)$$

*Ta formula ima stupanj preciznosti  $m$ , dakle da vrijedi*

$$\int_a^b x^k dx - \sum_{i=1}^n \omega_i x_i^k = 0, \quad \text{za svaki} \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (4.3)$$

*Iz gornje jednakosti, dobije se sustav s  $m + 1$  jednadžbom, i  $2n$  nepoznanica, nepoznanice su koeficijenti  $\omega_i$  i čvorovi  $x_i$ . Stupanj preciznosti Gaussove integralne formule će biti  $m = 2n - 1$  [8].*

<sup>1</sup>Johann Carl Friedrich Gauß, 30. travnja 1777. – 23. veljače 1855.) bio je njemački geodet, matematičar, fizičar i astronom. Ubraja se među najznačajnije matematičare svih vremena.

<sup>2</sup>Carl Gustav Jacob Jacobi (10. prosinca 1804. - 18. veljače 1851.) bio je njemački matematičar koji je dao temeljni doprinos eliptičkim funkcijama, dinamici, diferencijalnim jednadžbama, determinantama i brojevima teorija.

Najčešće područje integracije za takvo pravilo je  $[-1, 1]$ , pa se pravilo navodi kao:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i). \quad (4.4)$$

Ovo specifično pravilo poznato je kao Gauss–Legendreovo kvadraturno pravilo gdje će rezultat dobiven korištenjem kvadraturnog pravila biti točna aproksimacija za gore naveden integral samo ako se  $f(x)$  dobro aproksimira polinomom stupnja  $2n - 1$  ili manje na području od  $[-1, 1]$  [7].

#### 4.1. Podjela Gaussovih kvadraturnih pravila

Kod podjele Gaussovih integracijskih pravila najvažniji pojam je težinska funkcija, označena sa  $w$ , jer ona određuje kako su različiti dijelovi intervala integracije ponderirani. Na primjer, jedna vrsta može koristiti konstantnu težinsku funkciju, dok druga može funkciju koja eksponencijalno opada. Težinska funkcija pokazuje za koje vrste funkcija je određeno integracijsko pravilo najprikladnije.

Drugi pojam je interval integracija gdje su neki intervali ograničeni, poput intervala  $[-1, 1]$ , drugi su beskonačni, kao  $[0, \infty)$ . Ovisno o navedenim svojstvima postoje različita Gaussova integracijska pravila, od kojih su neka najpoznatija navedena u Tablici 4.1.

Tablica 4.1. Različite Gaussove integracijske formule ovisno o težinskoj funkciji

Težinska funkcija $w$	Interval	Integracijsko pravilo
1	$[-1, 1]$	Gauss-Legendre
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1, 1]$	Gauss-Čebišev
$\sqrt{1-x^2}$	$[-1, 1]$	Gauss-Čebišev 2. Vrste
$e^{-x}$	$[0, \infty)$	Gauss-Laguerre
$e^{-x^2}$	$(-\infty, +\infty)$	Gauss-Hermite

Primjena navedenih vrsta pravila omogućava integraciju funkcija koje imaju određeni problem u integraciji kao što je nekakva singularnost tj. točka u kojoj vrijednost funkcije teži k beskonačnosti. Svako pravilo ima svoju svrhu i specifičnu vrstu funkcija koje bolje računa od ostalih pravila.

U nastavku će se detaljno razmotriti vrste Gaussove integracije navedene u Tablici 4.1, uključujući njihove specifične formule, čvorove, težine i primjene, čime će se dobiti sveobuhvatan uvid u ove metode i njihovu primjenu u numeričkoj integraciji.

#### 4.2. Gauss-Legendreovo integracijsko pravilo

Gauss-Legendreova integracija je oblik Gaussove integracije korišten za aproksimaciju određenog integrala funkcije. Težinska funkcija ovog pravila je  $w(x) = 1$  što omogućava značajno

jednostavniju i bržu integraciju u usporedbi sa drugim pravilima kompliciranijih težinskih funkcija. Integracija se provodi u intervalu  $[-1, 1]$  te pravilo ima sljedeći oblik:

$$\int_{-1}^1 f(x) \cdot 1 dx \approx \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i). \quad (4.5)$$

Ova vrsta integracije temelji se na tome da se koriste korijeni Legendreovih polinoma  $P_n(x)$  kako bi se odredili čvorovi  $w_i$  koji će se koristiti u gore navedenoj formuli za izračun integrala. Prvih nekoliko Legendreovih polinoma glase sljedeće [10]:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x). \end{aligned} \quad (4.6)$$

**Definicija 4.2.** Za integraciju funkcije  $f$ , pridruženi ortogonalni polinomi su Legendreovi polinomi  $P_n(x)$ . Uz  $n$ -ti polinom normaliziran tako da je  $P_n(1) = 1$ ,  $i$ -ti Gaussov čvor,  $x_i$ , je  $i$ -ti korijen od  $P_n$ , a težine su dane formulom [11]:

$$\omega_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)[P_n'(x_i)]}. \quad (4.7)$$

Tablica 4.2. Tablica čvorova i točaka Gauss-Legendarovog pravila do  $n = 5$

$n$	$x_i$	$\omega_i$
1	0	2
2	$\pm 0.57735$	1
3	0	0.888889
	$\pm 0.774597$	0.555556
4	$\pm 0.339981$	0.652145
	$\pm 0.861136$	0.347855
5	0	0.568889
	$\pm 0.838469$	0.478629
	$\pm 0.90618$	0.236927

#### 4.2.1. Promjena intervala integracije

Kako bi se mogli integrirati funkcije koje nemaju interval od  $[-1, 1]$  potrebno je provesti promjenu intervala. Ta promjena se radi na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \left[ x = \frac{(t+1)(b-a)}{2} + a \right], \quad t \in [-1, 1] \\ &= \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t}{2} + \frac{b-a}{2} + a\right) \frac{b-a}{2} dt \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t}{2} + \frac{b-a}{2} + a\right) dt. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Za računanje svih primjera Gaussove integracije koristiti će se kod u programskom jeziku Python, gdje će ovakva promjena intervala integracije biti izvedena na sljedeći način:

```
import numpy as np
from numpy.polynomial.legendre import leggauss
from scipy.integrate import quadrature

deg = 1 # Definiran broj točaka
cvorovi, tezine = leggauss(deg) # -1, 1

a = 0 # Donja granica integracije
b = 8 # Gornja granica integracije

# Zadana funkcija
def f(x):
    return np.cos(x)

# Pretvorba intervala integracije na [-1,1]
cvorovi = (cvorovi + 1) * (b-a)/2 + a
tezine = (b-a)/2 * tezine # a, b

# Izracun integrala sa novim intervalom integracije
integral_approx = np.dot(tezine, f(cvorovi))
```

#### 4.2.2. Primjer Gauss-Legendreove integracije

Uz pomoć Gauss-Legendreovog pravila izračunati će se integral funkcije  $f = 15 \sin\left(\frac{x}{5}\right)$  na intervalu od  $[6, 14]$ . Prvo potrebno je promijeniti interval integracije na  $[-1, 1]$  na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \int_6^{14} 15 \sin\left(\frac{x}{5}\right) dx &= \left[ x = \frac{(t+1)(b-a)}{2} + a, \quad dx = \frac{b-a}{2} dt \right], \quad t \in [-1, 1] \\ &= \int_{-1}^1 f\left(\frac{(t+1)(14-6)}{2} + 6\right) \cdot \frac{14-6}{2} dt \\ &= 4 \int_{-1}^1 f(4t + 10) dt. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Nakon čega se primjenjuje Gaussovo pravilo integracije i dobije se:

$$4 \int_{-1}^1 f(10t + 10) dt \approx 4 \sum_{i=1}^n f(4t + 10) \cdot \omega_i. \quad (4.10)$$

Sada bi se računali korijeni Legendreovi polinoma i pomoću njih dobivali čvorovi  $w_i$  koji bi se uvrštavali u gore navedenu formulu, no taj proces je kompliciran i dugotrajan te se u praksi ne koristi već se cijeli proces odvija računalno. Pythonov kod koji će se koristiti za izračun ovoga primjera izgleda ovako:

```
import numpy as np
from numpy.polynomial.legendre import leggauss
from scipy.integrate import quadrature

deg = 1 # Korisiti ce se broj cvorova od 1 do 4
cvorovi, tezine = leggauss(deg)

a = 6 # Donja granica integracije
b = 14 # Gornja granica integracije

# Zadana funkcija
def f(x):
    return np.sin(x/5)*15

# Pretvorba intervala integracije na [-1,1]
cvorovi = (cvorovi + 1) * (b-a)/2 + a
tezine = (b-a)/2 * tezine

# Izracun integrala sa novim intervalom integracije
integral_approx = np.dot(tezine, f(cvorovi))

# Greška
greska = np.abs(integral_approx - quadrature(f, a, b)[0])
print('greska', greska)
```

Nakon izvedbe koda dobiju se sljedeći rezultati:

Tablica 4.3. Tablica aproksimacije integrala sa Gauss-Legenderovim pravilom do  $n = 4$

Broj točaka $n$	Vrijednost integrala	Greška $\epsilon$
1	109.11569	11.27218
2	97.68213	-0.16137
3	97.84439	0.00089
4	97.84350	$-2.59 \cdot 10^{-6}$

Može se trenutno primijetiti ogromna prednost nad Newton-Coetsovima formulama, zbog velike brzine konvergencije i stabilnosti koje pruža Gauss-Legendarova integracija korištenjem svojim optimalno raspoređenih točaka integracije.

Iz Tablice 4.3 se primjećuje da u samo  $n = 4$  točke dobiva se aproksimacija integrala sa zanemarivo malom razinom pogreške dok sa korištenjem Simpsonove formule još postoji značajna greška u aproksimaciji.

### 4.3. Gauss-Čebiševljevo integracijsko pravilo

Slično kao i kod Gauss-Legendreovog integracijskog pravila integracija se provodi u intervalu od  $[-1, 1]$ , no razlikuju se u težinskoj funkciji koja kod Gauss-Čebiševljevog integracijskog pravila glasi  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  te pravilo tada ima sljedeći oblik:

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i). \quad (4.11)$$

Ova vrsta integracije temelji se na tome da se koriste korijeni Čebiševljevih polinoma  $T_n(x)$  kako bi se odredili čvorovi  $\omega_i$  koji se koriste u gore navedenoj funkciji za izračun integrala. Prvih nekoliko Čebiševljevih polinoma glase sljedeće [27]:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 - 5x. \end{aligned} \quad (4.12)$$

**Definicija 4.3.** Integracija funkcije  $f$ , gdje je težinska funkcija jednaka  $\omega_i = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  preko intervala  $[-1, 1]$  naziva se Gauss-Čebiševljeva integracija. Apscise za integraciju  $n$ -tog reda su dane korijenima od Čebiševljevih polinoma prve vrste  $T_n(x)$ , koji su prisutni simetrično oko točke 0.



Težine su dane formulom [21]:

$$\omega_i = -\frac{\pi}{T_{n+1}(x_i)T'_n(x_i)}, \quad (4.13)$$

Apscise su dane eksplicitno formulom:

$$x_i = \cos \left[ \frac{(2i-1)\pi}{2n} \right]. \quad (4.14)$$

Tablica 4.4. Tablica čvorova  $x_i$  i težina  $w_i$  Gauss-Čebiševljevog pravila do  $n = 5$

$n$	$x_i$	$w_i$
2	$\pm 0.70710$	1.5708
3	0	1.0472
	$\pm 0.86602$	4.0472
4	$\pm 0.38268$	0.78539
	$\pm 0.92388$	0.78539
5	0	0.62832
	$\pm 0.58778$	0.62832
	$\pm 0.95105$	0.62832

#### 4.3.1. Transformacija funkcije i promjena intervala

Za razliku od Gauss-Legendreovog integracijskog pravila koje ima težinsku funkciju  $\omega(x) = 1$ , Gauss-Čebiševljevo integracijsko pravilo ima težinsku funkciju  $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  koja množi funkciju  $f(x)$ , tako da je potrebno izvršiti transformaciju funkcije  $f(x)$  tako da je podijelimo sa  $\frac{1}{w(x)}$ . Transformirani integral sa promijenjenim intervalom integracije na  $[-1, 1]$  izgleda sljedeće:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \left[ x = \frac{(t+1)(b-a)}{2} + a \right], \quad t \in [-1, 1] \\ &= \int_{-1}^1 f \left( \frac{(t+1)(b-a)}{2} + a \right) \cdot \frac{b-a}{2} dt \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \frac{f \left( \frac{(t+1)(b-a)}{2} + a \right)}{\omega(t)} \cdot \omega(t) dt, \end{aligned} \quad (4.15)$$

gdje je  $x \in [a, b]$ ,  $t \in [-1, 1]$  i težinska funkcija  $\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ . Ova promjena u Pythonovom kodu je izvedena na sljedeći način:

```
import numpy as np
from numpy.polynomial.chebyshev import chebgauss, chebweight
from scipy.integrate import quadrature
```

```

deg = 1 # Broj točaka
cvorovi, tezine = chebgauss(deg) # -1, 1

a = 0 # Donja granica integracije
b = 2 # Gornja granica integracije

# Funkcija
def f(x):
    return np.cos(x)

# Promjena intervala integracije
cvorovi_ab = (cvorovi + 1) * (b-a) / 2 + a
tezine_ab = (b-a) / 2 * tezine

# Transformacija funkcije f(x)
integral_approx = np.dot(tezine_ab, f(cvorovi_ab)) / chebweight(cvorovi)

```

#### 4.3.2. Primjer Gauss-Čebiševljevog integracijskog pravila

Uz pomoć Gauss-Čebiševljevog pravila izračunati će se integral funkcije  $f = 15 \sin\left(\frac{x}{5}\right)$  na intervalu od  $[6, 14]$ . Integral sa promijenjenim intervalom integracije na  $[-1, 1]$  i dodanom težinskom funkcijom  $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  te transformiranom funkcijom  $f(x)$  izgleda sljedeće:

$$\int_6^{14} \frac{15 \sin\left(\frac{x}{5}\right)}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 60 \cdot \int_{-1}^1 \frac{\sin(4t+10)}{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dt. \quad (4.16)$$

Ovaj transformirani integral prikazan u Pythonovom kodu izgleda sljedeće:

```

import numpy as np
from numpy.polynomial.chebyshev import chebgauss, chebweight
from scipy.integrate import quadrature

deg = 1 # Broj točaka
cvorovi, tezine = chebgauss(deg) # -1, 1

a = 6 # Donja granica integracije
b = 14 # Gornja granica integracije

# Funkcija
def f(x):
    return 15*np.sin(x/5)

# Promjena intervala integracije
cvorovi_ab = (cvorovi + 1) * (b-a) / 2 + a
tezine_ab = (b-a) / 2 * tezine # a, b

# Transformacija funkcije
integral_approx = np.dot(tezine_ab, f(cvorovi_ab)) / chebweight(cvorovi)

```

```

# Prikaz rezultata aproksimacije
print('approx', integral_approx)

# Provjera
print('stvarno', quadrature(f, a, b)) # integral, procjena greske

# Greška
greska = np.abs(integral_approx - quadrature(f, a, b)[0])
print('greska', greska)

```

Nakon primjene koda dobije se sljedeća tablica gdje se može vidjeti usporedba sa Gauss-Legenderovim integracijskim pravilom:

*Tablica 4.5. Tablica aproksimacije G.Lege. i G.Čebi. pravila do  $n = 100$*

Broj točaka $n$	G.Lege.	Greška $\epsilon$	G.Čebi.	Greška $\epsilon$
1	109.11569	11.27218	171.39853	73.555
2	97.68213	-0.16137	102.31715	4.47364
3	97.84439	0.00089	101.09357	3.25007
4	97.84350	$-2.59 \cdot 10^{-6}$	99.73226	1.88917
...	...	...	...	...
100	97.84350	$5.79 \cdot 10^{-12}$	97.84663	0.00312

Može se primijetiti da za ovaj specifični primjer Gauss-Legendreova integracija nudi veću točnost i stabilniju konvergenciju u odnosu na Gauss-Čebiševljevu integraciju, posebno kada se broj točaka povećava.

S druge strane, Gauss-Čebiševljeva integracija može biti korisnija kod funkcija koje imaju određene probleme, kao što se može vidjeti u sljedećem integralu:

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx. \quad (4.17)$$

Ovaj integral ima funkciju koja u području integracije ima singularitet, tj. vrijednosti su joj beskonačno velike u rubnim točkama. Pythonov kod za takav integral izgleda sljedeće:

```

import numpy as np
from numpy.polynomial.chebyshev import chebgauss, chebweight

deg = 1 # Broj tocaka
cvorovi, tezine = chebgauss(deg) # -1, 1

a = -2 # Donja granica integracije
b = 2 # Gornja granica integracije

```

```

# Funkcija
def f(x):
    return 1/(np.sqrt(4-x**2))

# Promjena intervala integracije
cvorovi_ab = (cvorovi + 1) * (b-a)/2 + a
tezine_ab = (b-a)/2 * tezine # a, b

# Izracun aproksimacije
integral_approx = np.dot(tezine_ab, f(cvorovi_ab) / chebweight(cvorovi))

# Ispis aproksimacije
print('approx', integral_approx)

# Provjera
print('stvarno', np.pi) # integral, procjena greske

# Greska
greska = np.abs(integral_approx - np.pi)
print('greska', greska)

```

Tablica aproksimacija sada izgleda sljedeće:

Tablica 4.6. Tablica aproksimacije G.Lege. i G.Čebi. pravila do  $n = 100$

Broj točaka n	G.Lege.	G.Lege. $\epsilon$	G.Čebi.	G.Čebi. $\epsilon$
1	2.0	1.14159	3.14159	$8.8 \cdot 10^{-16}$
2	2.44948	0.6921	3.14159	$\approx 0$
3	2.64571	0.49588	3.14159	$\approx 0$
...	...	...	...	...
10	2.9751	0.16578	3.14159	$\approx 0$
...	...	...	...	...
100	3.12426	0.01732	3.14159	$\approx 0$

Može se primijetiti da za ovaj integral Gauss-Čebišev već u  $n = 1$  točki dobije rezultat sa zanemarivom greškom koji je konstantan kroz sve točke dok Gauss-Legendere čak i u  $n = 100$  točki nije došao do iste preciznosti. Već u ovome primjeru može se primijetiti važnost odabira korektnog integracijskog pravila kako bi se osigurala stabilnost i dovoljna preciznost integracije.

#### 4.4. Gauss-Laguerre integracijsko pravilo

Za razliku od Gauss-Čebiševljevog i Gauss-Legendreovog integracijskog pravila integracija Gauss-Laguerrevog pravila se provodi u intervalu od  $[0, \infty)$ , težinska funkcija koja se koristi glasi

$w(x) = e^{-x}$  tako da Gauss-Laguerreovo integracijsko pravilo ima sljedeći oblik:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i). \quad (4.18)$$

Ova vrsta integracije temelji se na tome da se koriste korijeni Laguerrevih polinoma  $L_n(x)$  kako bi se odredili čvorovi  $\omega_i$  koji se koriste u gore navedenoj funkciji za izračun integrala. Prvih nekoliko Laguerrevih polinoma glase sljedeće [22]:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 \\ L_1(x) &= -x + 1 \\ L_2(x) &= \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2) \\ L_3(x) &= \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6). \end{aligned} \quad (4.19)$$

**Definicija 4.4.** Gauss-Laguerre je integracijsko pravilo koje djeluje na intervalu od  $[0, \infty)$  sa težinskom funkcijom  $\omega(x) = e^{-x}$ . Obuhvaća točno sve polinome stupnja  $2n - 1$ . Apscise  $n$ -tog stupnja dane su korijenima Laguerrevih polinoma  $L_n(x)$ . Težine su dane formulom [25]:

$$\omega_i = \frac{x_i}{(n+1)^2 [L_{n+1}(x_i)]^2}. \quad (4.20)$$

Tablica 4.7. Tablica čvorova  $x_i$  i težina  $w_i$  Gauss-Laguerreove integracije do  $n = 5$

$n$	$x_i$	$\omega_i$
2	0.58579	0.85355
	3.41421	0.14644
3	0.41577	0.71109
	2.29428	0.27851
4	6.28995	0.01038
	0.32254	0.60315
5	1.74576	0.35742
	4.53662	0.03888
5	9.39507	0.00054
	0.26356	0.52175
5	1.4134	0.39866
	3.59643	0.0759
5	7.08581	0.003611
	12.6408	0.00002

#### 4.4.1. Transformacija za integraciju

Gauss-Laguerreova integracija se obično koristi za računanje integrala koji imaju područje integracije jednako  $[a, +\infty]$ , tako da je uz transformaciju funkcije potrebno napraviti promjenu

intervala integracije samo za donju granicu integracije što izgleda ovako:

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x)w(x)dx &= \left[ \begin{array}{l} t = x - a \\ dt = dx \end{array} \right], \quad t \in [a, +\infty) \\ &= \int_0^{+\infty} f(x-a)e^t \cdot e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} g(t) \cdot e^{-t} dt, \end{aligned} \quad (4.21)$$

gdje je  $g(x) := f(x-a)e^t$  i  $w(x) = e^{-x}$ . Ta promjena u pythonovom kodu izgleda sljedeće:

```
import numpy as np
from numpy.polynomial.laguerre import laggauss, lagweight
from scipy.integrate import quadrature

deg = 1 # Broj točaka
cvorovi, tezine = laggauss(deg) # 0, inf

a = -2 # Donja granica, gornja je uvijek inf

# Funkcija
def f(x):
    return np.exp(-3*x+5)

# Promjena intervala donje granice
cvorovi_a = cvorovi + a

# Transformacija funkcije
integral_approx = np.dot(tezine, f(cvorovi_a)/lagweight(cvorovi))

# Ispis aproksimacije
print('approx', integral_approx)
```

Iako se ne preporučuje moguće je napraviti i transformaciju integrala sa ograničenim intervalom integracije oblika  $[a, b]$  na interval od  $[0, \infty)$ . Takvom transformacijom dobijemo sljedeće:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)w(x)dx &= \left[ \begin{array}{l} x = a + \frac{b-a}{\frac{\pi}{2}} \arctan(t) \\ dx = \frac{b-a}{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2}} \end{array} \right], \quad t \in [0, +\infty) \\ &= \int_0^{\infty} f\left(a + \frac{b-a}{\frac{\pi}{2}} \arctan(t)\right) e^t \cdot \frac{b-a}{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} \cdot e^{-t} dt. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ili kako je ta transformacija prikazana u Pythonovom kodu:

```
import numpy as np
```

```

from numpy.polynomial.laguerre import laggauss, lagweight
from scipy.integrate import quadrature

deg = 30 # Broj točaka
cvorovi, tezine = laggauss(deg) # 0, inf

a = -2 # Donja granica
b = 10 # Gornja granica

# Funkcija
def f(x):
    return x*(x-10)

# Promjena intervala integracije
cvorovi_ab = (b-a)*np.arctan(cvorovi)/(np.pi/2) + a

# Transformacija funkcije
integral_approx = np.dot(tezine, (b-a)*f(cvorovi_ab)/((np.pi/2)*
    (1+cvorovi**2))*lagweight(cvorovi))

# Ispis aproksimacije
print('approx', integral_approx)

```

#### 4.4.2. Primjer Gauss-Laguerrove integracije

Uz pomoć Gauss-Laguerrovog pravila izračunati će se integral funkcije  $f = 15 \sin\left(\frac{x}{5}\right)$  na intervalu od  $[6, 14]$ . Integral sa promijenjenim intervalom integracije na  $[0, \infty)$  i dodanom težinskom funkcijom  $\omega(x) = e^{-t}$  izgleda sljedeće:

$$\int_6^{14} 15 \sin\left(\frac{x}{5}\right) dx = \frac{240}{\pi} \int_0^{\infty} \sin\left(\frac{6 + \frac{16}{\pi} \arctan(t)}{5}\right) \cdot \frac{1}{1+t^2} \cdot e^t \cdot e^{-t} dt. \quad (4.23)$$

Ovaj transformirani integral prikazan u Pythonovom kodu izgleda sljedeće:

```

import numpy as np
from numpy.polynomial.laguerre import laggauss, lagweight
from scipy.integrate import quadrature

deg = 1 # Broj točaka
cvorovi, tezine = laggauss(deg) # 0, inf

a = 6 # Donji interval integracije
b = 14 # Gornji interval integracije

# Funkcija
def f(x):
    return 15*np.sin(x/5)

```

```

# Promjena intervala integracije
cvorovi_ab = (b-a)*np.arctan(cvorovi)/(np.pi/2) + a

# Transformacija funkcije
integral_approx = np.dot(tezine, (b-a)*f(cvorovi_ab)/((np.pi/2)
*(1+cvorovi**2)*lagweight(cvorovi)))

# Ispis aproksimacija
print('approx', integral_approx)

# Provjera
stvarno = quadrature(f, a ,b)[0]
print('stvarno', stvarno)

# Greška
greska = np.abs(integral_approx - stvarno)
print('greska', greska)

```

Nakon primjene koda dobije se sljedeća tablica gdje se može vidjeti usporedba sa Gauss-Laguerrevim i Gauss-Čebiševljevim integracijskim pravilom:

*Tablica 4.8. Tablica G.Leg., G.Čeb. i G.Lagu. pravila do  $n = 100$*

Broj točaka $n$	G.Leg.	G.Čeb.	G.Lag.	G.Lag. $\epsilon$
1	109.11569	171.39853	94.413	3.4305
2	97.68213	102.31715	101.83625	3.99274
3	97.84439	101.09357	98.45498	0.61147
4	97.84350	99.73226	96.39111	1.45239
...	...	...	...	...
100	97.84350	97.84663	97.77723	0.06628

Primjećuje se da kod  $n = 1$  Gauss-Laguerreova integracija daje daleko najprecizniju vrijednost ali isto kao i kod Gauss-Čebiševljeve integracije može se primijetiti da za ovaj specifični primjer Gauss-Legendreova integracija nudi veću točnost i stabilniju konvergenciju posebno kada se broj točaka povećava.

Gauss-Laguerrova integracija je najkorisnija kod funkcija koje imaju interval integracije gdje je gornja granica integracije jednaka beskonačnosti, kao što se može vidjeti u sljedećem integralu:

$$\int_{-2}^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}+1} dx. \quad (4.24)$$

Pythonov kod za ovaj izračun izgleda sljedeće:

```

import numpy as np
from numpy.polynomial.laguerre import laggauss, lagweight

```



```

from scipy.integrate import quadrature

deg = 1 # Broj točaka
cvorovi, tezine = laggauss(deg) # 0, inf

a = -2 # Donja granica, gornja je uvijek inf

# Funkcija
def f(x):
    return np.exp(-3*x+5)

# Promjena intervala
cvorovi_a = cvorovi + a

# Transformacija funkcije
integral_approx = np.dot(tezine, f(cvorovi_a)/lagweight(cvorovi))

# Ispis aproksimacije
print('approx', integral_approx)

# Provjera
stvarno = np.exp(11)/3
print('stvarno', stvarno)

# Greška
greska = np.abs(integral_approx - stvarno)
print('greska', greska)

```

Nakon primjene kod dobije se sljedeća tablica gdje se može vidjeti usporedba sa Gauss-Laguerrevim i Gauss-Čebiševljevim integracijskim pravilom:

*Tablica 4.9. Tablica G.Lege., G.Čebi. i G.Lagu. pravila do  $n = 100$*

Broj točaka $n$	G.Leg.	G.Čeb. $\epsilon$	G.Lag.	G.Lag. $\epsilon$
1	0.66434	14.11352	12.18249	2.59561
5	14.76534	16.55314	14.77741	0.00069
10	14.77786	15.13048	14.77811	$1.59 \cdot 10^{-8}$
...	...	...	...	...
100	14.77786	14.78120	14.77811	$5.39 \cdot 10^{-12}$

Može se već od prve točke primijetiti značajno veću preciznost Gauss-Lagguerra naspram ostalima u ovome primjeru. Već u točki  $n = 10$  Gauss-Laguerre konvergira do rezultata sa zanemarivo malom razinom pogreške kakvu ostala pravila nemaju ni u  $n = 100$ .

#### 4.5. Gauss-Hermitovo integracijsko pravilo

Gauss-Hermiteova integracija je oblik Gaussove integracije za aproksimaciju vrijednosti integrala. Njezina težinska funkcija glasi  $w(x) = e^{-x^2}$  te se provodi u intervalu od  $(-\infty, +\infty)$ . Oblik ovoga pravila izgleda sljedeće:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-x^2} dx \approx \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i). \quad (4.25)$$

Ova vrsta integracije temelji se na tome da se koriste korijeni Hermitovih polinoma  $H_n(x)$  kako bi se odredili čvorovi  $\omega_i$  koji se koriste u gore navedenoj funkciji za izračun integrala. Prvih nekoliko Hermitovih polinoma glase sljedeće [23]:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \\ H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x. \end{aligned} \quad (4.26)$$

**Definicija 4.5.** *Gauss-Hermitova integracija, također nazvana Hermiteova integracija, je Gaussova integracija u intervalu  $(-\infty, +\infty)$  s težinskom funkcijom  $w(x) = e^{-x^2}$ . Apscise za kvadrturni red  $n$  dane su korijenima  $x_i$  Hermiteovih polinoma  $H_n(x)$ , koji se pojavljuju simetrično oko točke 0. Težine su dane izrazom [24]:*

$$\omega_i = \frac{2^{n-1} n! \sqrt{\pi}}{n^2 [H_{n-1}(x_i)]^2}. \quad (4.27)$$

Tablica 4.10. Tablica čvorova  $x_i$  i težina  $\omega_i$  Gauss-Hermitovog pravila do  $n = 5$

$n$	$x_i$	$\omega_i$
2	$\pm 0.70710$	0.88622
3	0	1.18164
	$\pm 1.22474$	0.29541
4	$\pm 0.52464$	0.80491
	$\pm 1.65068$	0.08131
5	0	0.94531
	$\pm 0.95857$	0.39362
	$\pm 2.02018$	0.01995

#### 4.5.1. Transformacija za integraciju

Slično kao i kod Gauss-Laguerra ovo pravilo nije osmišljeno da se koristi za integriranje ograničenih integrala te nije preporučeno integriranje takvih integrala zbog pojave povećane greške u rezultatu. No, kako bi mogli sva pravila usporediti na istome primjeru napraviti će se promjena intervala integracije sa  $[a, b]$  na  $(-\infty, +\infty)$  što će izgledati sljedeće:

$$\int_a^b f(x) dx = \left[ \begin{array}{l} x = a + \frac{b-a}{\pi} \left( \arctan(t) + \frac{\pi}{2} \right) \\ dx = \frac{b-a}{\pi} \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right], \quad t \in (-\infty, +\infty) \quad (4.28)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \frac{b-a}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2} \cdot e^{t^2} \cdot e^{-t^2}.$$

Ili zapisano u pythonovom kodu ovako:

```
import numpy as np
from numpy.polynomial.hermite import hermgauss, hermweight
from scipy.integrate import quadrature

deg = 50 # broj točaka
cvorovi, tezine = hermgauss(deg) # -inf, inf

a = -3 # Donja granica integracije
b = 3 # Gornja granica integracije

# Funkcija
def f(x):
    return x**2

# Promjena intervala integracije
cvorovi_ab = (b-a)*(np.arctan(cvorovi)+np.pi/2)/np.pi + a

# Izračun integrala
integral_approx = np.dot(tezine, (b-a)*f(cvorovi_ab)/
                          (np.pi*(1+cvorovi**2)*hermweight(cvorovi)))

# Ispis rezultata
print('approx', integral_approx)
```

#### 4.5.2. Primjer Gauss-Hermitove integracije

Uz pomoć Gauss-Hermitovog pravila izračunati će se integral funkcije  $f = 15 \sin\left(\frac{x}{5}\right)$  na intervalu od  $[6, 14]$ . Integral sa promijenjenim intervalom integracije na  $(-\infty, +\infty)$  i dodanom

težinskom funkcijom  $\omega(x) = e^{-t^2}$  izgleda ovako:

$$\int_6^{14} 15 \sin\left(\frac{x}{5}\right) dx = \frac{8}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\frac{10 + \frac{8}{\pi} \arctan(t)}{5}\right) \cdot \frac{1}{t^2 + 1} \cdot e^{t^2} \cdot e^{-t^2} dt. \quad (4.29)$$

Ovaj transformirani integral prikazan u Pythonovom kodu izgleda sljedeće:

```
import numpy as np
from numpy.polynomial.hermite import hermgauss, hermweight
from scipy.integrate import quadrature

deg = 1 # Broj tocaka
cvorovi, tezine = hermgauss(deg) # -inf, inf

a = 6 # Donja granica integracije
b = 14 # Gornja granica integracije

# Funkcija
def f(x):
    return 15*np.sin(x/5)

# Promjena intervala
cvorovi_ab = (b-a)*(np.arctan(cvorovi)+np.pi/2)/np.pi + a

# Izracun integrala
integral_approx = np.dot(tezine, (b-a)*f(cvorovi_ab)/
                          (np.pi*(1+cvorovi**2)*hermweight(cvorovi)))

# Ispis aproksimacije
print('approx', integral_approx)

# Provjera
stvarno = quadrature(f, a ,b)[0]
print('stvarno', stvarno)

# Greska
greska = np.abs(integral_approx - stvarno)
print('greska', greska)
```

Nakon primjene kod imamo usporedbu svih pravila koje smo vidjeli do sada, tablica izgleda sljedeće:

Tablica 4.11. Tablica G.Lege., G.Čeb., G.Lagu. i G.Her. pravila do  $n = 100$ 

Br. toč. n	G.Leg.	G.Čeb.	G.Lag.	G.Her.	G.Her. $\epsilon$
1	109.11569	171.39853	94.413	61.56193	36.28157
2	97.68213	102.31715	101.83625	64.36843	33.47507
3	97.84439	101.09357	98.45498	74.14547	23.69802
4	97.84350	99.73226	96.39111	76.04121	21.80228
5	97.84350	99.73226	96.39111	79.51132	18.33218
...	...	...	...	...	...
10	97.84350	99.73226	96.39111	85.26083	18.33218
...	...	...	...	...	...
100	97.84350	97.84663	97.77723	94.26891	3.57459

Odmah se primjećuje da Gauss-Hermitovo pravilo nije napravljeno za izračun ograničenih integrala, čak i u točki  $n = 100$  vidljiva je značajna greška u aproksimaciji te kao u prijašnjim primjerima Gauss-Legendarovo pravilo pokazalo se daleko najkorisnije za izračun ovoga integrala.

No kada se za primjer uzme integral koji ima interval integracije gdje su gornja i donja granica integracije jednake beskonačnosti, kao što se može vidjeti u sljedećem primjeru:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 5e^{-\frac{x^2}{5}} dx, \quad (4.30)$$

primijetiti će se značajno poboljšanje u konvergenciji i preciznosti aproksimacije Gauss-Hermitovog pravila, dok će se kod Gauss-Legendarovog primijetiti obratno. Pythonov kod za izračun ovakvoga integrala izgleda sljedeće:

```
import numpy as np
from numpy.polynomial.hermite import hermgauss, hermweight
from scipy.integrate import quadrature

deg = 1 # Broj tocaka
cvorovi, tezine = hermgauss(deg) # -inf, inf

# Funkcija
def f(x):
    return 5*np.e**(-x**2/5)

# Izracun
integral_approx = np.dot(tezine, f(cvorovi)/hermweight(cvorovi))

# Ispis aproksimacije
print('approx', integral_approx)

# Greska
greska = np.abs(integral_approx - 5**(3/2)*np.sqrt(np.pi))
print('greska', greska)
```

Nakon primjene kod dobije se sljedeća tablica gdje se može vidjeti usporedba sa ostalim integracijskim pravilima:

*Tablica 4.12. Tablica G.Lege., G.Čebi., G.Lagu. i G.Her. pravila do  $n = 100$*

<b>Br. toč. n</b>	<b>G.Leg.</b>	<b>G.Čeb. <math>\epsilon</math></b>	<b>G.Lag.</b>	<b>G.Her.</b>	<b>G.Her. <math>\epsilon</math></b>
1	200	314.15926	$\approx 0$	8.86226	10.95436
3	88.88889	104.71975	$\approx 0$	15.71610	4.10053
5	56.88889	62.83185	0.00071	18.15945	1.65718
10	10.03650	8.76122	16.37186	19.62566	0.19096
20	19.59311	19.53032	19.37386	19.81372	0.002915
...	...	...	...	...	...
100	19.81663	19.81663	19.81663	19.81663	$3.55 \cdot 10^{-15}$

Ovo je odličan primjer gdje se može primijetiti konvergencija svakog pojedinog integracijskog pravila. Iako su sva pravila do  $n = 100$  točke došla do točne aproksimacije zanimljivo je primijetiti njihovu putanju do te konačne aproksimacije. Vidljivo je da Gauss-Hermit je najstabilniji te najbrže konvergira, Gauss-Laguerre je drugi najbolji i vidljivo je da on zajedno sa Gauss-Hermitom se penje od vrijednosti manje on konačne prema konačnoj.

Na drugoj strani su Gauss-Legendre i Gauss-Čebišev koji se sa visoke početne vrijednosti spuštaju na konačnu vrijednost, no iako su došli do točne aproksimacije imaju ogromne razine greške u početnim točkama.

## 5. Primjena u inženjerstvu

Za sada su se prikazala Gaussova integracijska pravila samo u teoriji, no sada će se riješiti dva primjera iz prakse.

**Primjer 5.1.** *Voditelj odjela Vas je zamolio da pronađete formulu koja će se koristiti za izračun količine goriva u spremnicima goriva koje firma koristi za pokretanje generatora. Spremnik goriva je oblika valjka radijusa  $r = 0.625\text{m}$  i dužine  $L = 2.75\text{m}$  položenog na stranu. Spremnik ima ugrađen senzor koji pokazuje dubinu goriva  $d = 0.550\text{m}$  do dna spremnika.*

Integral za izračun volumena goriva u spremniku izgledati će sljedeće:

$$V = 2L \int_{-r}^{-r+d} \sqrt{r^2 - y^2} dy. \quad (5.1)$$

Za izračun ovoga integrala koristiti će se Gauss-Čebiševljevo integracijsko pravilo te je potrebno izvršiti promjenu intervala integracije na  $[-1, 1]$  i transformaciju funkcije zbog dodavanja težinske funkcije  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  što će izgledati sljedeće:

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{r^2 - y^2} dy &= \left[ y = \frac{(t+1)(b-a)}{2} + a \right], \quad t \in (-\infty, +\infty) \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{r^2 - \left( \frac{t+1}{2}(b-a) + a \right)^2} \cdot \frac{b-a}{2} dt \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{r^2 - \left( \frac{t+1}{2}(b-a) + a \right)^2} dt, \end{aligned} \quad (5.2)$$

gdje je  $a = -r$  i  $b = -r + d$ . Uvrštavanjem svih zadanih vrijednosti dobivamo sljedeći integral:

$$\begin{aligned} V &= 2 \cdot 2.75 \cdot \frac{11}{40} \int_{-1}^1 \sqrt{0.625^2 - \left( \frac{11t}{40} \cdot \frac{11}{20} - \frac{5}{8} \right)^2} dt \\ &= \frac{121}{80} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{25}{64} - \left( \frac{11t}{40} - \frac{7}{20} \right)^2} dt. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Integral postavljen u Pythonovom kodu izgleda sljedeće:

```
import numpy as np
from numpy.polynomial.chebyshev import chebgauss, chebweight
from scipy.integrate import quadrature
```

```

deg = 30
cvorovi, tezine = chebgauss(deg) # -1, 1

a = -0.625
b = -0.075
def f(y):
    return 5.5*np.sqrt(0.625**2-y**2)

cvorovi_ab = (cvorovi + 1) * (b-a)/2 + a
tezine_ab = (b-a)/2 * tezine # a, b

integral_approx = np.dot(tezine_ab, f(cvorovi_ab) / chebweight(cvorovi))

print('approx', integral_approx)

# provjera
print('stvarno', 1.430187) # integral, procjena greske

greska = np.abs(integral_approx - 1.430187)
print('greska', greska)

```

Dobivena tablica aproksimacija izgleda sljedeće:

Tablica 5.1. Tablica aproksimacije integrala sa Gauss-Čebiševljevim pravilom do  $n = 1000$

Broj točaka $n$	Vrijednost integrala	Greška $\epsilon$
1	2.46044	1.03026
2	1.53254	0.10235
5	1.44582	0.01564
10	1.43405	0.003871
100	1.43022	$3.8 \cdot 10^{-5}$
1000	1.430187	$1.54 \cdot 10^{-7}$

Dobiveni rezultat je izražen u  $[m^3]$  te ka je potrebno pretvoriti u  $[dm^3]$  kako bi dobili količinu u litrama, što izgleda sljedeće:

$$V = 1.430187 [m^3] = 1430.187 [dm^3] = 1430.187 [l] \quad (5.4)$$

Iako je bilo potrebno čak  $n = 1000$  točaka, dobivena je točna aproksimacija. Vidljivo je da je u ovome primjeru iznimno bitno da je greška aproksimacije minimalna jer se pri pretvorbi iz  $[m^3]$  u  $[l]$  greška se uvećava za čak 100,000%.

**Primjer 5.2.** *Popravljate stroj u tvornici i trebate provjeriti ako zavojnica u stroju ima točnu količinu naboja. Znae da je zavojnica parametrizirana na sljedeći način:*

$$C(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in [0, 100]. \quad (5.5)$$



Također znate da je smještena u skalarnom polju gdje je gustoća naboja jednaka:

$$\lambda(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2}. \quad (5.6)$$

Formula za izračun naboja je sljedeća:

$$Q = \int_C \lambda ds. \quad (5.7)$$

Uvrštavanjem parametra u formulu za izračun naboja dobiva se:

$$\begin{aligned} Q &= \int_C \lambda ds \\ &= \int_0^{100} \lambda[C(t)] \cdot |C'(t)| dt \\ &= \int_0^{100} \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos^2 t} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{100} \sqrt{1 + \cos^2 t} dt, \end{aligned} \quad (5.8)$$

pri čemu je  $|C'(t)| = |-\sin t, \cos t, 1| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$ .

Ovaj primjer će se računati sa Gauss-Legenderevim integracijskim pravilom, što znači da ke potrebno samo izmijeniti interval integracije jer je težinska funkcija Gauss-Legendera jednaka  $w(x) = 1$ . Izmjena intervala je sljedeća:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \int_0^{100} \sqrt{1 + \cos^2 t} dt &= \left[ x = \frac{(t+1)(b-a)}{2} + a, \quad t \in [-1, 1] \right. \\ &\quad \left. dx = \frac{b-a}{2} dt \right] \\ &= \sqrt{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \cos^2 \left( \frac{100t}{2} + \frac{100}{2} \right)} \cdot \frac{100}{2} dt \\ &= 50\sqrt{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \cos^2 (50t + 50)} dt. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Pythonov kod za izračun ovoga integrala izgleda sljedeće:

```
import numpy as np
from numpy.polynomial.legendre import leggauss

deg = 1 # Broj točaka
cvorovi, tezine = leggauss(deg) # -1, 1
```

```

a = 0 # Donja granica integracije
b = 100 # Gornja granica integracije

# Funkcija
def f(t):
    return np.sqrt(2)*np.sqrt(1+np.cos(t)**2)

# Promjena intervala
cvorovi = (cvorovi + 1) * (b-a)/2 + a
tezine = (b-a)/2 * tezine # a, b

# Izracun integrala
integral_approx = np.dot(tezine, f(cvorovi))

# Ispis aproksimacije
print('approx', integral_approx)

# Provjera
print('stvarno', 171.8445499465061)

# Greška
greska = np.abs(integral_approx - 171.8445499465061)
print('greska', greska)

```

Dobivena tablica rezultata izgleda sljedeće:

*Tablica 5.2. Tablica aproksimacije Gauss-Legenderovog pravila do  $n = 1000$*

<b>Broj točaka n</b>	<b>Vrijednost integrala</b>	<b>Greška <math>\epsilon</math></b>
1	196.52783	24.68328
2	181.84453	9.99998
5	162.52454	9.32
10	173.30359	1.459
100	171.96945	0.1249
1000	171.84454	$1.9 \cdot 10^{-12}$

Iz tablice se dobiva da je naboj nakupljen u zavojnici jednak:

$$Q = 171.84454 [V]. \quad (5.10)$$

Kao što se može primijetiti kod ovoga i kao i prošloga primjera, u praksi je potrebno uzimati velike količine točaka kako bi se dobila dobra aproksimacija sa minimalnom greškom. Točan odabir metode integracije osigurava preciznost i stabilnost izračuna dok računalna osiguravaju minimalno vrijeme računanja.

## 6. Zaključak

Pokazalo se da Gaussova integracija predstavlja moćan numerički alat za aproksimaciju integrala, koristeći posebno odabrane točke i težine za postizanje visoke točnosti s minimalnim brojem evaluacija svih vrsta funkcija.

Gauss-Legendre integracijsko pravilo pokazalo se kao najuniverzalnije i najjednostavnije među analiziranim metodama. Njegova primjena ne zahtijeva nikakve transformacije integracijske funkcije te uz promjenu intervala integracije moguće je brzo i precizno doći do potrebne aproksimacije. Nedostatak ovoga pravila nastaje kada se računaju integrali sa funkcijom koja sadržava singularnosti te kod integrala koji imaju interval integracije koji odlazi u beskonačnost, gdje se počinju dobivati neprecizni rezultati sa velikim greškama.

Gauss-Čebiševljevo integracijsko pravilo se pokazalo najbolje kod izračuna isključivo ograničenih integrala koji sadržavaju funkciju sa nekakvom singularnosti vidljivo u Tablici 4.5 gdje se u usporedbom sa Gauss-Legendrovim pravilom pri izračunu funkcije sa singularnosti vidjela ogromna prednost u konvergenciji Gauss-Čebiševljevog pravila. Nedostatak ovoga pravila, slično kao i kod Gauss-Legendrovog pravila, pojavljuju se problemi sa konvergencijom i preciznosti kod računanja integrala sa intervalom integracije koji ide u beskonačnost.

Gauss-Laguerre integracijsko pravilo pokazalo se najbolje specifično kod izračuna integrala sa područjem integracije od neke konačne vrijednosti do beskonačnosti pogotovo kod integrala koji imaju funkciju oblika  $f(x) = e^{-x}$  gdje je najbrže i najstabilnije konvergirala prema točnoj aproksimaciji od svih ostalih pravila. Nedostatak ovoga pravila je njegova limitirana preciznost u usporedbi sa ostalim pravilima kada funkcija koja se integrira nije oblika  $f(x) = e^{-x}$ . Ovo pravilo je pokazalo svoju vrijednost u kvantnoj mehanici i statističkoj fizici, gdje se često susreću integrali ovog oblika.

Gauss-Hermite integracijsko pravilo pokazalo se daleko najbolje kod računanja integrala kojima oba dvije strane intervala integracije teže beskonačnosti. Moglo se primijetiti da kod takvih primjera Gauss-Hermite najstabilnije, najpreciznije i najbrže konvergira prema točnoj aproksimaciji pogotovo u usporedbi sa Gauss-Legendrovim i Gauss-Čebiševljevim pravilom koji su kod malih broja točaka pokazali greške do 1000% od stvarnoga rezultata. Gauss-Hermite se često koristi u problemima iz teorije vjerojatnosti i statistike, kao i u kvantnoj mehanici.

Zaključno, svaka od Gaussovih integracijskih pravila ima svoju specifičnu vrijednost u kojoj nadmašuje druge numeričke metode, ovisno o prirodi integrala i granicama integracije. Ovaj rad naglašava važnost odabira odgovarajućeg Gaussovog integracijskog pravila za konkretne probleme kako bi se postigla maksimalna točnost uz minimalan broj izračuna. Doprinos rada leži u sistematičnom prikazu i usporedbi ovih kvadratura, što može poslužiti kao vodič za buduće primjene u raznim znanstvenim i inženjerskim disciplinama.

## Literatura

- [1] Hughes-Hallett, Deborah; McCullum, William G.; et al. (2005). Calculus (4th ed.)
- [2] Davies, P.: "Integral Transforms and Their Applications", Springer, Berlin, 1978.
- [3] Trapezoidal rule, S Interneta, [https://en.wikipedia.org/wiki/Trapezoidal rule](https://en.wikipedia.org/wiki/Trapezoidal_rule), 10.05.2024.
- [4] Erwin-Kreyszig, Herbert-Kreyszig, E.J. Norminton; et al. (2011). Advanced Engineering Mathematics (10th Edition)
- [5] Harmonic series (mathematics), s Interneta, [https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic series \(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_series_(mathematics)), 06.2024
- [6] Numerical stability, s Interneta, [https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical stability](https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_stability), 02.2024.
- [7] Nina Čeh, Ivan Dražić, Nermina Mujaković: "GAUSS-LEGENDRE-RADAUOVA I GAUSSLEGENDRE-LOBATTOVA NUMERIČKA INTEGRACIJA, stručni rad, 23.05.2017.
- [8] Danijela Jaganjac: "Gaussove kvadraturene formule za numeričku integraciju", završni rad, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2017.
- [9] J.Stoer, R.Bulirsch: Introduction to Numerical Analysis (Second Edition), 1991.
- [10] Legendre Polynomial, S Interneta, <https://mathworld.wolfram.com/LegendrePolynomial.html>
- [11] Legendre-Gauss Quadrature, S Interneta, <https://mathworld.wolfram.com/Legendre-GaussQuadrature.html>
- [12] Introduction to Mathematical Analysis I (Lafferriere, Lafferriere, and, Nguyen), S Interneta, [https://math.libretexts.org/Bookshelves/Analysis/Introduction-to-Mathematical-Analysis-I-\(Lafferriere-Lafferriere-and-Nguyen\)/02](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Analysis/Introduction-to-Mathematical-Analysis-I-(Lafferriere-Lafferriere-and-Nguyen)/02)
- [13] Giesela Engeln-Müllges; Frank Uhlig: Numerical Algorithm with C, 1996.
- [14] Orthogonal functions, s Interneta, <https://en.wikipedia.org/wiki/Orthogonal-functions>, 01.01.2024.
- [15] Orthogonal polynomials, s Interneta, <https://mathworld.wolfram.com/OrthogonalPolynomials.html>
- [16] Orthogonal polynomials, s Interneta, <https://en.wikipedia.org/wiki/Orthogonal-polynomials>
- [17] Integration as summation, s Interneta, <https://www.mathcentre.ac.uk/resources/Engineering>
- [18] Newton–Cotes formulas, s Interneta, <https://en.wikipedia.org/wiki/Newton>

- [19] Simpsons Rule, s Interneta, <https://mathworld.wolfram.com/SimpsonsRule.html>
- [20] Gauss Quadrature Rule Of Integration, s Interneta, [https://math.libretexts.org/Workbench/Numerical-Methods-with-Applications-\(Kaw\)/7](https://math.libretexts.org/Workbench/Numerical-Methods-with-Applications-(Kaw)/7)
- [21] Chebyshev-Gauss Quadrature, s Interneta, <https://mathworld.wolfram.com/Chebyshev-GaussQuadrature.html>
- [22] Laguerre Polynomial, s Interneta, <https://mathworld.wolfram.com/LaguerrePolynomial.html>
- [23] Hermite Polynomial, s Interneta, <https://mathworld.wolfram.com/HermitePolynomial.html>
- [24] Hermite-Gauss Quadrature, s Interneta, <https://mathworld.wolfram.com/Hermite-GaussQuadrature.html>
- [25] Laguerre-Gauss Quadrature, s Interneta, <https://mathworld.wolfram.com/Laguerre-GaussQuadrature.html>
- [26] Laguerre-Gauss Quadrature, s Interneta, <https://mathworld.wolfram.com/Laguerre-GaussQuadrature.html>
- [27] Chebyshev Polynomial of the First Kind, s Interneta, <https://mathworld.wolfram.com/ChebyshevPolynomialoftheFirstKind.html>
- [28] Arihmed, s Interneta, <https://hr.wikipedia.org/wiki/Arhimed>
- [29] Bernhard Riemann, s Interneta, <https://en.wikipedia.org/wiki/Bernhard-Riemann>
- [30] Arhimedov aksiom, s Interneta, <https://hr.wikipedia.org/wiki/Arhimedov-aksiom>

## Sažetak i ključne riječi

Gaussova pravila za numeričku integraciju temelje se na izračunu vrijednosti funkcije u određenim točkama, koje nisu ravnomjerno raspoređene. Te vrijednosti se množe s odgovarajućim težinskim faktorima. Nejednolika raspodjela točaka omogućava veću točnost u usporedbi s ravnomjernom raspodjelom. U ovom radu detaljno su opisana Gauss-Legendre, Gauss-Čebišev, Gauss-Laguerre i Gauss-Hermite integracijska pravila, koja se koriste za numeričku integraciju funkcija. Kroz rad su provedeni razni numerički eksperimenti sa svim navedenim pravilima.

**Ključne riječi:** Integralne sume, Gaussova integracija, Gauss-Legendre, Gauss-Čebišev, Gauss-Laguerre, Gauss-Hermite

## Summary and key words

The Gauss rules for numerical integration are based on calculating the values of a function at specific points, which are not evenly distributed. These values are then multiplied by corresponding weighting factors. The uneven distribution of points allows for greater accuracy compared to even distribution. This paper provides a detailed description of the Gauss-Legendre, Gauss-Chebyshev, Gauss-Laguerre, and Gauss-Hermite integration rules, which are used for numerical integration of functions. The work involved various numerical experiments conducted with all the mentioned rules.

**Keywords:** Integral sums, Gauss integration, Gauss-Legendre, Gauss-Chebyshev, Gauss-Laguerre, Gauss-Hermite