

# Dvodimenzijska numerička analiza Stokesovog strujanja oko kruga

---

**Bračko, Marin**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:190:384254>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-13**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the University of Rijeka, Faculty of Engineering](#)



SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij strojarstva

Završni rad

**Dvodimenzijska numerička analiza Stokesovog strujanja oko  
kruga**

Rijeka, rujan 2024.

Marin Bračko

006909204

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij strojarstva

Završni rad

**Dvodimenzijska numerička analiza Stokesovog strujanja oko  
kruga**

Mentor: prof. dr. sc. Lado Kranjčević

Komentor: dr. sc. Marta Alvir

Rijeka, rujan 2024.

Marin Bračko

006909204

Rijeka, 20. ožujka 2024.

Zavod: **Zavod za mehaniku fluida i računalno inženjerstvo**  
Predmet: **Mehanika fluida**  
Grana: **2.15.04 mehanika fluida**

## ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Marin Bračko (0069092604)**  
Studij: Sveučilišni prijediplomski studij strojarstva

Zadatak: **Dvodimenzijska numerička analiza Stokesovog strujanja oko kruga**

### Opis zadatka:

Provesti detaljnu 2D analizu duboko laminarnog strujanja oko izabranog geometrijskog lika - kruga, zadanim komercijalnim računalnim programom. Opisati optjecanje fluida oko zadanog objekta s fizikalnog motrišta mehanike fluida za izrazito niske vrijednosti Reynoldsovih brojeva. Izraditi geometriju i numerički simulirati optjecanje te usporediti dobivene rezultate s očekivanim analitičkim vrijednostima.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Zadatak uručen pristupniku: 20. ožujka 2024.

Mentor:

Predsjednik povjerenstva za  
završni ispit:

---

prof. dr. sc. Lado Kranjčević

---

izv. prof. dr. sc. Samir Žic

---

dr. sc. Marta Alvir (komentor)

## **IZJAVA**

Izjavljujem da sam prema članku 8. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku studija preddiplomskog sveučilišnog studija Tehničkog fakulteta u Rijeci, samostalno izradio završni rad naslova „Dvodimenzijaska numerička analiza Stokesovog strujanja oko kruga“ pod vodstvom prof. dr. sc. Lade Kranjčevića i asist. dr. sc. Marte Alvir.

Marin Braoček

## **ZAHVALA**

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Ladi Kranjčeviću na mentorstvu i komentorici dr. sc. Marti Alvir na ukazanoj pomoći i uvijek ažurnoj asistenciji kada god je bilo potrebno.

# SADRŽAJ

1. UVOD .....	1
2. OPĆENITO O STRUJANJU .....	2
2.1. Vrste strujanja .....	2
2.2. Podjela strujanja prema rubnim uvjetima.....	4
2.3. Odvajanje struja .....	5
3. BERNOULLIJEVA JEDNADŽBA.....	6
3.1. Bernoullijeva jednadžba za realni fluid.....	6
4. STOKESOVO STRUJANJE .....	7
4.1. Navier-Stokes jednadžbe.....	8
5. ANSYS.....	9
6. IZRADA SIMULACIJE .....	10
6.1. Geometrija.....	10
6.2. Numerička mreža ( <i>mesh</i> ) .....	11
6.3. Simulacija .....	15
7. REZULTATI .....	20
7.1. Usporedba.....	28
7.1.1. Rezultati brzine 0,1 m/s.....	28
7.1.2. Rezultati brzine 100 m/s.....	33
8. ZAKLJUČAK.....	39
9. LITERATURA.....	40
10. POPIS SLIKA.....	41

## 1. UVOD

Stokesovo strujanje predstavlja veliko područje u proučavanju dinamike fluida, posebno kada su prisutne niske brzine strujanja ili mali Reynoldsov broj. Ovo specifično strujanje, nazvano prema znanstveniku Georgeu Gabrielu Stokesu, često se koristi kao model za analizu viskoznih fluida u različitim inženjerskim i znanstvenim aplikacijama. U ovome radu fokus je na Stokesovo strujanje oko kruga, koje je jedan od klasičnih problema u mehanici fluida. Analiza ovog strujanja ne samo da pruža dublje razumijevanje osnovnih principa dinamike fluida, već također ima važne primjene u područjima poput biomedicinskog inženjerstva (npr. strujanje krvi u arterijama) i procesnih industrija (npr. strujanje fluida kroz cijevi malog promjera). Uz pomoć naprednih numeričkih alata poput Ansysa, postoji mogućnost detaljno istražiti ovo strujanje, analizirati njegove karakteristike i interpretirati rezultate kako bi se stekao uvid u složenu dinamiku fluida u blizini geometrijskih prepreka. U ovom radu istražiti će se Stokesovo strujanje oko kruga koristeći Ansys Fluent, pružajući korak-po-korak analizu simulacije i interpretaciju rezultata. Kroz ovu studiju, cilj je dublje razumijevanje Stokesovog strujanja, kao i demonstracija sposobnosti Ansysa za analizu viskoznih strujanja i njegovu primjenu u inženjerskim praksama.



## 2. OPĆENITO O STRUJANJU

Strujanje je pojava u kojem se fluid, tekućina ili plin, giba od jednog do drugog mjesta. To je ključni koncept u mehanici fluida, grani fizike koja proučava ponašanje fluida i njihove interakcije s okolinom.

### 2.1. Vrste strujanja

Strujanje može biti laminarno ili turbulentno, ovisno o tome kako se fluid kreće. Laminarno strujanje karakterizira glatko, slojevito kretanje fluida bez vidljivih vrtložnih uzoraka u slojevima koji su vrlo tanki i koji klize jedan po drugome (Slika 2.1.).



*Slika 2.1.1 Prikaz laminarnog strujanja zraka [2]*

Turbulentno strujanje je kaotično i karakterizirano vrtložnim gibanjem fluida s velikim promjenama brzine. U realnim slučajevima većina strujanja je turbulentna, te takvo strujanje nije moguće odrediti analitički već se mora odrediti numerički (Slika 2.2.).



*Slika 2.1.2 Prikaz turbulentnog strujanja zraka [2]*

Brzina strujanja odnosi se na brzinu kojom fluid putuje kroz određeni prostor. Reynoldsov broj je bezdimenzionalni broj koji se koristi za karakterizaciju strujanja. Određuje omjer inercijalnih i viskoznih sila u strujanju te može pokazati prijelaz između laminarnog i turbulentnog strujanja.

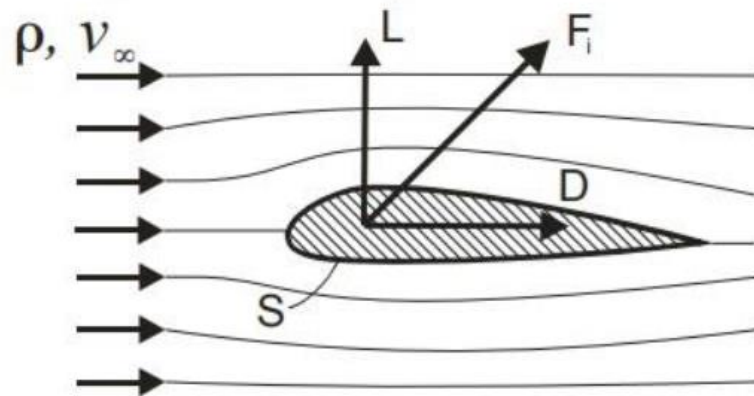
Strujanje je laminarno ako je Reynoldsov broj manji od 2300, dok je za vrijednosti preko 40 000 strujanje potpuno turbulentno.

Strujanje je moguće klasificirati kao pretežno jednodimenzijnsko, dvodimenzijnsko ili trodimenzijnsko ovisno o broju prostornih koordinata potrebnih da bi se opisalo strujno polje. Iako su sva strujanja u osnovi trodimenzijnska, analize bazirane na dvodimenzijnskom ili jednodimenzijnskom modelu su od velike koristi. Na primjer, strujanje kroz dugu ravnu cijev konstantnog presjeka na dovoljnoj udaljenosti od ulaza u cijev može se smatrati jednodimenzijnskim. Strujanje rijeka može se s velikom točnošću aproksimirati dvodimenzijnskim strujanjem pošto se brzina strujanja u smjeru okomitom na površinu rijeke, po dubini, može zanemariti uz pretpostavku dovoljne udaljenosti od prepreka u riječnom koritu, a često se u pravilnim i relativno ravnim kanalima, strujanje može izuzetno dobro aproksimirati jednodimenzijnskim modelom.

Strujanje je ključni koncept u mnogim područjima inženjeringa i znanosti, uključujući aerodinamiku, hidrodinamiku, kemiju, geofiziku, medicinsko inženjerstvo i mnoga druga područja. Razumijevanje strujanja omogućuje bolje dizajniranje sustava, optimizaciju performansi i rješavanje različitih inženjerskih problema. [1]

## 2.2. Podjela strujanja prema rubnim uvjetima

Također, strujanje se može podijeliti s obzirom na rubne uvjete strujanja na vanjska i unutarnja strujanja. Vanjsko strujanje se pojavljuje kada fluid struji oko neke stijenke, a unutarnje strujanje je protjecanje fluida kroz cijevi ili kanale gdje su dva ruba područja strujanja stijenke.



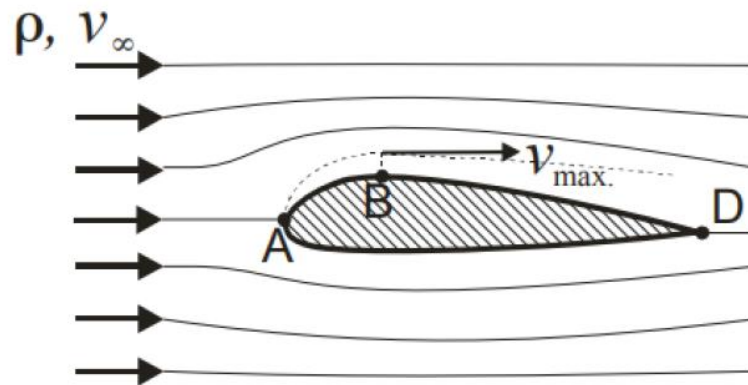
Slika 2.2.1 Optjecanje tijela [1]

Kod optjecanja tijela strujanje fluida dijeli se u dvije zone:

- Granična zona – zona koja se nalazi blizu stijenki i gdje su smični efekti značajni
- Vanjska zona – zona u kojoj je utjecaj trenja stijenki beznačajan.

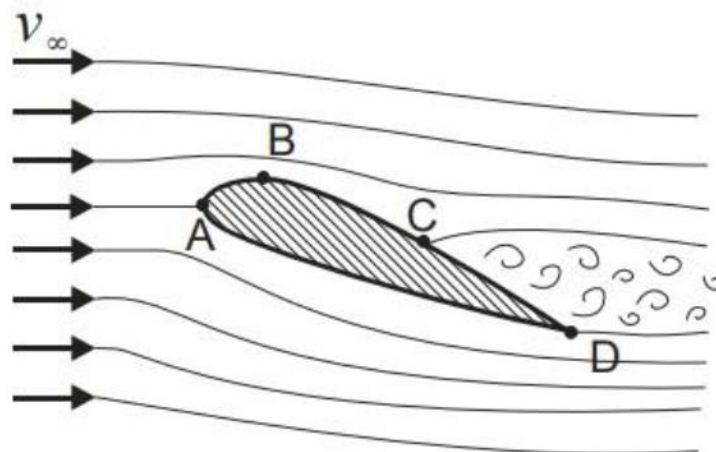
### 2.3. Odvajanje struja

Odvajanje struje je fenomen do kojeg dolazi kada strujnice zraka više ne prate oblik stijenke. U točki A dolazi do zastoja, a u točki B brzina strujanja je maksimalna. Postupno od točke A do točke B dolazi do povećanja brzine strujanja dok se tlak smanjuje (Slika 2.4.).



Slika 2.3.1 Struja prati oblik tijela

Ako se poveća napadni kut profila dolazi do odvajanja strujanja pri čemu se smanjuje kinetička energija čestica fluida. Sila tlaka između točaka B i D je protivna smjeru gibanja. Od točke C u kojoj se pojavljuje odvajanje pa sve do točke D tlak je niži pa je sila otpora oblika veća.



Slika 2.3.2 Odvajanje struja

### 3. BERNOULLIJEVA JEDNADŽBA

Bernoullijeva jednađba je osnovno načelo mehanike fluida koje opisuje ponašanje idealnog neviskozno fluida u strujanju. Jednađba je nazvana prema švicarskom matematičaru i fizičaru Danielu Bernoulliju, koji ju je prvi puta formulirao.

Bernoullijeva jednađba izražava koncept očuvanja energije u strujanju fluida i može se zapisati na sljedeći način:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = konst$$

Ova jednađba kaže da je zbroj hidrostatskog tlaka  $p$ , kinetičke energije po volumenu ( $1/2 \rho v^2$ ) i potencijalne energije po volumenu ( $\rho gh$ ) konstantan duž bilo koje linije strujanja fluida. To znači da ako se fluid kreće brže, njegov tlak će biti manji i obrnuto.

Bernoullijeva jednađba korisna je za analizu strujanja fluida kroz cijevi, kroz otvore, preko aerodinamičkih profila i u mnogim drugim primjenama. Međutim, važno je napomenuti da je ova jednađba izvedena prema pretpostavkama idealnog fluida (neviskozni fluid bez trenja) i stoga može biti ograničena u primjeni na stvarne tekućine koje nisu potpuno idealne.

#### 3.1. Bernoullijeva jednađba za realni fluid

Bernoullijeva jednađba za realne fluide može se proširiti kako bi uzela u obzir gubitke energije uslijed trenja i turbulencije. Ovo proširenje uključuje dodatak člana koji opisuje gubitke energije, obično nazvan "član gubitka". Jedna od verzija Bernoullijeve jednađbe za realne fluide je:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 + \Delta P_{gubitak} = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2$$

$\Delta P_{gubitak}$  predstavlja gubitke energije po volumenu fluida duž analiziranog dijela strujanja. Ova vrijednost može biti determinirana pomoću empirijskih korelacija ili eksperimentalno. U stvarnim fluidima, gubici energije mogu biti značajni zbog trenja fluida s unutarnjim površinama cijevi ili zbog turbulencije u strujanju.

Važno je napomenuti da je ova verzija Bernoullijeve jednađbe primjenjiva samo na stacionarno strujanje fluida bez izvora ili ponora energije duž analiziranog dijela strujanja. [1]

## 4. STOKESOVO STRUJANJE

Stokesovo strujanje je vrsta laminarnog strujanja (tj. strujanja koje se odvija sloj po sloj) koje se javlja pri niskim brzinama fluida ili pri malim Reynoldsovima brojevima. Ovo strujanje je nazvano po Georgeu Gabrielu Stokesu, znanstveniku koji je prvi detaljno proučavao i opisao ove pojave u 19. stoljeću. Glavne karakteristike Stokesovog strujanja uključuju:

- Dominacija viskoznih sila: U Stokesovom strujanju, viskozne sile su dominirajuće nad inercijalnim silama, što znači da je otpor fluida prema promjeni brzine vrlo visok.
- Linearan odnos između sile i brzine: Za Stokesovo strujanje, sila koja djeluje na tijelo u fluidu je linearno proporcionalna brzini kretanja tijela. Ovaj odnos je opisan Stokesovim zakonom, koji kaže da je sila proporcionalna brzini i viskoznosti fluida, te obrnuto proporcionalna promjeru tijela.
- Jednostavni matematički modeli: Stokesovo strujanje često se analizira kroz jednostavne matematičke modele, kao što su Stokesovi zakoni za kuglu ili cilindar koji se kreću kroz fluid.
- Primjene u mikroskali: Budući da Stokesovo strujanje prevladava u mikroskali i pri niskim brzinama, ima važne primjene u područjima poput mikrofluidike, biomedicinskog inženjerstva (npr. protok krvi kroz kapilare) i analitičke kemije.
- Ograničenja na Reynoldsov broj: Stokesovo strujanje se opaža kada je Reynoldsov broj (koji odražava omjer inercijalnih sila i viskoznih sila) izrazito mali, obično manji od 1.

U analizi Stokesovog strujanja, cilj je obično razumjeti složene interakcije između tijela i fluida, kao i efekte viskoznosti na dinamiku strujanja. To može uključivati proučavanje sile otpora, raspodjele brzine i tlaka oko tijela, te analizu stabilnosti strujanja. Kroz numeričke simulacije i eksperimentalne studije, moguće je dublje istražiti ove fenomene i primijeniti ih u širokom spektru inženjerskih i znanstvenih aplikacija.

#### 4.1. Navier-Stokes jednadžbe

Navier-Stokes jednadžbe se koriste za pretpostavljanje strujanja.

Kod Newtonovskih fluida viskozna naprezanja proporcionalna su brzini smičnog naprezanja, te se ta naprezanja  $\tau_{ij}$  mogu izraziti preko gradijenta brzine i svojstava fluida (viskoznost). Navier-Stokesove jednadžbe gibanja dobiju se uvrštavanjem tako izraženih naprezanja u diferencijalnu jednadžbu gibanja i uz pretpostavku nestlačivog strujanja i konstantne viskoznosti dobivamo vektorski oblik Navier-Stokesovih jednadžbi:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -grad p + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{f}$$

U tom obliku jednadžbe član na lijevoj strani predstavlja silu inercije, a članovi na desnoj strani redom predstavljaju normalne i smične kontaktne sile i masenu silu.

Navier-Stokesove jednadžbe mogu se zapisati i u Kartezijevom koordinatnom sustavu, pa one tada po osima x, y i z glase:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z \end{aligned}$$

Uz Navier-Stokesove jednadžbe i zakon o očuvanju mase može se u potpunosti matematički pretpostaviti strujanje nestlačivih Newtonovskih fluida, ali zbog složenosti Navier-Stokesovih jednadžbi moguće ih je riješiti analitički samo u nekim specijalnim slučajevima uz neka pojednostavljena i pretpostavke.

Navier-Stokesove jednadžbe su valjane samo za slučajeve kada je reprezentativna fizikalna skala dužine sustava (L) puno veća od molekularne dužine srednje slobodne putanje [1]. Omjer tih dviju veličina je Knudsenov broj:

$$Kn = \frac{\lambda}{L}$$

Za  $Kn < 0,01$  koriste se Navier-Stokesove jednadžbe.

Za  $0,01 < Kn < 0,1$  mogu se isto koristiti ali uz posebne rubne uvjete.

Za  $Kn > 0,1$  ne mogu se koristiti. [3]

## 5. ANSYS

Ansys je tvrtka koja razvija i distribuira sofisticirani softver za simulaciju proizvoda pod različitim uvjetima. Njihov softver za analizu konačnih elemenata omogućuje simulaciju raznih modela, uključujući elektroniku, mehaničke komponente i analizu fluida, uz obzir na faktore poput tvrdoće, žilavosti, elastičnosti i temperaturnih varijacija. Moguće je prikazati funkciju proizvoda s različitim specifikacijama na 3D modelu bez da se taj proizvod stvarno proizvede.

Ansys Workbench je jedan od njihovih glavnih proizvoda, često korišten zbog svoje sposobnosti da korisnicima omogući sastavljanje i testiranje složenih struktura od pojedinačnih komponenti. Korisnici mogu definirati geometriju i dodavati varijable poput tlaka, temperature i mase kako bi simulirali ponašanje proizvoda pod različitim uvjetima.

Osim toga, Ansys razvija i softver za upravljanje podacima, akademsko istraživanje i obrazovanje. Njihov softver se prodaje putem godišnje pretplate i uključuje alate za simulaciju raznih fenomena, uključujući dinamiku fluida, elektromagnetske simulacije i strukturnu analizu.

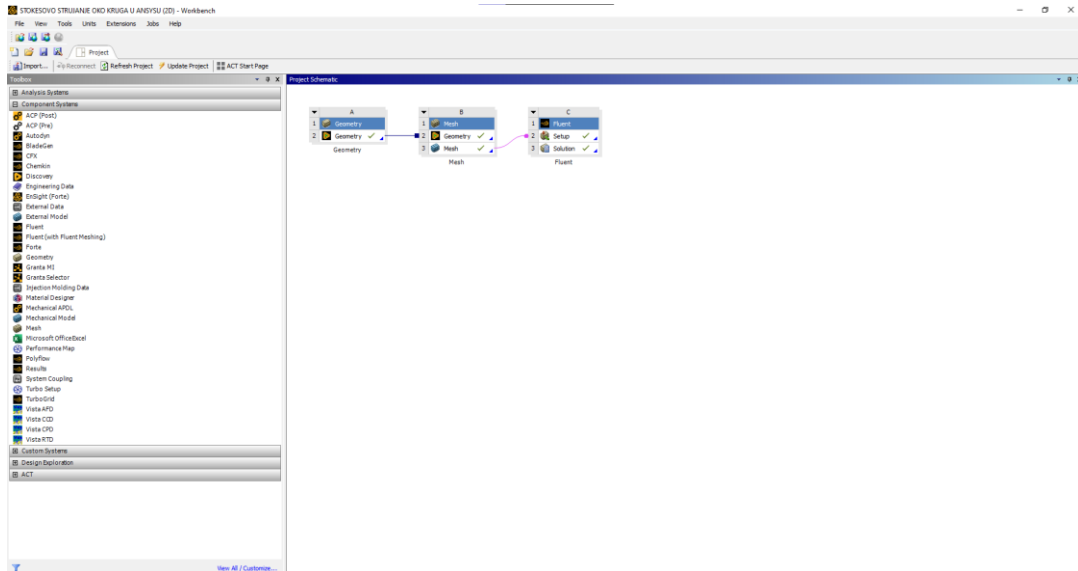
Ansys Fluent je istaknuti softver za simulaciju fluida u industriji, poznat po svojim naprednim mogućnostima modeliranja i visokoj točnosti. Pruža korisnicima prilagodljivo i intuitivno okruženje za kreiranje i analizu fizičkih modela tekućina, što omogućuje inovacije i optimizaciju performansi proizvoda. Može kreirati razne modele i analizirati fenomene tekućina u vrlo pristupačnom sustavu. [4]



## 6. IZRADA SIMULACIJE

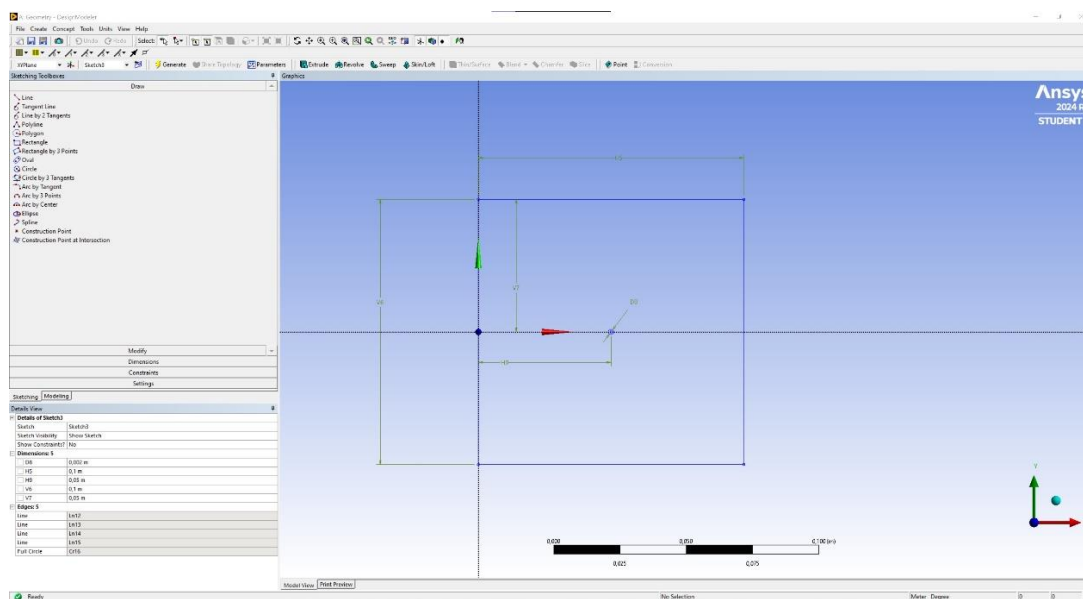
### 6.1. Geometrija

Za početak izrade simulacije potrebno je preuzeti softver ANSYS (Workbench 2024 R1) studentsku verziju sa svim potrebnim alatima. U shemu Workbencha prvo se postavljaju potrebne komponente sustava (slika 5.1.1.).



Slika 6.1 Prikaz sučelja programa Ansys

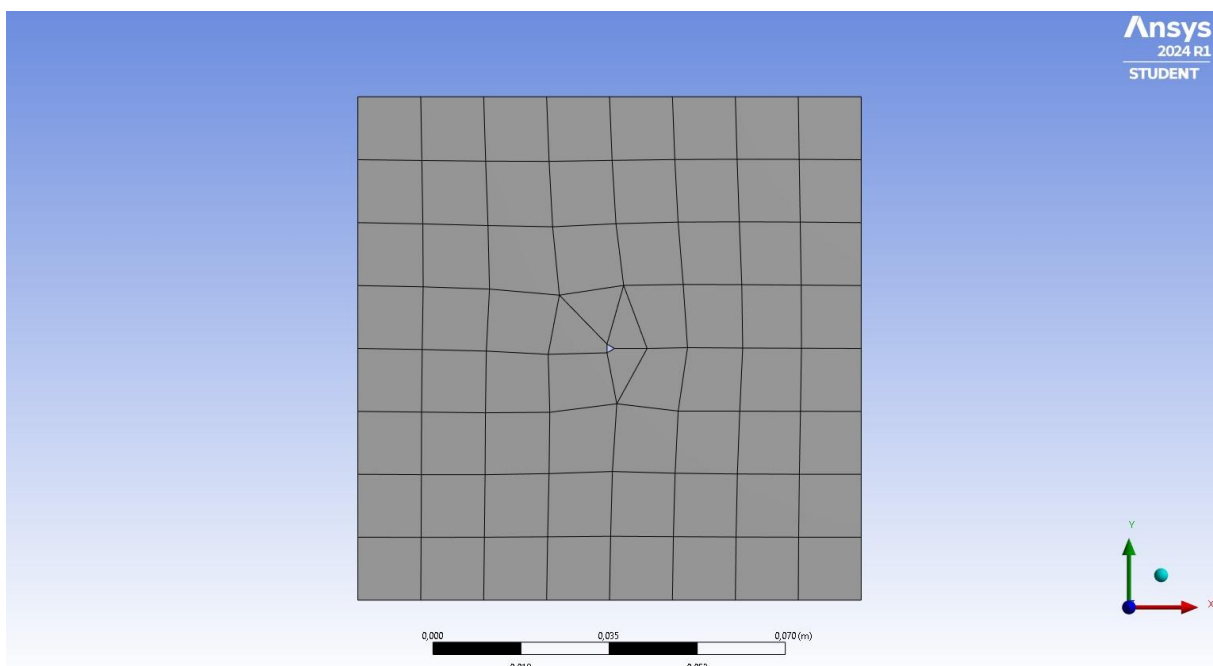
Prva komponenta je *Geometry* unutar koje se u *sketchu* crta domena koja se želi provesti kroz simulaciju. U ovom slučaju je domena pravokutnog oblika dimenzije 100 mm x 100 mm, unutar koje se nalazi krug promjera 2 mm.



Slika 6.2 Prikaz domene

## 6.2. Numerička mreža (*mesh*)

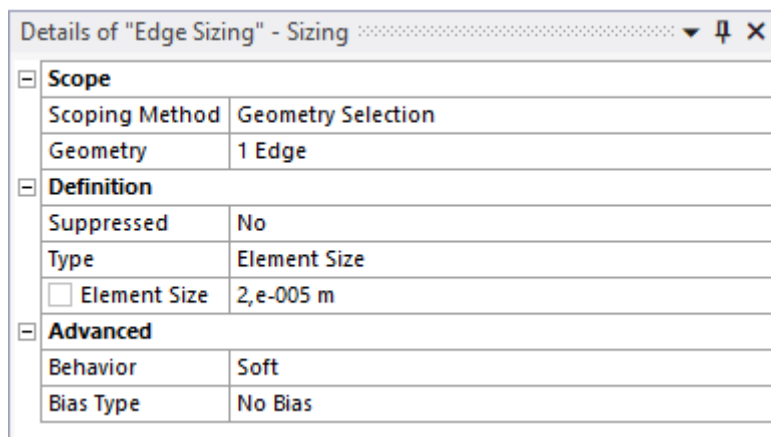
Numerička mreža se izrađuje unutar komponente *Mesh*. Izrada može biti jednostavna i automatska, ali se može postići i visoko izrađeno umrežavanje. *Mesh* je zapravo dijeljenje promatrane geometrije na mnogo manjih dijelova s ciljem boljeg definiranja prostora, odnosno domene za izradu simulacije. Obično se gušća podjela stavlja na mjesta gdje su bitniji rezultati ili gdje su očekivane neke velike promjene. Automatskim generiranjem numeričke mreže program izradi dosta lošu mrežu (prikazanu na slici ispod) koju je potrebno dalje adaptirati da bi se dobila gušća mreža koja pruža mnogo preciznije rezultate kasnije u samoj simulaciji.



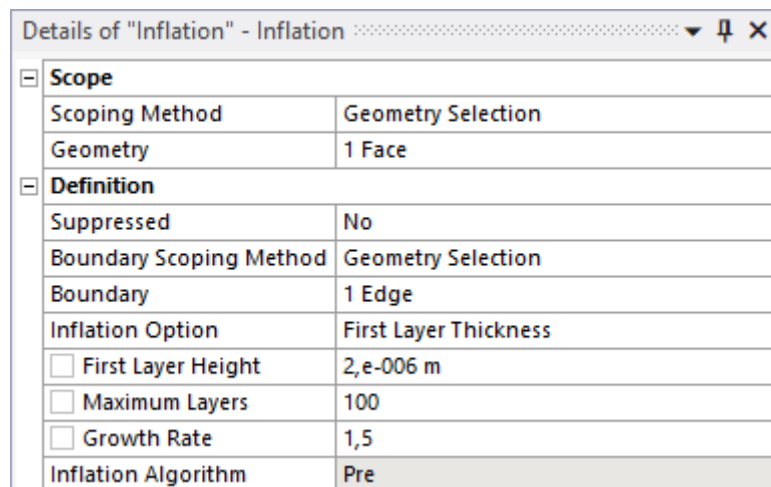
Slika 6.2.1 Prikaz automatski generirane numeričke mreže

Ovakva numerička mreža ne zadovoljava uvjete, stoga je potrebno raditi adaptaciju. Adaptacijom numeričke mreže dobije se puno gušća i sitnija podjela elemenata na domeni. Potrebno je izbjeći grube prijelaze sa sitnijeg na veći element.

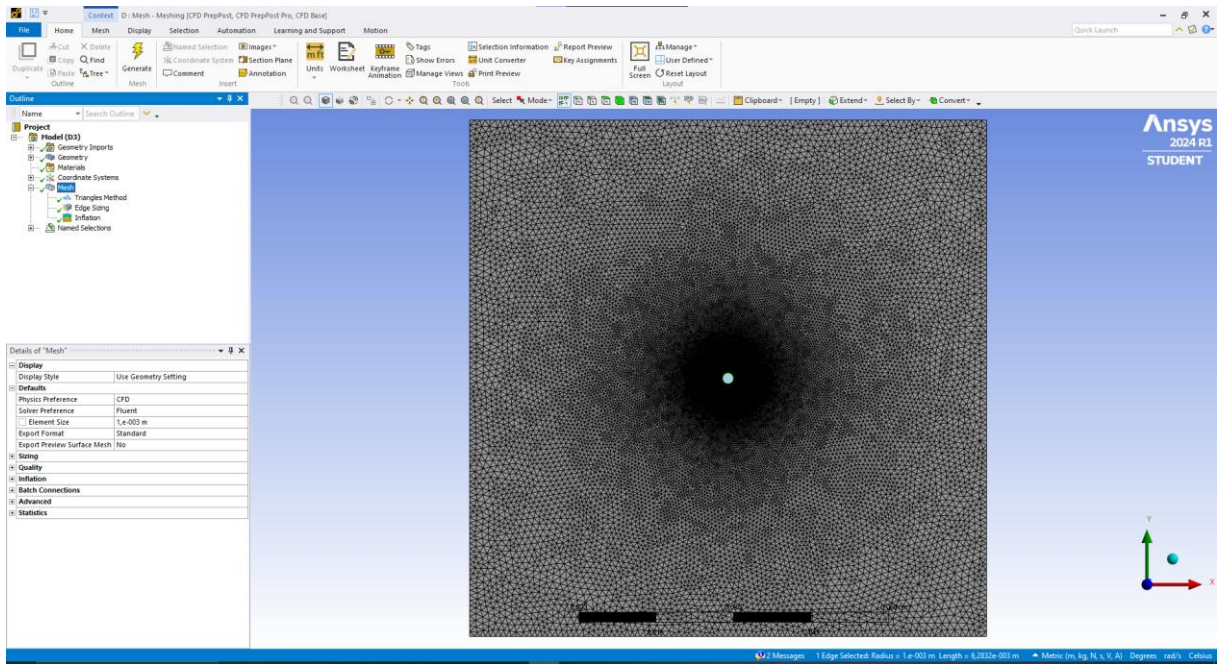
Za potrebe adaptacije korištene su metode „*Triangles Method*“, „*Edge Sizing*“ i „*Inflation*“. „*Triangles Method*“ daje svakom pojedinom elementu oblik trokuta i time poboljšava kvalitetu mreže, jer loše oblikovani elementi mogu dovesti do numeričkih grešaka. Metoda „*Edge Sizing*“ koristi se za kontrolu veličine mreže duž određenih rubova koji su od posebnog interesa za postizanje veće točnosti. Ova metoda primijenjena je na krug oko kojega struji fluid kako bi rezultati u tom području bili što točniji. Veličina elementa u ovoj metodi podešena je na 0,00002. Metoda „*Inflation*“ generira slojevitú mrežu oko odabranih geometrijskih značajki, također oko kruga. Definišana je s brojem slojeva, debljinom prvog sloja i rastućim faktorom između slojeva. Odabrano je 100 slojeva, debljina prvog sloja od 0,000002 i rastući faktor između slojeva 1,5.



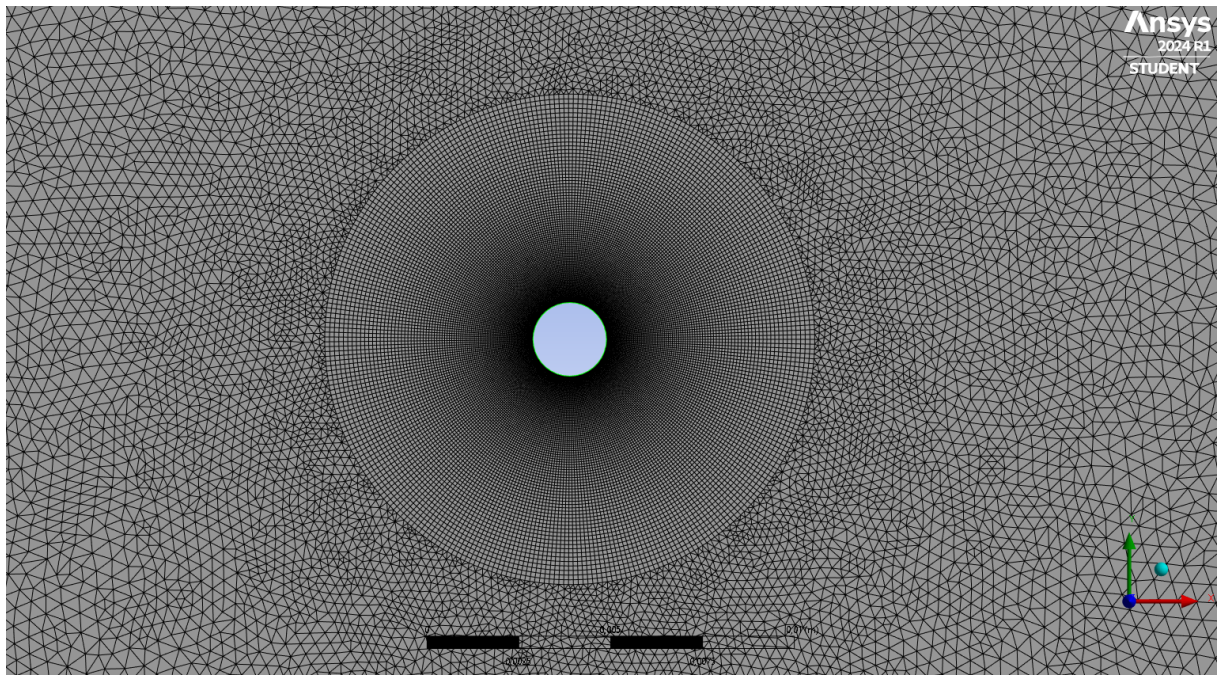
Slika 6.2.2 „*Edge Sizing*“ postavke



Slika 6.2.3 "Inflation" postavke

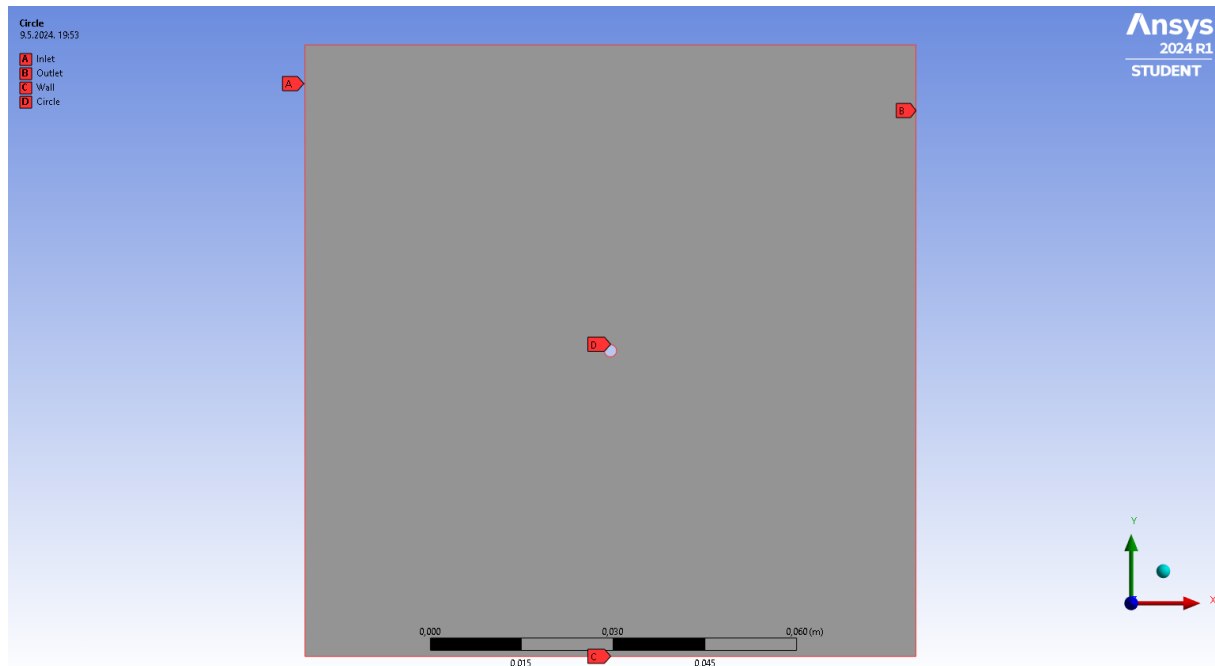


Slika 6.2.4 Prikaz adaptirane numeričke mreže



Slika 6.2.5 Uvećani prikaz adaptirane numeričke mreže

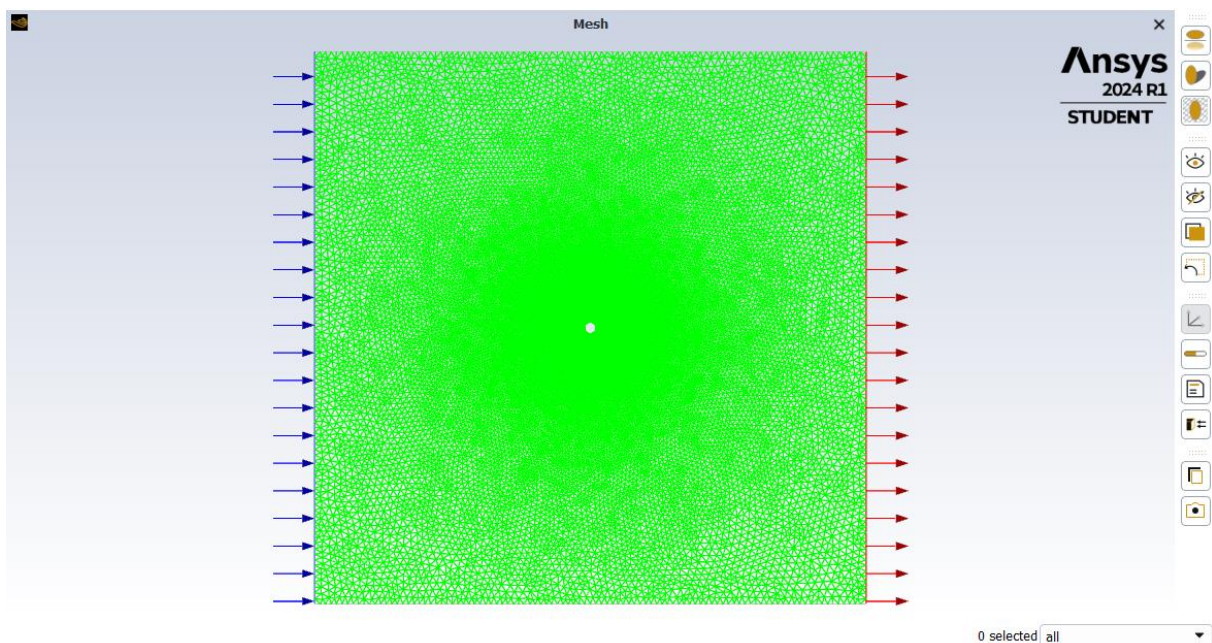
Osim ove adaptacije i povećanja broja elemenata numeričke mreže potrebno je odrediti i granične uvjete kao što su *inlet*, *outlet*, *wall* i *circle*. Granični uvjeti kreiraju se na način da se odabere rub, ploha ili tijelo na kojima se zatim kreira *Named Selection*. *Inlet* je kreiran na lijevom rubu domene gdje započinje strujanje. *Outlet* se postavlja na desni rub domene gdje je kraj strujanja. *Wall* se postavlja na gornji i donji rub domene, dok je *circle* postavljen na središnji krug oko kojeg će se promatrati strujanje. [5]



*Slika 6.2.6 Prikaz graničnih uvjeta*

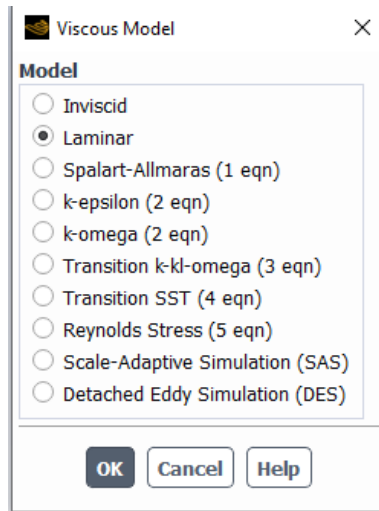
### 6.3. Simulacija

Nakon uspješno izrađene geometrije i numeričke mreže, potrebno je izraditi simulaciju pod komponentom Fluent koja je također u sklopu paketa Ansys. Fluent je jedan od najpoznatijih programa za izradu simulacije određenog oblika. Fluent koristi softver za računalnu dinamiku fluida (CFD) kojeg koristi za modeliranje strujanja fluida, toplinski prijenos i slične procese. Moguća je simulacija složenih dinamika fluida, turbulencija, raznih strujanja i izgaranja te je vrlo koristan prikaz rezultata raspodjele tlakova, temperatura i drugih karakteristika koje utječu na samo strujanje i fluid.



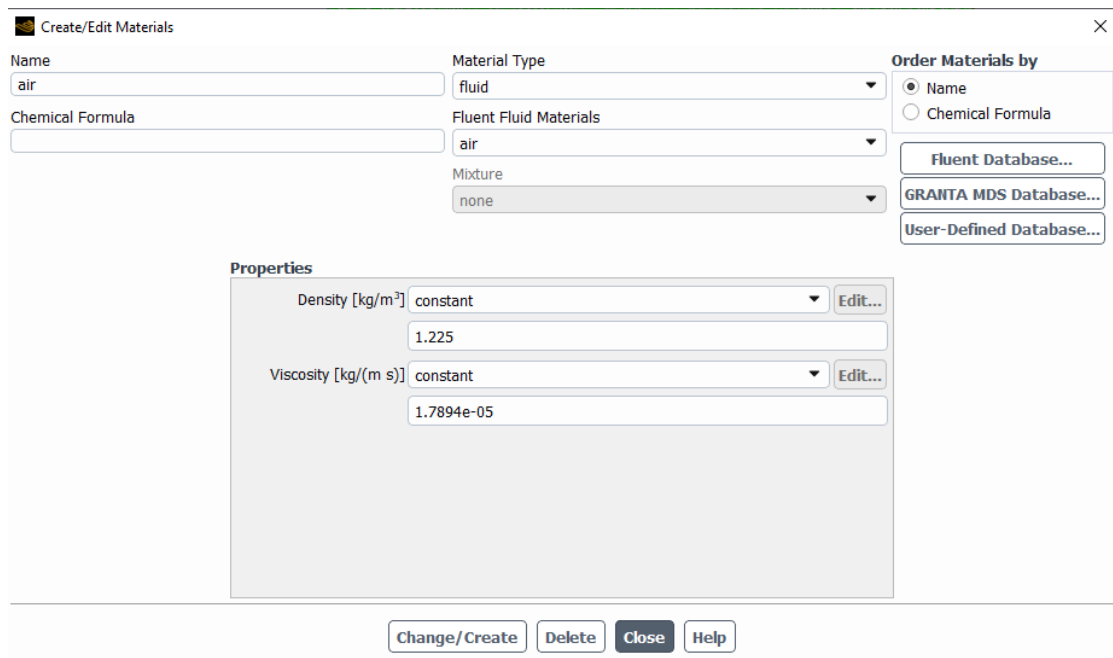
Slika 6.3.1 Prikaz domene u Fluentu

Prije svega potrebno je odabrati metodu kojom će se provoditi simulacija. Moguće su metode: *inviscid*, *laminar*, *Spallart-Allmaras*, *k-epsilon*, *k-omega*, *Reynolds Stress* i tako dalje. U ovom slučaju korištena je metoda „*laminar*“ obzirom da se radi analiza Stokesovog strujanja koje je vrsta laminarnog.

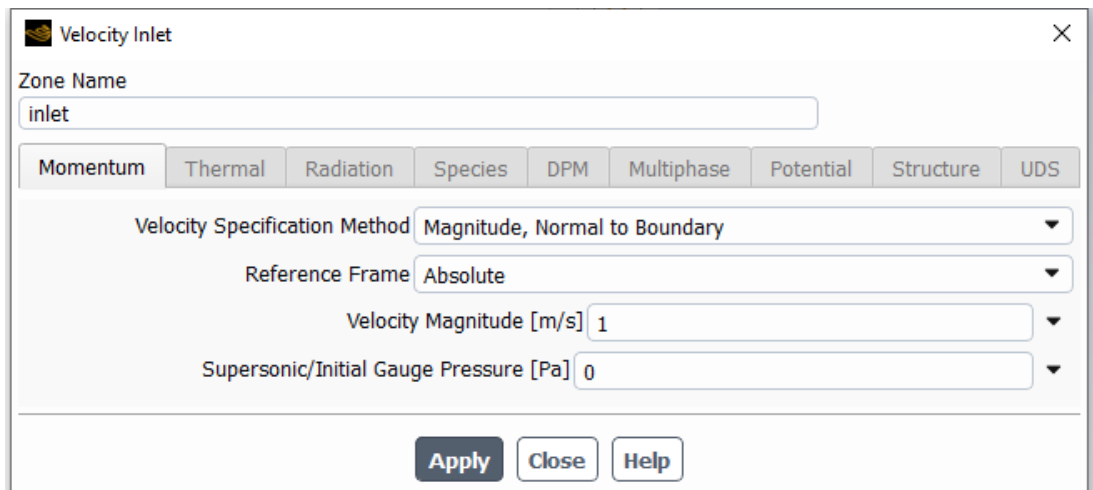


Slika 6.3.2 Prikaz odabira laminarnog modela

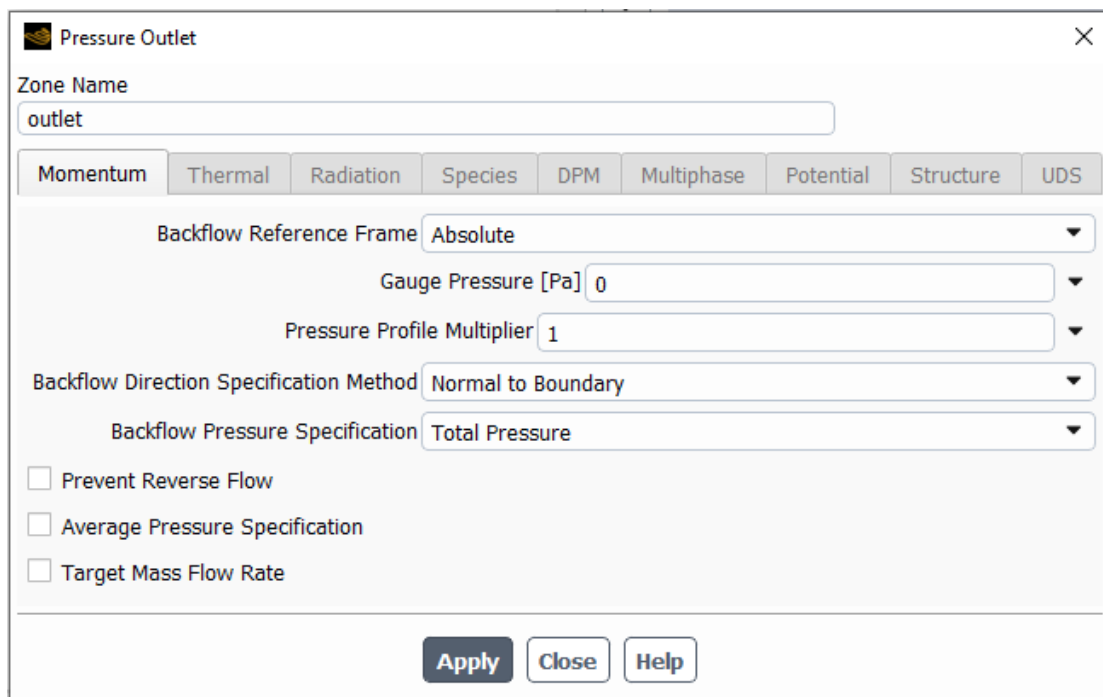
Zatim je potrebno provjeriti je li postavljen zrak kao zadani fluid koji se koristi, te se podešavaju granični uvjeti. Granični uvjeti na ulazu i izlazu vrlo su bitni za izradu simulacije. Granični uvjet na ulazu postavlja se na *velocity-inlet* te se zadaje brzina od 1 m/s. Izlaz se postavlja na *pressure-outlet* te je time definirano da na izlazu mora biti atmosferski tlak. [6]



Slika 6.3.3 Prikaz odabira zadanog fluida



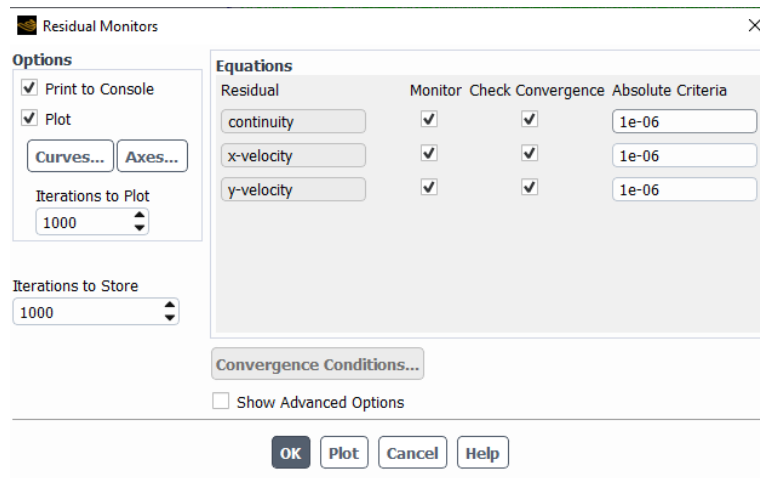
*Slika 6.3.4 Prikaz podataka na ulazu*



*Slika 6.3.5 Prikaz podataka na izlazu*

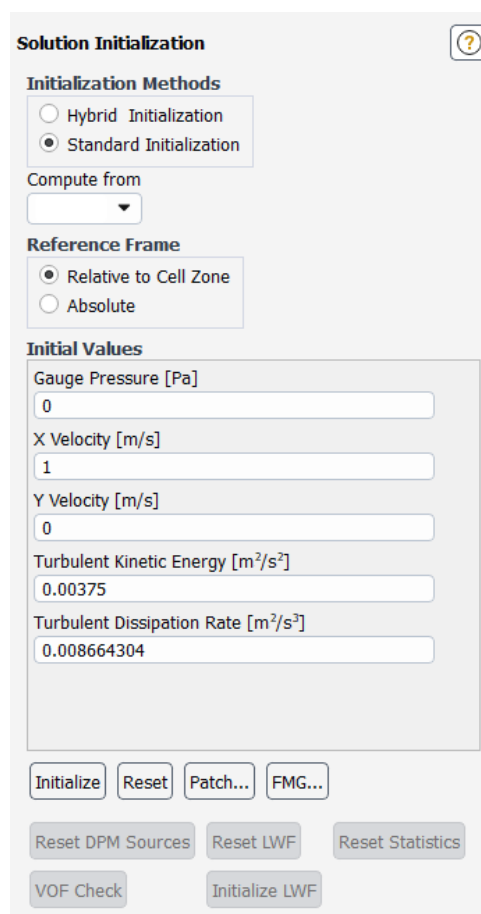


U izborniku „Residuals Monitors“ potrebno je promijeniti programom zadani kriterij s 0,001 na 0,000001 i tako striktnije postavljene kriterije će značiti preciznije rezultate.



Slika 6.3.6 Postavljanje kriterija

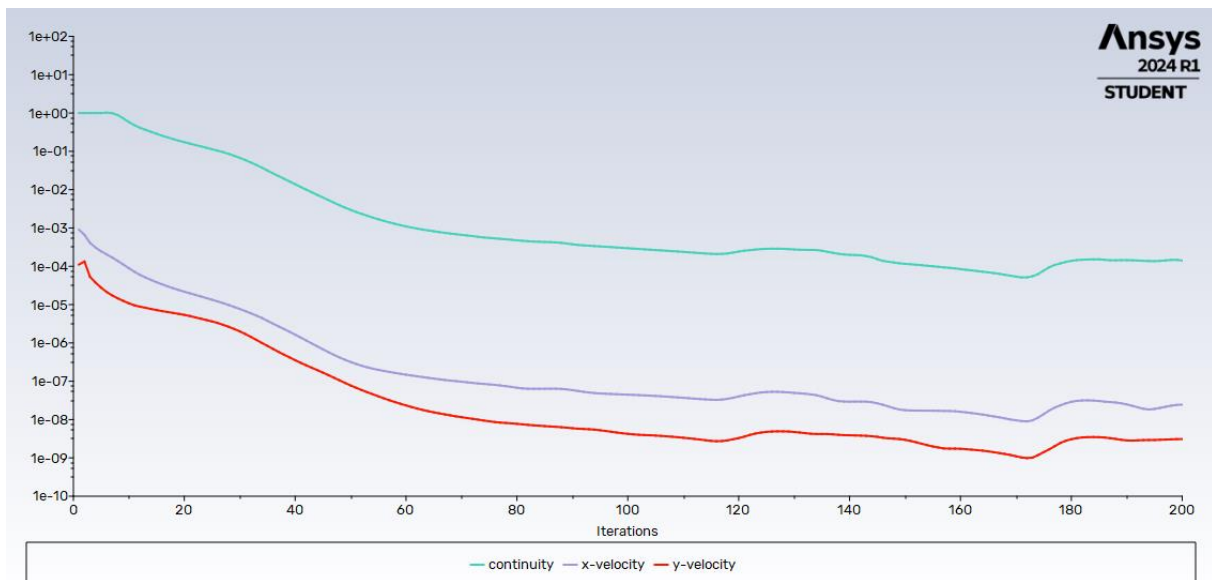
Nakon graničnih uvjeta potrebno je inicijalizirati rješenje, odnosno moraju se postaviti početne vrijednosti u domenu, koje se uzimaju s *inleta*, i kada se one kreiraju kroz proračun se vrijednosti namještaju sve dok ih *solver* ne namjesti do zadovoljavajućih kriterija.



Slika 6.3.7 Prikaz odabira inicijalizacije

Nakon definiranja rubnih uvjeta i inicijalizacije, pokreće se računanje rješenja, odnosno *Run Calculation*. Broj iteracija postavljen je na 200, što znači da će se blok ponavljati 200 puta. Završetkom svih iteracija dobiva se graf iteracije te se nastavlja s detaljnom analizom dobivenih podataka koji se mogu grafički prikazati pomoću raznih grafova. Ukoliko se želi, moguće je vrlo lako promijeniti neke postavke ili ulazne parametre kako bi se pokrenulo ponovno računanje i dobili novi rezultati, što će i kasnije biti učinjeno da bi se usporedili rezultati različitih brzina.

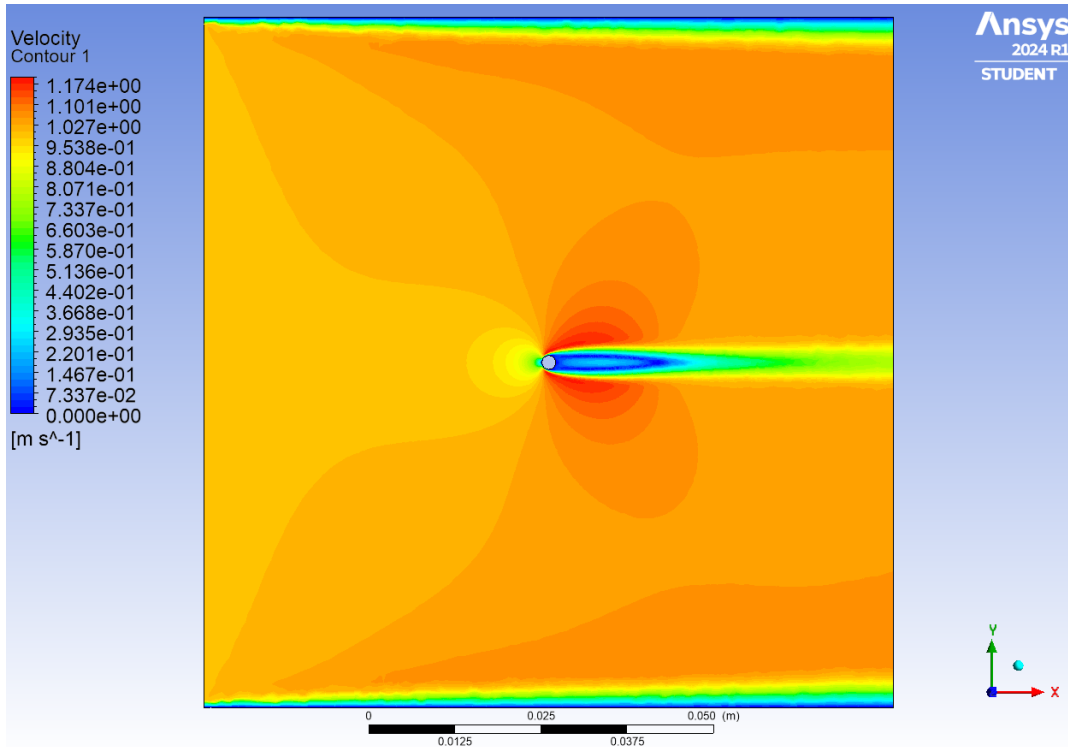
Kod trajanja procesa iteracije izrađuje se dijagram kod kojeg je važno da se svakom iteracijom približava x-osi, odnosno da je graf padajući.



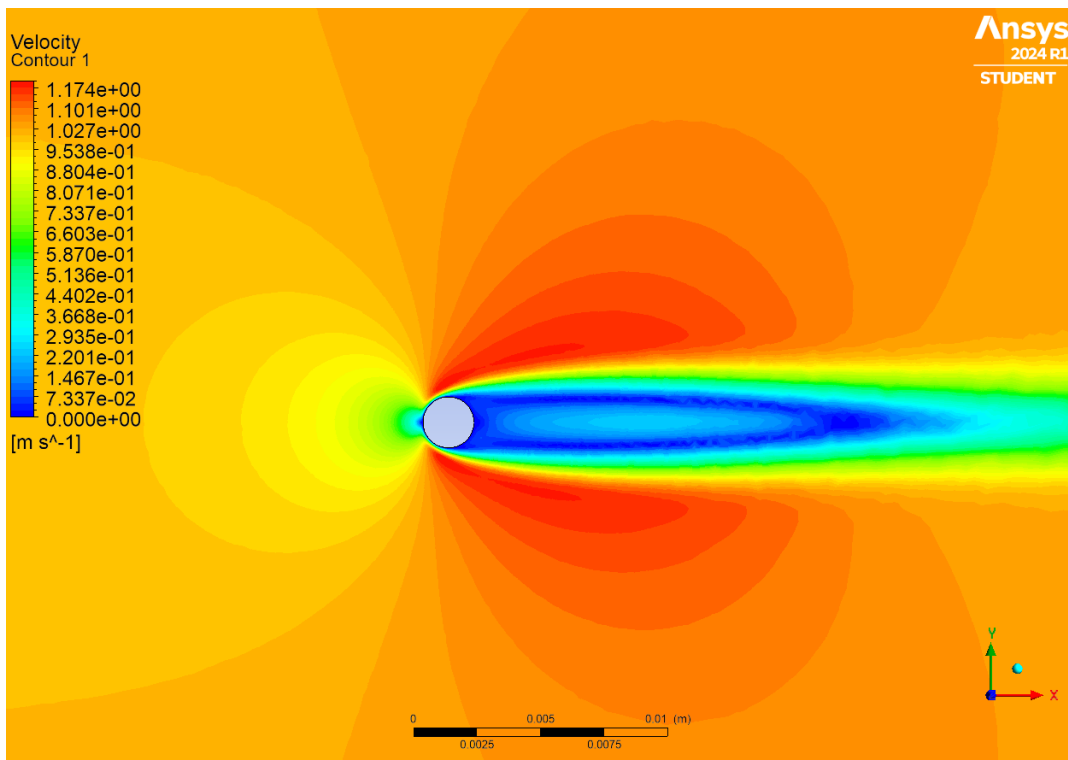
*Slika 6.3.8 Graf iteracija*

## 7. REZULTATI

Rezultati su prikazani pomoću kontura i linija koje su karakteristične za pojedina područja brzina i tlakova. Različite boje karakteriziraju različite vrijednosti brzina i tlakova.

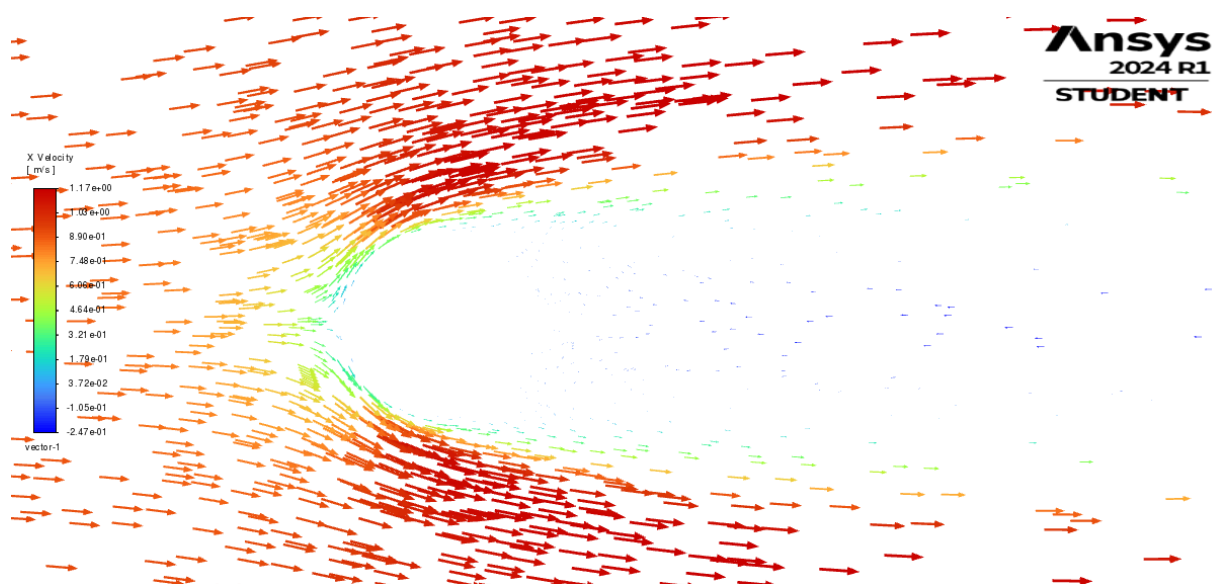


Slika 7.1 Grafički prikaz konture brzine

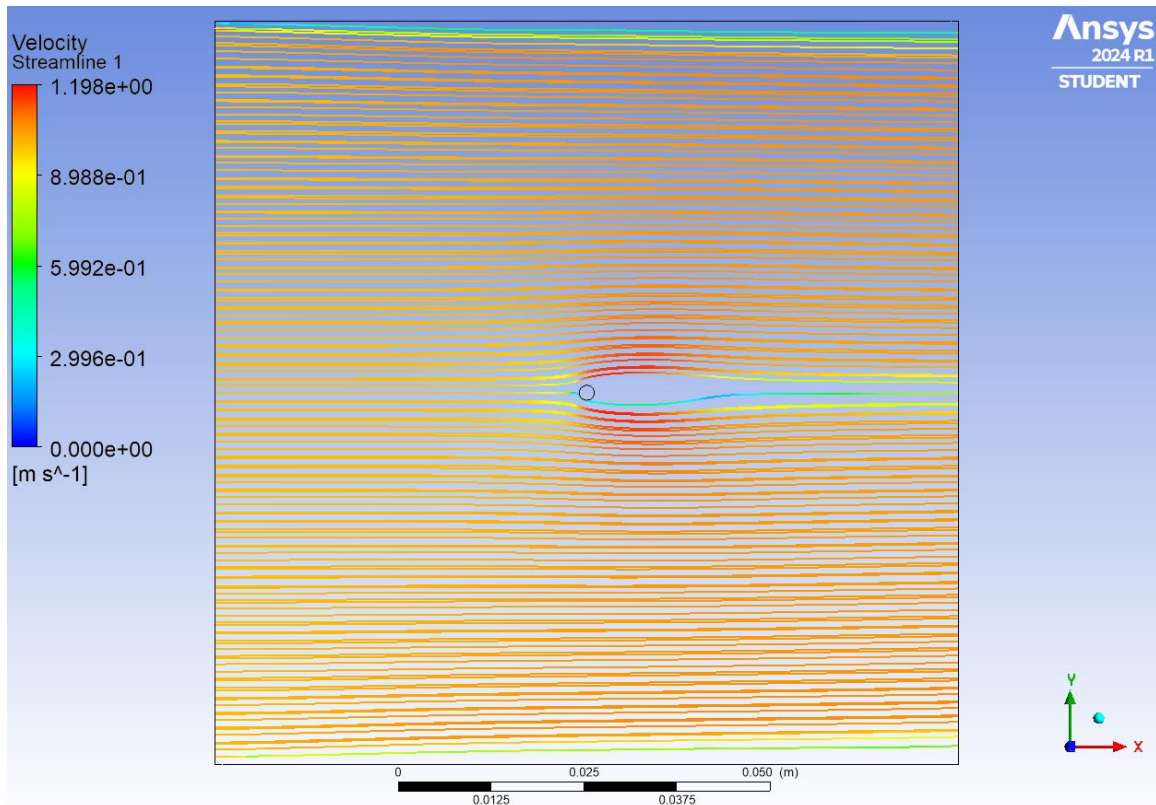


Slika 7.2 Uvećani grafički prikaz konture brzine

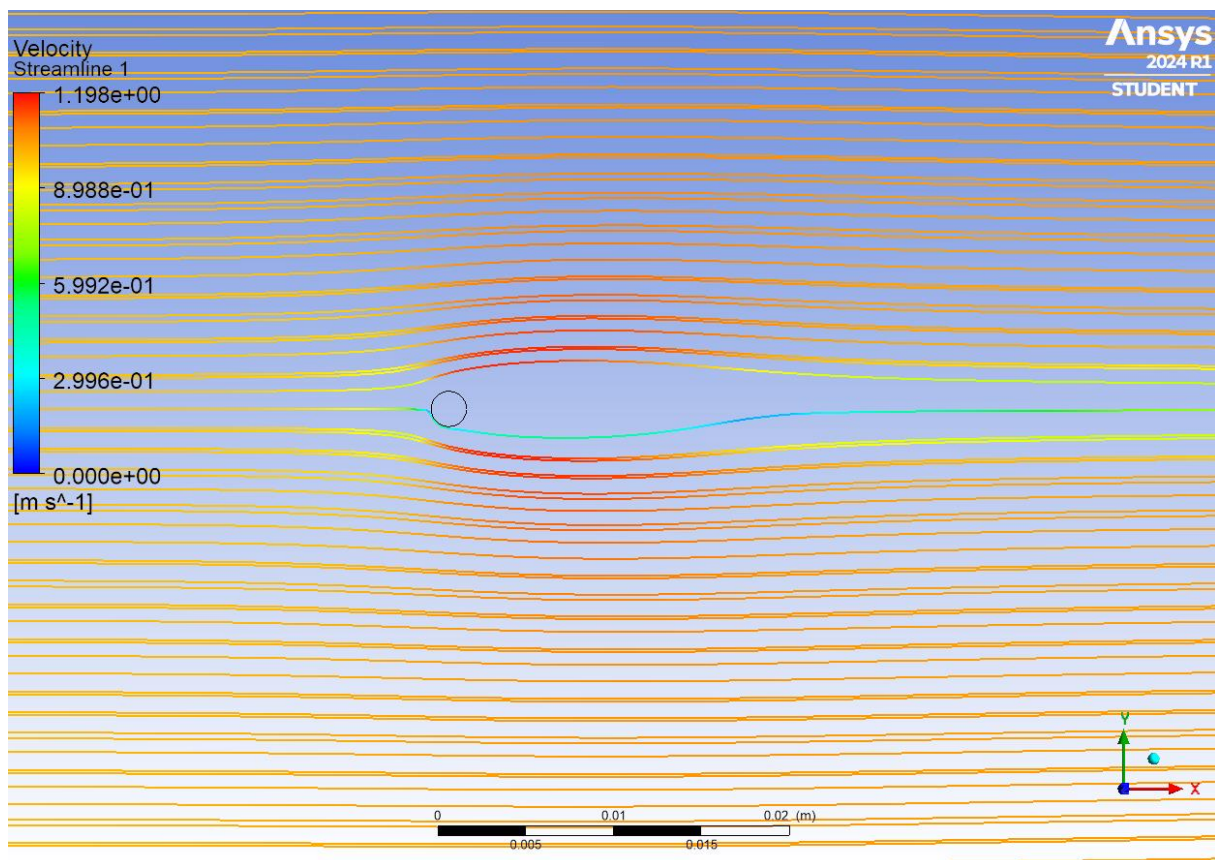
Na slikama su vidljive konture koje razdvajaju područja različitih brzina te različita boja govori kolika je brzina u određenom području. Daleko od kruga brzina strujanja je gotovo konstantna i jednaka ulaznoj brzini strujanja koja iznosi 1 m/s. Fluid se kreće ravnomjerno i paralelno s konstantnom brzinom. U blizini površine kruga dolazi do značajnog usporavanja brzine zbog viskoznih sila, te je brzina na samoj površini kruga jednaka nuli. Brzina fluida obuhvaća krug, stvara karakterističan uzorak u kojem fluid zaobilazi prepreku. Strujnice se savijaju oko kruga, a brzina se povećava u područjima gdje strujanje mora proći kroz suženiji prostor između kruga i okolnog fluida. Ako je dolazno strujanje simetrično, profil brzine će biti simetričan oko osi koja prolazi kroz centar kruga i paralelna je smjeru dolaznog strujanja. Najveće brzine se javljaju na bokovima kruga jer fluid mora ubrzati da bi prošao oko prepreke. Iza kruga brzina se smanjuje, a mogu se javiti i zone s niskom brzinom ili čak stagnacijom, gdje se fluid praktički zaustavlja. Strujnice su većinom paralelne i bez naglih promjena što ukazuje na laminarno strujanje.



*Slika 7.3 Prikaz vektora brzina oko kruga*

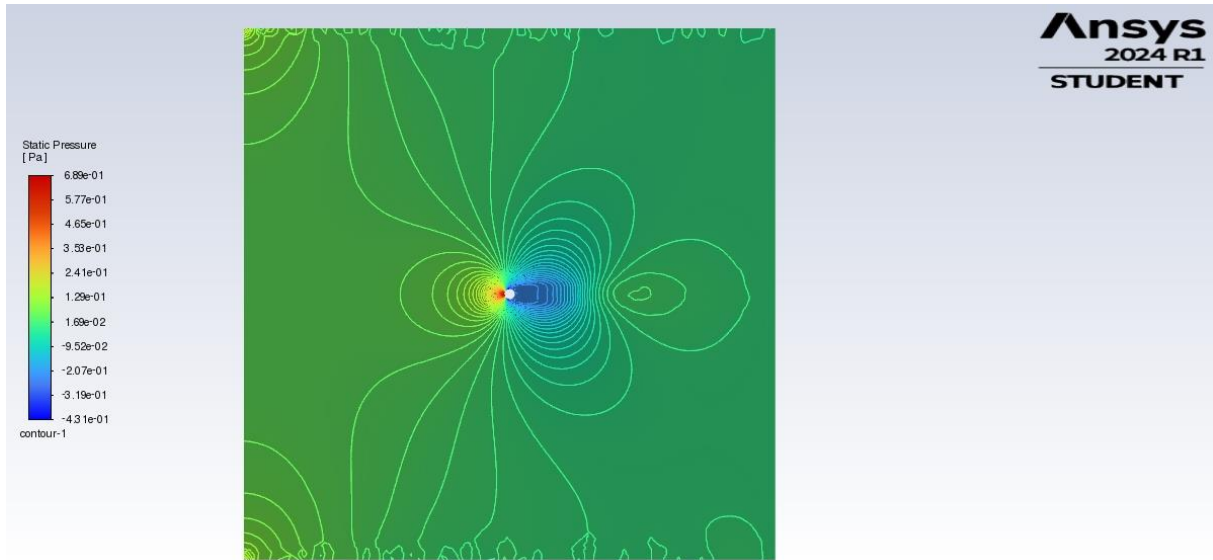


*Slika 7.4 Prikaz gibanja strujnica oko kruga*

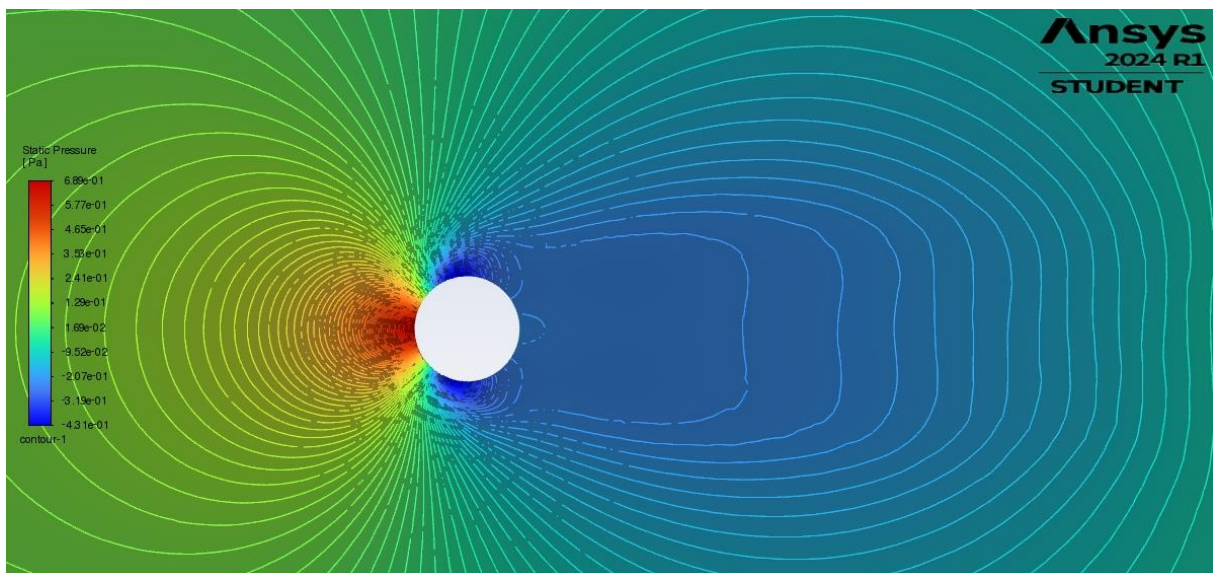


*Slika 7.5 Uvećani prikaz gibanja strujnica oko kruga*

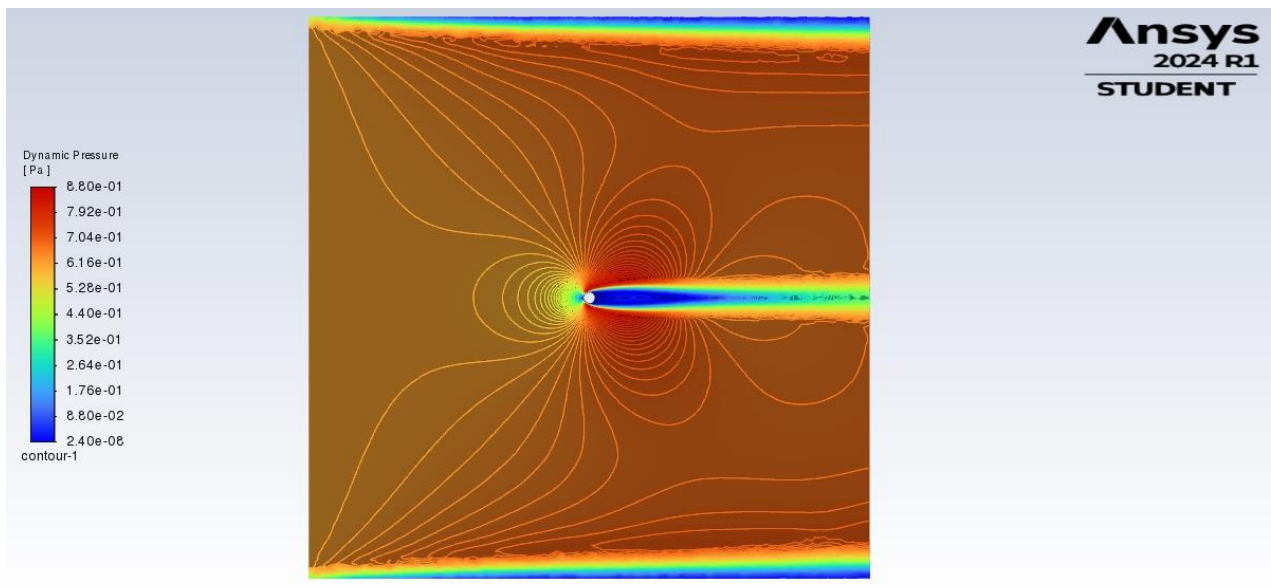
Također u ovom programu moguće je, osim prikaza brzina, vektora i strujnica, prikazati statički i dinamički tlak pojedinih područja. Različite boje opisuju različite vrijednosti tlakova te su dodane konture za lakše određivanje tlakova pojedinih područja.



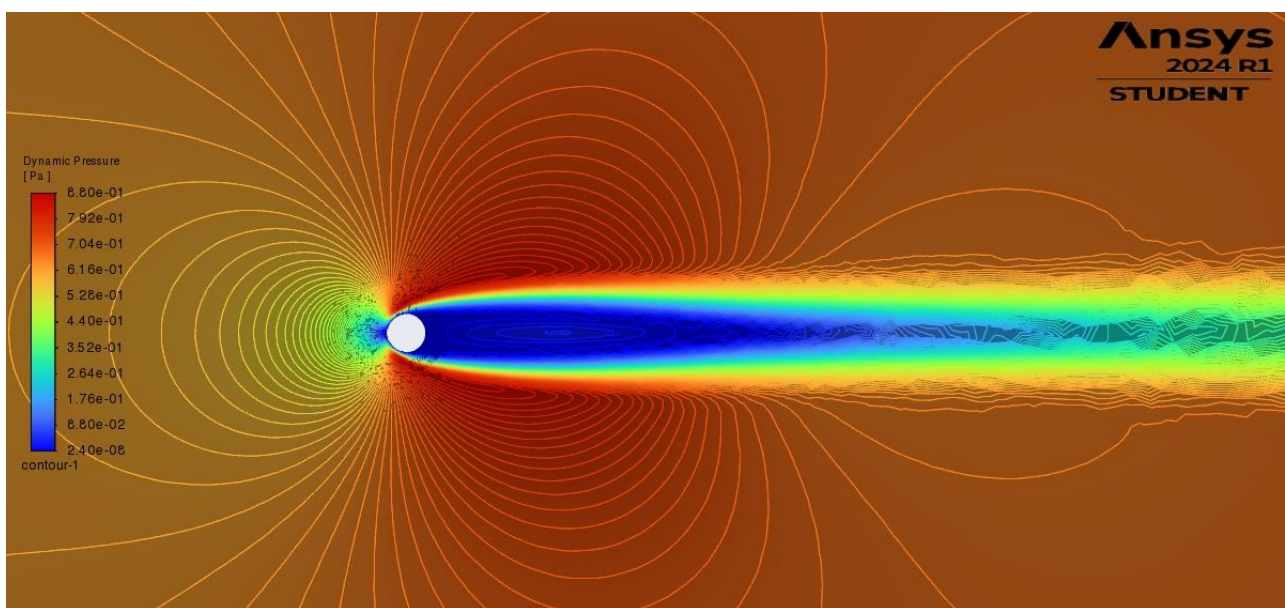
*Slika 7.6 Prikaz statičkog tlaka*



*Slika 7.7 Uvećani prikaz statičkog tlaka*



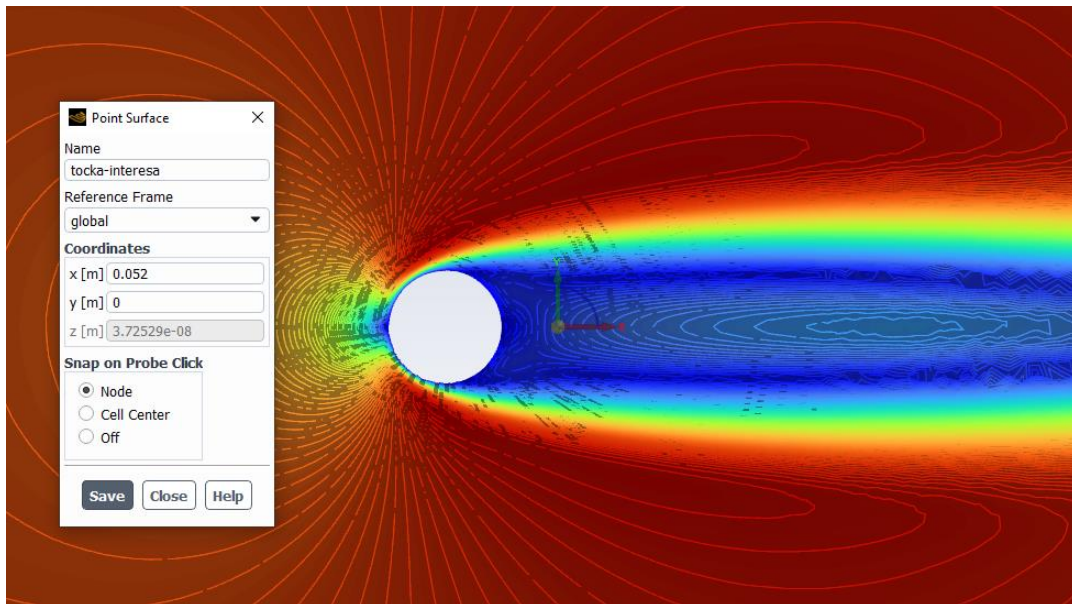
*Slika 7.8 Prikaz dinamičkog tlaka*



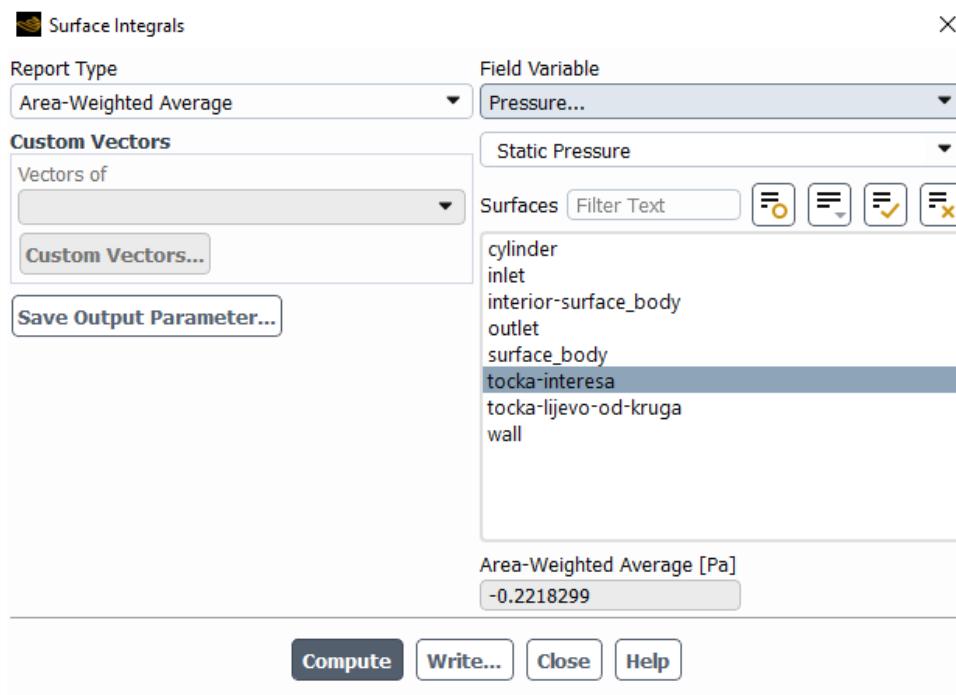
*Slika 7.9 Uvećani prikaz dinamičkog tlaka*

Iz prikaza tlakova moguće je primijetiti da je daleko od kruga tlak gotovo konstantan, budući da je dolazno strujanje jednoliko i neometano. Na prednjoj strani kruga tlak raste. Ovaj porast tlaka je rezultat fluida koji se nakuplja ispred prepreke jer mora zaobići krug. Na stražnjoj strani kruga tlak pada zbog ubrzavanja fluida koji se vraća u strujanje iza prepreke. Ovaj pad tlaka može dovesti do stvaranja područja niskog tlaka i povratnog strujanja.

Naredbom „*Point Surface*“ postavljena je točka na koordinatama  $x=0,052$  m i  $y=0$  m, odnosno 2 mm udesno od središta kruga. Ovo je točka interesa u kojoj će biti očitana pad tlaka i brzina za svaku pojedinu ulaznu brzinu. Pad tlaka i brzina mogu se dobiti pomoću naredbe „*Surface Integrals*“. Za ulaznu brzinu od 1 m/s, u točki interesa dobiven je pad tlaka -0,2218 Pa i brzina 0,1115 m/s.



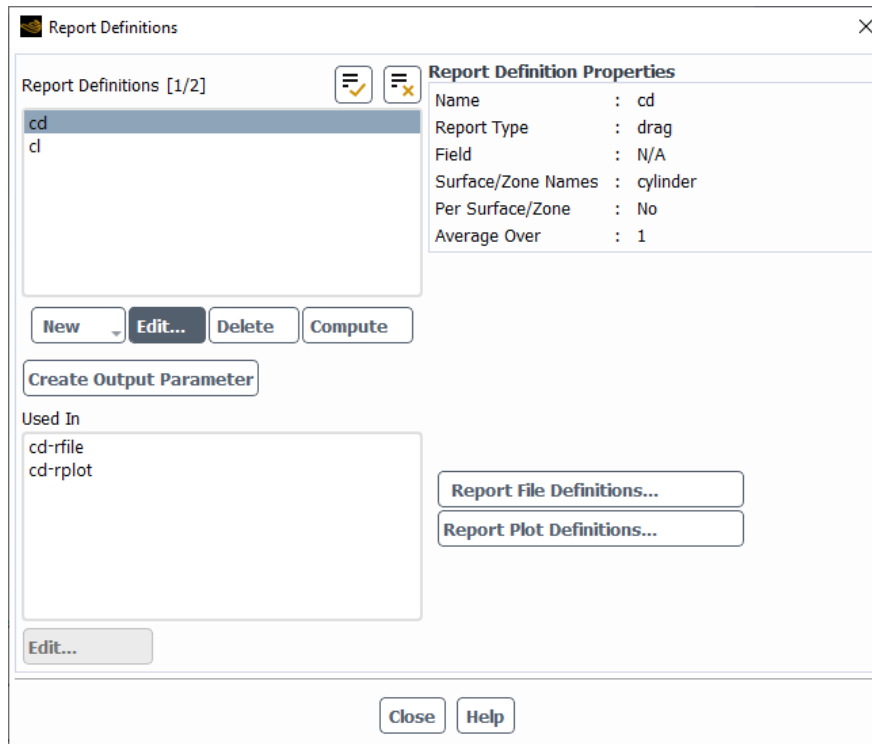
Slika 7.10 Postavljanje točke interesa



Slika 7.11 Očitavanje tlaka i brzine u točki interesa

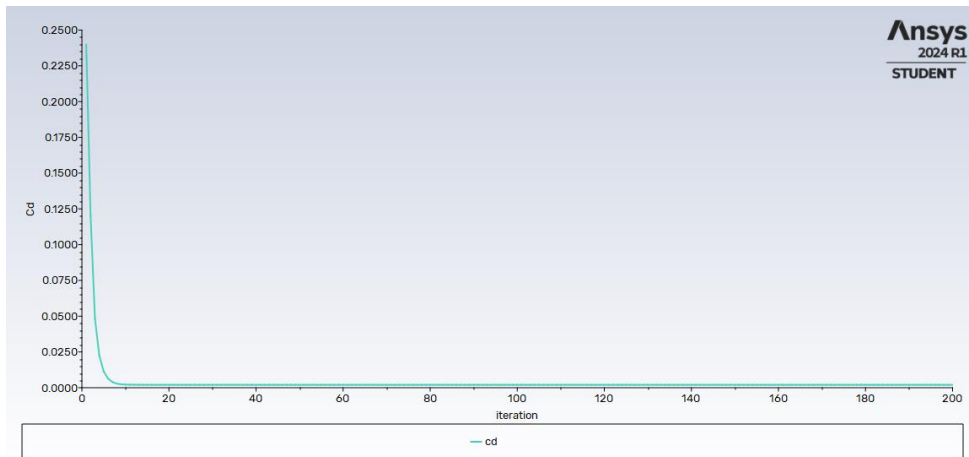


U „Report Definitions“ dodane su značajke „Drag“ i „Lift Force Report“ koje služe za analizu koeficijenta otpora ( $C_d$ ) i uzgona ( $C_l$ ). Rezultati su prikazani u obliku grafova  $C_d$ -iteracija i  $C_l$ -iteracija kako bi se prikazala konvergencija simulacije.

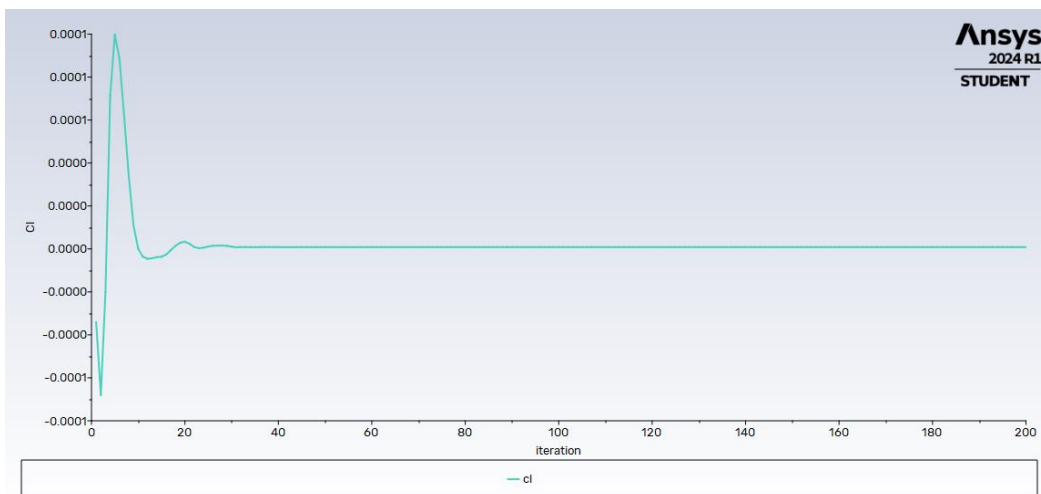


Slika 7.12 Dodavanje značajki u Report Definitions

Iz grafova je vidljivo da koeficijent  $C_d$  može značajno oscilirati dok *solver* ne pronađe stabilno rješenje. Kako iteracije napreduju, koeficijent  $C_d$  se počinje stabilizirati, oscilacije postaju manje izražene. Kada postigne stabilnu vrijednost s minimalnim oscilacijama može se reći da je simulacije konvergirala.



Slika 7.13 Cd-iteracija graf



Slika 7.14 Cl-iteracija graf

Slična stvar događa se i na grafu Cl-iteracija. Koeficijent Cl također može oscilirati na početku iteracija, a u srednjoj fazi pokazuje trend stabilizacije do kada ne postigne stabilnu vrijednost, odnosno konvergira.

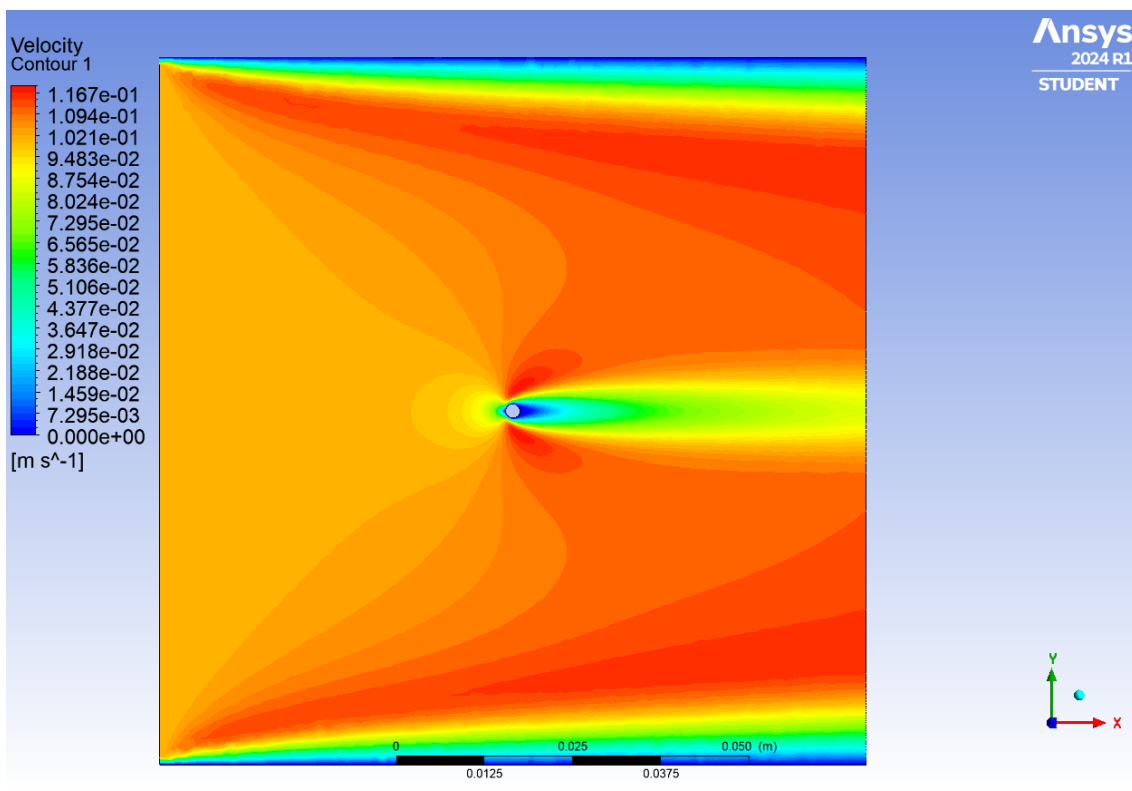
Naredbom „Force Reports“ moguće je ispisati konačne vrijednosti koeficijenata otpora i uzgona, te su za ulaznu brzinu od 1 m/s očitane vrijednosti 0,00201 za koeficijent otpora i vrijednost 8,408e-07 za koeficijent uzgona.

## 7.1. Usporedba

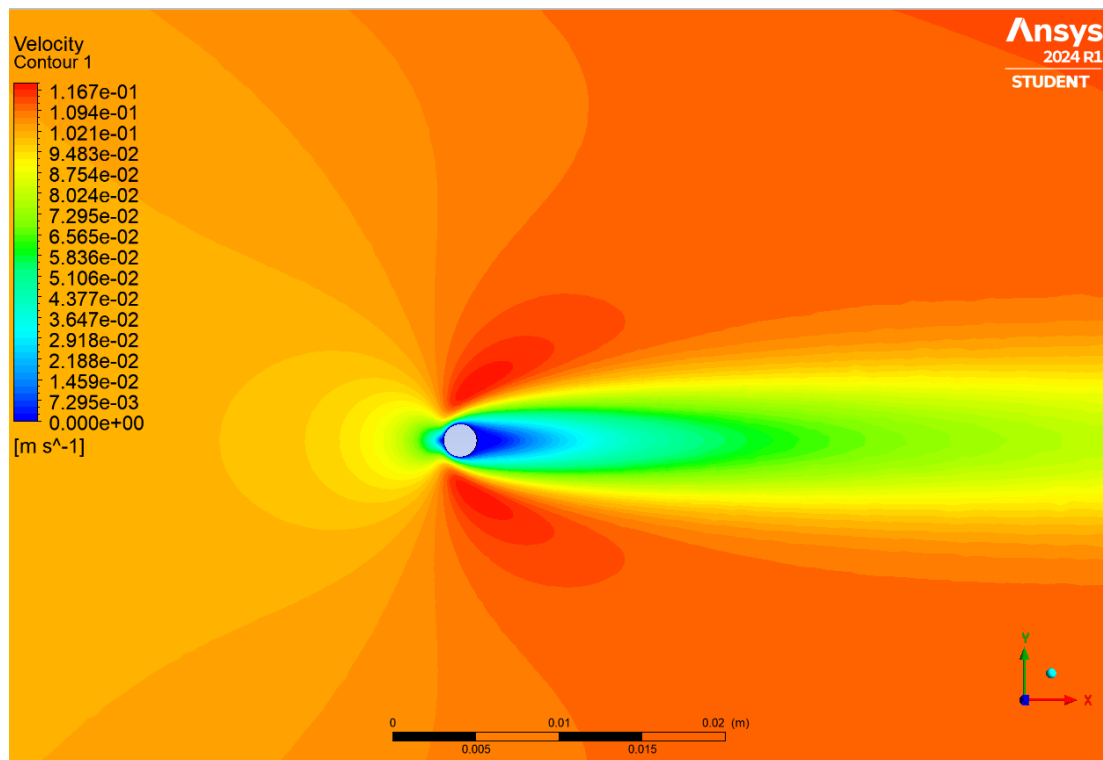
Za potrebe usporedbe koristit će se manja brzina od 0,1 m/s i veća brzina od 100 m/s. Opis postupka kako dobiti rezultate za manje i veće brzine neće biti opisan, obzirom da je potrebno samo promijeniti vrijednost brzine na *inletu* na željenu manju ili veću, kao što je to prethodno opisano za 1 m/s, i ponovno pokrenuti simulaciju.

### 7.1.1. Rezultati brzine 0,1 m/s

U nastavku će biti prikazani rezultati i grafovi za ulaznu brzinu od 0,1 m/s.

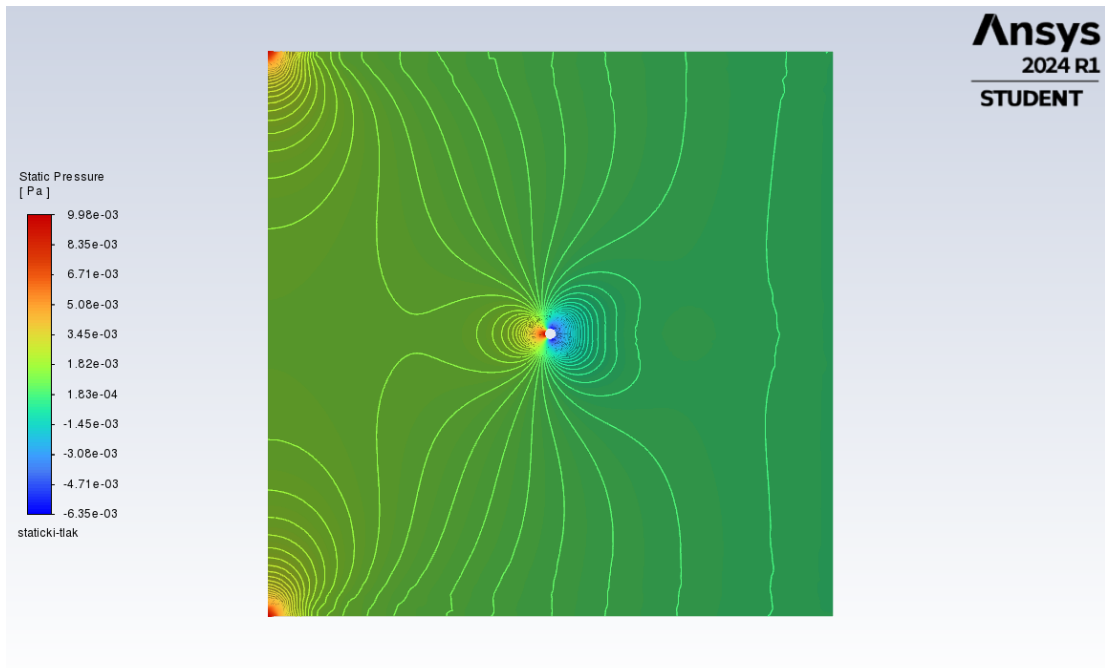


Slika 7.1.1.1 Prikaz konture brzina za 0,1 m/s

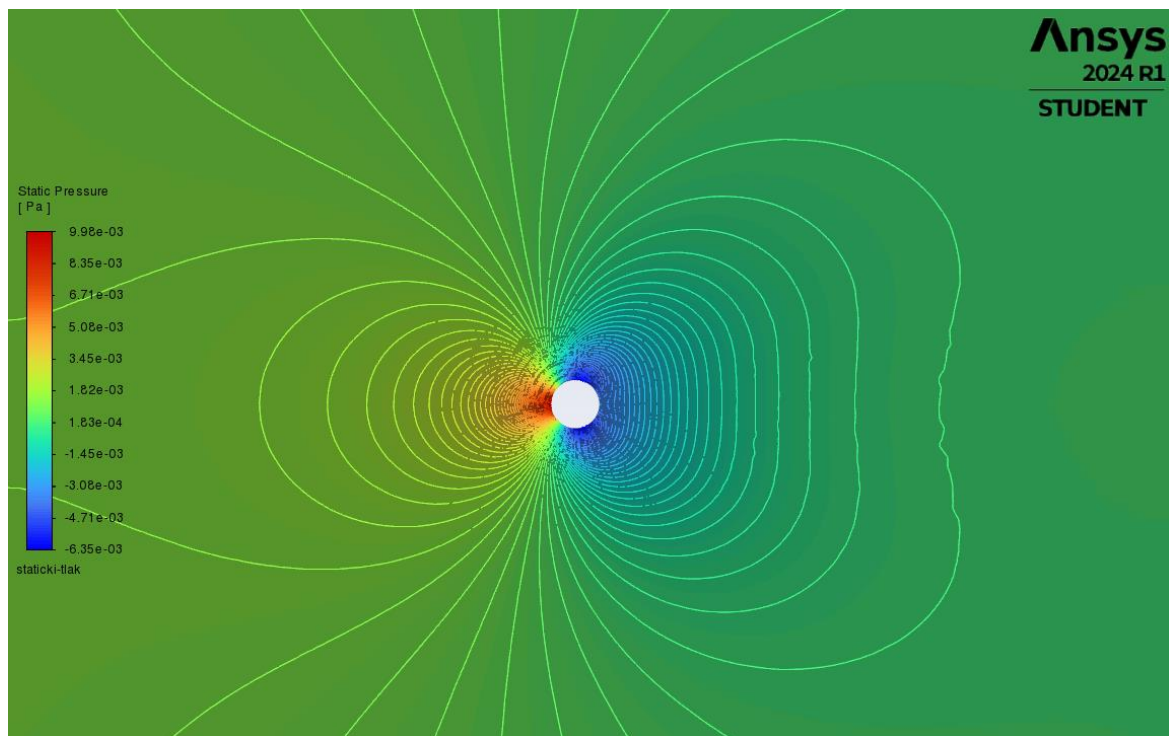


*Slika 7.1.1.2 Uvećani prikaz konture brzina za 1 m/s*

Na temelju prikaza može se uočiti da su konture brzina simetrične u odnosu na horizontalnu os kroz središte kruga, kao i kod brzine od 1 m/s, samo što su ovdje brzine znatno manje. Također prisutne su najniže brzine iza kruga, no područje najnižih brzina u ovom slučaju je dosta kraće nego kod veće brzine. Strujnice su paralelne bez naglih promjena, što je karakteristika laminarnog strujanja. Nema značajnog odvajanja struje fluida od površine kruga. Uz gornje i donje rubove domene postoji veći pad brzine zbog manje ulazne brzine. Može se zaključiti da nema velikih razlika u odnosu na rezultate brzine od 1 m/s, osim manjih komponentata brzine i tlaka.



*Slika 7.1.1.3 Prikaz statičkog tlaka za 0,1 m/s*

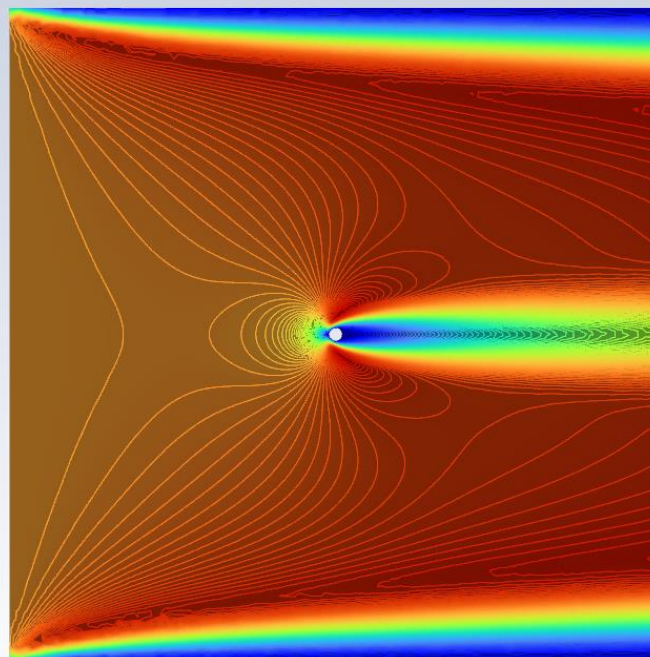


*Slika 7.1.1.4 Uvećani prikaz statičkog tlaka za 0,1 m/s*

Dynamic Pressure  
[ Pa ]

8.70e-03  
7.83e-03  
6.96e-03  
6.09e-03  
5.22e-03  
4.35e-03  
3.48e-03  
2.61e-03  
1.74e-03  
8.70e-04  
1.92e-13

dinamički tlak



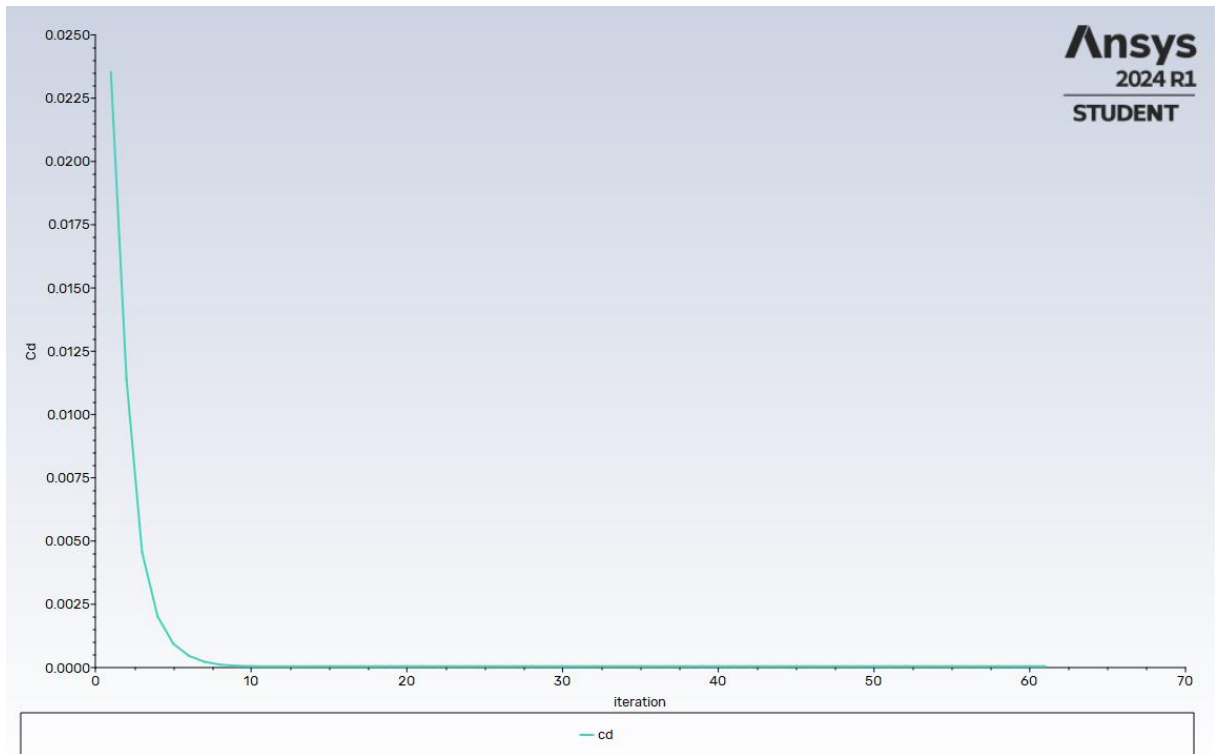
*Slika 7.1.1.5 Prikaz dinamičkog tlaka za 0,1 m/s*

Vidljiv je porast tlaka na prednjoj strani kruga i pad tlaka na stražnjoj strani kruga, ali u puno manjoj mjeri. Manje su izraženi pad i porast tlaka upravo zbog manjih brzina strujanja, što je i očekivano. Ako fluid nailazi na prednju stranu kruga manjom brzinom, automatski je i pritisak na krug manji, što je ovdje vidljivo.

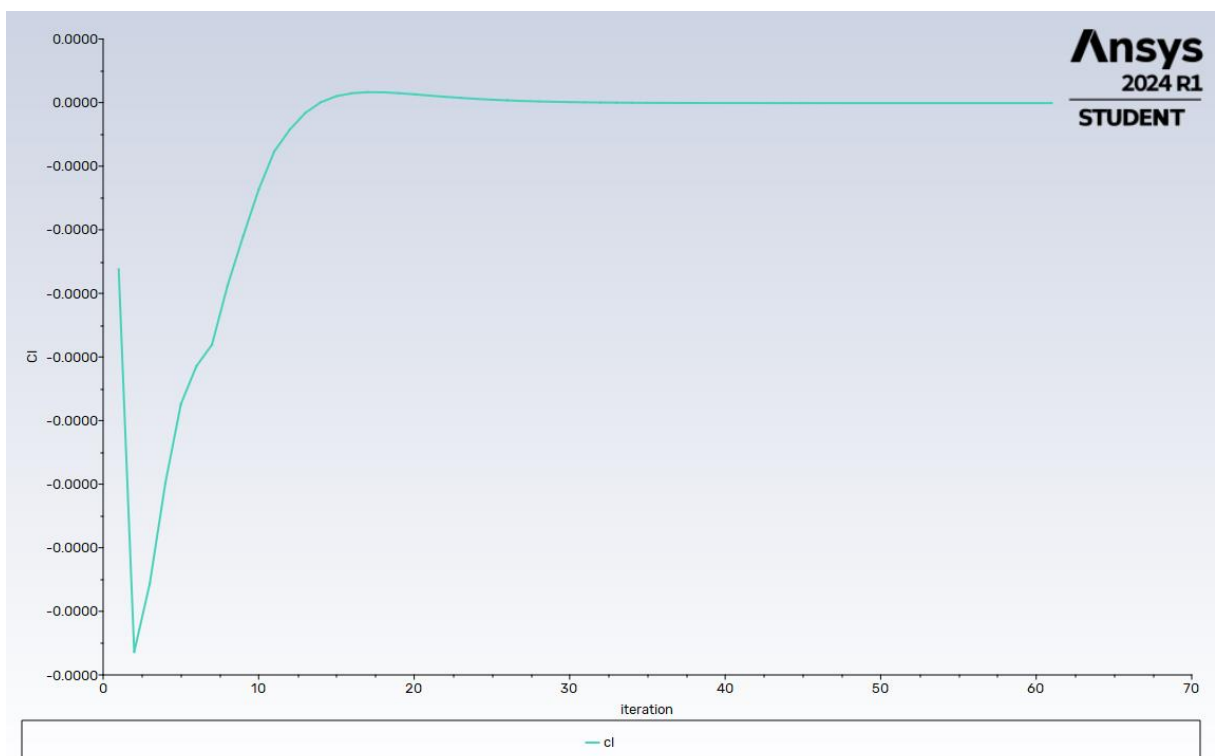
Što se tiče točke interesa i tlaka u toj točki, očitani tlak je -0,00302 Pa.

Temeljem grafova koeficijenata otpora i uzgona u nastavku, nema značajnih razlika u odnosu na prethodne za ulaznu brzinu od 1 m/s. Također je vidljiva neka oscilacija kod početnih iteracija, a kasnije konvergencija prema stabilnoj vrijednosti.

Konačna očitana vrijednost koeficijenta otpora je 0,00005235 te vrijednost koeficijenta uzgona iznosi -3,818e-09.



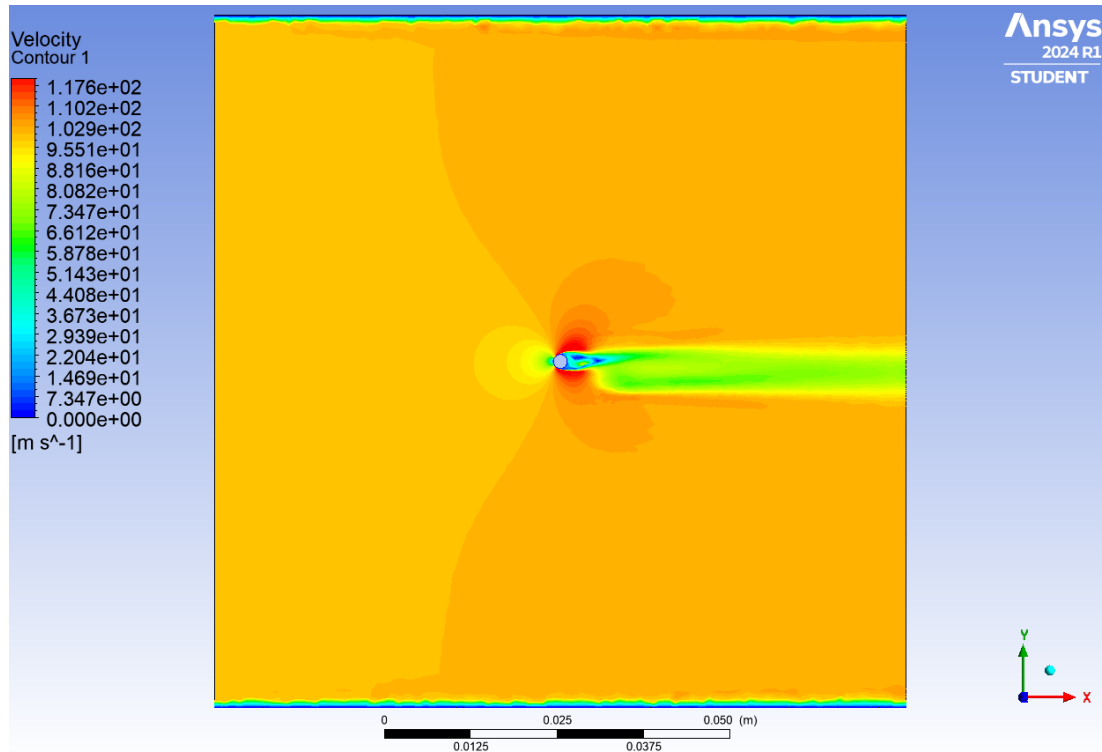
Slika 7.1.1.6 Cd-iteracija graf za brzinu 0,1 m/s



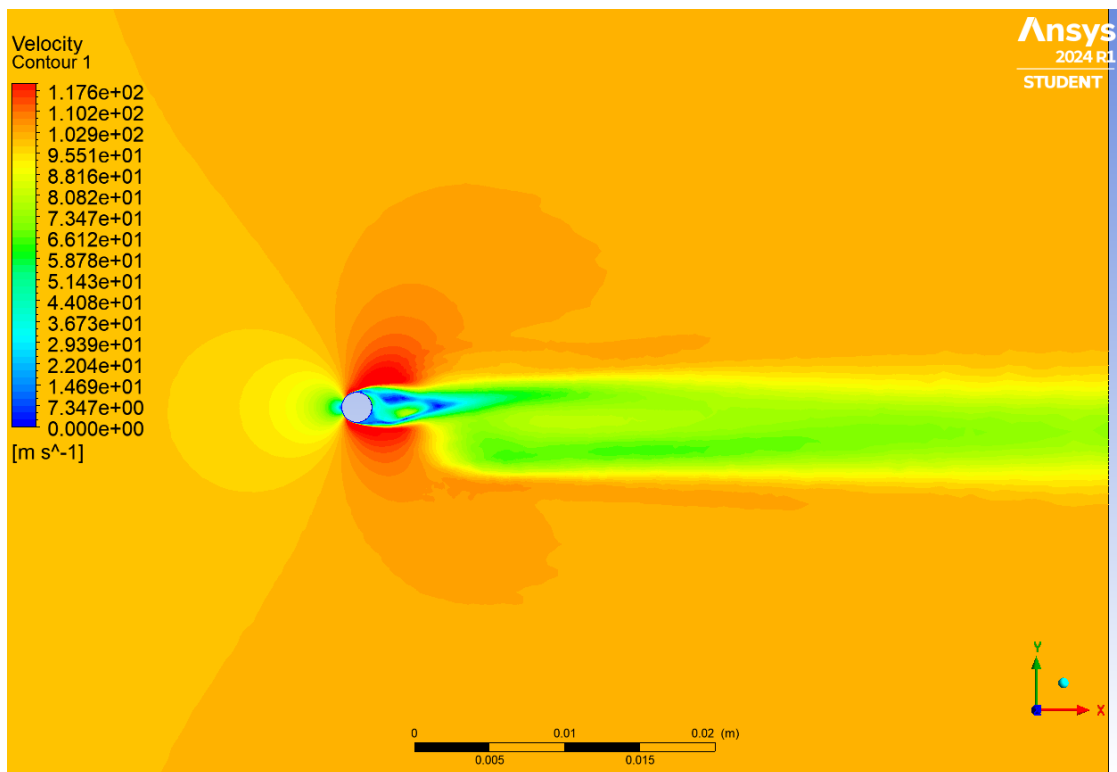
Slika 7.1.1.7 Cl-iteracija graf za brzinu 0,1 m/s

### 7.1.2. Rezultati brzine 100 m/s

U nastavku će biti prikazani rezultati za ulaznu brzinu od 100 m/s.

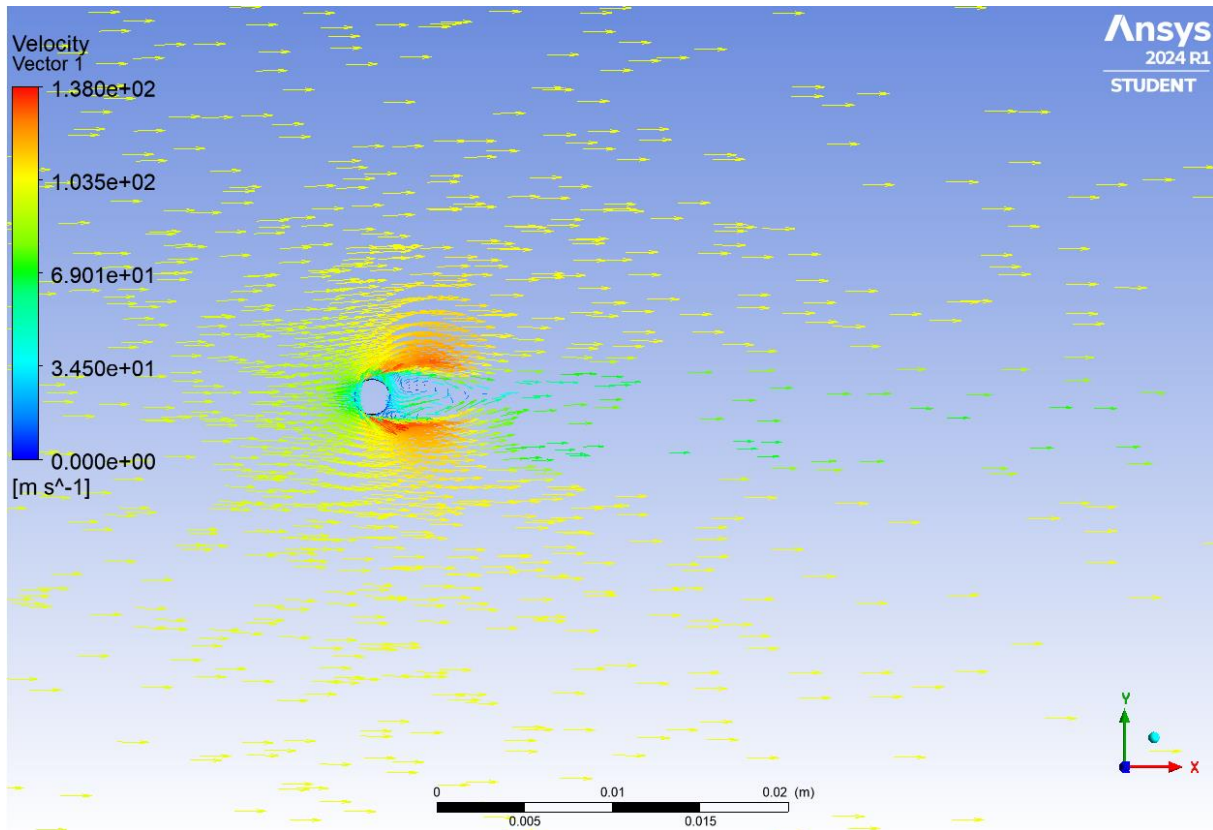


Slika 7.1.2.1 Prikaz konture brzina za 100 m/s



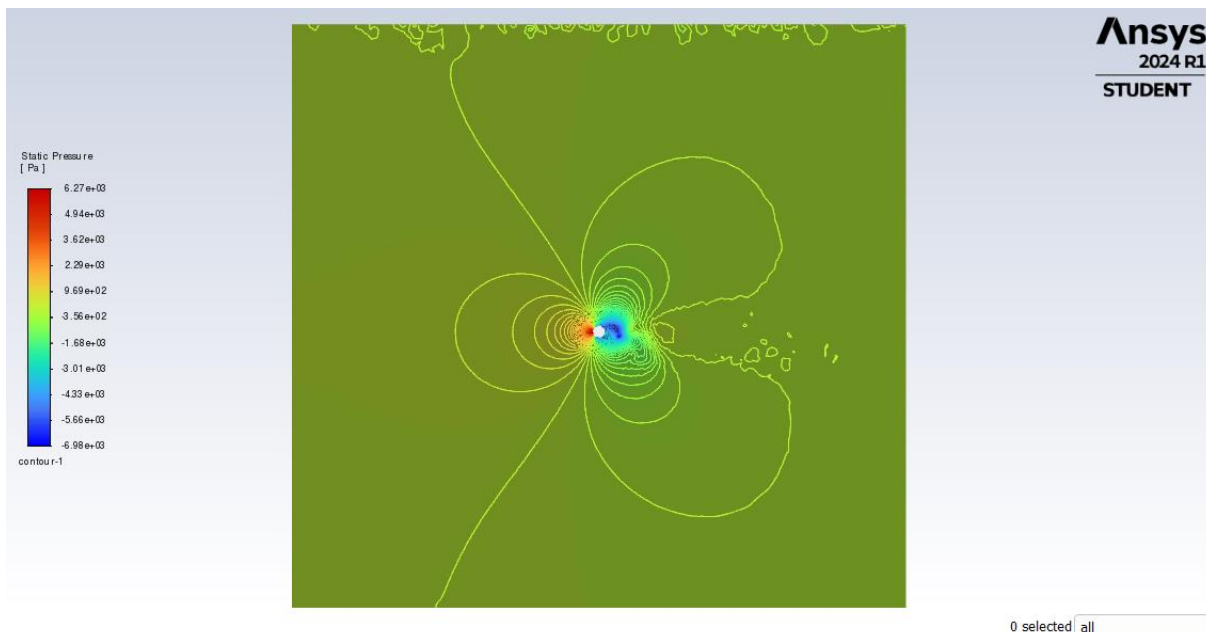
Slika 7.1.2.2 Uvećani prikaz konture brzina za 100 m/s



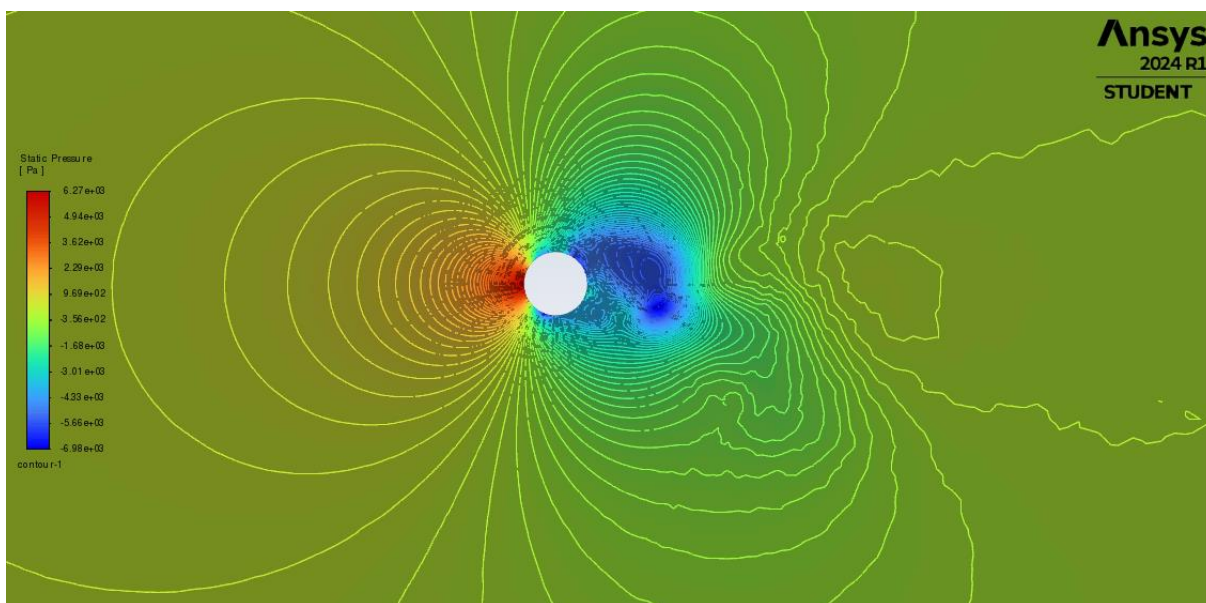


*Slika 7.1.2.3 Prikaz vektora brzina za 100 m/s*

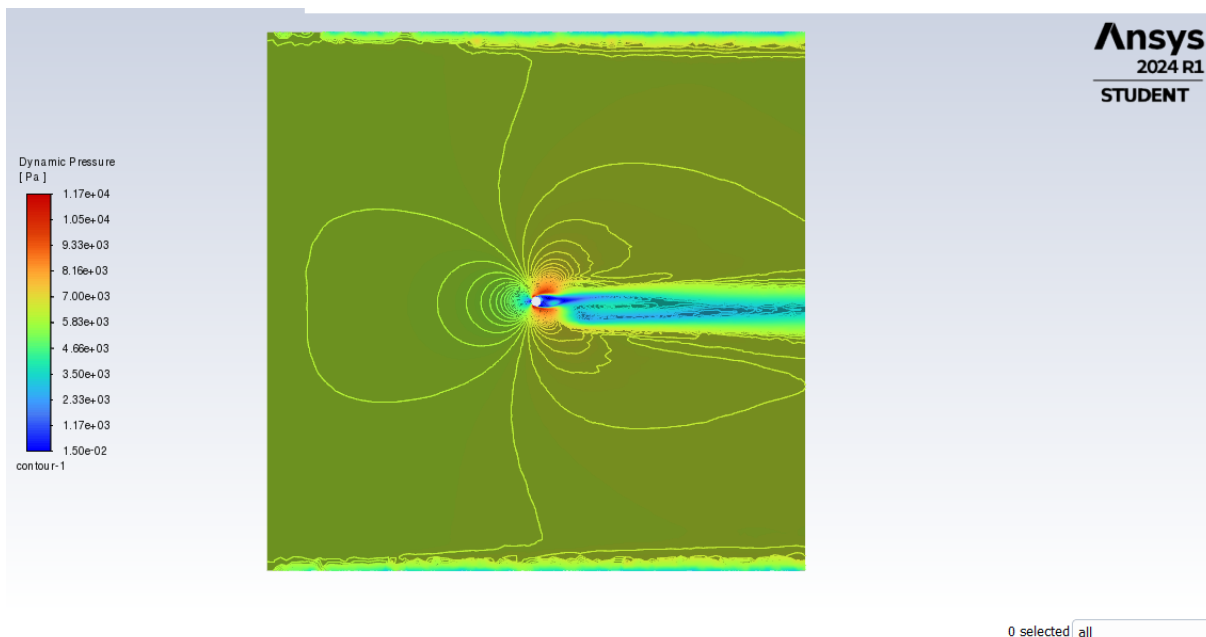
Na temelju kontura i vektora brzina vidljivo je da pri brzini od 100 m/s dolazi do turbulentnog strujanja. Turbulencija se odnosi na kaotična i nepravilna strujanja koja se javljaju kada se početna brzina strujanja poveća preko određene granice. Vrtlozi su vidljivi kao područja s različitim bojama koje formiraju spiralne ili kružne obrasce. Većom brzinom, veća je i kinetička energija te ima značajan utjecaj na dinamičke karakteristike fluida, uključujući promjene u pritiscima, povećano miješanje, disipaciju energije i aerodinamičke sile. Obzirom na veću ulaznu brzinu, vidljivo je kako je pad brzine uz stijenke domene puno manje izražen, odnosno manje je područje niskih brzina oko stijenke.



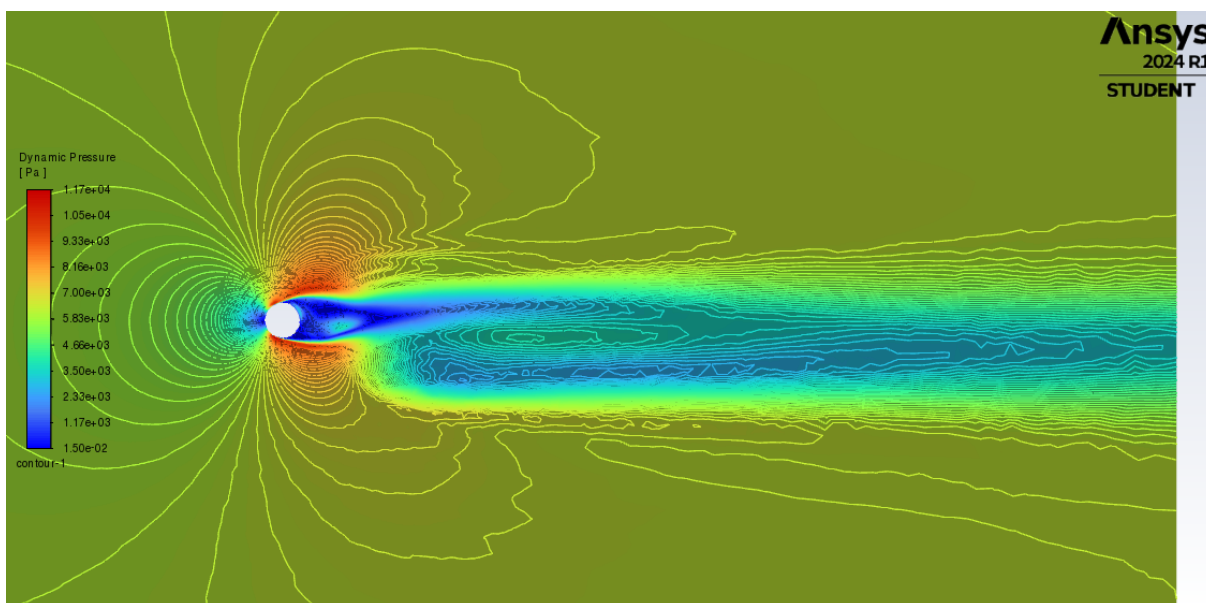
*Slika 7.1.2.4 Prikaz kontura statičkog tlaka za brzinu 100 m/s*



*Slika 7.1.2.5 Uvećani prikaz kontura statičkog tlaka za brzinu 100 m/s*

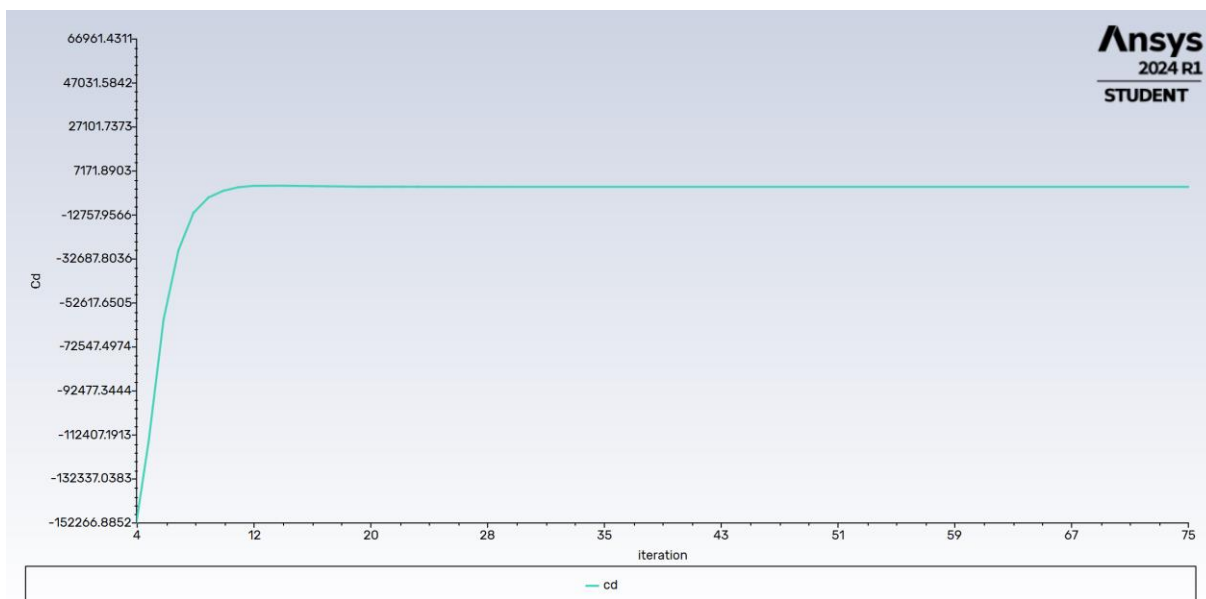


*Slika 7.1.2.6 Prikaz kontura dinamičkog tlaka za brzinu 100 m/s*

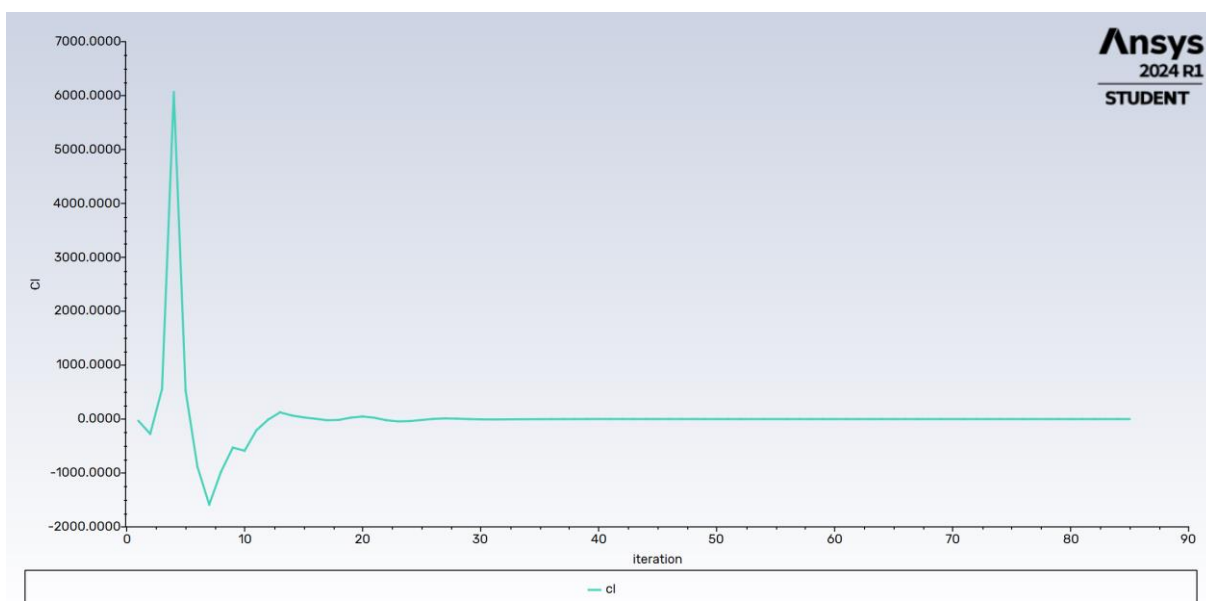


*Slika 7.1.2.7 Prikaz kontura dinamičkog tlaka za brzinu 100 m/s*

Temeljem kontura tlakova, povećana brzina rezultira povećanim statičkim i dinamičkim tlakom koji doprinosi stvaranju turbulentnih vrtloga. Turbulencija uzrokuje fluktuacije u statičkom tlaku, što dovodi do lokalnih promjena tlaka oko kruga. Tlak koji se stvara na prednjoj strani kruga dosta je veći u odnosu na tlakove prethodnih rezultata i više je izražen porast tlaka kako fluid usporava. Turbulentne strujnice iza kruga pokazuju nisku vrijednost tlaka i nestabilno strujanje, što je uzrok stvaranju vrtloga.



Slika 7.1.2.8 Cd-iteracija graf za brzinu 100 m/s



Slika 7.1.2.9 Cl-iteracija graf za brzinu 0,1 m/s

Na grafovima koeficijenta otpora i uzgona rješenja su uspjela konvergirati, ali su same vrijednosti koeficijenata dosta veće u odnosu na one pri manjim brzinama, što ukazuje na turbulentno strujanje i sugerira značajan otpor fluida. Bez obzira na konvergenciju, postoje fluktuacije koje su očekivane za ovakvo strujanje. Konačne vrijednosti koeficijenata iznose 15,27 za Cd i -0,096 za Cl.

Što se tiče točke interesa, u njoj je izmjeren pad tlaka od -5033 Pa i brzina od 38,31 m/s.

Na temelju analize različitih ulaznih brzina strujanja, usporedba je dana i tablicom u nastavku.

*Tablica 1. Usporedba rezultata pojedinih ulaznih brzina*

Ulazna brzina [m/s]	0,1	1	100
Pad tlaka u točki interesa [Pa]	-0,00302	-0,2218299	-5033,139
Brzina u točki interesa[m/s]	0,000090	0,111	38,31
Koeficijent Cd	0,000052	0,002	15,27
Sila Cd [N]	0,000019	0,000939	10,81
Koeficijent Cl	-3,818E-09	8,408E-07	-0,096
Sila Cl [N]	-1,351E-09	3,931E-07	-0,131

Kako ulazna brzina raste, pad tlaka u točki interesa postaje sve negativniji, što je očekivano jer viša brzina dovodi do većeg smanjenja zbog Bernoullijevog principa. Brzina u točki interesa značajno raste s povećanjem ulazne brzine. Koeficijent Cd i sila otpora rastu s povećanjem ulazne brzine, postoji veliki skok pri brzini od 100 m/s zbog turbulentnog strujanja. Koeficijent Cl i sila uzgona su vrlo mali pri brzinama 0,1 m/s i 1 m/s, što ukazuje na zanemarivu silu podizanja. Međutim, pri 100 m/s, koeficijent i sila uzgona postaju značajniji, a promjena znaka može ukazati na promjenu smjera sile podizanja.

## 8. ZAKLJUČAK

Cilj ovog rada bio je istražiti i razumjeti kako različite ulazne brzine utječu na promatrane parametre poput pada tlaka, brzine u točki interesa, koeficijenta otpora i uzgona, te sila koje djeluju na krug oko kojeg fluid struji. Pri vrlo niskoj ulaznoj brzini, svi parametri su gotovo zanemarivi. Pad tlaka je minimalan, a brzina u točki interesa jedva mjerljiva. Koeficijenti otpora i sila su iznimno mali, što znači da pri niskim brzinama nema značajnijeg otpora ili podizanja koje bi utjecalo na krug. Pri srednjoj brzini vidljiv je značajniji pad tlaka i povećanje brzine u točki interesa. Koeficijenti otpora i uzgona rastu, što ukazuje na povećanje otpora kruga prema strujanju, no strujanje je i dalje u tom slučaju laminarno. Pri vrlo visokoj ulaznoj brzini dolazi do značajnog pada tlaka i velikog povećanja brzine u točki interesa, u odnosu na prethodne manje brzine. Koeficijent otpora drastično raste, što sugerira da krug stvara značajan otpor pri ovoj brzini. Sila otpora također raste, što može biti ključno za dizajn i inženjerske aplikacije gdje je minimiziranje otpora važno.

Može se zaključiti da se pri niskim brzinama javlja laminarno, odnosno Stokesovo strujanje, dok pri višim ulaznim brzinama strujanje prelazi u turbulentno.

Analizirani model može se primijeniti na stvarne probleme poput protoka fluida oko zrna pijeska u vodi, sedimentacije čestica, te protoka krvi oko stanica ili drugih malih objekata u biomedicinskim istraživanjima.

## 9. LITERATURA

- [1] Kranjčević, L.: „MEHANIKA FLUIDA – Skripta za studente tehničkog fakulteta u Rijeci“, 1. listopada 2013.
- [2] Atsushi Ueyama, s interneta, <https://www.cradle-cfd.com/media/column/a152> , 05. kolovoza 2019.
- [3] A. Morrison, F.: „Navier“, s interneta, <http://www.chem.mtu.edu/~fmorriso/cm310/Navier.pdf> , 2011.
- [4] S interneta, <https://www.ansys.com/products/fluids/ansys-fluent>, 2024.
- [5] S interneta, <https://simutechgroup.com/why-is-meshing-important-for-fea-fluid-simulations/>, 26. ožujka 2024.
- [6] S interneta, <https://pigslearning.com/civil-engineering/ansys-simulation-software-detailed-guide/> , 17. rujna 2023.

## 10. POPIS SLIKA

Slika 2.1.1 Prikaz laminarnog strujanja zraka [2] .....	2
Slika 2.1.2 Prikaz turbulentnog strujanja zraka [2] .....	2
Slika 2.2.1 Optjecanje tijela [1] .....	4
Slika 2.3.1 Struja prati oblik tijela.....	5
Slika 2.3.2 Odvajanje struja .....	5
Slika 6.1 Prikaz sučelja programa Ansys .....	10
Slika 6.2 Prikaz domene.....	10
Slika 6.2.1 Prikaz automatski generirane numeričke mreže .....	11
Slika 6.2.2 „Edge Sizing“ postavke .....	12
Slika 6.2.3 "Inflation" postavke .....	12
Slika 6.2.4 Prikaz adaptirane numeričke mreže .....	13
Slika 6.2.5 Uvećani prikaz adaptirane numeričke mreže .....	13
Slika 6.2.6 Prikaz graničnih uvjeta.....	14
Slika 6.3.1 Prikaz domene u Fluentu.....	15
Slika 6.3.2 Prikaz odabira laminarnog modela .....	16
Slika 6.3.3 Prikaz odabira zadanog fluida.....	16
Slika 6.3.4 Prikaz podataka na ulazu.....	17
Slika 6.3.5 Prikaz podataka na izlazu.....	17
Slika 6.3.6 Postavljanje kriterija .....	18
Slika 6.3.7 Prikaz odabira inicijalizacije .....	18
Slika 6.3.8 Graf iteracija .....	19
Slika 7.1 Grafički prikaz konture brzine .....	20
Slika 7.2 Uvećani grafički prikaz konture brzine.....	20
Slika 7.3 Prikaz vektora brzina oko kruga .....	21
Slika 7.4 Prikaz gibanja strujnica oko kruga.....	22
Slika 7.5 Uvećani prikaz gibanja strujnica oko kruga.....	22
Slika 7.6 Prikaz statičkog tlaka .....	23
Slika 7.7 Uvećani prikaz statičkog tlaka .....	23
Slika 7.8 Prikaz dinamičkog tlaka.....	24
Slika 7.9 Uvećani prikaz dinamičkog tlaka.....	24
Slika 7.10 Postavljanje točke interesa .....	25
Slika 7.11 Očitavanje tlaka i brzine u točki interesa .....	25



Slika 7.12 Dodavanje značajki u Report Definitions .....	26
Slika 7.13 Cd-iteracija graf .....	27
Slika 7.14 Cl-iteracija graf .....	27
Slika 7.1.1.1 Prikaz konture brzina za 0,1 m/s .....	28
Slika 7.1.1.2 Uvećani prikaz konture brzina za 1 m/s.....	29
Slika 7.1.1.3 Prikaz statičkog tlaka za 0,1 m/s .....	30
Slika 7.1.1.4 Uvećani prikaz statičkog tlaka za 0,1 m/s.....	30
Slika 7.1.1.5 Prikaz dinamičkog tlaka za 0,1 m/s .....	31
Slika 7.1.1.6 Cd-iteracija graf za brzinu 0,1 m/s.....	32
Slika 7.1.1.7 Cl-iteracija graf za brzinu 0,1 m/s.....	32
Slika 7.1.2.1 Prikaz konture brzina za 100 m/s.....	33
Slika 7.1.2.2 Uvećani prikaz konture brzina za 100 m/s.....	33
Slika 7.1.2.3 Prikaz vektora brzina za 100 m/s .....	34
Slika 7.1.2.4 Prikaz kontura statičkog tlaka za brzinu 100 m/s .....	35
Slika 7.1.2.5 Uvećani prikaz kontura statičkog tlaka za brzinu 100 m/s .....	35
Slika 7.1.2.6 Prikaz kontura dinamičkog tlaka za brzinu 100 m/s .....	36
Slika 7.1.2.7 Prikaz kontura dinamičkog tlaka za brzinu 100 m/s .....	36
Slika 7.1.2.8 Cd-iteracija graf za brzinu 100 m/s.....	37
Slika 7.1.2.9 Cl-iteracija graf za brzinu 0,1 m/s.....	37

## **11. SAŽETAK I KLJUČNE RIJEČI**

Cilj ovog završnog rada bila je dvodimenzionalna numerička analiza Stokesovog strujanja oko kruga, pomoću komercijalnog softvera ANSYS. Izrađena je domena i numerička mreža na temelju kojih se radila simulacija i analiza. Kao rezultat analize i simulacije prikazani su grafovi i vrijednosti brzina, tlakova, koeficijenata otpora i uzgona na cijeloj domeni i u točki interesa iz kojih se može vidjeti ponašanje fluida i strujanje kroz cijelu domenu.

Ključne riječi: Stokesovo strujanje, krug, ANSYS, numerička analiza, softver

## **12. SUMMARY AND KEYWORDS**

This final project goal was a twodimensional numerical analysis of Stokes flow around a circle using the commercial software ANSYS. The domain and the numerical grid were created, based on which the simulation and analysis were done. As a result of the analysis and simulation, graphs and values of velocities, pressures, resistance and buoyancy coefficients are presented on the entire domain and at the point of interest from which fluid behavior and flow through the entire domain can be seen.

Keywords: Stokes flow, circle, ANSYS, numerical analysis, software