Klasična definicija vjerojatnosti

Pilić, Leonardo

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:190:182693

Rights / Prava: Attribution 4.0 International/Imenovanje 4.0 međunarodna

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-22**

Repository / Repozitorij:

Repository of the University of Rijeka, Faculty of Engineering

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

KLASIČNA DEFINICIJA VJEROJATNOSTI

Rijeka, rujan 2024.

Leonardo Pilić
0069084413

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

KLASIČNA DEFINICIJA VJEROJATNOSTI

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Komentor: izv. prof. dr. sc. Loredana Simčić

Rijeka, rujan 2024.

Leonardo Pilić
0069084413

SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET
POVJERENSTVO ZA ZAVRŠNE ISPITE

Rijeka, 13. ožujka 2023.

Zavod: **Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike**
Predmet: **Inženjerska matematika ET**
Grana: **1.01.07 primijenjena matematika i matematičko modeliranje**

ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Leonardo Pilić (0069084413)**
Studij: Sveučilišni prijediplomski studij elektrotehnike

Zadatak: **Klasična definicija vjerojatnosti**

Opis zadatka:

U radu je potrebno precizno definirati osnovne pojmove teorije vjerojatnosti te objasniti postupak izračunavanja vjerojatnosti korištenjem klasične definicije vjerojatnosti. Također je potrebno navesti neka osnovna svojstva klasične definicije vjerojatnosti i usporediti je s ostalim češće korištenim definicijama vjerojatnosti.
U praktičnom dijelu rada potrebno se osvrnuti na temeljene tehnike prebrojavanja koje se koriste kod primjene klasične definicije vjerojatnosti te navesti nekoliko primjera primjene korištenja klasične definicije vjerojatnosti u inženjerstvu i elektrotehnici.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Zadatak uručen pristupniku: 20. ožujka 2023.

Mentor:

izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

izv. prof. dr. sc. Loredana Simčić
(komentor)

Predsjednik povjerenstva za
završni ispit:

prof. dr. sc. Dubravko Franković

AnyScanner

IZJAVA

Sukladno članku 7. Stavku 1. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku sveučilišnih prijediplomskih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 4. travnja 2023., izjavljujem da sam samostalno izradio završni rad prema zadatku preuzetom dana 20. ožujka 2023.

Rijeka, 9. rujna 2024.

Leonardo Pilić

Zahvaljujem se svom mentoru izv. prof. dr. sc. Ivanu Dražiću na pruženoj prilici i prijedlozima kojima me usmjeravao tijekom pisanja završnog rada. Hvala Vam na uloženom strpljenju i vremenu.

Neizmjerno zahvaljujem svojoj zaručnici koja mi je bila najveća podrška kroz cijelo studiranje i bila uvijek uz mene, koja je imala jako puno strpljenja za mene i moje pripreme za ispite. Pružala mi je cijelo vrijeme motivaciju da ne odustajem nego da idem do kraja. Želim joj se još jednom neizmjerno zahvaliti na svemu.

Hvala mojim roditeljima i sestri koji su bili uz mene i pružali mi podršku tijekom cijelog ovog putovanja. Hvala mojim prijateljima i ostaloj obitelji na podršci. Hvala vam što ste uvijek bili uz mene.

Sadržaj

1. Uvod

Vjerojatnost je grana matematike koja se razvila iz potrebe za kvantificiranjem neizvjesnosti i slučajnih pojava. Njena povijest seže do antičkih vremena, no značajan matematički napredak u razvoju vjerojatnosti ostvaren je tek u 17. stoljeću, kada su matematičari počeli ozbiljno proučavati probleme povezane s igrama na sreću. Upravo su takvi problemi pružili polazište za formaliziranje osnovnih pojmova vjerojatnosti i njezinu primjenu u svakodnevnom životu.

Ključni doprinos u razvoju teorije vjerojatnosti dali su francuski matematičari poput Blaisea Pascala, Pierre de Fermata i Pierre-Simon Laplacea. Njihovo rješavanje problema igara na sreću postavilo je temelje klasične definicije vjerojatnosti, koja se temelji na pretpostavci da su svi mogući ishodi nekog slučajnog eksperimenta jednako vjerojatni. Klasična definicija vjerojatnosti izražava vjerojatnost nekog događaja kao omjer broja povoljnih ishoda i ukupnog broja mogućih ishoda. Ovaj pristup koji obrađujemo u ovom radu, iako ograničen na situacije gdje su svi ishodi jednako mogući, postao je osnovna polazna točka za proučavanje složenijih problema vjerojatnosti.

Matematičari poput Laplacea proširili su teoriju vjerojatnosti na širi spektar problema, od igara na sreću do znanstvenih eksperimenata i svakodnevnih pojava. Laplace je vjerojatnost opisao kao "zdrav razum prerađen u matematički oblik", čime je istaknuo važnost razumijevanja i formalnog kvantificiranja neizvjesnosti u raznim situacijama.

S vremenom su se razvile i druge interpretacije vjerojatnosti, kao što su frekvencijska definicija, koja se temelji na dugoročnom promatranju učestalosti pojavljivanja ishoda. Danas je vjerojatnost široko primijenjena ne samo u matematici, već i u znanostima poput fizike, statistike, ekonomije, financija i inženjerstva, gdje igra ključnu ulogu u analizi podataka, donošenju odluka i procjeni rizika.

Vjerojatnost je tako postala univerzalna grana znanosti koja omogućuje matematičko razumijevanje i modeliranje slučajnosti i neizvjesnosti u različitim kontekstima, od jednostavnih igara na sreću do složenih sustava u prirodi i tehnologiji.

U ovom radu obrađena je klasična definicija vjerojatnosti i njezina primjena u inženjerstvu. Najprije se definiraju ishodi i događaji - temeljni pojmovi u teoriji vjerojatnosti. Kroz ovo poglavlje pružamo osnovu za razumijevanje daljnjih koncepata, ističući kako se događaji i ishodi odnose u kontekstu vjerojatnosnih eksperimenata.

U trećem poglavlju usredotočujemo se na matematičku formalizaciju vjerojatnosti koja se temelji na pretpostavci da su svi ishodi nekog eksperimenta jednako vjerojatni. Ovo poglavlje detaljno obrađuje ključne principe klasične definicije, ilustrirajući njezinu primjenu kroz jednostavne primjere iz svakodnevnog života.

U četvrtom poglavlju obrađuju se metode prebrojavanja, pri čemu se obrađuju osnovni koncepti teorije prebrojavanja poput permutacija i kombinacija. Ove metode igraju ključnu ulogu u određivanju vjerojatnosti složenih događaja, gdje broj mogućih ishoda nije intuitivno očit. U petom poglavlju primjenjujemo tehnike prebrojavanja kod izračuna vjerojatnosti putem klasične definicije kroz niz primjera.

U šestom poglavlju dajemo kratki pregled alternativnih definicija vjerojatnosti, kao što su frekvencijska i subjektivna definicija. Poglavlje uspoređuje ove pristupe s klasičnom definicijom, naglašavajući njihove prednosti i ograničenja u specifičnim primjenama, posebno u situacijama gdje ishodi nisu jednako vjerojatni ili kada se vjerojatnost interpretira na temelju osobnog uvjerenja.

U zadnjem poglavlju fokusiramo se na primjenu klasične definicije vjerojatnosti na neke inženjerske probleme.

2. Ishodi i događaji

Teorija vjerojatnosti proučava slučajne pojave i eksperimentalne rezultate. Kako bi se ove pojave pravilno razumjele i analizirale, važno je definirati osnovne pojmove kao što su ishodi i događaji. Ishodi su pojedinačni rezultati nekog eksperimenta, dok su događaji skupovi ishoda koji zadovoljavaju određene uvjete.

U ovom poglavlju precizno ćemo definirati ishode i događaje, navesti niz primjera i klasifikacija, a uvesti ćemo i operacije na ishodima i događajima. Ovo poglavlje obrađeno je prema izvoru [10].

2.1. Prostor ishoda

U kontekstu teorije vjerojatnosti, ishod je elementarni rezultat pojedinačnog izvođenja eksperimenta ili pokusa. Formalno, ishod se definira kao element skupa ishoda.

Prostor ishoda je skup svih mogućih ishoda nekog eksperimenta. Formalno, prostor ishoda označava se s Ω i definira se kao skup koji sadrži sve moguće ishode promatranog eksperimenta.

Pojedinačni ishod označava se s ω i definira se kao element prostora ishoda, tj. $\omega \in \Omega$. Prostor ishoda u tom se kontekstu definira kao skup:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}, \tag{2.1}$$

gdje su $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ pojedinačni ishodi.

Ovisno o tome koliko elemenata ima, prostor ishoda može biti konačan ili beskonačan. Izrazom (2.1) opisan je konačan skup ishoda. Beskonačan skup ishoda može biti diskretan ili kontinuiran. Kod diskretnog skupa ishoda broj ishoda odgovara skupu prirodnih brojeva, dok je kontinuirani skup ishodi uglavnom neki interval realnih brojeva.

Navedimo sada nekoliko primjera prostora ishoda.

Primjer 2.1. *U kontekstu bacanja novčića, prostor ishoda uključuje sve moguće rezultate koje možemo dobiti kada bacimo novčić. Pojedinačni ishodi su ω_1 = Glava i ω_2 = Pismo, odnosno prostor ishoda je zadan s*

$$\Omega = \{Glava, Pismo\}. \tag{2.2}$$

Primjer 2.2. *Promotrimo problem bacanja igraće kocke. U tom slučaju prostor ishoda sastoji se od brojeva na koje kocka može pasti, odnosno vrijedi:*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \tag{2.3}$$

Primjer 2.3. *Eksperiment opažanja stanja LED diode u višebojnom LED sustavu je primjer konačnog prostora ishoda u elektrotehnici. LED dioda je elektronički uređaj koji može emitirati svjetlo različite boje ili biti isključena. Opažanje stanja LED diode je praćenje boje ili stanja LED diode, što je korisno u mnogim primjenama, kao što su indikatori statusa, signalizacija, dekorativna rasvjeta i drugi elektronički uređaji. Prostor ishoda u ovom eksperimentu sastoji se od svih mogućih boja, odnosno stanja LED diode. U jednostavnom višebojnom sustavu LED dioda može biti u jednom od četiri stanja: crvena, zelena, plava ili isključena. Formalno, prostor ishoda u tom je slučaju zadan s:*

$$\Omega = \{crvena, zelena, plava, isključena\}\,. \tag{2.4}$$

Razmotrimo sada jedan problem s diskretno beskonačnim skupom ishoda.

Primjer 2.4. *Zamislimo da bacamo novčić više puta dok ne dobijemo glavu. Mogući ishodi su oblika:*

- *Glava na prvom bacanju:* G,
- *Glava na drugom bacanju (nakon jednog pisma):* P, G,
- *Glava na trećem bacanju (nakon dva pisma):* P, P, G,
- *Glava na četvrtom bacanju (nakon tri pisma):* P, P, P, G,

gdje G *označava glavu, a* P *pismo. Skup svih mogućih ishoda ovog eksperimenta je beskonačan diskretan skup jer ne postoji gornja granica broja bacanja potrebnih da bi se dobila prva glava, a formalno bi se mogao zapisati na sljedeći način:*

$$\Omega = \{P^n G \mid n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}\}\,, \tag{2.5}$$

gdje n *predstavlja broj uzastopnih pisama prije nego što se dobije glava. Svaki član skupa* Ω *predstavlja jedan mogući niz ishoda bacanja novčića.*

U sljedećem primjeru analiziramo kontinuirani (neprebrojivi) skup ishoda.

Primjer 2.5. *U elektrotehnici, amplituda signala mjeri se u analogno električnom krugu, što je može biti jedan primjer kontinuiranog skupa ishoda. Ishodi su realni brojevi koji poprimaju vrijednosti iz nekog intervala, primjerice od -10V do +10V. U ovom slučaju ne možemo prebrojiti ishode jer između svaka dva ishoda postoji barem još jedan ishod.*

2.2. Pojam i klasifikacija događaja

Svaki podskup skupa ishoda zvati ćemo događajem. Tako su primjerice za skup ishoda (2.1) neki događaji dani s:

$$A_1 = \{\omega_2\}\,, \tag{2.6}$$

$$A_2 = \{\omega_2, \omega_5\}\,, \tag{2.7}$$

$$A_3 = \{\omega_2, \omega_5, \omega_8\}\,. \tag{2.8}$$

Primjer 2.6. *Novčić je bačen tri puta. U svakom bacanju bilježimo je li se pojavilo pismo (P) ili glava (G). Odredimo elementarne događaje te nekoliko događaja vezanih uz ovaj pokus. Elementarnih događaja ima osam. To su:*

$$\omega_1 = GGG, \quad \omega_2 = GGP, \omega_3 = GPG, \quad \omega_4 = PGG,$$
$$\omega_5 = GPP, \quad \omega_6 = PGP, \omega_7 = PPG, \quad \omega_8 = PPP.$$

Ovdje smo, kratkoće radi, s GGP označili uređenu trojku (G, G, P) i slično za ostale ishode. Navedimo nekoliko događaja vezanih uz ovaj pokus:

$$A = \{\textit{pismo se pojavilo jednom}\} = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}\,,$$
$$B = \{\textit{pismo se pojavilo u drugom bacanju}\} = \{\omega_3, \omega_5, \omega_7, \omega_8\}\,,$$
$$C = \{\textit{pojavilo se barem jedno pismo i barem jedna glava}\} = \{\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_7\}\,,$$
$$D = \{\textit{pismo se pojavilo dvaput za redom}\} = \{\omega_5, \omega_7, \omega_8\}\,.$$

Događaje možemo podijeliti na jednostavne i složene. Jednostavni događaju sastoje se od samo jednog ishoda i ponekad iz zovemo elementarnim događajima. Složeni događaji sastoje se od više ishoda. Tako je u navedenim primjerima događaj A_1 jednostavan, dok su događaji A_2 i A_3 složeni događaji.

Pokažimo sada ovu klasifikaciju događaja na konkretnom primjeru.

Primjer 2.7. *U bacanju kocke, događaj "dobiti broj 3" je jednostavni događaj i može se zapisati kao*

$$A = \{3\}\,. \tag{2.9}$$

U istom modelu, događaj "dobiti paran broj" je složeni događaj i može se zapisati kao

$$B = \{2, 4, 6\}\,. \tag{2.10}$$

Događaj A je jednostavan jer se sastoji od samo jednog ishoda, dok je događaj B složen jer se sastoji od tri ishoda.

Navedimo još nekoliko primjera događaja u kontekstu elektrotehnike.

Primjer 2.8. *Kod mjerenja napona na voltmetru, skup ishoda predstavlja sve moguće vrijednosti napona koje voltmetar može izmjeriti. U slučaju analognog voltmetra, skup ishoda je kontinuiran, pa se, ako voltmetar mjeri napone u rasponu od $-10V$ do $10V$, skup ishoda definiran je s*

$$\Omega = [-10, 10]. \tag{2.11}$$

Ovaj skup ishoda uključuje sve realne brojeve unutar tog intervala.

Skup

$$A = \{5\} \tag{2.12}$$

bio bi primjer jednostavnog događaja kojim je opisan jedan specifičan ishod mjerenja.

Skup

$$B = \{x \in [-10, 10] : 3 \leq x \leq 7\} = [-3, 7] \tag{2.13}$$

opisuje događaj "izmjereni napon je između $3V$ *i* $7V$*" i predstavlja primjer složenog događaja.*

Događaj koji se uvijek događa, tj. podudara se s cijelim prostorom ishoda, zove se siguran događaj. S druge strane događaj koji se nikada ne događa, tj. podudara se s praznim skupom, zove se nemoguć događaj.

Navedimo sada nekoliko primjera sigurnih i nemogućih događaja.

Primjer 2.9. *U bacanju kocke, sigurni događaj je "dobiti broj između 1 i 6" i može se zapisati kao*

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\,. \tag{2.14}$$

U istom modelu, događaj "dobiti broj 7" je nemoguć događaj i može se zapisati kao

$$B = \emptyset. \tag{2.15}$$

Događaj A *je jednostavan jer se sastoji od samo jednog ishoda, dok je događaj* B *složen jer se sastoji od tri ishoda.*

Primjer 2.10. *Događaj "jedna će momčad pobijediti ili će utakmica završiti neriješeno" u nogometnoj utakmici je sigurni događaj jer su to jedini mogući ishodi utakmice (pobjeda jedne momčadi, pobjeda druge momčadi, ili neriješeno).*

Događaj "obje momčadi će pobijediti" u istoj nogometnoj utakmici je nemoguć događaj jer u jednoj utakmici ne mogu obje momčadi pobijediti.

Za dva ćemo događaja reći da su disjunktni ako nemaju zajedničkih ishoda. Tako su primjerice kod bacanja kocke događaji "pao je paran broj" i "pao je neparan broj" dva disjunktna događaja. Naime, u prvom događaju nalaze se samo parni ishodi, a u drugom neparni što znači da ti događaji nemaju niti jednog zajedničkog ishoda.

Primjer 2.11. *Primjer složenijih disjunktnih događaja u elektrotehnici može se naći u analizi rada sustava neprekidnog napajanja (UPS). Promotrimo dva događaja:*

- *Električna mreža radi normalno i napaja potrošače.*

- *UPS sustav preuzima napajanje potrošača zbog kvara u električnoj mreži.*

Ovi događaji su disjunktni jer se ne mogu dogoditi istovremeno, tj. ili električna mreža radi i napaja sustav, ili UPS preuzima napajanje u slučaju kvara. Ovi primjeri su ključni u dizajnu sigurnosnih sustava napajanja, gdje je važno osigurati da jedan sustav preuzima kada drugi zakaže, bez preklapanja u njihovom djelovanju.

2.3. Operacije na događajima

U teoriji vjerojatnosti, operacije s događajima omogućuju nam da kombiniramo različite događaje na različite načine kako bismo dobili nove događaje. Najvažnije operacije s događajima su unija, presjek, razlika i komplement događaja.

Unija dva događaja A i B je događaj koji se događa ako se dogodi barem jedan od događaja A ili B. Formalno, unija događaja A i B je skup koji sadrži sve ishode koji pripadaju barem jednom od tih događaja:

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ ili } \omega \in B\}. \tag{2.16}$$

Primjer 2.12. *Ako je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{3, 4, 5\}$, tada je*

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}. \tag{2.17}$$

Presjek dva događaja A i B je događaj koji se događa ako se dogode oba događaja A i B. Formalno, presjek događaja A i B je skup koji sadrži sve ishode koji pripadaju oba događaja:

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ i } \omega \in B\} \tag{2.18}$$

Primjer 2.13. *Ako je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{3, 4, 5\}$, tada je*

$$A \cap B = \{3\}. \tag{2.19}$$

Razlika dva događaja A i B je događaj koji se događa ako se dogodi$A$ ali se ne dogodi B. Formalno, razlika događaja A i B je skup koji sadrži sve ishode koji pripadaju A ali ne pripadaju B:

$$A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ i } \omega \notin B\} \tag{2.20}$$

Primjer 2.14. *Ako je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{3, 4, 5\}$, tada je*

$$A \setminus B = \{1, 2\}. \tag{2.21}$$

Komplement događaja A je događaj koji se događa ako se A ne dogodi. Formalno, komplement događaja A je skup koji sadrži sve ishode koji ne pripadaju A:

$$\overline{A} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\} \tag{2.22}$$

Primjer 2.15. *Ako je* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *i* $A = \{1, 2, 3\}$*, tada je*

$$\overline{A} = \{4, 5\} . \tag{2.23}$$

Pokažimo sada na primjeru implementaciju operacija na događajima.

Primjer 2.16. *Promotrimo primjer električnog sustava za grijanje s tri komponente:*

1. *Grijač A: može biti uključen ili isključen.*
2. *Grijač B: može biti uključen ili isključen.*
3. *Sigurnosni prekidač: aktivira se kada se sustav pregrije.*

Definirajmo sljedeće događaje:

- *Događaj X: Grijač A je uključen.*
- *Događaj Y: Grijač B je uključen.*
- *Događaj Z: Sigurnosni prekidač je aktiviran.*

1. *Unija događaja* $X \cup Y$ *opisuje situaciju kada je barem jedan od grijača uključen. Opisno, to znači da grijanje radi ako je uključen bilo koji od grijača (A ili B) ili oba.*
2. *Presjek događaja* $X \cap Y$ *opisuje situaciju u kojoj su oba grijača istovremeno uključena. Opisno, to znači da sustav maksimalno grije jer su oba grijača aktivna.*
3. *Komplement događaja* $\bar{Z}$ *opisuje situaciju kada sigurnosni prekidač nije aktiviran. To znači da sustav radi normalno, bez pregrijavanja.*
4. *Razlika događaja* $X \setminus Z$ *opisuje situaciju kada je grijač A uključen, ali sigurnosni prekidač nije aktiviran. Opisno, to znači da grijač A radi, ali sustav nije dosegao pregrijavanje.*

3. Klasična definicija vjerojatnosti

Klasična definicija vjerojatnosti, također poznata kao Laplaceova definicija, temelji se na konceptu jednako mogućih ishoda. Prema ovoj definiciji, vjerojatnost nekog događaja A u eksperimentu sa konačnim brojem ishoda je omjer broja povoljnih ishoda za događaj A i ukupnog broja mogućih ishoda, uz pretpostavku da svi ishodi imaju jednaku šansu da se dogode.

Definicija 3.1 (Klasična definicija vjerojatnosti)**.** *Neka je Ω konačan skup ishoda eksperimenta, gdje svi ishodi imaju jednaku vjerojatnost pojavljivanja. Pretpostavimo da postoji n mogućih ishoda u skupu Ω, tj. $|\Omega| = n$.*

Neka je $A \subseteq \Omega$ događaj koji nas zanima, i neka m predstavlja broj povoljnih ishoda za događaj A, tj. $|A| = m$.

Tada je vjerojatnost događaja A definirana kao:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}. \tag{3.1}$$

Svakako treba istaknuti da ova definicija ima dva velika ograničenja. Jedno ograničenje je konačnost prostora ishoda, a druga zahtjev da ishodi moraju biti jednakovjerojatni.

Pokažimo na nekoliko primjera kako se vjerojatnost izračunava putem klasične definicije vjerojatnosti.

Primjer 3.1. *Promotrimo problem bacanja novčića. U ovom slučaju imamo dva moguća ishoda: glava ili pismo, odnosno prostor ishoda je definiran s*

$$\Omega = \{glava, pismo\}, \tag{3.2}$$

uz pretpostavku da su oba ishoda jednako vjerojatna.

Odredimo vjerojatnost događaja "pasti će pismo" koji ćemo označiti s A.

Ovdje je broj povoljnih ishoda 1, a ukupan broj mogućih ishoda je 2, pa je

$$P(A) = \frac{1}{2}. \tag{3.3}$$

Primjer 3.2. *Promotrimo problem bacanja igraće kocke u kojem imamo 6 jednako vjerojatnih ishoda, odnosno skup ishoda definiran s:*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \tag{3.4}$$

Odredimo vjerojatnost događaja "pasti će neparan broj" koji ćemo označiti s A te vjerojatnost događaja "pasti će broj strogo veći od 4" koji ćemo označiti s B.

Događaj A možemo formalizirati pomoću sljedećeg skupa:

$$A = \{1, 3, 5\}, \tag{3.5}$$

dok je događaj B zadan skupom

$$B = \{5, 6\}. \tag{3.6}$$

Očito je $|\Omega| = 6$, $|A| = 3$ i $|B| = 2$ te su tražene vjerojatnosti

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \tag{3.7}$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \tag{3.8}$$

Primjer 3.3. *Pretpostavimo da imamo lozinku koja se sastoji od 4 znaka, gdje svaki znak može biti jedno od 26 velikih slova engleske abecede ili jedna od 10 znamenki. Želimo izračunati vjerojatnost da nasumično pogodimo točnu lozinku iz prve.*

Za svaki od 4 znaka imamo $26 + 10 = 36$ mogućih znakova, pa je ukupan broj mogućih različitih lozinki duljine 4:

$$36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 = 36^4 = 1679616, \tag{3.9}$$

što je ujedno i broj svih mogućih ishoda.

Budući da postoji samo jedna točna lozinka odgovara nam samo jedan ishod, pa je vjerojatnost da nasumično pogodimo točnu lozinku iz prve:

$$P(\textit{točna lozinka}) = \frac{1}{1679616}. \tag{3.10}$$

Iz samog izraza za klasičnu definiciju vjerojatnosti jasno je da je za njenu primjenu ključno prebrojavanje ishoda, a ovaj primjer pokazuje da to nije uvijek jednostavan zadatak. Stoga ćemo u sljedećem poglavlju obraditi neke temeljne metode prebrojavanja koje ćemo koristiti kod prebrojavanja ishoda.

4. Metode prebrojavanja

Metode prebrojavanja predstavljaju temeljni alat u teoriji vjerojatnosti i kombinatorici, koji omogućava sustavno i efikasno izračunavanje broja mogućih načina na koje se određeni događaji mogu odvijati. Ovo prebrojavanje igra ključnu ulogu ne samo u rješavanju problema vjerojatnosti, već i u raznim granama matematike i statistike, jer omogućuje preciznu analizu različitih ishoda i scenarija. Kroz primjenu metoda prebrojavanja možemo razumjeti složene probabilističke i statističke probleme, analizirati različite mogućnosti te donositi informirane odluke.

Osnovne tehnike koje se koriste kod prebrojavanja uključuju kombinacije, permutacije i raspodjele, a svaka od ovih tehnika pruža jedinstven pristup rješavanju različitih problema. Kombinacije nam omogućuju da izračunamo broj različitih skupova elemenata koje možemo odabrati iz veće grupe, bez obzira na redoslijed, dok permutacije uzimaju u obzir redoslijed elemenata unutar skupa. Raspodjele se koriste kada želimo analizirati kako možemo grupirati elemente u različite podskupove. Ove tehnike zajedno čine okosnicu metoda prebrojavanja, pružajući nam širok spektar alata za rješavanje raznih kombinatornih problema.

Primjena metoda prebrojavanja može se ilustrirati primjerima iz svakodnevnog života, kao što su vjerojatnosti u igrama na sreću, raspodjela resursa ili analiza podataka u velikim skupovima podataka. Primjerice, kod igara s kartama, metode prebrojavanja omogućuju nam da razumijemo koliko je različitih kombinacija karata moguće u određenom scenariju, što je osnova za izračun vjerojatnosti dobitka.

Primjerice, pretpostavimo da imamo standardnih špil karata i da želimo izvući sedam karata. Pitanje koje se postavlja jest kolika je vjerojatnost da među tim kartama ne izvučemo niti jednu damu? Intuitivni pristup nametnuo bi ispisivanje svih mogućih ishoda, no takav pristup bi bio nepraktičan zbog velikog broja mogućih ishoda. Točnije, broj mogućih kombinacija od sedam karata iz špila od 52 karte iznosi više od 133 milijuna, što jasno pokazuje složenost problema. Zbog toga je potrebno koristiti metode prebrojavanja kako bismo efikasno izračunali broj kombinacija koje ispunjavaju uvjete problema.

Prvi korak u rješavanju ovog problema je izračunati ukupni broj kombinacija sedam karata iz špila od 52 karte, što ćemo postići korištenjem kombinacija. Zatim, trebamo izračunati koliko tih kombinacija ne sadrži nijednu damu. Pošto u špilu ima četiri dame, jasno je da preostale 48 karte čine skup iz kojeg trebamo birati sedam karata bez dama. Dobiveni rezultati omogućit će nam izračun vjerojatnosti da među izvučenim kartama nema dame.

Rezultati koje dobivamo iz ove analize oslanjaju se na osnovna načela prebrojavanja koja navodimo u nastavku.

4.1. Osnovna načela prebrojavanja

Krenimo s najjednostavnijim nečelom prebrojavanja - načelom zbrajanja ili adicije.

Propozicija 4.1. *Ako se jedan događaj može dogoditi na m načina, a drugi na n načina, i ako se ti događaji međusobno isključuju, ukupan broj načina na koji se može dogoditi jedan ili drugi događaj je $m + n$.*

Pokažimo sada na nekoliko primjera primjenu ovog načela.

Primjer 4.1. *Pretpostavimo da biramo između 4 vrste čokolada i 3 vrste sokova. Ukupan broj načina na koje možemo izabrati čokoladu* ili *sok je $4 + 3 = 7$.*

Primjer 4.2. *Ako na izborniku imamo 5 vegetarijanskih i 6 mesnih jela, ukupan broj mogućih izbora jednog jela je $5 + 6 = 11$.*

Sada ćemo objasniti načelo množenja ili multiplikacije.

Propozicija 4.2. *Ako se jedan događaj može dogoditi na m načina, a drugi događaj na n načina, tada se oba događaja mogu dogoditi na ukupno $m \cdot n$ načina.*

Objasnimo sada ovo načelo primjerima.

Primjer 4.3. *Ako imamo 3 vrste kolača i 2 vrste pića, ukupan broj mogućih kombinacija kolača i pića je $3 \cdot 2 = 6$.*

Primjer 4.4. *Ako osoba ima 4 različite majice i 5 različitih hlača, ukupno može odabrati $4 \cdot 5 = 20$ različitih kombinacija odjeće.*

Idući primjer pokazuje nam kako se načelo produkta koristi u kontekstu brojenja ishoda.

Primjer 4.5. *Promotrimo jedan eksperiment koji se sastoji od dva pod-eksperimenta. Prvi pod-eksperiment je Baciti novčić i on ima dva ishoda, G (glava) i P (pismo). Drugi pod-eksperiment neka bude Baciti kocku i on ima šest ishoda, 1, 2,. . . , 6. Prema načelu produkta eksperiment Baciti novčić i baciti kocku ima $2 \cdot 6 = 12$ ishoda.*

Općenito, ako ima k pod-eksperimenata $E_1, E_2, \dots, E_k$, gdje pod-eksperiment E_i ima n_i ishoda, tada eksperiment E ima

$$\prod_{i=1}^{k} n_i \tag{4.1}$$

ishoda.

Preostaje nam još objasniti načelo uključivanja i isključivanja.

Propozicija 4.3. *Ako imamo dva skupa A i B, tada je ukupan broj elemenata u uniji ova dva skupa, tj. broj elemenata u $A \cup B$, jednak:*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{4.2}$$

Pokažimo sada primjenu načela uključivanja i isključivanja na primjerima.

Primjer 4.6. *Pretpostavimo da u razredu ima 20 učenika koji uče engleski, 15 učenika koji uče njemački, i 5 učenika koji uče oba jezika. Ukupan broj učenika koji uče barem jedan jezik je:*

$$20 + 15 - 5 = 30. \tag{4.3}$$

Primjer 4.7. *Ako u jednoj anketi 80 ljudi koristi Android, 50 ljudi koristi iOS, a 20 ljudi koristi oba operativna sustava, tada je ukupan broj ljudi koji koristi barem jedan od ova dva operativna sustava:*

$$80 + 50 - 20 = 110. \tag{4.4}$$

4.2. Permutacije i k-permutacije

U prethodnom dijelu uveli smo temeljna načela prebrojavanja. Sada ćemo objasniti osnovne kombinatorne objekte, točnije permutacije i kombinacije. Počinjemo s permutacijama.

Definicija 4.1. *Permutacija skupa je svaki poredak elemenata tog skupa.*

Primjer 4.8. *Ako imamo skup od 3 elementa $\{A, B, C\}$ Permutacije su:*

$$(A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (B, C, A), (C, A, B), (C, B, A). \tag{4.5}$$

Propozicija 4.4. *Broj permutacija skupa od n elemenata je:*

$$P(n) = n!, \tag{4.6}$$

gdje $n!$ (faktorijel) označava umnožak svih prirodnih brojeva od 1 do n, tj.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1. \tag{4.7}$$

Primjer 4.9. *Za skup od 3 elementa $\{A, B, C\}$ broj permutacija*

$$P(3) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, \tag{4.8}$$

što možemo potvrditi brojenjem svih navedenih permutacija iz prošlog primjera.

Primjer 4.10. *Za skup od 4 elementa $\{1, 2, 3, 4\}$ broj permutacija je*

$$P(4) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24. \tag{4.9}$$

Tablica 4.1. Vrijednosti faktorijela od 1 do 30 s razmakom od 5.

n	$n!$
1	1
5	120
10	3 628 800
15	1 307 674 368 000
20	2 432 902 008 176 640 000
25	15 511 210 043 330 985 984 000
30	265 252 859 812 191 058 636 308 480 000 000

Iz ova dva primjera možemo naslutiti da broj permutacija značajno raste povećanjem broja n. Koliko je taj rast značajan ilustrira iduća tablica.

Ova tablica pokazuje koliko su tehnike prebrojavanja važne. Naime, bilo bi nemoguće ispisati sve permutacije skupa od primjerice 10 elemenata i broj odrediti direktnim prebrojavanjem.

Uvedimo sada pojam k-permutacije.

Definicija 4.2. *k-permutacija skupa podrazumijeva odabir i poredak k elemenata iz skupa od n elemenata.*

Primjer 4.11. *Neka je zadan skup od 5 elemenata s $\{A, B, C, D, E\}$. Tada su*

$$(D, E, C), \qquad (A, B, E) \tag{4.10}$$

primjeri 3-permutacija danog skupa, a

$$(D, E, C, B), \qquad (A, B, E, C) \tag{4.11}$$

primjeri 4-permutacija danog skupa.

Propozicija 4.5. *Broj k-permutacija skupa od n elemenata izračunava se formulom:*

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1). \tag{4.12}$$

Primjer 4.12. *Ako iz skupa od 5 elemenata biramo i uređujemo 3 elementa, broj pripadnih 3-permutacija je:*

$$P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 60. \tag{4.13}$$

Primjer 4.13. *Ako iz skupa od 7 elemenata biramo i uređujemo 4 elementa, broj pripadnih 4-permutacija je:*

$$P(7, 4) = \frac{7!}{(7-4)!} = 840. \tag{4.14}$$

Pokažimo sada kako se permutacije mogu koristiti u kontekstu brojenja ishoda.

Primjer 4.14. *Izmiješajmo špil karata i promotrimo eksperiment poretka karata počevši od vrha. Ishod eksperimenta je uređeni niz od 52 karte u špilu, odnosno permutacija skupa od 52 elementa. Prema navedenom tih ishoda ima* $52!$.

Primjer 4.15. *Izmiješajmo špil karata i promotrimo eksperiment izvlačenja tri karte jedne iza druge. Dobili smo uređeni niz od tri karte iz skupa od 52 karte što nije ništa drugo nego* 3-*permutacija tog skupa. Ishoda dakle ima*

$$P(52,3) = \frac{52!}{(52-3)!} = \frac{52!}{49!} = 52 \cdot 51 \cdot 50 = 132600. \tag{4.15}$$

4.3. k-kombinacije

Kod k-permutacija, različiti ishodi razlikuju se prema redoslijedu u kojem odabiremo objekte. No, u mnogim praktičnim situacijama redoslijed odabira objekata nije bitan. Na primjer, u mnogim kartama važan je samo skup karata koje igrač dobije, dok redoslijed u kojem su karte podijeljene nije važan.

Primjerice ako od četiri objekta, A, B, C i D odabiremo dva objekta, slažemo ih abecednim redoslijedom i promatramo rezultat možemo odabrati jedan po jedan objekt ili oba objekta zajedno. Pošto ih slažemo abecednim redom, poredak kojim smo ih izvlačili nije bitan pa u biti biramo podskup objekata iz danog skupa. Svaki takav podskup naziva se k-kombinacija.

Definicija 4.3. k*-kombinacija je način odabira* k *elemenata iz skupa od* n *elemenata, pri čemu redoslijed elemenata nije važan.*

Primjer 4.16. *Neka je zadan skup od 5 elemenata:*

$$\{A, B, C, D, E\} \tag{4.16}$$

iz kojeg želimo odabrati 3 elementa bez obzira na redoslijed. Moguće kombinacije su:

$$\{A,B,C\}, \{A,B,D\}, \{A,B,E\}, \{A,C,D\}, \{A,C,E\}, \tag{4.17}$$

$$\{A,D,E\}, \{B,C,D\}, \{B,C,E\}, \{B,D,E\}, \{C,D,E\}. \tag{4.18}$$

Propozicija 4.6. *Broj* k*-kombinacija skupa od* n *elemenata izračunava se formulom:*

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{4.19}$$

Broj $\binom{n}{k}$ naziva se binomni koeficijent jer se pojavljuje kao koeficijent uz $x^k y^{n-k}$ u razvoju binoma $(x+y)^n$.

Formula za broj k-kombinacija skupa od n elemenata može se jednostavno izvesti korištenjem prethodno definiranih objekata. Promatramo dva koraka:

1. Odabiremo k-kombinaciju iz skupa od n elemenata.

2. Zatim biramo permutaciju od svih k objekata iz odabrane k-kombinacije.

Za prvu stavku imamo $\binom{n}{k}$ načina, a za drugu $k!$ načina. Kako smo opisanim postupkom dobili k-permutaciju početnog skupa, prema načelu množenja slijedi

$$P(n,k) = \binom{n}{k} \cdot k!, \tag{4.20}$$

odnosno

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!, \tag{4.21}$$

odakle direktno slijedi tvrdnja prethodne propozicije.

Napomenimo da vrijedi i sljedeći identitet:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{4.22}$$

Primjer 4.17. *Broj načina na koje se može odabrati 60 studenata iz grupe od 120 studenata je*

$$\binom{120}{60}. \tag{4.23}$$

Primjer 4.18. *Broj načina na koje se može odabrati 5 početnika za košarkaški tim s 11 igrača je*

$$\binom{11}{5} = 462. \tag{4.24}$$

4.4. k-permutacije s ponavljanjem

U prethodnim razmatranjima smatrali smo da se objekt iz danog skupa može izabrati samo jednom. Konkretno, nakon što odaberemo objekt za k-permutaciju, taj objekt uklanjamo iz skupa i ne možemo ga ponovo odabrati. Međutim, ponekada je moguće odabrati isti objekt i više puta, a tada govorimo o k-permutacijama s ponavljanjem.

Tu situaciju si možemo vizualizirati na način da se svaki objekt može se odabrati više puta jer se odabrani objekt zamjenjuje dupliciranom verzijom.

Definicija 4.4. *k-permutacije s ponavljanjem su permutacije u kojima biramo k elemenata iz skupa od n elemenata uz dopuštenje ponavljanja elemenata, pri čemu je redoslijed elemenata bitan.*

Primjer 4.19. *Neka je zadan skup od 3 elementa $\{A, B, C\}$ te neka biramo 2 elementa. Moguće k-permutacije s ponavljanjem su:*

$$(A,A),(A,B),(A,C),(B,A),(B,B),(B,C),(C,A),(C,B),(C,C). \tag{4.25}$$

Propozicija 4.7. *Broj k-permutacija s ponavljanjem računa se pomoću formule:*

$$\overline{P}(n, k) = n^k. \tag{4.26}$$

Primjer 4.20. *U prethodnom primjeru ispisali smo 9 permutacija, a taj broj mogli smo dobiti i po navedenoj formuli budući je $3^2 = 9$.*

Navedimo sada nekoliko primjera koji se često koriste kod analize kvalitete lozinki.

Primjer 4.21. *Postoji $2^{10} = 1024$ binarnih nizova dužine 10.*

Primjer 4.22. *Od 26 slova engleske abecede može se napraviti $26^4 = 456976$ riječi od četiri slova.*

Navedimo još nekoliko praktičnih primjera.

Primjer 4.23. *Laptop računalo ima PCMCIA utore A i B. Svaki utor može biti popunjen s jednom od sljedećih kartica: modem kartica (m), SCSI sučelje (i) ili GPS kartica (g). Odredimo broj načina za popunjavanje dva utora kada dopuštamo da oba utora sadrže istu vrstu kartice.*

Neka xy označava ishod u kojem je kartica tipa x korištena u utoru A, a kartica tipa y korištena u utoru B. Mogući ishodi su

$$S = \{mm, mi, mg, im, ii, ig, gm, gi, gg\}. \tag{4.27}$$

Brojku od 9 ishoda mogli smo dobiti i putem formule za broj k-permutacija, budući ovdje biramo dva elementa iz skupa od tri elementa. Dobiva se $3^2 = 9$ načina.

Primjer 4.24. *Pogon za proizvodnju čipova proizvodi mikroprocesore. Svaki mikroprocesor se testira kako bi se utvrdilo radi li pouzdano na prihvatljivoj brzini takta. Pod-eksperiment za testiranje mikroprocesora ima prostor ishoda $S = \{0, 1\}$, gdje 0 označava neuspjeh, a 1 uspjeh. Za test i, bilježimo $x_i = 0$ ili $x_i = 1$ kako bismo označili rezultat. U testiranju četiri mikroprocesora ishodi se mogu reprezentirati nizom znakova tipa*

$$0100, 0101, 0110, 0111, \tag{4.28}$$

koji se mogu shvatiti kao 4-permutacije skupa S. Prema formuli za broj k-permutacija nalazimo da ovaj eksperiment ima 16 mogućih ishoda.

Ako bi razmatrali 5 mogućih ocjena i 8 mikroprocesora broj mogućih ishoda bio bi 5^8.

4.5. k-kombinacije s ponavljanjem

Za razliku od običnih kombinacija, gdje svaki element može biti odabran samo jednom, kod k-kombinacija s ponavljanjem isti element može biti odabran više puta.

Definicija 4.5. *k-kombinacije s ponavljanjem su način odabira k elemenata iz skupa od n elemenata, pri čemu je dopušteno ponavljanje elemenata, a redoslijed odabira nije bitan.*

Primjer 4.25. *Neka je zadan skup od 3 elementa $\{A, B, C\}$. 2-kombinacije s ponavljanjem tog skupa su*

$$\{A, A\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, B\}, \{B, C\}, \{C, C\}. \tag{4.29}$$

Propozicija 4.8. *Broj k-kombinacija s ponavljanjem iz skupa od n elemenata izračunava se pomoću formule:*

$$\overline{C}(n, k) = \binom{n + k - 1}{k} = \frac{(n + k - 1)!}{k!(n - 1)!}. \tag{4.30}$$

Primjer 4.26. *Broj 2-kombinacija iz prethodnog primjera možemo dobiti izrazom*

$$\overline{C}(3, 2) = \binom{3 + 2 - 1}{2} = \binom{4}{2} = 6, \tag{4.31}$$

što odgovara broju napisanih 2-kombinacija.

Primjer 4.27. *U električnom krugu treba serijski spojiti 4 otpornika, pri čemu su na raspolaganju 3 različite vrijednosti otpornika: $R_1 = 100\,\Omega$, $R_2 = 220\,\Omega$ i $R_3 = 470\,\Omega$. Također svake vrste otpornika ima neograničeno. Odredimo na koliko se različitih načina može odabrati 4 otpornika za serijski spoj kada su dostupne ove tri vrijednosti otpornika, uz dozvoljeno ponavljanja istih vrijednosti?*

Ovdje se radi o biranju 4 otpornika iz 3 različite vrijednosti s ponavljanjem, odnosno o 3-kombinacijama s ponavljanjem. Koriteći navedenu formulu, broj tih kombinacija jednak je

$$C(3 + 4 - 1, 4) = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6 - 4)!} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15. \tag{4.32}$$

4.6. Permutacije multiskupa s konačnim kratnostima

Kod permutacija i kombinacija s ponavljanjem pretpostavljali smo da svakog objekta u skupu ima neograničeno. Sada ćemo analizirati situaciju kada u skupu ima ograničeni broj istih elemenata. Takve skupove nazivamo multiskupovima.

Definicija 4.6. *Multiskup je generalizacija skupa u kojem se elementi mogu pojaviti više puta. Broj pojavljivanja elementa u multiskupu zove se kratnost elementa.*

Primjer 4.28. *Multiskup $M = \{a, a, b, b, b, c\}$ ima:*

- *Element a s kratnošću 2,*
- *Element b s kratnošću 3,*
- *Element c s kratnošću 1,*

a možemo ga zapisati i na način $M = \{a^2, b^3, c^1\}$ ili $M = \{2 \cdot a, 3 \cdot b, 1 \cdot c\}$ što znači da se element a pojavljuje dva puta, element b tri puta, a element c jednom.

Sada možemo uvesti pojam permutacije multiskupa.

Definicija 4.7. *Permutacije multiskupa s konačnim kratnostima predstavljaju sve moguće permutacije elemenata iz multiskupa u kojem svaki element može imati određenu kratnost, odnosno može se pojaviti više puta. Za razliku od klasičnih permutacija, ovdje uzimamo u obzir da se neki elementi mogu ponavljati određeni broj puta.*

Primjer 4.29. *Neka je zadan multiskup $M = \{A \times 2, B \times 1, C \times 2\}$. Neke od mogućih permutacija tog multiskupa su:*

$$(A, A, B, C, C), (A, B, A, C, C), (C, A, A, B, C), (A, C, C, B, A). \tag{4.33}$$

Propozicija 4.9. *Ako multiskup sadrži n elemenata, gdje se element a_1 ponavlja k_1, element a_2 ponavlja se k_2 puta, i tako dalje do a_m, gdje se element a_m ponavlja k_m puta. Tada je broj permutacija multiskupa dan izrazom*

$$P = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \cdots k_m!}, \tag{4.34}$$

gdje je $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$.

Broj permutacija multiskupa često se naziva multinomni koeficijent i označava se a

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_m}. \tag{4.35}$$

Primjer 4.30. *Broj permutacija multiskupa iz prethodnog primjera biti će*

$$\frac{5!}{2!\, 1!\, 2!} = \frac{120}{2 \times 1 \times 2} = \frac{120}{4} = 30. \tag{4.36}$$

4.7. k-permutacije i k-kombinacije multiskupa s konačnim kratnostima

k-permutacije multiskupa s konačnim kratnostima predstavljaju permutacije k elemenata iz multiskupa, pri čemu elementi multiskupa mogu imati ograničene ili konačne kratnosti (broj pojavljivanja). Redoslijed elemenata je bitan, a jednom odabrani element ne može biti ponovno odabran ako je iscrpljena njegova kratnost.

Primjer 4.31. *Neka je zadan multiskup $M = \{A \times 2, B \times 1, C \times 2\}$. Moguće 3-permutacije ovog multiskupa su*

$$\begin{aligned} &(A, A, B), (A, A, C), (A, B, C), (A, C, B), (A, C, C), \\ &(B, A, C), (B, C, A), (B, C, C), (C, A, C), (C, C, A), \end{aligned} \tag{4.37}$$

pa vidimo da ima 10 različitih 3-permutacija.

Općenita formula za broj k-permutacija iz multiskupa s konačnim kratnostima nije jednostavna kao u slučaju k-permutacija s ponavljanjem. Ona ovisi o specifičnoj raspodjeli kratnosti elemenata u multiskupu i zahtijeva detaljnu analizu svakog slučaja.

k-kombinacije multiskupa s konačnim kratnostima predstavljaju sve moguće načine odabira k elemenata iz multiskupa, pri čemu su elementi multiskupa dostupni u ograničenim količinama, tj. imaju konačne kratnosti. Redoslijed odabira elemenata nije bitan, a jednom odabrani element može biti ponovljen samo onoliko puta koliko puta se pojavljuje u multiskupu.

Primjer 4.32. *Za multiskup iz prethodnog primjera* 3*-kombinacije bile bi*

$$\{2 \cdot A, B\}, \{2 \cdot A, C\}, \{A, B, C\}, \{A, 2 \cdot C\}, \{B, 2 \cdot C\}, \tag{4.38}$$

pa vidimo da u ovom slučaju imamo 5 mogućih 3*-kombinacija.*

Kao i kod k-permutacija s konačnim kratnostima ne postoji općenita formula niti za izračun broja k-kombinacija s konačnim kratnostima.

5. Primjena tehnika prebrojavanja kod izračuna vjerojatnosti

Ispravno prebrojavanje mogućih ishoda temelj je za svaki izračun vjerojatnosti pomoću klasične definicije vjerojatnosti. Tehnike prebrojavanja omogućuju nam da precizno analiziramo i kvantificiramo sve moguće scenarije koji mogu nastati u nekom eksperimentu ili događaju. Bez ovih tehnika, bilo bi nemoguće ispravno izračunati vjerojatnosti, pogotovo kod složenih događaja u kojima se javlja velik broj mogućih ishoda.

U sljedećem nizu primjera pokazati ćemo kako se uvedene tehnike koriste kod izračuna vjerojatnosti.

Primjer 5.1. *U teniskom klubu učlanjeno je 8 bračnih parova. Ako se nasumično odabere jedan muškarac i jedna žena za planiranje ljetnog turnira, odredimo vjerojatnost da su u braku.*

Budući da postoji 8 načina za odabir muškarca i 8 načina za odabir žene, postoji $8 \cdot 8 = 64$ *načina za odabir 1 muškarca i 1 žene. Kako je ukupno 8 bračnih parova, tražena vjerojatnost je*

$$p = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}. \tag{5.1}$$

U ovom smo se primjeru koristit načelom množenja.

Primjer 5.2. *Odredimo vjerojatnost da se iz standardnog špila karata pri izvlačenju pet karata dobiju četiri asa.*

Standardni špil karata sastoji se od 52 karte i koristi se u mnogim popularnim igrama širom svijeta. Klasificiran je prema bojama (suits) i rangovima (ranks). Svaka karta ima jedinstvenu kombinaciju boje i ranga.

Standardni špil podijeljen je u četiri boje, od kojih svaka sadrži 13 različitih karata. Boje su:

- *Herc (Hearts) – crvena boja*
- *Karo (Diamonds) – crvena boja*
- *Tref (Clubs) – crna boja*
- *Pik (Spades) – crna boja*

Svaka boja ima jednake rangove karata, ali se vizualno razlikuje po simbolima (herc, karo, tref, pik).

Svaka boja ima 13 različitih rangova. Rangovi se dijele na:

- *Brojčane karte od 2 do 10,*

- *Slike (face cards):*
  - *Dečko (Jack, J),*
  - *Dama (Queen, Q),*
  - *Kralj (King, K),*
- *As (Ace), koji može imati najviši ili najniži rang, ovisno o igri.*

Ovo znači da svaka boja ima karte označene s 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, i A. Ukupno imamo 4 boje po 13 karata, što čini standardnih 52 karte.

Prema navedenom postoji

$$\binom{52}{5} \tag{5.2}$$

načina da se iz špila izvuče 5 karata. Ovaj broj predstavlja broj svih mogućih ishoda.

Nas zanimaju ishodi kod kojih se među 5 izvučenih karata nalaze 4 asa. To znači da iz skupa od 4 asa moramo izabrati 4 karte, što možemo učiniti na samo jedan način. Preostaje za odabir jedna karta iz preostalih 48 karata što onda možemo učiniti na 48 načina.

Prema navedenom, tražena vjerojatnost jednaka je

$$p = \frac{48}{\binom{52}{5}} = \frac{48}{2,598,960} = \frac{1}{54,145}. \tag{5.3}$$

U ovom smo se primjeru koristili k-kombinacijama.

Primjer 5.3. *Neka lozinka sadržava tri znaka izabrana od 26 slova engleske abecede. Odredimo vjerojatnost da se lozinka pogodi ako se znakovi u lozinci mogu i ne mogu ponavljati.*

U ovom slučaju ishodi su lozinke. Kako pogađamo lozinku odgovarajući ishod je točna lozinka, tj. imamo samo jedan odgovarajući ishod.

U prvom slučaju kada se znakovi u lozinci mogu ponavljati govorimo o 3-permutacijama s ponavljanjem iz skupa od 26 elemenata i njih ima 26^3, pa je pripadna vjerojatnost jednaka

$$p = \frac{1}{26^3} = \frac{1}{17,576}. \tag{5.4}$$

U drugom slučaju kada se znakovi ne mogu ponavljati govorimo o 3-permutacijama bez ponavljanja iz skupa od 26 elemenata i njih ima

$$P(26,3) = \frac{26!}{(26-3)!} = \frac{26!}{23!} = 26 \cdot 25 \cdot 24, \tag{5.5}$$

pa je pripadna vjerojatnost jednaka

$$p = \frac{1}{26 \cdot 25 \cdot 24}. \tag{5.6}$$

Primjer 5.4. *Cvjećarnica na raspolaganju ima ruže i ljiljane. Kupac je naručio buket s pet cvijetova ali je zaboravio naglasiti da želi buket s najviše tri ruže. Odredimo vjerojatnost da će dobiti buket kakav želi.*

Kako poredak cvjetova u buketu nije bitan u ovom slučaju ishodi će biti 5*-kombinacije s ponavljanjem od 2 elementa (ruže i ljiljani). Takvih kombinacija, odnosno ishoda ima ukupno*

$$\overline{C}(2,5) = \binom{2+5-1}{5} = \binom{6}{5} = 6. \tag{5.7}$$

Da bi buket imao najviše 3 ruže, možemo imati 0, 1, 2 ili 3 ruže, pa su povoljni ishodi:

- *0 ruža, 5 ljiljana,*
- *1 ruža, 4 ljiljana,*
- *2 ruže, 3 ljiljana,*
- *3 ruže, 2 ljiljana,*

pa prema načelu zbrajanja zaključujemo da su 4 povoljna ishoda.

Konačno izračunavamo traženu vjerojatnost:

$$p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}. \tag{5.8}$$

Primjer 5.5. *U kutiji se nalaze 3 crvene loptice, 2 plave loptice i 1 zelena loptica. Odredimo vjerojatnost da ćemo njihovim nasumičnim slaganjem u niz dobiti najprije 3 crvene, zatim 2 plave i na kraju jednu zelenu lopticu.*

Ishodi su ovom slučaju permutacije multiskupa u kojem se se nalaze crvene, plave i zelene loptice, pri čemu su kratnosti elemenata konačne. Prema prije navedenoj formuli takvih ishoda imamo

$$\frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = 60. \tag{5.9}$$

Od svih ovih 60 ishoda nama odgovara samo jedan, pa je tražena vjerojatnost $\frac{1}{60}$.

6. Alternativne definicije vjerojatnost

Alternativne definicije vjerojatnost odnose se na pristupe i definicije vjerojatnosti koje se razlikuju od klasične definicije, omogućavajući izračun vjerojatnosti i kada pretpostavke klasične definicije vjerojatnosti nisu ispunjene. Drugim riječima, omogućavaju nam izračun vjerojatnosti ako ishoda ima beskonačno ili ako ishodi nisu jednakovjerojatni.

6.1. Subjektivna vjerojatnost

Subjektivna vjerojatnost temelji se na osobnom uvjerenju pojedinca o vjerojatnosti nekog događaja. Umjesto da se oslanja na objektivne podatke i jednake šanse, subjektivna vjerojatnost uzima u obzir osobne stavove i iskustva. Ovaj pristup omogućava analizu situacija gdje nedostaju objektivni podaci ili kada su podaci nesigurni.

Subjektivna vjerojatnost često se koristi u svakodnevnom donošenju odluka, gdje pojedinci procjenjuju vjerojatnost događaja temeljem vlastitih iskustava i uvjerenja. Na primjer, ako netko smatra da su šanse za kišu sutra visoke jer je već nekoliko dana kišilo, to može biti primjer subjektivne procjene.

U industriji osiguranja, kompanije često koriste subjektivnu procjenu za određivanje premija. Ovisno o iskustvu i analizi, osiguratelj može procijeniti vjerojatnost rizika za različite klijente i prilagoditi cijene polica.

Klađenje na sportske događaje često se temelji na subjektivnim procjenama o vjerojatnosti pobjede određenih timova, uzimajući u obzir trenutnu formu, ozljede igrača i druge činjenice.

Subjektivna vjerojatnost može biti podložna pristranostima i netočnostima jer se oslanja na osobne stavove koji nisu uvijek racionalni ili objektivni. Stoga, iako korisna, subjektivna vjerojatnost zahtijeva oprez u interpretaciji i primjeni.

6.2. Statistička definicija vjerojatnosti

Statistička definicija vjerojatnosti naziva se i frekvencijska vjerojatnost, a temelji se na ponavljanju eksperimenta i izračunavanju omjera broja uspješnih ishoda u odnosu na ukupan broj pokušaja. Ova definicija vjerojatnosti koristi stvarne podatke i opažanja za određivanje vjerojatnosti događaja.

Primjerice, ako bacimo igraću kocku 1000 puta i zabilježimo koliko puta se pojavljuje broj 4, frekvencijska vjerojatnost da će kockica pokazati broj 4 može se izračunati kao omjer broja pojavljivanja broja 4 i ukupnog broja bacanja.

Svakako treba isktaknuti da frekvencijska vjerojatnost zahtijeva velik broj pokušaja za precizno određivanje vjerojatnosti. Također, može biti neprikladna za rijetke događaje ili situacije gdje nije moguće ponoviti eksperiment dovoljno puta.

6.3. Geometrijska definicija vjerojatnosti

Geometrijska vjerojatnost je grana teorije vjerojatnosti koja se bavi izračunavanjem vjerojatnosti događaja unutar geometrijskih okvira. Za razliku od klasične definicije vjerojatnosti, koja se oslanja na brojanje ishoda i pretpostavku da su svi ishodi jednako vjerojatni, geometrijska vjerojatnost koristi prostor ili područje za izračunavanje vjerojatnosti. Dok klasična definicija uspoređuje broj povoljnih ishoda s ukupnim brojem mogućih ishoda, geometrijska vjerojatnost uspoređuje omjere duljina, površina ili volumena unutar geometrijskog prostora.

Geometrijska vjerojatnost je posebno korisna u situacijama gdje brojanje ishoda nije prikladno ili primjenjivo. Umjesto diskretnog broja mogućih ishoda, radi se s kontinuiranim prostorima. Na primjer, ako je potrebno izračunati vjerojatnost da neki slučajni događaj nastupi unutar određenog geometrijskog oblika (npr. unutar kruga ili trokuta), geometrijska vjerojatnost uzima omjer geometrijske mjere područja povoljnog za događaj u odnosu na geometrijsku mjeru ukupnog područja.

Na taj način, geometrijska vjerojatnost proširuje primjenu teorije vjerojatnosti na probleme koji nisu pogodni za klasične metode brojanja ishoda, čineći je ključnim alatom u analizi problema koji uključuju kontinuirane ishode.

Primjer 6.1. *Razmotrimo slučaj kada bacamo kovanicu na stol koji je obojen u dvije boje, npr. crvenu i plavu, i želimo izračunati vjerojatnost da kovanica padne na plavi dio stola. Ako je stol podijeljen na dva jednaka dijela, jedan crveni i jedan plavi, onda je površina plavog dijela* $\frac{1}{2}$*ukupne površine stola. Dakle, vjerojatnost da kovanica padne na plavi dio je:*

$$p = \frac{\textit{Površina plavog dijela}}{\textit{Ukupna površina}} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}. \tag{6.1}$$

6.4. Uvjetna vjerojatnost

Uvjetna vjerojatnost označava vjerojatnost da će se neki događaj dogoditi, pod uvjetom da je već poznato da se neki drugi događaj dogodio.

Ako su A i B dva događaja u istom prostoru ishoda, tada je uvjetna vjerojatnost događaja A, pod uvjetom da se dogodio događaj B, definirana izrazom:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \tag{6.2}$$

pod pretpostavkom da je $P(B) > 0$.

Primjer 6.2. *Tvornica proizvodi 1000 proizvoda dnevno. Od tih proizvoda, 700 dolazi s proizvodne linije A, a 300 s proizvodne linije B. Također, znamo da 20 proizvoda s linije A ima defekt. Odredimo vjerojatnost da nasumično odabrani proizvod ima defekt, ako znamo da dolazi s linije A.*

Označimo s A događaj da proizvod dolazi s linije A, a s D da proizvod ima defekt.

Vjerojatnost da proizvod dolazi s linije A je:

$$P(A) = \frac{700}{1000} = 0.7. \tag{6.3}$$

Znamo da 20 proizvoda s linije A ima defekt, pa je:

$$P(D \cap A) = \frac{20}{1000} = 0.02. \tag{6.4}$$

Uvjetna vjerojatnost da proizvod ima defekt, pod uvjetom da dolazi s linije A, računa se formulom:

$$P(D|A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{0.02}{0.7} = \frac{1}{35}. \tag{6.5}$$

U usporedbi s klasičnom definicijom vjerojatnosti, koja pretpostavlja da su svi ishodi jednako vjerojatni i računa vjerojatnost kao omjer povoljnih ishoda i ukupnih ishoda, uvjetna vjerojatnost uzima u obzir već poznate informacije, čime omogućuje analizu složenijih i povezanih događaja.

6.5. Aksiomatska definicija vjerojatnosti

Aksiomatska definicija vjerojatnosti, koju je formalno uveo Andrej Kolmogorov 1933. godine, predstavljala je ključan korak u matematičkom razvoju teorije vjerojatnosti. Do tada se vjerojatnost najčešće definirala pomoću klasične definicije, koja je pretpostavljala da su svi ishodi jednako vjerojatni. Iako je klasična definicija vjerojatnosti bila korisna u rješavanju problema vezanih uz igre na sreću i jednostavne eksperimente, njezina primjena bila je ograničena na situacije s konačnim i diskretnim skupovima ishoda. Klasična definicija bila je nedovoljna za složenije primjene, poput onih u fizici, ekonomiji ili statistici, gdje su ishodi mogli biti nejednako vjerojatni ili kontinuirani.

Kolmogorov je shvatio potrebu za općim i rigoroznim temeljem za teoriju vjerojatnosti, neovisnim o specifičnim uvjetima eksperimenta ili tipu ishoda. Njegova aksiomatska definicija utemeljila je vjerojatnost na matematičkoj teoriji skupova i osigurala dosljedan okvir za rad s vjerojatnostima u svim kontekstima. Kolmogorov je razvio teoriju utemeljenu na nekoliko osnovnih pravila ili aksioma, koja su općenito prihvaćena i primjenjiva na bilo koji tip slučajnih događaja – bilo diskretnih, kontinuiranih ili kombiniranih.

Kako bi vjerojatnost definirali aksiomatski najprije trebamo postaviti prostor ishoda Ω, na njemu definirati strukturu događaja $\mathcal{F}$ koju zovemo σ-algebrom te funkciju P koja svakom događaju $A \in \mathcal{F}$ pridružuje broj $P(A)$, koji predstavlja vjerojatnost događaja A. Funkcija P zove se vjerojatnost i mora zadovoljiti sljedeće aksiome:

1. Za svaki događaj $A \in \mathcal{F}$, vjerojatnost tog događaja mora biti nenegativna.

2. Vjerojatnost cijelog prostora ishoda mora biti 1, što znači da se neki događaj iz prostora ishoda mora dogoditi.

3. Ako su dva događaja A i B međusobno isključiva (disjunktna), tj. nemaju zajedničkih ishoda, tada je vjerojatnost unije tih događaja jednaka zbroju njihovih pojedinačnih vjerojatnosti.

Ovi aksiomi definiraju osnovna svojstva vjerojatnosti i omogućuju njenu primjenu na različite vrste problema, od diskretnih do kontinuiranih slučajeva, čineći ovu definiciju univerzalnom.

Pokažimo da i klasična definicija vjerojatnosti zadovoljava tri aksioma vjerojatnosti.

Prema klasičnoj definiciji vjerojatnosti je

$$P(A) = \frac{|A|)}{|\Omega|} \tag{6.6}$$

. Budući da su i brojnik i nazivnik ovog razlomka nenegativni cijeli brojevi, razlomak je također je nenegativan, čime je prvi aksiom zadovoljen.

Prema klasičnoj definiciji, vjerojatnost cijelog prostora ishoda je:

$$P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1, \tag{6.7}$$

što pokazuje da je zadovoljen i drugi aksiom vjerojatnosti.

Neka su A i B disjunktni događaji, tj. $A \cap B = \emptyset$. Prema klasičnoj definiciji, vjerojatnost unija dva događaja $A \cup B$ izračunava se izrazom

$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} \tag{6.8}$$

Budući da su A i B disjunktni, vrijedi $|A \cup B| = |A| + |B|$, pa je

$$P(A \cup B) = \frac{|A| + |B|}{|\Omega|} = \frac{|A|)}{|\Omega|} + \frac{|B|)}{|\Omega|} = P(A) + P(B), \tag{6.9}$$

čime smo pokazali da klasična definicija vjerojatnosti zadovoljava i treći aksiom.

7. Klasična definicija vjerojatnosti u inženjerstvu

U inženjerskim primjenama, klasična vjerojatnost pruža jednostavan i intuitivan način za analizu sustava gdje su ishodi jasno definirani i jednako vjerojatni, kao što su kvarovi komponenenata, optimizacija resursa ili analiza rizika. U ovom ćemo poglavlju navesti nekoliko primjera koji ilustriraju te primjene.

U prvom primjeru bavimo se pouzdanošću, odnosno izračunavamo različite vjerojatnosti koje se mogu iskoristiti u efikasnom upravljanju servisom. Naime, jasno je da se problem neispravnih djelova u skladištu kompenzira naručivanjem dodatnih djelova, a sljedeći primjer pokazati će kako se izračunavaju vjerojatnosti koje kod takve analize mogu pomoći.

Primjer 7.1. *Kutija sadrži 24 tranzistora, od kojih su 4 neispravna. Ako se nasumično odaberu 4 tranzistora, odredimo vjerojatnosti:*

(a) da su točno dva od izabrana četiri tranzistora neispravna,

(b) da su sva četiri tranzistora ispravna,

(c) da su sva četiri tranzistora neispravna,

(d) da je barem jedan tranzistor od izabrana četiri neispravan.

U ovom slučaju ishodi će biti 2*-kombinacije skupa od 24 tranzistora. Takvih kombinacija ukupno ima*

$$\binom{24}{4} = 10626, \tag{7.1}$$

što je i ukupan broj ishoda za sve navedene događaje.

(a) Dva neispravna tranzistora mogu se odabrati na

$$\binom{4}{2} \tag{7.2}$$

načina, a dva ispravna na

$$\binom{20}{2} \tag{7.3}$$

načina. Prema tome je

$$p = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{20}{2}}{\binom{24}{4}} = \frac{1140}{10626} = \frac{190}{1771}. \tag{7.4}$$

(b) Broj načina da se odaberu svi ispravni tranzistori jednak je

$$\binom{20}{4}. \tag{7.5}$$

Slijedi

$$p = \frac{\binom{20}{4}}{\binom{24}{4}} = \frac{4845}{10626} = \frac{1615}{3542}. \tag{7.6}$$

(c) Broj načina da se odaberu svi neispravni tranzistori je

$$\binom{4}{4} = 1, \tag{7.7}$$

pa je

$$p = \frac{1}{\binom{24}{4}} = \frac{1}{10626}. \tag{7.8}$$

(d) Događaj da je barem jedan izabran tranzistor neispravan suprotan je događaj događaju da su svi tranzistori ispravni, dakle događaju čiju smo vjerojatnost odredili u b) dijelu primjera. Prema tome vjerojatnost u ovom slučaju dobijemo oduzimanjem te vjerojatnosti od 1. Slijedi

$$p = 1 - \frac{1615}{3542} = \frac{1927}{3542}. \tag{7.9}$$

U sljedećem se primjeru bavimo problemom sigurnosti sustava kroz kvalitetu lozinke.

Primjer 7.2. *Neka se kreira lozinka od 6 znakova, pri čemu svaki znak može biti slovo engleske abecede (bilo malo ili veliko) ili znamenka. Odredimo vjerojatnost da se pogodi lozinka u tom slučaju.*

U engleskoj abecedi ima 26 malih i 26 velikih slova, što ukupno daje 52 slova, a uz to imamo 10 znamenki (od 0 do 9). Prema tome svaka pozicija u lozinci može biti jedan od $52 + 10 = 62$ *mogućih znakova.*

Ako dozvolimo da se znakovi u lozinci ponavljaju, lozinke možemo shvatiti kao 6*-permutacije skupa od 62 elementa i njihov ukupan broj će biti* 62^6*, pa je vjerojatnost pogađanja takve lozinke jednaka*

$$p = \frac{1}{62^6} = \frac{1}{56800235584}. \tag{7.10}$$

Ova vjerojatnost je izuzetno mala, što pokazuje koliko je malo vjerojatno da se ispravna lozinka pogodi nasumično, odnosno da je lozinka odabrana na ovaj način kvalitetna.

Sada ćemo navesti jedan primjer iz područja kontrole kvalitete.

Primjer 7.3. *Pretpostavimo da tvornica proizvodi serije od 1000 dijelova, od kojih je poznato da su 980 dijelova ispravni, a 20 dijelova neispravni. Tijekom kontrole kvalitete, nasumično se bira jedan dio iz serije kako bi se provjerilo je li ispravan.*

Prema klasičnoj definiciji vjerojatnosti, vjerojatnost da će izabrani dio biti ispravan izračunava se kao omjer broja ispravnih dijelova i ukupnog broja dijelova u seriji:

$$P(\textit{ispravan}) = \frac{980}{1000} = 0.98. \tag{7.11}$$

S druge strane, vjerojatnost da će nasumično odabrani dio biti neispravan je:

$$P(\textit{neispravan}) = \frac{20}{1000} = 0.02. \tag{7.12}$$

Ova jednostavna primjena klasične definicije vjerojatnosti pomaže u procjeni kvalitete proizvodnje, omogućujući inženjerima da kvantificiraju rizik od neispravnih dijelova u procesu kontrole kvalitete i donesu odluke o eventualnim korektivnim mjerama.

Navedimo još jedan primjer iz elektrotehnike.

Primjer 7.4. *Pretpostavimo da u nekoj električnoj mreži imamo 5 glavnih vodova za prijenos električne energije. Svaki od tih vodova može biti pod normalnim opterećenjem ili preopterećen. Vodovi se nasumično odabiru za provjeru stanja, a znamo da su 3 vodova pod normalnim opterećenjem, dok su 2 vodova preopterećena. Želimo procijeniti vjerojatnost da će nasumično odabrani vod biti preopterećen.*

Prema klasičnoj definiciji vjerojatnosti, vjerojatnost da će nasumično odabrani vod biti preopterećen izračunava se kao omjer broja povoljnih ishoda (preopterećeni vodovi) i ukupnog broja mogućih ishoda (svi vodovi):

$$P(\textit{preopterećen}) = \frac{n(\textit{preopterećeni})}{n(\textit{ukupno})}. \tag{7.13}$$

U ovom slučaju je:

- *Broj povoljnih ishoda* $n(\textit{preopterećeni}) = 2$*, jer su 2 voda preopterećena.*
- *Ukupan broj mogućih ishoda* $n(\textit{ukupno}) = 5$*, jer imamo 5 vodova.*

Stoga je vjerojatnost da će nasumično odabrani vod biti preopterećen:

$$P(\textit{preopterećen}) = \frac{2}{5} = 0.4 \tag{7.14}$$

Vjerojatnost da će nasumično odabrani vod biti preopterećen iznosi 0.4 ili 40%. Ova procjena pomaže inženjerima u procjeni rizika preopterećenja mreže i može poslužiti za planiranje preventivnih mjera kako bi se smanjio rizik od kvarova.

8. Zaključak

U ovom završnom radu obrađeni su ključni koncepti teorije vjerojatnosti s posebnim naglaskom na klasičnu definiciju vjerojatnosti i njezinu primjenu u inženjerskim sustavima. Rad započinje pregledom osnovnih pojmova kao što su ishodi i događaji, čime se uspostavlja temelj za razumijevanje daljnjih vjerojatnosnih modela. Kroz to, prikazuje se važnost pravilnog definiranja prostora ishoda i događaja kao nužnog koraka za primjenu teorije vjerojatnosti.

Treće poglavlje detaljno se bavi klasičnom definicijom vjerojatnosti, koja se primjenjuje u situacijama gdje su svi ishodi jednako vjerojatni. Ova definicija omogućava jednostavan i intuitivan pristup u rješavanju problema, kao što su izračuni vjerojatnosti u diskretnim sustavima. Međutim, u radu je istaknuto da, unatoč svojoj korisnosti, klasična definicija vjerojatnosti ima značajna ograničenja u složenijim i realnim sustavima, gdje ishodi nisu nužno jednako vjerojatni ili su prisutni kontinuirani prostori ishoda. Upravo zbog toga, potrebno je razmatrati i dodatne metode kako bi se obuhvatile složenije situacije.

Četvrto poglavlje posvećeno je metodama prebrojavanja, kao što su permutacije i kombinacije, koje omogućuju rješavanje problema s velikim brojem ishoda. Ove metode igraju ključnu ulogu u procjeni vjerojatnosti u situacijama gdje broj ishoda postaje prevelik za jednostavno brojenje. Kroz primjere su prikazane njihove primjene u izračunavanju vjerojatnosti složenih događaja, kao i kako olakšavaju analizu u inženjerskim problemima.

Peto poglavlje bavi se primjenom tehnika prebrojavanja u izračunu vjerojatnosti prema klasičnoj definiciji. Ovdje su detaljno opisane metode koje se koriste za izračunavanje broja mogućih ishoda u slučajevima gdje je izravno brojanje nepraktično ili nemoguće. Primjena ovih tehnika ključna je za rješavanje složenijih problema, gdje broj mogućih ishoda može biti vrlo velik.

Šesto poglavlje daje uvid u alternativne pristupe vjerojatnosti, uključujući statističku i subjektivnu definiciju. U radu je istaknuto da, iako klasična definicija ima široku primjenu u teorijskim problemima i situacijama s jednakim vjerojatnostima, drugi pristupi mogu pružiti bolja rješenja u specifičnim domenama, osobito u složenim sustavima.

Sedmo poglavlje bavi se primjenama tehnika prebrojavanja u konkretnim inženjerskim problemima. Istaknuta je važnost klasične definicije vjerojatnosti u procjeni rizika i analizi kvarova. Ovdje su prikazani konkretni primjeri iz inženjerske prakse, kao što je procjena vjerojatnosti preopterećenja u električnoj mreži, a dana je primjena i na problem kontrole kvalitete.

Zaključno, klasična definicija vjerojatnosti i dalje predstavlja temelj za rješavanje mnogih inženjerskih i matematičkih problema. No, kako bi se uspješno nosili s izazovima suvremenih inženjerskih sustava i neizvjesnosti, potrebno je proširiti osnovne metode prebrojavanja i koristiti alternativne pristupe vjerojatnosti.

Vjerojatnost je danas ključna u mnogim aspektima svakodnevnog života jer nam omogućuje da donosimo odluke u uvjetima nesigurnosti. Od financijskih tržišta, gdje se procjenjuje rizik ulaganja, do medicinske dijagnostike, gdje se koristi za predviđanje ishoda liječenja, vjerojatnost igra važnu ulogu u analizi podataka i procjeni mogućnosti. U svijetu koji je sve više okrenut podacima, sposobnost razumijevanja i primjene vjerojatnosti pomaže pojedincima i organizacijama da optimiziraju procese, minimiziraju rizike i unaprijede donošenje odluka u neizvjesnim situacijama.

U tehnološkim područjima, poput strojne inteligencije i računalnih znanosti, vjerojatnost se koristi za izgradnju modela predviđanja i analiza ponašanja sustava. Algoritmi koji koriste napredne vjerojatnosne metode omogućuju strojevima da uče iz podataka i predviđaju buduće događaje, što je od vitalnog značaja u razvoju umjetne inteligencije. U kombinaciji s teorijom statistike, vjerojatnost omogućava modeliranje složenih sustava, čime pomaže u razumijevanju i upravljanju izazovima u znanosti, industriji i svakodnevnom životu.

Literatura

[1] Pierre-Simon Laplace, *Theorie analytique des probabilites*, Bachelier, Paris, 1814.

[2] John E. Freund & Ronald E. Morris, *Mathematical Statistics: A First Course*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.

[3] Charles M. Grinstead & J. Laurie Snell, *Introduction to Probability*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1997.

[4] Andrey N. Kolmogorov, *Foundations of the Theory of Probability*, Chelsea Publishing Company, New York, 1933.

[5] J. N. Kapur & H. K. Kesavan, *Entropies and Information Measures*, Academic Press, San Diego, California, 1992.

[6] S. William, *Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Wiley, Hoboken, New Jersey, 2009.

[7] Sheldon M. Ross, *Introduction to Probability Models*, Academic Press, San Diego, California, 2009.

[8] Jingchen Chen, *Geometric Probability: A Review*, Springer, New York, 2002.

[9] Kai Lai Chung, *A Course in Probability Theory*, Academic Press, San Diego, California, 2001.

[10] Neven Elezović, *Diskretna vjerojatnost*, Element, Zagreb, 2007.

[11] Yates, R. D., Goodman, D. J., *Probability and Stochastic Processes A Friendly Introduction for Electrical and Computer Engineers*, Wiley, Hoboken, New Jersey, 2004.

[12] Sarapa, N., *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

Sažetak i ključne riječi

Ovaj rad obrađuje klasičnu definiciju vjerojatnosti i njezinu primjenu u inženjerstvu. Objašnjeni su osnovni pojmovi ishoda i događaja te je definirana klasična vjerojatnost, naglašavajući njezinu primjenu u situacijama gdje su svi ishodi jednako vjerojatni. Također je detaljno prikazana važnost i upotreba metoda prebrojavanja, poput permutacija i kombinacija, u izračunu vjerojatnosti. U radu je analizirana primjena ovih metoda u inženjerskim problemima, posebno pri pouzdanosti sustava. Na kraju, obrađene su alternativne definicije vjerojatnosti, poput frekvencijskog i subjektivnog pristupa, te je objašnjena njihova uloga u proširenju klasičnog koncepta vjerojatnosti.

Ključne riječi: klasična definicija vjerojatnosti, metode prebrojavanja

Summary and key words

This paper addresses the classical definition of probability and its application in engineering. The basic concepts of outcomes and events are explained, and classical probability is defined, emphasizing its use in situations where all outcomes are equally likely. The importance and application of counting methods, such as permutations and combinations, are also presented in detail for calculating probability. The paper analyzes the application of these methods in engineering problems, particularly in system reliability. Finally, alternative definitions of probability, such as the frequentist and subjective approaches, are discussed, highlighting their role in expanding the classical concept of probability.

Keywords: Classical definition of probability, Counting methods