Primjena Laplaceovih transformacija na rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi

Višković, Karlo

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

PRIMJENA LAPLACEOVIH TRANSFORMACIJA NA RJEŠAVANJE PARCIJALNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI

Rijeka, rujan 2024.

Karlo Višković
0069076201

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

PRIMJENA LAPLACEOVIH TRANSFORMACIJA NA RJEŠAVANJE PARCIJALNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Rijeka, rujan 2024.

Karlo Višković
0069076201

SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET
POVJERENSTVO ZA ZAVRŠNE ISPITE

Rijeka, 29. kolovoza 2024.

Zavod:	**Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike**
Predmet:	**Inženjerska matematika ET**
Grana:	**1.01.07 primijenjena matematika i matematičko modeliranje**

ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik:	**Karlo Višković (0069076201)**
Studij:	Sveučilišni prijediplomski studij elektrotehnike

Zadatak:	**Primjena Laplaceovih transformacija na rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi**

Opis zadatka:

U radu je potrebno definirati Laplaceovu transformaciju i opisati njena svojstva, s posebnim naglaskom na primjenu Laplaceovih transformacija kod rješavanja diferencijalnih jednadžbi. U drugom dijelu rada potrebno je definirati pojam parcijalne diferencijalne jednadžbe i navesti njihove različite klasifikacije. Pritom je potrebno definirati početni i rubni problem te na nekoliko primjera objasniti fizikalnu interpretaciju različitih početnih i rubnih uvjeta. U završnom dijelu rada potrebno je tehniku Laplaceovih transformacija primijeniti na konkretnom primjeru rješavanja parcijalne diferencijalne jednadžbe.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Zadatak uručen pristupniku: 20. ožujka 2024.

Mentor:

izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Predsjednik povjerenstva za završni ispit:

prof. dr. sc. Dubravko Franković

IZJAVA

Sukladno članku 7. Stavku 1. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku sveučilišnih prijediplomskih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 4. travnja 2023., izjavljujem da sam samostalno izradio završni rad prema zadatku preuzetom dana 20. ožujka 2024.

Rijeka, 30. kolovoza 2024.

Karlo Višković

Želim izraziti svoju duboku zahvalnost svojim roditeljima, čija je neizmjerna podrška, ljubav i ohrabrenje omogućila da ostvarim ovaj uspjeh. Njihova vjera u mene bila je moj najveći izvor snage.

Također, iskreno zahvaljujem svom mentoru, izv. prof. dr. sc. Ivanu Dražiću, na nesebičnom dijeljenju znanja, strpljenju i vodstvu tijekom ovog rada. Hvala vam što ste vjerovali u mene i bili uz mene kroz sve izazove.

Sadržaj

1. Uvod

Parcijalne diferencijalne jednadžbe koriste se za modeliranje raznih fizikalnih i inženjerskih problema, primjerice kod problema toplinske vodljivosti, problema elektromagnetizama ili pak kod modela dinamike fluida. Ipak, unatoč njihovoj širokoj primjeni, s matematičkog gledišta analiza parcijalnih diferencijalnih jednadžbi izuzetno je složena i iziskuje upotrebu naprednih matematičkih alata.

Kod rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi ne postoji neka univerzalna metoda koja se može primijeniti u svim slučajevima. Štoviše, analitičko rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u većini slučajeva i nije moguće, a u slučajevima koji dozvoljavaju analitičko rješavanje vrlo često se koristi metoda integralnih transformacija od kojih je najčešća Laplaceova transformacija.

Laplaceova transformacija nazvana je po francuskom matematičaru i astronomu Laplaceu. Pierre-Simon Laplace (1749.-1827.) bio je jedan od najvažnijih francuskih znanstvenika svoga vremena. Tako su njegova djela, poput *"Traité de mécanique céleste"* (Rasprava o nebeskoj mehanici) značajno pridonijela razumijevanju gibanja nebeskih tijela. Laplace je napravio značajne doprinosne u statistici i teoriji vjerojatnosti, objavivši rad *"Théorie analytique des probabilités"* (Analitička teorija vjerojatnosti) 1812. godine. U tom djelu Laplace je definirao osnovne principe vjerojatnosti, te razvio matematičke metode koje se i dan danas koriste u statistici i inženjerstvu. Laplaceova transformacija, koja potječe iz njegovih radova o analizi diferencijalnih i integralnih jednadžbi, našla je široku primjenu u matematici i inženjerstvu te predstavlja osnovu ovog rada.

Laplaceova transformacija je metoda koja omogućuje pretvaranje diferencijalnih jednadžbi u algebarske, što uvelike olakšava njihovo rješavanje. Svakako treba istaknuti da je taj pristup omogućio inženjerima učinkovito rješavanje problema u električnim sustavima, ali i u mnogim drugim područjima.

Cilj ovog rada je istražiti moguću primjenu Laplaceove transformacije na rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, pri čemu će biti navedena sva njihova bitna svojstva. Također će biti obrađeni i osnovni pojmovi iz područja običnih i parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

Rad je organiziran kroz više poglavlja. U idućem poglavlju obrađuju se osnovna svojstva i problem egzistencije Laplaceove transformacije. Treće poglavlje posvećeno je teorijskim osnovama običnih diferencijalnih jednadžbi te nekim metodama njihova rješavanja. U četvrtom poglavlju prikazana je primjena Laplaceove transformacije na rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi, uz konkretan primjer primjene u elektrotehnici. Peto poglavlje posvećeno je teorijskim osnovama parcijalnih diferencijalnih jednadžbi te njihovoj klasifikaciji, dok se u šestom poglavlju prikazuju konkretni primjeri primjene Laplaceove transformacije na parcijalne diferencijalne jednadžbe prvog i drugog reda.

2. Laplaceova transformacija

Povijesno gledano, porijeklo integralnih transformacija, uključujući Laplaceovu transformaciju, pronalazi se u radu Pierrea-Simona Laplacea (1749.-1827.) pod nazivom *Théorie analytique des probabilités* (Analitička teorija vjerojatnosti), objavljenom 1812. godine. Iako treba istaknuti da je još Leonhard Euler (1707.-1783.) koristio integral oblika

$$\int X(x)e^{ax}\,dx, \tag{2.1}$$

za rješavanje diferencijalnih jednadžbi, a upravo taj integral Laplace koristi kao bazu za svoje integralne transformacije. [1]

Laplaceova transformacija je danas izuzetno važan inženjerski alat i koristi se za rješavanje mnogih problema u matematici, fizici i elektrotehnici, ali i u drugim područjima znanosti. Ta transformacija omogućuje jednostavnije rješavanje diferencijalnih jednadžbi prevođenjem problema iz vremenske t-domene, u kompleksnu w-domenu. U novoj domeni diferencijalne jednadžbe postaju znatno jednostavnije, a često i čisto algebarske jednadžbe.

U sljedećim poglavljima dati ćemo matematički strogu definiciju Laplaceove transformacije, navesti i dokazati njena temeljna svojstva te na nekoliko primjera pokazati kako se provodi transformacija. U nastavku se uglavnom koristimo izvorom [2].

Definirajmo najprije općenitu integralnu transformaciju.

Definicija 2.1. *Neka je $g(t)$ integrabilna funkcija varijable t na intervalu (α, β), gdje su α i β realni brojevi takvi da je $\alpha < \beta$, a jezgra transformacije $K(w,t)$ funkcija varijable t i parametra w. Tada integralna transformacija poprima izraz oblika*

$$\mathcal{T}\{g(t)\} = G(w) = \int_{\alpha}^{\beta} K(w,t)g(t)dt, \tag{2.2}$$

gdje $G(w)$ predstavlja sliku funkcije $g(t)$, koju u tom kontekstu nazivamo original.

Iz dane definicije možemo vidjeti da je integralna transformacija definirana jezgrom i granicama integracije. U sljedećoj tablici navodimo neke češće korištene jezgre i pripadne granice integracije.

Sada možemo formalno definirati Laplaceovu transformaciju.

Definicija 2.2. *Neka je g(t) funkcija ovisna o varijabli t, pri čemu je $t > 0$. Tada je njena Laplaceova transformacija $F(w)$ definirana kao izraz oblika:*

$$F(w) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_{0}^{\infty} g(t)e^{-wt}dt. \tag{2.3}$$

Naziv transformacije	Oznaka	α	β	Jezgra $K(w,t)$
Laplaceova	$\mathcal{L}$	0	∞	e^{-wt}
Fourierova	$\mathcal{F}$	$-\infty$	∞	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{iwt}$
Mellinova	$\mathcal{M}$	0	∞	t^{w-1}

Tablica 2.1. Najčešće korištene integralne transformacije

Napomenimo da se u primjenama Laplaceove transformacije varijabla slike w često označava s s te se u skladu s time i domena slike naziva s-domena.

2.1. Laplaceove transformacije elementarnih funkcija

Nakon upoznavanja sa definicijom Laplaceove transformacije, u sljedećim primjerima prikazat ćemo Laplaceove transformacije nekih elementarnih funkcija.

Primjer 2.1. *Odredimo Laplaceovu transformaciju funkcije $f(t) = 1$. Direktnim uvrštavanjem i integracijom slijedi:*

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-wt}dt = -\frac{1}{w}e^{-wt}\Big|_0^\infty = \frac{1}{w}. \tag{2.4}$$

Primjer 2.2. *Odredimo Laplaceovu transformaciju eksponencijalne funkcije $g(t) = e^t$ koristeći se definicijom Laplaceove transformacije.*

Direktnim uvrštavanjem i integracijom slijedi:

$$\mathcal{L}\left\{e^t\right\} = \int_0^\infty e^t e^{-wt}dt = \int_0^\infty e^{(1-w)t}dt = \frac{1}{1-w}e^{(1-w)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{w-1}. \tag{2.5}$$

Primjer 2.3. *Odredimo Laplaceovu transformaciju funkcije $h(t) = t$ koristeći se definicijom Laplaceove transformacije.*

Uvrštavanjem funkcije $h(t)$ u definiciju Laplaceove transformacije dobivamo integral oblika:

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty te^{-wt}dt. \tag{2.6}$$

Ovaj integral rješava se pomoću metode parcijalne integracije, za koju koristimo sljedeću formulu

$$\int_0^\infty udv = uv\Big|_0^\infty - \int_0^\infty vdu. \tag{2.7}$$

Odgovarajući odabir varijabli u i v nužan je za rješavanje zadanog integrala. U ovom slučaju koristimo sljedeće:

$$u = t, \qquad dv = e^{-wt}dt \tag{2.8}$$

odnosno,

$$du = dt, \qquad v = -\frac{e^{-wt}}{w}. \tag{2.9}$$

Sada je:

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty te^{-wt}dt = \frac{-te^{-wt}}{w}\bigg|_0^\infty + \frac{1}{w}\int_0^\infty e^{-wt}dt = \frac{1}{w^2}. \tag{2.10}$$

Primjer 2.4. *Odredimo Laplaceovu transformaciju funkcije $f(t) = \sin(t)$ koristeći se definicijom Laplaceove transformacije.*

Uvrštavanjem funkcije $f(t)$ u definiciju Laplaceove transformacije dobivamo integral oblika:

$$\mathcal{L}\{\sin(t)\} = \int_0^\infty \sin(t)e^{-wt}dt \tag{2.11}$$

Ovaj integral ćemo također riješiti metodom parcijalne integracije, korištenjem formule iz izraza (2.7). *U ovom slučaju koristimo odabir varijabli u i v kao što je prikazano u sljedećem izrazu:*

$$u = \sin(t), \qquad dv = e^{-wt}dt, \tag{2.12}$$

odnosno,

$$du = \cos(t)dt, \qquad v = \frac{-e^{-wt}}{w}. \tag{2.13}$$

Integral sada poprima sljedeći oblik:

$$\int_0^\infty e^{-wt}\sin(t) = -\frac{e^{-wt}\sin(t)}{w}\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{e^{-wt}\cos(t)}{w}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-wt}\cos(t)}{w}dt. \tag{2.14}$$

Integral s desne strane ovog izraza ponovno rješavamo metodom parcijalne integracije, uzevši:

$$u = \cos(t), \qquad dv = \frac{e^{-wt}}{w}dt, \tag{2.15}$$

odnosno,

$$du = -\sin(t)dt, \qquad v = -\frac{e^{-wt}}{w^2}. \tag{2.16}$$

Sada dobivamo:

$$\int_0^\infty e^{-wt}\sin(t)dt = -\frac{e^{-wt}\cos(t)}{w^2}\bigg|_0^\infty - \frac{1}{w^2}\int_0^\infty e^{-wt}\sin(t)dt = \frac{1}{w^2} - \frac{1}{w^2}\int_0^\infty e^{-wt}\sin(t)dt. \tag{2.17}$$

Izraz (2.17) *može se promatrati kao algebarska jednadžba s varijablom*

$$\int_0^\infty e^{-wt}\sin(t)dt, \tag{2.18}$$

a njeno je rješenje dano s:

$$\int_0^\infty e^{-wt}\sin(t)dt = \frac{1}{w^2+1}, \tag{2.19}$$

pa je

$$\mathcal{L}\{\sin(t)\} = \frac{1}{w^2+1}. \tag{2.20}$$

2.2. Egzistencija Laplaceove transformacije

Uvjeti za egzistenciju Laplaceove transformacije proizlaze iz određenih uvjeta koje funkcija $g(t)$ mora zadovoljavati da bi njena Laplaceova transformacija bila definirana, odnosno da pripadni integral konvergira.

Kod Laplaceovih transformacija najčešće se koristi t-domena kojom se modelira vrijeme, a iz te činjenice proizlazi sljedeći uvjet:

$$g(t) = 0,\ \forall t < 0. \tag{2.21}$$

Prema tome, Laplaceova transformacija nepravi je integral oblika:

$$\lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta g(t)e^{-wt}dt. \tag{2.22}$$

Integral iz izraza (2.22) konvergira, ukoliko navedeni limes postoji, odnosno ako poprima konačnu vrijednost. Međutim, kako se unutar limesa pojavljuje integral, najprije treba osigurati integrabilnost funkcije koja se integrira. To postižemo ako nametnemo uvjet da je funkcija $g(t)$ neprekidna. Uvjet neprekidnosti može se oslabiti zahtjevom da se radi o funkciji s prebrojivim brojem prekida prve vrste na intervalu od $[0, \infty]$.

Postojanje pripadnog limesa, odnosno konvergencija nepravog integrala osigurana je sljedećom propozicijom.

Propozicija 2.1 (Konvergencija nepravog integrala)**.** *Neka su zadane funkcije h i l definirane na intervalu $[b, \infty\rangle$ takve da vrijedi*

$$|h(t)| \leq l(t), \tag{2.23}$$

za sve $t \in [b, \infty\rangle$. Tada konvergencija integrala

$$\int_b^\infty h(t)dt, \tag{2.24}$$

povlači konvergenciju integrala

$$\int_{b}^{\infty} l(t)dt. \tag{2.25}$$

Kriterij iz izraza (2.23) nameće uvođenje posebne klase funkcija, koje nazivamo funkcije eksponencijalnoga rasta.

Definicija 2.3. *Za funkciju g kažemo da je funkcija eksponencijalnog rasta ako postoje konstante $H > 0$ i $\alpha > 0$ takve da vrijedi*

$$|g(t)| < He^{\alpha t}, \tag{2.26}$$

za sve t iz domene funkcije g.

Egzistencija Laplaceove transformacije sada se može izreći slijedećim teoremom.

Teorem 2.1 (Egzistencija Laplaceove transformacije)**.** *Laplaceova transformacija funkcije $t \mapsto g(t)$ postoji ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:*

1. *Funkcija $g(t)$ je po dijelovima neprekidna, s najviše prebrojivo prekida prve vrste.*
2. *Funkcija $g(t)$ je funkcija eksponencijalnog rasta.*

Dokaz. Prvi uvjet osigurava integrabilnost podintegralne funkcije u izrazu (2.3). Pokažimo sada da drugo svojstvo osigurava konvergenciju nepravog integrala.

Zbog svojstva eksponencijalnog rasta postoji funkcija $H(t) = He^{at}$ za koju vrijedi

$$|g(t)| < He^{at}, \tag{2.27}$$

pa imamo:

$$|g(t)e^{-wt}| \leq |g(t)||e^{-wt}| \leq He^{at}e^{-wt} \leq He^{(a-w)t}. \tag{2.28}$$

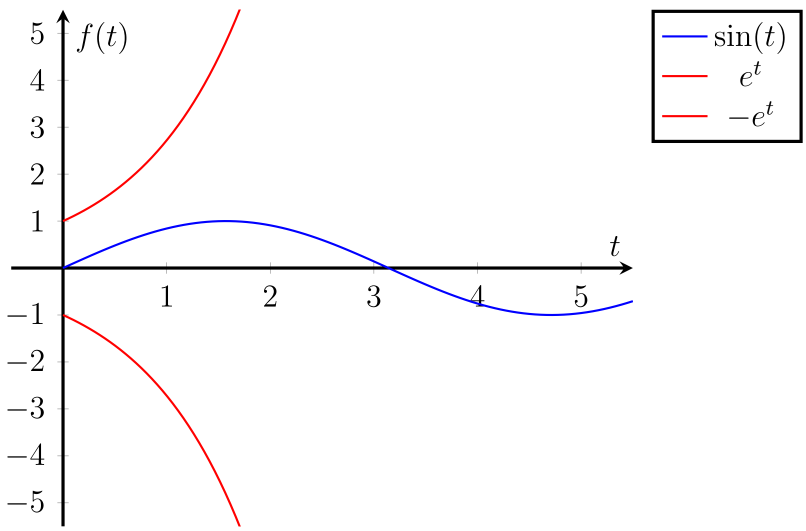
Sada je

$$\int_{0}^{\infty} He^{(a-w)t}dt = \frac{H}{a-w}e^{(a-w)t}\bigg|_{0}^{\infty} = \frac{H}{w-a}, \tag{2.29}$$

za $a - w \leq 0$, tj. za $w \geq a$. Prema kriteriju konvergencije nepravog integrala, konvergencija ovog integrala povlači konvergenciju definicijskog integrala Laplaceove transformacije na domeni $w \geq a$. □

Pozivajući se na izraz (2.26) može se zaključiti koja funkcija spada pod kategoriju funkcija eksponencijalnog rasta, a koja funkcija ne spada. Intuitivno, funkcija $g(t)$, je eksponencijalnoga rasta ukoliko raste "sporije" od funkcije $h(t) = e^{\alpha t}$ za $t > 0$.

Primjer funkcije eksponencijalnog rasta bile bi funkcije $t \mapsto \sin(t)$ ili $t \mapsto \cos(t)$, dok bi funkcije koje ne spadaju pod kategoriju eksponencijalnog rasta bile $t \mapsto t^t$ i $t \mapsto e^{t^3}$. Navedene funkcije "brže" rastu, te ne spadaju u klasu funkcija eksponencijalnog rasta. Zadovoljavanje svojstva eksponencijalnog rasta za funkciju sinus prikazano je na sljedećoj slici.



Slika 2.1. Svojstvo eksponencijalnog rasta funkcije sinus. Izvor: Izrada autora

2.3. Osnovna svojstva Laplaceove transformacije

U ovom poglavlju navodimo i dokazujemo najvažnija svojstva Laplaceove transformacije. Prvi teorem prikazuje svojstvo linearnosti Laplaceove transformacije.

Teorem 2.2 (Linearnost integralne transformacije)**.** *Neka su zadane funkcije $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ te neka je $\mathcal{L}$ Laplaceova transformacija. Vrijedi:*

$$\mathcal{L}\{c_1 g(t) + c_2 h(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{g(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{h(t)\}, \tag{2.30}$$

pri čemu su $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ proizvoljne konstante.

Dokaz. Iz definicije Laplaceove transformacije može se zaključiti da se radi o nepravom integralu, dakle svojstvo linearnosti proizlazi iz linearnosti samog integrala.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{c_1 g(t) + c_2 h(t)\} &= \int\limits_0^\infty e^{-st}(c_1 g(t) + c_2 h(t))dt \\ = c_1 \int\limits_0^\infty e^{-st} g(t)dt + c_2 \int\limits_0^\infty e^{-st} h(t)dt &= c_1 \mathcal{L}\{g(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{h(t)\}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

□

Pokažimo sada kako se primjenjuje ovo svojstvo.

Primjer 2.5. *Odredimo Laplaceovu transformaciju funkcije*

$$f(t) = 2e^t + 3\sin t. \tag{2.32}$$

Koristeći svojstvo linearnosti te primjere 2.2 i 2.4 dobivamo:

$$\mathcal{L}\left\{2e^t + 3\sin t\right\} = 2\mathcal{L}\left\{e^t\right\} + 3\mathcal{L}\left\{\sin t\right\} = \frac{2}{w-1} + \frac{3}{w^2+1}. \tag{2.33}$$

Sljedeći teorem omogućava proširivanje transformacija iz prethodnih primjera na širu klasu funkcija.

Teorem 2.3 (Teorem sličnosti)**.** *Neka je $f(t)$ funkcija koja zadovoljava uvjete za postojanje Laplaceove transformacije, a $F(w)$ njena Laplaceova transformacija. Tada za realnu konstantu $a > 0$ vrijedi*

$$\mathcal{L}\left\{f(at)\right\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{w}{a}\right). \tag{2.34}$$

Dokaz. Po definiciji Laplaceove transformacije imamo

$$\mathcal{L}\left\{f(at)\right\} = \int\limits_0^\infty f(at)e^{-wt}dt. \tag{2.35}$$

Uvođenjem supstitucije $at = u$, tj. $adt = du$ dobivamo

$$\mathcal{L}\left\{f(at)\right\} = \int\limits_0^\infty f(u)e^{-\frac{wu}{a}}\frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int\limits_0^\infty f(u)e^{-u\frac{w}{a}}du = \frac{1}{a}F\left(\frac{w}{a}\right). \tag{2.36}$$

□

Pokažimo sada na primjeru upotrebu teorema sličnosti.

Primjer 2.6. *Pokažimo korištenjem teorema sličnosti da je*

$$\mathcal{L}\left\{\sin(at)\right\} = \frac{a}{a^2+w^2}. \tag{2.37}$$

Prema teoremu sličnosti i rezultatu iz primjera 2.4 vrijedi:

$$\mathcal{L}\left\{\sin(at)\right\} = \frac{1}{a}\frac{1}{\left(\frac{w}{a}\right)^2+1} = \frac{a}{a^2+w^2}. \tag{2.38}$$

Sada ćemo navesti dva često korištena svojstva prilikom traženja Laplaceovih slika.

Teorem 2.4 (Teorem o pomaku u slici)**.** *Ako je $\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} = G(w)$, tada je:*

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}g(t)\right\} = G(w-a), \tag{2.39}$$

pri čemu je a konstanta.

Dokaz. Iz definicije Laplaceove transformacije dobivamo

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}g(t)\right\} = \int_0^\infty e^{at}g(t)e^{-wt}dt = \int_0^\infty e^{-(w-a)t}g(t)dt = G(w-a), \tag{2.40}$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Pokažimo sada kako se koristi ovaj teorem.

Primjer 2.7. *Odredimo Laplaceovu transformacije funkcije*

$$f(t) = e^{2t}\sin(t). \tag{2.41}$$

Primjenom rezultata iz primjera 2.4 i teorema o pomaku u slici, direktnim uvrštavanjem slijedi:

$$\mathcal{L}\left\{e^{2t}\sin(t)\right\} = \frac{1}{(w-2)^2+1}. \tag{2.42}$$

Sljedeće svojstvo korisno je pri određivanju Laplaceove transformacije funkcija koje u sebi sadrže potenciju nezavisne varijable, odnosno funkciju $t \mapsto t^n$.

Teorem 2.5 (Teorem o derivaciji slike)**.** *Ako je $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(w)$, tada je:*

$$\mathcal{L}\{t^n g(t)\} = (-1)^n G^n(w), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.43}$$

Dokaz. Derivacijom funkcije

$$G(w) = \int_0^\infty g(t)e^{-wt}dt, \tag{2.44}$$

po varijabli w dolazi se do sljedećeg izraza:

$$G'(w) = -\int_0^\infty tg(t)e^{-wt}dt = -\mathcal{L}\{tg(t)\}. \tag{2.45}$$

Daljnjim deriviranjem izraza (2.45) dolazimo do tražene tvrdnje. □

Pokažimo sada primjenu ovog teorema.

Primjer 2.8. *Odredimo Laplaceovu transformacije funkcije*

$$f(t) = t^2\sin(t). \tag{2.46}$$

Korištenjem rezultata iz primjera (2.4) *i teorema o derivaciji slike, neposrednim uvrštavanjem slijedi:*

$$\mathcal{L}\left\{t^2\sin(t)\right\} = (-1)^2\left(\frac{1}{w^2+1}\right)''. \tag{2.47}$$

Za dobivanje konačnog rješenja potrebna je druga derivacija funkcije

$$G(w) = \frac{1}{w^2 + 1}. \tag{2.48}$$

Vrijedi

$$G(w)' = -\frac{2w}{(w^2 + 1)^2}, \tag{2.49}$$

odnosno

$$G(w)'' = \frac{2(3w^2 - 1)}{(w^2 + 1)^3}. \tag{2.50}$$

Uvrštavanjem izraza (2.50) *u izraz* (2.47) *dolazimo do konačnog rješenja:*

$$\mathcal{L}\left\{t^2 \sin(t)\right\} = \frac{2(3w^2 - 1)}{(w^2 + 1)^3}. \tag{2.51}$$

Pokažimo sada kako se teorem o derivaciji slike koristi za određivanje Laplaceove transformacije potencije.

Primjer 2.9. *Odredimo Laplaceovu transformacije funkcije*

$$f(t) = t^n. \tag{2.52}$$

Ovaj rezultat ćemo dobiti ako u teorem o derivaciji slike uvrstimo da je $g(t) = 1$, pri čemu se služimo rezultatom iz primjera 2.1. Dobivamo:

$$\mathcal{L}\left\{t^n\right\} = (-1)^n \frac{d^n}{dw^n}\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{n!}{w^{n+1}}. \tag{2.53}$$

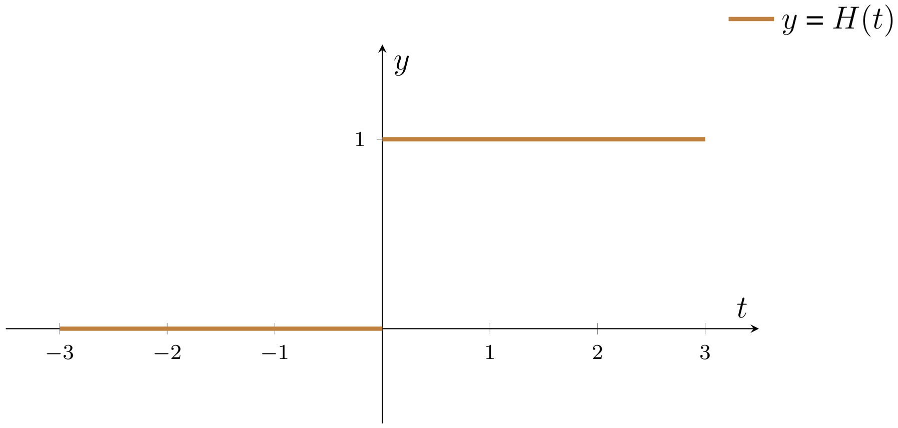
Prije nego što definiramo teorem o pomaku originala, potrebno je uvesti Heavisideovu funkciju.

Definicija 2.4. *Funkciju oblika:*

$$H(t) = \begin{cases} 0, & za\ t < 0 \\ 1, & za\ t \geq 0 \end{cases} \tag{2.54}$$

nazivamo Heavisideova ili step funkcija. Heavisideova funkcija često se označava i s $u(t)$, a grafički je prikazana na slici (2.2)

Laplaceova transformacija može se primijeniti na funkcije čija je vrijednost u negativnom djelu domene jednaka nuli. Umnožak Heavisideove funkcije $H(t)$ sa proizvoljnom funkcijom $g(t)$ rezultirati će novom funkcijom čija je vrijednost u negativnom djelu domene jednaka nuli, što proizlazi iz same definicije Heavisideove funkcije. Stoga, ukoliko želimo određenu funkciju ograničiti na određeni interval, možemo se poslužiti Heavisideovom funkcijom, te ćemo to demonstrirati u sljedećem primjeru.

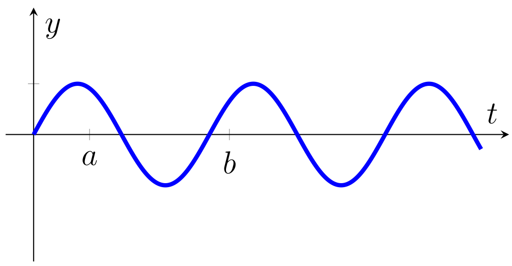


Slika 2.2. Grafički prikaz Heavisideove funkcije. Izvor: Izrada autora.

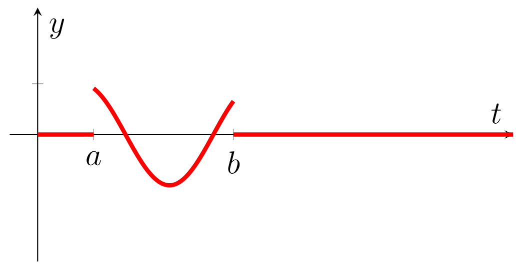
Primjer 2.10. *Neka je Funkcija $g(t)$ definirana je na cijeloj vremenskoj domeni. Vrijednosti funkcije*

$$g(t) \cdot (H(t-a) - H(t-b)), \tag{2.55}$$

podudaraju se sa vrijednostima funkcije $g(t)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, dok su izvan tog intervala jednake nuli. Ovaj postupak prikazan je na slici 2.3.



(a) $g(t) = \sin(2t)$



(b) $t \mapsto \sin(2t)\,(H(t-a) - H(t-b))$.

Slika 2.3. Ograničavanje djelovanja funkcije na interval $\langle a, b\rangle$. Izvor: Izrada autora.

Za određivanje Laplaceove transformacije funkcije koja je ograničena na određeni interval, koristi se sljedeći teorem.

Teorem 2.6 (Teorem o pomaku originala)**.** *Ako je $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(w)$, a $H(t)$ Heavisideova funkcija, tada je*

$$\mathcal{L}\{g(t-a)H(t-a)\} = e^{-aw}G(w). \tag{2.56}$$

Dokaz. Na temelju definicije Laplaceove transformacije i definicije Heavisideove funkcije, slijedi

$$\mathcal{L}\{g(t-a)H(t-a)\} = \int_0^\infty g(t-a)H(t-a)e^{-wt}dt = \int_a^\infty g(t-a)e^{-wt}dt. \tag{2.57}$$

Supstitucijom $p = t - a$ i $dt = dp$, slijedi:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{g(t-a)H(t-a)\right\} &= \int\limits_0^\infty g(p)e^{-w(p+a)}\,dp = \int\limits_0^\infty g(p)e^{-wp}e^{-aw}\,dp \\ &= e^{-aw}\int\limits_0^\infty g(p)e^{-wp}\,dp = e^{-aw}\,G(w),\end{aligned} \tag{2.58}$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Na sljedećem primjeru prikazat ćemo primjenu teorema o pomaku originala.

Primjer 2.11. *Odredimo Laplaceovu transformaciju funkcije $g(t) = sin(t)$, koja je ograničena na domeni $\langle \pi, 2\pi \rangle$. Odnosno promatramo funkciju $g(t)$ u kombinaciji sa Heavisidevom funkcijom $H(t)$.*

$$f(t) = \sin t\,(H(t-\pi) - H(t-2\pi)) = \sin t H(t-\pi) - \sin t H(t-2\pi). \tag{2.59}$$

Prema teoremu o pomaku originala, potrebno je uskladiti argument funkcije sinus, u skladu sa argumentom Heavisideove funkcije. Iz adicijskog teorema slijedi.

$$\sin(t) = sin(t-\pi+\pi) = \sin(t-\pi)\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \underbrace{\cos(t-\pi)\sin(\pi)}_{=0} = -\sin(t-\pi), \tag{2.60}$$

odnosno.

$$\sin(t) = sin(t-2\pi+2\pi) = \sin(t-2\pi)\underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} + \underbrace{\cos(t-2\pi)\sin(2\pi)}_{=0} = \sin(t-2\pi). \tag{2.61}$$

Funkcija $g(t)$ se sada može zapisati u sljedećem obliku.

$$g(t) = -\sin(t-\pi)H(t-\pi) - \sin(t-2\pi)H(t-2\pi). \tag{2.62}$$

Sada možemo odrediti Laplaceovu transformaciju funkcije $g(t)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} &= -\mathcal{L}\left\{\sin(t-\pi)H(t-\pi)\right\} - \mathcal{L}\left\{\sin(t-2\pi)H(t-2\pi)\right\} \\ &= -e^{-\pi w}\cdot\frac{1}{1+w^2} - e^{-2\pi w}\cdot\frac{1}{1+w^2},\end{aligned} \tag{2.63}$$

pri čemu je transformirana funkcije sinus izvedena u primjeru (2.6).

Pokažimo još kako se ovaj teorem primjenjuje na određivanje inverzne transformacije.

Primjer 2.12. *Odredimo original funkcije*

$$F(w) = \frac{e^{-2w}}{w-1}. \tag{2.64}$$

Izraz e^{-2w} upućuje na primjenu teorema o pomaku originala i govori nam da će se u originalnu pojaviti Heavisideova funkcija s argumentom $t-2$. Drugi dio funkcije je Laplaceova slika funkcije e^t izvedena u primjeru 2.2. Direktnom primjenom teorema o pomaku originala slijedi:

$$g(t) = H(t-2)e^{t-2}. \tag{2.65}$$

2.4. Tablica Laplaceovih transformacija

Postupkom opisanim u prethodnim primjerima, te korištenjem svih navedenih svojstava odredili smo Laplaceove transformacije najčešće korištenih funkcija koje su prikazane u sljedećoj tablici.

Tablica 2.2. Tablica Laplaceovih transformacija

Redni broj	$f(t)$	$F(w) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1.	1	$\frac{1}{w}$
2.	e^{at}	$\frac{1}{w-a}$
3.	t^n	$\frac{n!}{w^{n+1}}$
4.	$\sin(at)$	$\frac{a}{w^2+a^2}$
5.	$\cos(at)$	$\frac{w}{w^2+a^2}$
6.	$e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(w-a)^2+b^2}$
7.	$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{w-a}{(w-a)^2+b^2}$
8.	$t\sin(at)$	$\frac{2aw}{(w^2+a^2)^2}$
9.	$t\cos(at)$	$\frac{w^2-a^2}{(w^2+a^2)^2}$

Transformacije iz prvog i trećeg retka direktno su izvedene u primjerima 2.1 i 2.9. Transformacija iz četvrtog retka izvedena je u primjeru 2.6. Analognim postupkom dobile bi se transformacije iz drugog i petog retka, s time da se za drugi redak koristi teorem sličnosti i rezultat iz primjera 2.2, a za peti redak bi najprije trebalo izvesti transformaciju za funkciju kosinus što se radi postupkom opisanim u primjeru 2.4.

Transformacije iz šestog i sedmog retka direktna su posljedica transformacija iz četvrtog i petog retka te teorema o pomaku u slici, dok su transformacije iz osmog i devetog retka dobivene direktnom primjenom teorema o derivaciji slike.

Napomenimo da se po potrebi opisanim postupcima može proširiti i drugim funkcijama, ovisno o kontekstu primjene Laplaceovih transformacija.

2.5. Laplaceova transformacija derivacije

U sljedeća dva teorema prikazano je glavno svojstvo Laplaceove transformacije koje omogućuje pretvorbu običnih diferencijalnih jednadžbi u algebarske jednadžbe.

Teorem 2.7 (Teorem o slici derivacije)**.** *Ako je* $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(w)$ *tada je:*

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = -g(0) + wG(w). \tag{2.66}$$

Dokaz. Iz definicije Laplaceove transformacije slijedi

$$\mathcal{L}\{g'(t)dt\} = \int_0^\infty g'(t)e^{-wt}dt. \tag{2.67}$$

Ovaj integral rješavamo pomoću formule parcijalne integracije (2.7), pri čemu uzimamo:

$$u = e^{-wt}, \qquad dv = g'(t)dt, \tag{2.68}$$

odnosno,

$$du = -we^{-wt}dt, \qquad v = g(t). \tag{2.69}$$

Dobivamo:

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = \underbrace{e^{-wt}g(t)\Big|_0^\infty}_{=-g(0)} + w\int_0^\infty e^{-wt}g(t)dt = -g(0) + wG(w), \tag{2.70}$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Pokažimo sada primjerom kako se temeljem ovog teorema diferencijalna jednadžba pretvara u algebarsku jednadžbu.

Primjer 2.13. *Riješimo diferencijalnu jednadžbu*

$$y'(t) + 5y(t) = 0, \tag{2.71}$$

uz pretpostavku da je $y(0) = 1$.

Primijenimo li prethodni teorem na izraz (2.71) *dobivamo*

$$wY(w) - y(0) + 5Y(w) = 0. \tag{2.72}$$

Korištenjem početnog uvjeta $y(0) = 1$ izraz prelazi u

$$wY(w) - 1 + 5Y(w) = 0, \tag{2.73}$$

što je algebarska jednadžba po varijabli $Y(w)$ čije je rješenje dano s

$$Y(w) = \frac{1}{w+5}. \tag{2.74}$$

Inverznom Laplaceovom transformacijom, odnosno prema drugom retku u tablici 2.2 dolazi se do rješenja u vremenskoj t-domeni:

$$y(t) = e^{-5t}. \tag{2.75}$$

Svojstvo iz teorema 2.7 može se generalizirati na derivaciju n-tog reda, što će se prikazati u sljedećem teoremu.

Teorem 2.8 (Teorem o slici derivacije n-tog reda)**.** *Ako je $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(w)$, tada je:*

$$\mathcal{L}\left\{g^{(n)}(t)\right\} = w^n G(w) - \sum_{k=0}^{n-1} w^{n-k-1} g^{(k)}(0). \tag{2.76}$$

Dokaz. Dokaz provodimo metodom matematičke indukcije.

Baza indukcije ($n = 1$) Dokazujemo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$. U tom slučaju tvrdnja glasi

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = wG(w) - g(0), \tag{2.77}$$

što je tvrdnja teorema o slici derivacije pa je ova faza dokaza gotova.

Pretpostavka indukcije ($n = m$) Pretpostavljamo da tvrdnja vrijedi za $n = m$, pa imamo:

$$\mathcal{L}\left\{g^{(m)}(t)\right\} = w^m G(w) - \sum_{k=0}^{m-1} w^{m-k-1} g^{(k)}(0). \tag{2.78}$$

Korak indukcije ($n = m + 1$) Uvažavajući pretpostavku indukcije potrebno je dokazati da tvrdnja vrijedi i za $n = m + 1$. Koristeći se teoremom o slici derivacije dobivamo:

$$\mathcal{L}\left\{g^{(m+1)}(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{(g^{(m)})'(t)\right\} = s\mathcal{L}\left\{g^{(m)}(t)\right\} - g^{(m)}(0). \tag{2.79}$$

Uvrštavanjem izraza iz pretpostavke indukcije slijedi:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{g^{(m+1)}(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{(g^{(m)})'(t)\right\} = \\ w\left(w^m G(w) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} g^{(k)}(0)\right) - f^{(m)}(0) = \\ w^{m+1}G(w) - \sum_{k=0}^{m-1} w^{m-k} g^{(k)}(0) - g^{(m)}(0) = w^{m+1}G(w) - \sum_{k=0}^{m} w^{m-k} g^{(k)}(0),\end{aligned} \tag{2.80}$$

čime je tvrdnja dokazana.

□

Ovaj teorem se najčešće koristi za pretvaranje druge derivacije i ta je forma prikazana u sljedećem korolaru.

Korolar 2.1. *Ako je $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(w)$ tada je:*

$$\mathcal{L}\{g''(t)\} = -wg(0) - g'(0) + w^2G(w). \tag{2.81}$$

Pokažimo sada primjerom kako se koristi ovaj korolar

Primjer 2.14. *Transformirajmo Laplaceovom transformacijom diferencijalnu jednadžbu*

$$y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 0, \tag{2.82}$$

s početnim uvjetima $y(0) = -1, y'(0) = 6$ u algebarsku jednadžbu.

Primjenom teorema o slici prve i druge derivacije na (2.82) *dobivamo:*

$$w^2Y(w) - wY(0) - Y'(0) + 6wY(w) - 6Y(0) + 9Y(w) = 0. \tag{2.83}$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta, te sređivanjem jednadžbe slijedi

$$w^2Y(w) + 6wY(w) + 9Y(w) = -w, \tag{2.84}$$

što je algebarska jednadžba po varijabli $Y(w)$ čije je rješenje u w-domeni dano s

$$Y(w) = \frac{-w}{w^2 + 6w + 9}. \tag{2.85}$$

Iz navedenih primjera je jasno da Laplaceove transformacije postaju moćan alat za rješavanje diferencijalnih jednadžbi ako su one linearnog oblika i s konstantnim koeficijentima.

3. Obične diferencijalne jednadžbe

U ovom poglavlju definirat ćemo obične diferencijalne jednadžbe. Objasnit ćemo što je opće, a što partikularno rješenje, te što je početni problem. Također ćemo prikazati neke metode rješavanja običnih diferencijalnih jednadžbi. Posebno ćemo se posvetiti linearnim diferencijalnim jednadžbama s konstantnim koeficijentima i pokazati kako se na njih primjenjuje Laplaceova transformacija. Ovo je poglavlje bazirano na izvorima [3, 4, 5].

3.1. Definicija obične diferencijalne jednadžbe

Diferencijalna jednadžba je ona jednadžba koja u sebi sadrži jednu zavisnu varijablu i njene derivacije u odnosnu na jednu ili više nezavisnih varijabli. Ukoliko jednadžba sadrži samo jednu nezavisnu varijablu, tada se radi o običnoj diferencijalnoj jednadžbi (ODJ), međutim, ukoliko diferencijalna jednadžba u sebi sadrži više od jedne nezavisne varijable, tada se radi o parcijalnoj diferencijalnoj jednadžbi (PDJ). Red najveće derivacije koja se nalazi u diferencijalnoj jednadžbi određuje red diferencijalne jednadžbe, dok je stupanj diferencijalne jednadžbe eksponent potencije najviše derivacije koja se u jednadžbi pojavljuje.

U ovom se poglavlju bavimo isključivo običnim diferencijalnim jednadžbama koje formalno definiramo na sljedeći način.

Definicija 3.1. *Obična diferencijalna jednadžba n-tog reda dana je izrazom*

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{3.1}$$

gdje x predstavlja nezavisnu varijablu, a y zavisnu varijablu. $y^{(k)}$ je k-ta derivacija zavisne varijable.

U kontekstu običnih diferencijalnih jednadžbi, zavisna varijabla je varijabla čija se vrijednost određuje kao funkcija druge varijable, dok je nezavisna varijabla ona varijabla u odnosu na koju se funkcija definira. Na primjer, u jednadžbi

$$y' = f(x, y) \tag{3.2}$$

y je zavisna varijabla jer njezina vrijednost ovisi o x, dok je x nezavisna varijabla jer se funkcija y definira u odnosu na x.

Izraz (3.1) predstavlja implicitni oblik obične diferencijalne jednadžbe. Obične diferencijalne jednadžbe često se navode i u eksplicitnom (standardnom ili normalnom) obliku danom izrazom

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{3.3}$$

Diferencijalne jednadžbe često se klasificiraju kao linearne i nelinearne. U kontekstu običnih diferencijalnih jednadžbi, linearna jednadžba je ona u kojoj su zavisna varijabla y i sve njezine derivacije u linearnom odnosu. Tako se linearna diferencijalna jednadžba n-tog reda može se zapisati kao:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \tag{3.4}$$

gdje su $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_0(x)$ i $g(x)$ poznate funkcije nezavisne varijable x.

Obična diferencijalna jednadžba je nelinearna ako zavisna varijabla y ili bilo koja njezina derivacija ulazi u jednadžbu na nelinearan način. To može uključivati potenciranje, međusobno množenje ili pojavljivanje unutar nelinearnih funkcija. Tako je diferencijalna jednadžba oblika

$$y'' + 3y' + 2y = \sin x \tag{3.5}$$

linearna, dok je diferencijalna jednadžba oblika

$$y'' + y\,(y')^2 = e^y \tag{3.6}$$

nelinearna jednadžba. Istaknimo da su jednadžbe (3.5) i (3.6) jednadžbe drugog reda jer se u njima pojavljuje druga derivacija kao najviša derivacija. Obje jednadžbe su prvog stupnja jer se druga derivacija ne pojavljuje u obliku neke potencije.

3.2. Opće i partikularno rješenje obične diferencijalne jednadžbe

U ovom ćemo se dijelu baviti rješenjima obične diferencijalne jednadžbe. Promotrimo jednu jednostavnu diferencijalnu jednadžbu oblika

$$y' = 2x. \tag{3.7}$$

Očito je da funkcija $y = x^2 + 5$ zadovoljava ovu diferencijalnu jednadžbu pa je onda i njeno rješenje. Uočimo da to nije jedina funkcija koja zadovoljava ovu diferencijalnu jednadžbu. Tako je primjerice i funkcija $y = x^2 + 7$ rješenje prikazane diferencijalne jednadžbe. Svaka funkcija koja zadovoljava običnu diferencijalnu jednadžbu zvati će se partikularnim rješenjem diferencijalne jednadžbe.

Kod navedenog primjera lako je uočiti da su sve funkcije oblika $y = x^2 + C$ partikularna rješenja dane diferencijalne jednadžbe i razlikuju se samo za vrijednost konstante C. Kako taj izraz prikazuje sva partikularna rješenja zvati ćemo ga općim rješenjem obične diferencijalne jednadžbe.

Opće i partikularno rješenje formalno se definiraju na sljedeći način.

Definicija 3.2. *Za diferencijalnu jednadžbu n-tog reda opće rješenje je funkcija $y = y(x)$ koja zadovoljava diferencijalnu jednadžbu za sve vrijednosti proizvoljnih konstanti koje se u njoj pojavljuju.*

Definicija 3.3. *Partikularno rješenje obične diferencijalne jednadžbe je rješenje dobiveno iz općeg rješenja izborom određenih vrijednosti konstanti koje se pojavljuju u općem rješenju.*

3.3. Početni i rubni problem

U prethodnom poglavlju vidjeli smo da se partikularno rješenje obične diferencijalne jednadžbe dobije tako da se za vrijednost konstanti u općem rješenju uzmu neke konkretne vrijednosti. Da bi se te konkretne vrijednosti dobile nužno je uz jednadžbu nametnuti neke dodatne uvjete koje obično nazivamo početnim i rubnim uvjetima.

Početni uvjet definira vrijednost funkcije (i, ako je potrebno, njezinih derivacija) u početnoj točki vremenskog intervala na kojem se problem razmatra. Primjerice, za običnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda

$$y' = f(t, y) \tag{3.8}$$

početni uvjet je obično dan kao:

$$y(t_0) = y_0 \tag{3.9}$$

To znači da rješenje $y(t)$ mora proći kroz točku (t_0, y_0).

Rubni uvjet definira vrijednosti funkcije (i, ako je potrebno, njezinih derivacija) na rubovima intervala u kojem tražimo rješenje. Primjerice, za običnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda:

$$y'' = g(x, y, y') \tag{3.10}$$

rubni uvjeti mogu biti dani kao:

$$y(a) = \alpha \quad \text{i} \quad y(b) = \beta. \tag{3.11}$$

To znači da rješenje $y(x)$ mora zadovoljavati ove uvjete na krajevima intervala $[a, b]$.

Problem traženja partikularnog rješenja kada je uz običnu diferencijalnu jednadžbu zadan početni uvjet zove se Cauchyjev problem. Tako je primjerice s

$$\begin{cases} y' = -2y + 4, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{3.12}$$

zadan jedan Cauchyjev problem.

3.4. Rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi

Rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi može biti prilično složeno, ovisno o vrsti i stupnju jednadžbe. Linearne diferencijalne jednadžbe često se mogu riješiti analitičkim metodama, koristeći tehnike kao što su separacija varijabli i integrirajući faktor. Međutim, nelinearne ODE mogu biti znatno složenije i često zahtijevaju numeričke metode za pronalaženje aproksimativnih rješenja. Ovdje ćemo demonstrirati navedene tehnike analitičkog rješavanja, a kao što je u prethodnom poglavlju navedeno veliki značaj u rješavanju diferencijalnih jednadžbi imaju Laplaceove transformacije što ćemo demonstrirati u idućem poglavlju.

3.4.1. Metoda separacije varijabli

Jedna od često korištenih diferencijalnih jednadžbi je linearna diferencijalna jednadžba prvog reda s konstantnim koeficijentima. To je jednadžba oblika

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b, \tag{3.13}$$

odnosno

$$y' = -ay + b, \tag{3.14}$$

gdje su a i b dane konstante. Napomenimo da je ovo ujedno i jednadžba koja opisuje primjerice slobodan pad objekta u atmosferi.

Jednadžba iz izraza (3.13) može se riješiti metodom separacije varijabli. Naime, ova jednadžba može se prikazati u obliku

$$\frac{dy}{y-(b/a)} = -adt, \tag{3.15}$$

pri čemu lijeva strana jednadžbe ovisi samo o varijabli y, a desna samo o varijabli t. Integracijom izraza slijedi

$$\ln\left|y-\left(\frac{b}{a}\right)\right| = -at + C, \tag{3.16}$$

pa je opće rješenje jednadžbe (3.13)

$$y = \frac{b}{a} + ce^{-at} \tag{3.17}$$

gdje je $c = e^C$ proizvoljna konstanta.

Ukoliko se postave vrijednosti konstanti $a = 2$ i $b = 3$, tada jednadžba iz izraza (3.13) postaje

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 3, \tag{3.18}$$

a njeno opće rješenje je

$$y = \frac{3}{2} + ce^{-2t}. \tag{3.19}$$

3.4.2. Metoda integrirajućeg faktora

Zamjenom koeficijenata a i b iz jednadžbe (3.13) sa proizvoljnom funkcijom od t, dolazi se do općeg oblika linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda oblika

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \tag{3.20}$$

gdje p i t su dane funkcije nezavisne varijable t. U tom slučaju izraz (3.15) poprima oblik

$$\frac{dy}{y-(g(t)/p(t))} = -adt, \tag{3.21}$$

u kojem se s lijeve strane nalaze obje varijable te direktna integracija nije moguća.

Na ovaj tip jednadžbe primjenjuje se metoda integrirajućeg faktora koja uključuje množenje jednadžbe iz izraza (3.20) određenom funkcijom $\mu(t)$, odabranom tako da rezultirajuća jednadžba bude jednostavno integrabilna. Funkcija $\mu(t)$ se u ovom kontekstu naziva integrirajućim faktorom.

Radi jednostavnosti, najprije ćemo metodu prikazati na jednadžbi iz izraza (3.13).

Primjer 3.1. *U ovom primjeru prikazati će se metoda integrirajućeg faktora na primjeru*

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 3. \tag{3.22}$$

Prvi korak sastoji se od množenja zadane jednadžbe sa još neutvrđenom funkcijom $\mu(t)$. *Jednadžba poprima sljedeći oblik:*

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + 2\mu(t)y = 3\mu(t). \tag{3.23}$$

Može se primijetiti kako zadana jednadžba (3.23) *na svojoj lijevoj strani sadrži dva dijela, od kojih prvi dio jest dio rezultata derivacije produkta* $\mu(t)y$. *Stoga se funkcija* $\mu(t)$ *može odrediti na način da lijeva strana jednadžbe* (3.23) *postaje derivacija izraza* $\mu(t)y$. *Ukoliko se usporedi lijeva strana jednadžbe* (3.23) *s formulom za derivaciju umnoška*

$$\frac{d}{dt}\left(\mu(t)y\right) = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu(t)}{dt}y, \tag{3.24}$$

može se primijetiti kako prvi dio jednadžbe iz izraza (3.23) *jest identičan prvom dijelu iz izraza* (3.24)*, dok se drugi dio slaže samo ako vrijedi sljedeća jednakost:*

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = 2\mu(t). \tag{3.25}$$

Integralni faktor $\mu(t)$ *nalazi se u rješenju jednadžbe* (3.25)*, koja se može napisati u obliku*

$$\frac{d\mu(t)/dt}{\mu(t)} = 2, \tag{3.26}$$

što je ekvivalentno izrazu

$$\frac{d}{dt}\ln|\mu(t)| = 2. \tag{3.27}$$

Sada je

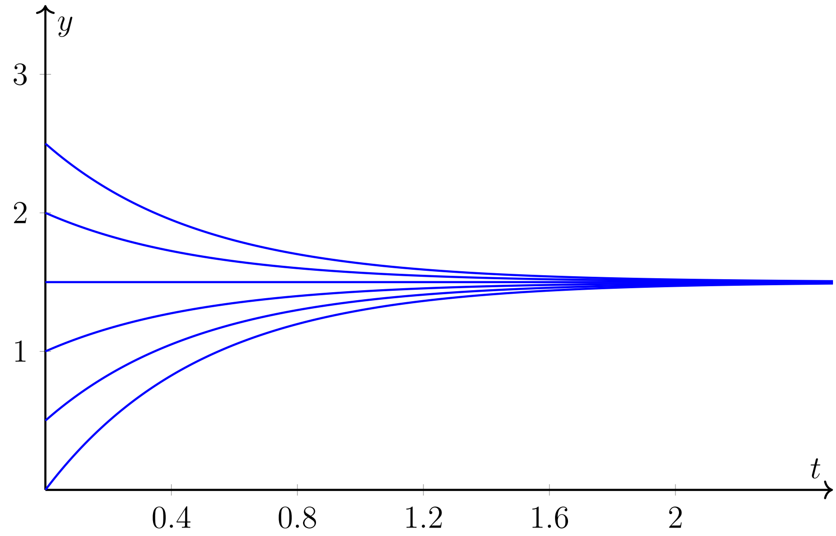
$$\ln|\mu(t)| = 2t + C, \tag{3.28}$$

odnosno

$$\mu(t) = ce^{2t}. \tag{3.29}$$

Funkcija $\mu(t)$ *dana u izrazu* (3.29) *je integrirajući faktor za jednadžbu* (3.22)*, pa množenjem jednadžbe integrirajućim faktorom* $\mu(t) = e^{2t}$*, uz konstantnu* $c = 1$ *dobivamo:*

$$e^{2t}\frac{dy}{dt} + 2e^{2t}y = 3e^{2t}. \tag{3.30}$$



Slika 3.1. Grafički prikaz općeg rješenja diferencijalne jednadžbe $y' + 2y = 3$. Izvor: Izrada autora

Lijeva strana jednadžbe (3.30) *je derivacija funkcije $e^{2t}y$, tako da jednadžba* (3.30) *postaje*

$$\frac{d}{dt}(e^{2t}y) = 3e^{2t}. \tag{3.31}$$

Integrirajući obije strane jednadžbe (3.31) *dolazi se do izraza*

$$e^{2t}y = \frac{3}{2}e^{2t} + c, \tag{3.32}$$

gdje c predstavlja proizvoljnu konstantu. Odnosno opće rješenje diferencijalne jendadžbe jest

$$y = \frac{3}{2} + ce^{-2t}. \tag{3.33}$$

Može se zamijetiti kako je rješenje jednadžbe (3.33) *jednako rješenju jednadžbe* (3.19)*. Rješenje jednadžbe* (3.33) *prikazano je grafički na slici 3.1, za nekoliko vrijednosti konstante c.*

Primijetimo da se postupak iz prethodnog primjera na potpuno isti način može primijeniti i na jednadžbu

$$\frac{dy}{dt} + ay = g(t), \tag{3.34}$$

pri čemu će se dobiti integrirajući faktor oblika

$$\mu(t) = e^{at}. \tag{3.35}$$

U sljedećem primjeru pokazati ćemo postupak rješavanja jednadžbe oblika (3.34).

Primjer 3.2. *Riješimo diferencijalnu jednadžbu*

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = 2 + t, \tag{3.36}$$

metodom integrirajućeg faktora.

Pomnožimo li jednadžbu (3.36) *sa integralnim faktorom oblika*

$$\mu(t) = e^{\frac{t}{2}} \tag{3.37}$$

dolazimo do jednadžbe

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{2}}y\right) = 2e^{\frac{t}{2}} + te^{\frac{t}{2}}. \tag{3.38}$$

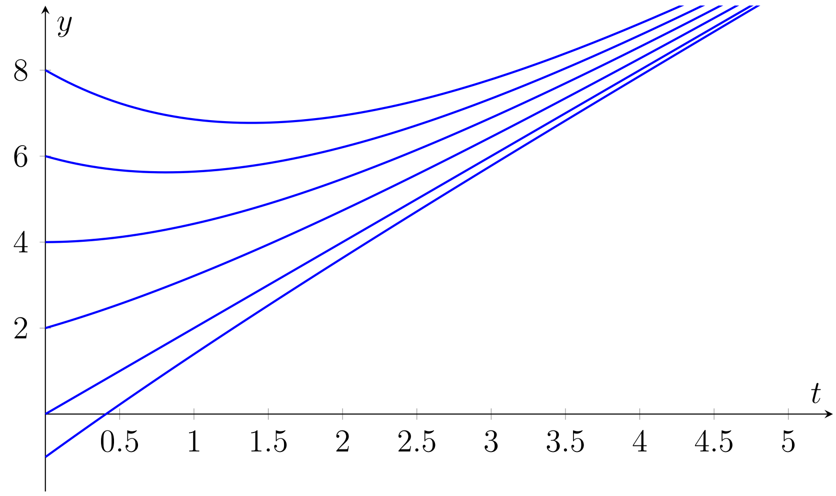
Integrirajući obje strane jednadžbe (3.38)*, pri čemu se na desnoj strani koristi metoda parcijalne integracije, dolazimo do izraza*

$$e^{\frac{t}{2}}y = 4e^{\frac{t}{2}} + 2te^{\frac{t}{2}} - 4e^{\frac{t}{2}} + c, \tag{3.39}$$

odnosno

$$y = 2t + ce^{-\frac{t}{2}}, \tag{3.40}$$

gdje je c *proizvoljna konstanta. Opće rješenje* (3.40) *prikazano je grafički na slici 3.2, za nekoliko vrijednosti konstante* c*.*



Slika 3.2. Grafički prikaz općeg rješenja diferencijalne jednadžbe $y' + \frac{1}{2}y = 2 + t$*. Izvor: Izrada autora*

4. Primjena Laplaceovih transformacija na rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi

U prethodnom poglavlju vidjeli smo kako analitičko rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi može biti izuzetno složeno i može zahtijevati primjenu različitih tehnika već kod jednadžbi prvog reda. U ovom ćemo poglavlju detaljnije objasniti metodu rješavanja običnih diferencijalnih jednadžbi korištenjem Laplaceovih transformacija, koja je ukratko objašnjena kroz primjer 2.13. Postupak koji ovdje objasnimo poslužit će nam kao uvod u glavni dio rada - rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi pomoću Laplaceovih transformacija. Ovo poglavlje obrađeno je prema izvoru [6].

Teorem o slici derivacije 2.8 koji je detaljno prikazan u 2. poglavlju otvara mogućnosti korištenja Laplaceove transformacije kao jedan od alata pri rješavanju običnih diferencijalnih jednadžbi. Generalna procedura koja se primjenjuje pri rješavanju običnih diferencijalnih jednadžbi ovom metodom, sastoji se od tri temeljna koraka:

1. Potrebno je primijeniti Laplaceovu transformaciju na obije strane jednadžbe, čime se dobije jednadžba u s-domeni koja je u pravilu algebarska.
2. Algebarsku jednadžbu iz prethodnog koraka potrebno je eksplicitno riješiti, pri čemu se dobiva funkcija $Y(s)$ koja predstavlja Laplaceovu sliku rješenja polazne jednadžbe.
3. Inverznom Laplaceovom transformacijom rješenje $Y(s)$ transformira se iz s domene u t domenu.

Pokažimo sada ovaj postupak na jednom primjeru.

Primjer 4.1. *Riješimo Cauchyjev problem:*

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 1, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Prvi korak opisanog postupka vodi do izraza

$$s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}(y) = \frac{1}{s}. \tag{4.2}$$

Drugim korakom dolazimo do funkcije $\mathcal{L}(y) = Y(s)$, koja ovdje poprima sljedeći oblik:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}. \tag{4.3}$$

Ovaj izraz, ne može se direktno transformirati u t domenu koristeći se tablicom Laplaceovih transformacija 2.2, već je potrebno izraz rastaviti na parcijalne razlomke, kao što je prikazano u sljedećem izrazu

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}. \tag{4.4}$$

Da bismo našli koeficijente A, B i C, množimo obje strane jednadžbe s zajedničkim nazivnikom $s(s^2+1)$. Dobivamo:

$$1 = A(s^2+1) + (Bs+C)s. \tag{4.5}$$

Grupiranjem članova po stupnjevima slijedi:

$$1 = (A+B)s^2 + Cs + A. \tag{4.6}$$

Uspoređivanjem koeficijenata s lijeve i desne strane dobivamo sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ C=0, \\ A=1, \end{cases} \tag{4.7}$$

čija su rješenja $A=1$, $B=-1$ i $C=0$.

Uvrštavanjem ovih konstantni u (4.4) *dolazimo do sljedećeg izraza:*

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}. \tag{4.8}$$

Sada se možemo vratiti u t - domenu. Uočljivo je da su oba člana u izrazu (4.8) *tablične transformacije te vrijedi:*

$$y(t) = 1 - \cos(t), \tag{4.9}$$

što je rješenje zadanog Cauchyijevog problema.

Iz ovog primjera je jasno da se tehnika Laplaceovih transformacija najbolje može iskoristiti na linearnim diferencijalnim jednadžbama s konstantnim koeficijentima.

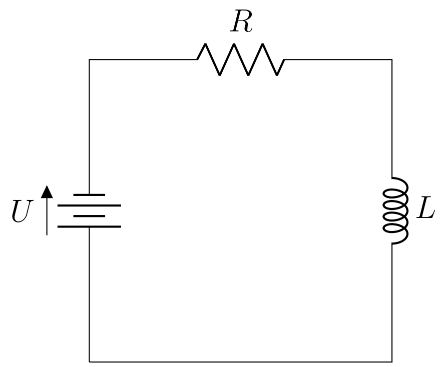
Pokažimo sada na jednom primjeru kako se opisani postupak koristi u elektrotehnici.

Primjer 4.2. *U ovom primjeru pokazat ćemo kako se dobiva struja u RL krugu. RL krug sastoji se od otpornika otpora R i zavojnice induktiviteta L, koji se međusobno nalaze u serijskom spoju, spojeni na izvor konstantnog napona U.*

Napon na otporniku R određuje se izrazom:

$$U_R(t) = i(t) \cdot R, \tag{4.10}$$

gdje $U_R(t)$ predstavlja napon na otporniku. $i(t)$ je struja koja teče kroz otpornik, dok R predstavlja iznos otpora.



Slika 4.1. Istosmjerni RL - krug. Izvor: Izrada autora

Napon na zavojnici L *određuje se izrazom:*

$$U_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}. \tag{4.11}$$

gdje $U_L(t)$ *predstavlja napon na zavojnici,* L *je induktivitet same zavojnice, dok izraz* $\frac{di(t)}{dt}$ *predstavlja prvu derivaciju struje u odnosu na vrijeme, odnosno fizikalno, promjenu struje u vremenu. Sami krug shematski je prikazan na sljedećoj slici.*

Koristeći drugi Kirchhoffov zakon, prema kojem je suma svih napona u zatvorenoj petlji jednaka nuli, dolazi se do sljedećeg izraza:

$$U = U_R(t) + U_L(t). \tag{4.12}$$

Uvrštavanjem izraza (4.10) *i* (4.11) *u izraz* (4.12) *dolazi se do obične diferencijalne jednadžbe koja opisuje struju u RL krugu:*

$$R \cdot i(t) + L\frac{di(t)}{dt} = U. \tag{4.13}$$

Primljenom Laplceove transformacije na (4.13), *dolazimo do sljedećeg izraza:*

$$L\left(sI(s) - i(0)\right) + RI(s) = \frac{U}{s}. \tag{4.14}$$

Pretpostavimo li početni uvjet $i(0) = 0$, *dobivamo:*

$$I(s)\left(Ls + R\right) = \frac{U}{s}, \tag{4.15}$$

odnosno

$$I(s) = \frac{U}{L} \cdot \frac{1}{s(s + \frac{R}{L})}. \tag{4.16}$$

Kao i u prethodnom primjeru, za dobivanje rješenja u t*-domeni potrebno je provesti rastav na parcijalne razlomke:*

$$\frac{1}{s\left(s + \frac{R}{L}\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{R}{L}}. \tag{4.17}$$

Da bismo našli koeficijente A i B množimo obje strane jednadžbe s $s\left(s+\frac{R}{L}\right)$ te dobivamo:

$$1 = A\left(s+\frac{R}{L}\right) + Bs. \tag{4.18}$$

Grupiranjem članova po stupnjevima slijedi:

$$1 = (A+B)s + A\frac{R}{L}. \tag{4.19}$$

Uspoređivanjem koeficijenata s lijeve i desne strane dobivamo sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A\frac{R}{L}=1, \end{cases} \tag{4.20}$$

čijim rješavanjem dobivamo da je $A=\frac{L}{R}$ i $B=-\frac{L}{R}$, odnosno:

$$\frac{1}{s\left(s+\frac{R}{L}\right)} = \frac{\frac{L}{R}}{s} - \frac{\frac{L}{R}}{s+\frac{R}{L}}. \tag{4.21}$$

Uvrštavanjem ovog izraza u (4.16) *slijedi:*

$$I(s) = \frac{U}{L}\cdot\frac{L}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right) = \frac{U}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right). \tag{4.22}$$

Sada na ovaj izraz primijenimo inverznu Laplaceoveu transformaciju, koristeći pritom tablicu transformacija. Dolazimo do sljedećeg izraza u vremenskoj t-domeni:

$$i(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \tag{4.23}$$

U sljedećem primjeru riješiti ćemo jednu specifičnu običnu diferencijalnu jednadžbu koju ćemo koristiti u idućim poglavljima.

Primjer 4.3. *Riješimo običnu diferencijalnu jednadžbu oblika:*

$$y'' - a^2 y = b, \tag{4.24}$$

gdje su a i b dane konstante različite od nule.

Primijenimo Laplaceovu transformaciju na obje strane jednadžbe (4.24)*. Dobivamo:*

$$s^2\mathcal{L}\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) - a^2\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{b}{s}, \tag{4.25}$$

odnosno

$$Y(s)(s^2 - a^2) = \frac{b}{s} + sy(0) + y'(0), \tag{4.26}$$

gdje je $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Rješavanjem ove algebarske jednadžbe po $Y(s)$ dobivamo izraz:

$$Y(s) = \frac{b}{s(s-a)(s+a)} + \frac{sy(0)}{(s-a)(s+a)} + \frac{y'(0)}{(s-a)(s+a)}. \tag{4.27}$$

Kako bi došli do funkcije $y(t)$ funkciju $Y(s)$ potrebno je rastaviti na parcijalne razlomke. Taj postupak radimo kako bi došli do tabličnih transformacija. Vrijedi:

$$\frac{1}{s(s-a)(s+a)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-a} + \frac{C}{s+a}. \tag{4.28}$$

Da bi pronašli koeficijente A, B i C, potrebno je pomnožiti obije strane jednadžbe sa zajedničkim nazivnikom $s(s-a)(s-b)$. Dobivamo:

$$1 = A(s-a)(s+a) + B(s+a)s + C(s-a)s. \tag{4.29}$$

Grupiranjem članova po stupnjevima slijedi:

$$1 = (A+B+C)\,s^2 + (Ba - Ca)\,s + \left(-Aa^2\right)s^0. \tag{4.30}$$

Uspoređivanjem koeficijenata s lijeve i desne strane dobivamo sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} A+B+C=0, \\ Ba-Ca=0, \\ -Aa^2=1. \end{cases} \tag{4.31}$$

Iz druge jednadžbe zaključujemo da je $B = C$, što uvrštavanjem u prvu jednadžbu daje

$$B = -\frac{1}{2}A. \tag{4.32}$$

Iz zadnje jednadžbe slijedi:

$$A = -\frac{1}{a^2}, \tag{4.33}$$

pa je

$$B = C = \frac{1}{2a^2}. \tag{4.34}$$

Uvrštavanjem ovih konstanti u (4.28) *dolazimo do rastava:*

$$\frac{1}{s(s-a)(s+a)} = -\frac{1}{a^2 s} + \frac{1}{2a^2(s-a)} + \frac{1}{2a^2(s+a)}. \tag{4.35}$$

Za drugi član izraza (4.27) *koristimo rastav:*

$$\frac{s}{(s-a)(s+a)} = \frac{D}{s-a} + \frac{E}{s+a}. \tag{4.36}$$

Množenjem obje strane jednadžbe zajedničkim nazivnikom $(s-a)(s+a)$ dobivamo:

$$s = D(s+a) + E(s-a). \tag{4.37}$$

Grupiranjem članova vrijedi:

$$s = s(D+E) + s^0(Da - Ea). \tag{4.38}$$

Uspoređivanjem koeficijenta s lijeve i desne strane dobivamo sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} D + E = 1, \\ D - E = 0, \end{cases} \tag{4.39}$$

čija su rješenja $D = \frac{1}{2}$, $E = \frac{1}{2}$. *Uvrštavanjem ovih konstanti u* (4.36) *dolazimo do rastava:*

$$\frac{s}{(s-a)(s+a)} = \frac{1}{2(s-a)} + \frac{1}{2(s+a)}. \tag{4.40}$$

Potrebno je još rastaviti zadnji član izraza (4.27)*:*

$$\frac{1}{(s-a)(s+a)} = \frac{F}{s-a} + \frac{G}{s+a}. \tag{4.41}$$

Analognim postupkom kao i u prethodna dva slučaja dobivamo:

$$1 = F(s+a) + G(s-a). \tag{4.42}$$

Grupiranjem članova po stupnjevima slijedi:

$$1 = s(F+G) + s^0(Fa - Ga). \tag{4.43}$$

Uspoređivanjem koeficijenata s lijeve i desne strane dobivamo sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} F + G = 0, \\ F - G = \frac{1}{a}, \end{cases} \tag{4.44}$$

čija su rješenja $F = \frac{1}{2a}$, $G = -\frac{1}{2a}$. *Uvrštavanjem ovih konstanti u* (4.41) *dolazimo do sljedećeg izraza:*

$$\frac{1}{(s-a)(s+a)} = \frac{1}{2a(s-a)} - \frac{1}{2a(s+a)}. \tag{4.45}$$

Sada funkcija $Y(s)$ *poprima sljedeći oblik:*

$$Y(s) = -\frac{b}{a^2 s} + \left(\frac{b}{2a^2} + \frac{y(0)}{2} + \frac{y'(0)}{2a}\right)\frac{1}{s-a} + \left(\frac{b}{2a^2} + \frac{y(0)}{2} + \frac{y'(0)}{2a}\right)\frac{1}{s+a}. \tag{4.46}$$

Sva tri člana iz izraza (4.46) *tablične su transformacije, pa dobivamo:*

$$y(t) = -\frac{b}{a^2} + \left(\frac{b}{2a^2} + \frac{y(0)}{2} + \frac{y'(0)}{2a}\right)e^{at} + \left(\frac{b}{2a^2} + \frac{y(0)}{2} - \frac{y'(0)}{2a}\right)e^{-at}, \tag{4.47}$$

što je rješenje zadane jednadžbe uz pretpostavku da je t *vremenska varijabla, odnosno da je* $t \geq 0$.

5. Parcijalne diferencijalne jednadžbe

Tema ovog rada je rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje ćemo u ovom poglavlju precizno matematički definirati. Također ćemo objasniti neke od klasifikacija parcijalnih diferencijalnih jednadžbi te objasniti početne i rubne uvjete. Navesti ćemo i nekoliko konkretnih jednadžbi koje se u većoj mjeri koriste u inženjerstvu, a pogodne su za rješavanje putem Laplaceovih transformacija. Ovo poglavlje obrađeno je prema izvoru [7].

5.1. Definicija parcijalne diferencijalne jednadžbe

Temeljna karakteristika koja razlikuje obične diferencijalne jednadžbe od parcijalnih diferencijalnih jednadžbi jest broj nezavisnih varijabli. Dok smo kod običnih diferencijalnih jednadžbi razmatrali rješenja koja su ovisila samo o jednoj nezavisnoj varijabli, ovdje razmatramo funkcije s dvije i više nezavisnih varijabli, a uključene derivacije više neće biti obične derivacije već parcijalne derivacije.

Kao i kod običnih diferencijalnih jednadžbi, red parcijalne diferencijalne jednadžbe je najviši red parcijalne derivacije koja se u jednadžbi pojavljuje. Radi jednostavnosti, u ovom radu razmatrati ćemo samo jednadžbe s dvije nezavisne varijable te jednadžbe prvog i drugog reda koje u nastavku precizno definiramo.

Definicija 5.1. *Parcijalna diferencijalna jednadžba prvog reda s dvije nezavisne varijable dana je izrazom:*

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \tag{5.1}$$

gdje je $u(x, y)$ nepoznata funkcija, x i y su nezavisne varijable, a u_x i u_y parcijalne derivacije funkcije u. U analognim oznakama parcijalna diferencijalna jednadžba drugog reda dana je izrazom

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0, \tag{5.2}$$

gdje su u_{xx}, u_{xy} i u_{yy} parcijalne derivacije drugog reda funkcije u.

Navedimo sada dva konkretna primjera parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

Primjer 5.1. *Izraz oblika*

$$u_x + uu_y = 0 \tag{5.3}$$

primjer je parcijalne diferencijalne jednadžbe prvog reda, dok je izraz oblika

$$u_{xx} - u_{xy} = \sin(u) \tag{5.4}$$

primjer parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda.

5.2. Klasifikacija parcijalnih diferencijalnih jednadžbi

Kod običnih diferencijalnih jednadžbi vidjeli smo da se metodom Laplaceovih transformacija rješavaju linearne jednadžbe. Stoga ćemo linearnost definirati i u kontekstu parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

Definicija 5.2. *Parcijalne diferencijalne jednadžbe oblika*

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y), \tag{5.5}$$

$$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + f(x,y)u = g(x,y) \tag{5.6}$$

zovemo linearnim parcijalnim diferencijalnim jednadžbama prvog, odnosno drugog reda, pri čemu je $u = u(x,y)$ nepoznata funkcija, a $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $d(x,y)$, $e(x,y)$, $f(x,y)$ i $g(x,y)$ su poznate funkcije nezavisnih varijabli x i y.

Jednadžbe iz prethodnog primjera su očito nelinearne, a sada ćemo navesti dva konkretna primjera linearnih jednadžbi. Navedimo sada dva konkretna primjera parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

Primjer 5.2. *Izraz oblika*

$$3u_x + 2u_y = 0 \tag{5.7}$$

primjer je linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe prvog reda, dok je izraz oblika

$$x^2u_{xx} - xyu_{xy} = 5 \tag{5.8}$$

primjer linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda.

5.3. Početni i rubni uvjeti

Početni i rubni uvjeti su ključni za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Kao i kod običnih diferencijalnih jednadžbi, oni definiraju vrijednosti funkcije u određenim točkama i na rubovima domena te tako omogućuju jedinstvena rješenja.

Početni uvjeti specificiraju stanje sustava u početnom trenutku, često označenom s $t = 0$. Za parcijalne diferencijalne jednadžbe prvog reda s dvije nezavisne varijable, x i t, početni uvjet obično je oblika:

$$u(x,0) = f(x), \tag{5.9}$$

gdje je $f(x)$ poznata funkcija koja daje početne vrijednosti funkcije u duž osi x.

Za parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda, početni uvjeti često uključuju i početne vrijednosti derivacije nepoznate funkcije:

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \tag{5.10}$$

gdje su $f(x)$ i $g(x)$ poznate funkcije.

Rubni uvjeti definiraju ponašanje funkcije na granicama definirane domene. Postoje dvije glavne vrste rubnih uvjeta:

1. Dirichletovi rubni uvjeti definiraju vrijednosti funkcije na rubovima domene. Na primjer, za domenu $0 \leq x \leq L$:
$$u(0,t) = h_1(t), \quad u(L,t) = h_2(t), \tag{5.11}$$
gdje su $h_1(t)$ i $h_2(t)$ poznate funkcije koje specificiraju vrijednosti funkcije u na rubovima $x = 0$ i $x = L$.

2. Neumannovi rubni uvjeti definiraju vrijednosti parcijalnih derivacija funkcije na rubovima domene, često predstavljajući tok ili brzinu promjene:
$$u_x(0,t) = h_3(t), \quad u_x(L,t) = h_4(t), \tag{5.12}$$
gdje su $h_3(t)$ i $h_4(t)$ poznate funkcije koje specificiraju vrijednosti derivacija na rubovima $x = 0$ i $x = L$.

5.4. Transportna jednadžba

Transportna jednadžba je parcijalna diferencijalna jednadžba koja opisuje kako se neka fizikalna veličina (kao što su masa, energija, toplina i kemijska reakcija) prenosi kroz prostor i vrijeme unutar određenog sustava, a u sklopu ovog rada riješit ćemo je putem Laplaceovih transformacija.

Opći oblik transportne jednadžbe može se napisati kao
$$y_t + \nabla \cdot (\mathbf{v}y) = S. \tag{5.13}$$
gdje funkcija $y(x,t)$ opisuje raspodjelu veličine koja se transportira u prostoru x i vremenu t. $v(x,t)$ predstavlja vektor koji opisuje brzinu prijenosa te veličine. Član $\nabla \cdot (\mathbf{v}y)$ predstavlja divergenciju struje $\mathbf{v}y$, kojom prikazujemo promjenu raspodjele y u prostoru, dok $S(x,t)$ nazivamo izvornim ili ponornim članom, koji opisuje dodavanje ili oduzimanje količine y unutar sustava (npr. kemijski izvori, toplinska energija i vanjski utjecaji).

U ovom radu promatrati ćemo jednodimenzionalnu transportnu jednadžbu što znači da će x biti jednodimenzionalna varijabla. Također ćemo pretpostaviti da je brzina prijenosa konstantna, tj. da vrijedi:
$$\mathbf{v} = \alpha, \tag{5.14}$$
pa je
$$\nabla \cdot (\mathbf{v}y) = \alpha y_x. \tag{5.15}$$

Pretpostaviti ćemo i da se fizikalna veličina samo prenosi, tj. da sustav nema ni izvora ni ponora, što znači da je

$$S(x,t) = 0. \tag{5.16}$$

Uz sve navedene pretpostavke transportna jednadžba koju promatramo poprima oblik:

$$y_t = -\alpha y_x. \tag{5.17}$$

Kako bi problemu dali praktični kontekst pretpostavit ćemo da jednadžba opisuje širenje toksične supstance u rijeci. Točka $x = 0$ predstavlja izvor toksične supstance, a pretpostavit ćemo da je rijeka savršeno ravna i jako dugačka. To znači da problem možemo promatrati na pozitivnom dijelu osi x.

Pretpostavit ćemo da je na izvoru, tj. u $x = 0$ koncentracija toksične supstance jednaka konstanti C. Time je definiran rubni uvjet koji poprima oblik:

$$y(0,t) = C. \tag{5.18}$$

Nadalje pretpostavit ćemo da je rijeka na početku promatranja savršeno čista, tj. da se toksična supstanca nalazi samo na izvoru. Time smo definirali funkciju $y(x,t)$ na početku promatranja, odnosno zadali početni uvjet:

$$y(x,0) = 0. \tag{5.19}$$

Prema svemu navedenom u našem slučaju funkcija $y(x,t)$ prikazuje koncentraciju toksične supstance na poziciji x u vremenu t, pri čemu supstanca putuje brzinom intenziteta α.

5.5. Valna jednadžba

Valna jednadžba je parcijalna diferencijalna jednadžba koja opisuje širenje valova, poput zvučnih valova, elektromagnetskih valova i valova na vodi. Opći oblik valne jednadžbe u jednodimenzionalnom prostoru za funkciju $y(x,t)$, gdje je x pozicije u prostoru, a t vrijeme, je:

$$y_{tt}(x,t) = c^2 y_{xx}(x,t) \tag{5.20}$$

gdje je $y(x,t)$ funkcija koja opisuje pomak ili neki drugi fizikalni parametar koji se mijenja u vremenu i prostoru dok c prikazuje brzinu vala u mediju. Kod zvučnih valova c predstavlja brzinu zvuka, a za elektromagnetske valove u vakuumu c predstavlja brzinu svjetlosti.

Ponašanje valova možemo opisati sa jednadžbama različitih redova, te različitih dimenzija, ovisno o prirodi problema. U ovom slučaju fokus stavljamo na jednadžbu drugog reda, u jednoj prostornoj dimenziji, koja se često koristi za opisivanje fenomena poput vibriranja žice.

U ovom radu promatramo specifičan slučaj valne jednadžbe, koja opisuje titranje žice, te uključuje dodatni gravitacijski član, čime valna jednadžba poprima sljedeći oblik:

$$y_{tt}(x,t) = c^2 y_{xx}(x,t) - g, \tag{5.21}$$

gdje je g gravitacijska akceleracija.

Kako bi problemu dali praktični kontekst pretpostavit ćemo da jednadžba opisuje slobodni pad beskonačno duge ravne žice koja je u jednom kraju učvršćena i na početku promatranja miruje. Točka $x = 0$ predstavlja učvršćeni kraj žice, a sama žica modelirana je pozitivnim dijelom osi x. U trenutku $t = 0$ podrška koja je držala žicu uklanja se i gravitacija počinje djelovati na žicu.

Fiksiranost žice u $x = 0$ modeliramo rubnim uvjetom:

$$y(0, t) = 0. \tag{5.22}$$

Činjenicu da je na početku žica u potpunosti ravna definiramo početnim uvjetom:

$$y(x, 0) = 0, \tag{5.23}$$

dok činjenu da žica miruje u trenutku $t = 0$ početnim uvjetom koji poprima oblik:

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0. \tag{5.24}$$

Ovaj rubni uvjet fizikalno znači da je početna brzina svake točke na žici jednaka nuli.

6. Primjena Laplaceovih transformacija na rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi

U prethodnim poglavljima definirali smo obične diferencijalne jednadžbe, parcijalne diferencijalne jednadžbe i pokazali primjenu Laplaceove transformacije na obične diferencijalne jednadžbe. Sve ove teme bile su uvod u glavnu temu rada - primjenu Laplaceovih transformacija na rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

Pokazali smo kako rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi može biti složeno te smo stoga predstavili način rješavanja s pomoću Laplaceovih transformacija, koja značajno olakšava postupak na način da se diferencijalna jednadžba prevodi u algebarsku jednadžbu. Sličan pristup možemo primijeniti i na parcijalne diferencijalne jednadžbe, samo što u ovom slučaju prevođenjem polazne jednadžbe nećemo dobiti algebarsku jednadžbu već običnu diferencijalnu jednadžbu.

U nastavku ćemo pokazati primjenu Laplaceove transformacije na rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi prvog i drugog reda, služeći se izvorom [8, 9]

6.1. Parcijalne diferencijalne jednadžbe prvog reda

Promotrimo sljedeći inicijalno-rubni problem:

$$y_t = -\alpha y_x, \tag{6.1}$$

$$y(0,t) = C, \tag{6.2}$$

$$y(x,0) = 0, \tag{6.3}$$

definiran za $x \geq 0,\ t \geq 0$, gdje su α i C dane konstante.

Parcijalna diferencijalna jednadžba (6.1) naziva se transportna jednadžba i njeno fizikalno značenje objašnjeno je u dijelu 5.4. Izraz (6.2) predstavlja rubni, a izraz (6.3) početni uvjet.

Sada ćemo na jednadžbu (6.1) primijeniti Laplaceovu transformaciju na način da vrijedi:

$$Y(x,s) = \mathcal{L}\left\{y(x,t)\right\} = \int\limits_0^\infty y(x,t)e^{-st}\,dt, \tag{6.4}$$

što znači da ćemo nezavisnu varijablu x fiksirati, dok varijablu t transformiramo.

Uočimo da vrijedi:

$$\mathcal{L}\left\{y_x(x,t)\right\} = \int\limits_0^\infty y_x(x,t)e^{-st}\,dt = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int\limits_0^\infty y(x,t)e^{-st}\,dt\right] = Y_x(x,s). \tag{6.5}$$

Kod transformacije funkcije y_t koristimo se teoremom 2.7, odnosno teoremom o slici derivacije. Vrijedi:

$$\mathcal{L}\left\{y_t(x,t)\right\} = sY(x,s) - y(x,0), \tag{6.6}$$

što uvrštavanjem početnog uvjeta (6.3) prelazi u:

$$\mathcal{L}\left\{y_t(x,t)\right\} = sY(x,s). \tag{6.7}$$

Sad transformirana jednadžba (6.1) poprima oblik

$$sY(x,s) = -\alpha Y_x(x,s), \tag{6.8}$$

odnosno

$$Y_x(x,s) = -\frac{s}{\alpha}Y(x,s), \tag{6.9}$$

što je obična diferencijalna jednadžba po varijabli x oblika (3.14). Usporedivši izraz (6.9) s (3.14) nalazimo da je

$$a = \frac{s}{\alpha}, \qquad b = 0, \tag{6.10}$$

pa je prema (3.17) opće rješenje diferencijalne jednadžbe (6.9) dano s

$$Y(x,s) = ce^{-\frac{s}{\alpha}x}, \tag{6.11}$$

gdje je c konstanta integracije.

Kako bi našli vrijednost konstante c moramo iskoristiti rubni uvjet (6.2). Uočimo da prema tablici 2.2 vrijedi

$$Y(0,s) = \mathcal{L}\left\{y(0,t)\right\} = \mathcal{L}\left\{C\right\} = \frac{C}{s}. \tag{6.12}$$

S druge strane, uvrštavanjem $x = 0$ u (6.11) dobiva se

$$Y(0,s) = c, \tag{6.13}$$

pa je

$$c = \frac{C}{s}. \tag{6.14}$$

Konačno se dobiva

$$Y(x,s) = \frac{C}{s}e^{-\frac{s}{\alpha}x}. \tag{6.15}$$

U poglavlju 2.3. obradili smo teorem o pomaku originala koji se primjenjuje u ovom problemu na način koji je prikazan u primjeru 2.12.

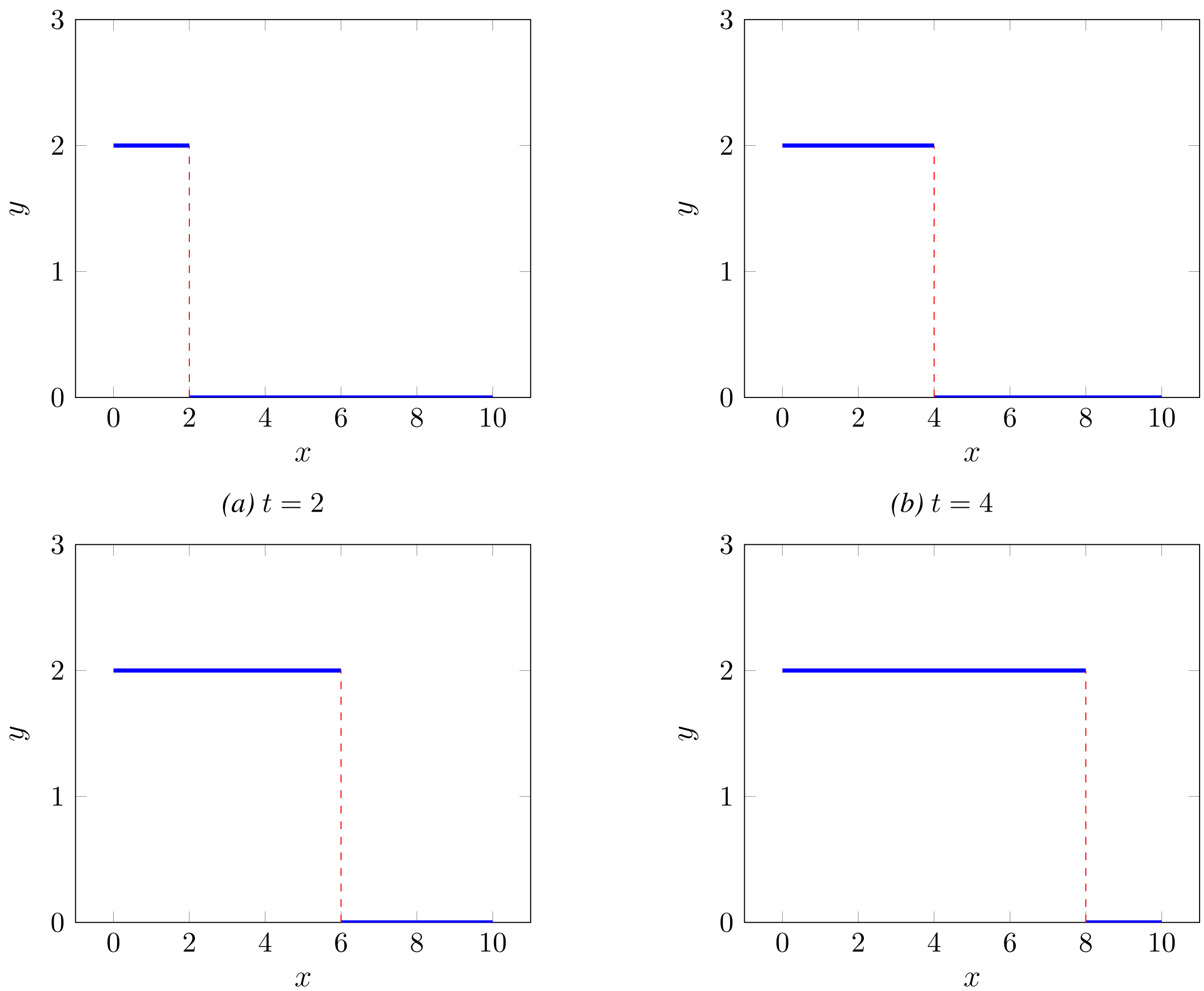
Inverznom transformacijom funkcije $Y(x,s)$ dolazimo do funkcije $y(x,t)$ koja je rješenje našeg inicijalno-rubnog problema:

$$y(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C}{s}e^{\frac{-s}{\alpha}x}\right\} = CH\left(t - \frac{x}{\alpha}\right), \tag{6.16}$$

gdje je $H(t)$ Heavisideova funkcija. Funkcija $y(x,t)$ može se zapisati i u sljedećem obliku:

$$y(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } t < \frac{x}{\alpha} \\ C & \text{ako je } t \geq \frac{x}{\alpha}. \end{cases} \tag{6.17}$$

Prikažimo ovo rješenje i grafički.



(a) $t = 2$ *(b)* $t = 4$ *(c)* $t = 6$ *(d)* $t = 8$

Slika 6.1. Grafički prikaz rješenja $y(x,t)$ kroz vrijeme za $C = 2$ i $\alpha = 1$. Izvor: Izrada autora

Na slici 6.1 možemo vidjeti rješenje postavljenog inicijalno-rubnog problema. Ovo rješenje je fizikalno potpuno očekivano, naime kako je zadana brzina intenziteta $\alpha = 1$ toksična tvar jednoliko putuje kroz rijeku i kako vrijeme odmiče u svim točkama koncentracija toksične tvari postaje jednaka C.

6.2. Parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda

Razmotrimo sljedeći inicijalno rubni problem:

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} - g, \tag{6.18}$$

$$y(0,t) = 0, \tag{6.19}$$

$$y(x,0) = 0, \tag{6.20}$$

$$y_t(x,0) = 0, \tag{6.21}$$

definiran za $x \geq 0,\ t \geq 0$, gdje su g i c dane konstante.

Parcijalna diferencijalna jednadžba (6.18) naziva se valna jednadžba i njeno fizikalno značenje objašnjeno je u dijelu 5.5. Izraz (6.19) predstavlja rubni uvjet, a izrazi (6.20) i (6.21) početne uvjete.

Provodimo postupak analogan rješavanje transportne jednadžbe iz prethodnog poglavlja. Primijenimo Laplaceovu transformaciju na jednadžbu 6.18 i uvrstimo početne uvjete, pri čemu t-domenu transformiramo u s domenu:

$$s^2 Y(s) - \underbrace{sY(x,0)}_{=0} - \underbrace{y_t(x,0)}_{=0} = c^2 \mathcal{L}\left\{y_{xx}(x,t)\right\} - \frac{g}{s}. \tag{6.22}$$

Nakon pojednostavljenja dobivamo:

$$s^2 Y(x,s) = c^2 Y_{xx}(x,s) - \frac{g}{s}, \tag{6.23}$$

odnosno:

$$Y_{xx}(x,s) - \frac{s^2}{c^2} Y(x,s) = \frac{g}{c^2 s}. \tag{6.24}$$

Uočimo da smo dobili običnu diferencijalnu jednadžbu oblika:

$$y''(x) - a^2 y(x) = b, \tag{6.25}$$

iz primjera (4.3), gdje je

$$a = \frac{s}{c}, \qquad b = \frac{g}{c^2 s}. \tag{6.26}$$

Također, kao i kod (6.12) zbog rubnog uvjeta je:

$$Y(0,s) = 0. \tag{6.27}$$

Prema primjeru (4.3) opće rješenje jednadžbe (6.24) glasi:

$$Y(x,s) = -\frac{b}{a^2} + \left(\frac{b}{2a^2} + \frac{Y(0,s)}{2} + \frac{Y_x(0,s)}{2a}\right) e^{ax} + \left(\frac{b}{2a^2} + \frac{Y(0,s)}{2} - \frac{Y_x(0,s)}{2a}\right) e^{-ax}. \tag{6.28}$$

Uvrštavanjem (6.26) i (6.27) u (6.28) slijedi:

$$Y(x,s) = -\frac{g}{s^3} + \left(\frac{g}{2s^3} + c\frac{Y_x(0,s)}{2s}\right) e^{\frac{s}{c}x} + \left(\frac{g}{2s^3} - c\frac{Y_x(0,s)}{2s}\right) e^{-\frac{s}{c}x}. \tag{6.29}$$

Da bi ovo rješenje imalo fizikalnog smisla, tj. da ne bi divergiralo, izraz uz $e^{\frac{s}{c}x}$ mora biti jednak nuli, što znači da je

$$c\frac{Y_x(0,s)}{2s} = -\frac{g}{2s^3}. \tag{6.30}$$

Uvrštavanjem ovog uvjeta u (6.29) slijedi:

$$Y(x,s) = -\frac{g}{s^3} + \frac{g}{s^3}e^{-\frac{s}{c}x}. \tag{6.31}$$

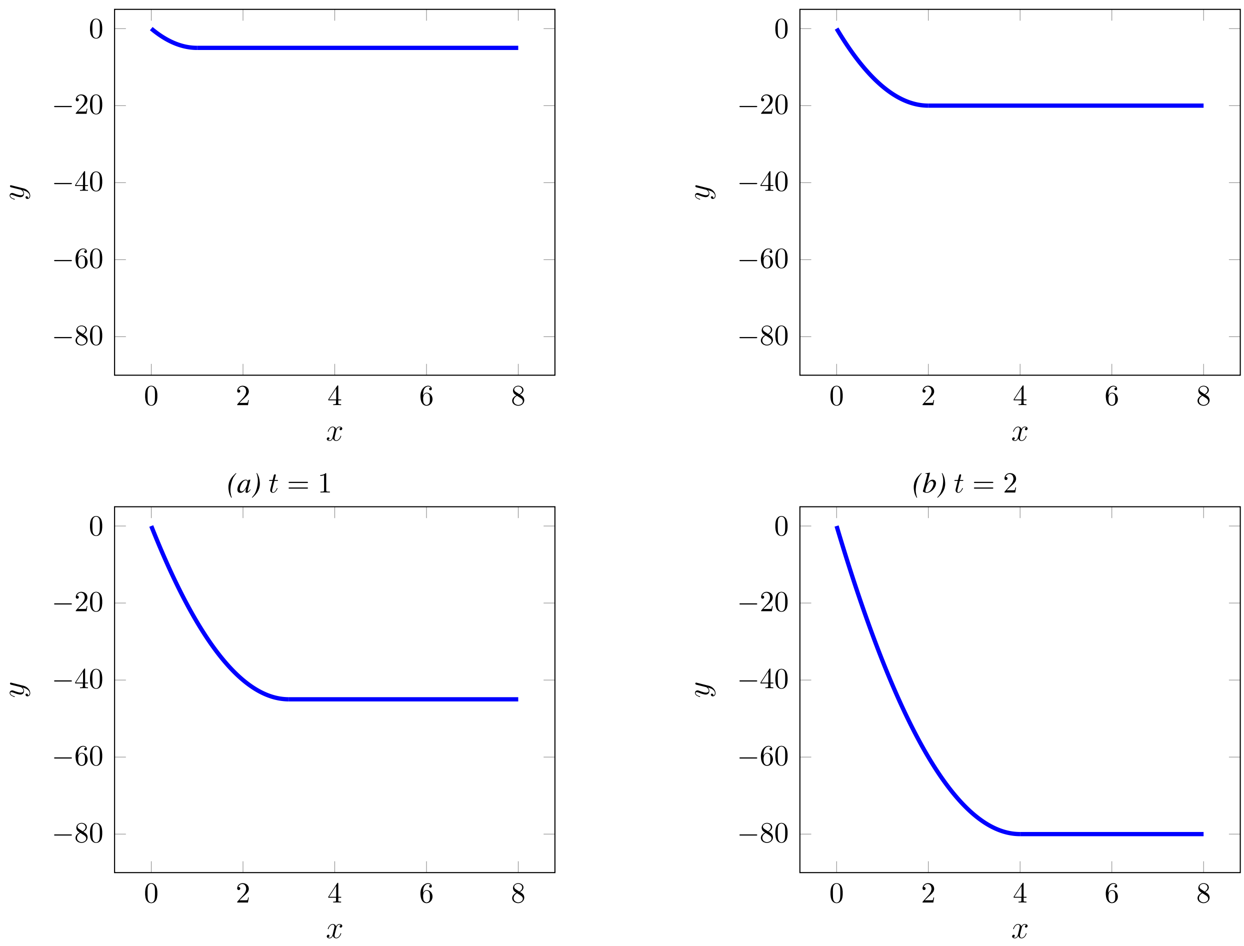
Inverznom Laplaceovom transformacijom ovog izraza, koristeći teorem 2.6 (o pomaku), dobivamo rješenje u t - domeni:

$$y(x,t) = -\frac{gt^2}{2} + \frac{g}{2}\left(t - \frac{x}{c}\right)^2 H\left(t - \frac{x}{c}\right), \tag{6.32}$$

gdje je $H(t)$ Heavisideova funkcija. Funkcija $y(x,t)$ može se zapisati i u sljedećem obliku:

$$y(x,t) = \begin{cases} -\dfrac{gt^2}{2} & \text{ako je } t < \frac{x}{c}, \\ \dfrac{gx^2}{2c^2} - \dfrac{gxt}{c} & \text{ako je } t \geq \frac{x}{c}. \end{cases} \tag{6.33}$$

Prikažimo ovo rješenje i grafički.



(c) $t = 3$ (d) $t = 4$

Slika 6.2. Grafički prikaz rješenja $y(x,t)$ kroz vrijeme za $g = 10$ i $c = 1$. Izvor: Izrada autora

7. Zaključak

U ovom radu obrađena je i detaljno analizirana primjena Laplaceove transformacije pri rješavanju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. U prvom djelu rada naveden su osnovna svojstva Laplacoeve transformacije. Zatim su uvedeni i prikazani osnovni koncepti običnih parcijalnih jednadžbi, te je prikazana primjena Laplaceove transformacije na njihovo rješavanje. U radu smo prikazali primjenu Laplaceove transformacije kod rješavanja običnih diferencijalnih jednadžbi povezanih s inženjerskim problemima, konkretnije kod analize električnih krugova.

Kroz primjere je demonstrirano kako Laplaceova transformacija pretvara diferencijalne jednadžbe u algebarske. Ipak, treba istaknuti da je metoda učinkovita samo kod linearnih jednadžbi s poznatim početnim uvjetima. Primjene Laplaceove transformacije na nelinearne probleme ili kompleksne rubne uvjete često nije moguća zbog složenosti transformiranog problema.

Posebna pažnja posvećena je primjeni Laplaeove transformacije na parcijalne diferencijalne jednadžbe, kojima se modeliraju razni fizikalni i inženjerski problemi, poput prijenosa topline, titranja valova i analize elektromagnetskih polja. Demonstrirano je kako se parcijalna diferencijalna jednadžba pomoću Laplaceove transformacije može pretvoriti u običnu diferencijalnu jednadžbu čije rješavanje je ipak nešto jednostavnije.

Zaključujemo da Laplaceova transformacija, unatoč nekim ograničenjima predstavlja moćan matematički alat s širokim spektrom primjena u rješavanju običnih i parcijalnih diferencijalnih jednadžbu u različitim inženjerskim domenama.

Literatura

[1] Uredništvo stranice Encyclopaedia Britannica, Inc.: "Laplace Transform", s Interneta, https://www.britannica.com/science/Laplace-transform, 20. svibnja 2024.

[2] Predavanja iz kolegija Inženjerska matematika, prof.dr.sc Ivan Dražić, Tehnički fakultet Rijeka, 2019.

[3] Chicone, K.: "Ordinary Differential Equations with Applications", Springer, New York, 1999.

[4] Boyce, W.; DiPrima, R.: "Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems", John Wiley and Sons, New York, 2001.

[5] Uredništvo stranice Interactive Mathematics: "Application of Ordinary Differential Equations: Series RL Circuit", s interneta, https://www.intmath.com/differential-equations/5-rl-circuits.php, 1.lipnja 2024.

[6] Schiff, L.: "The Laplace Transform", Springer, New York, 1999.

[7] Strauss, W.: "Partial Diferential Equations", John Wiley and Sons, New York, 1992.

[8] Bazett, T., Laplace's Equation and Harmonic Functions, s interneta, https://web.uvic.ca/~tbazett/diffyqs/laplacepde_section.html, 26. kolovoza 2024.

[9] Secchi, P.; Ruzhansky, M.: "Complex Partial Differential Equations", Springer, Berlin, 2022.

Sažetak i ključne riječi

Laplaceova transformacija moćan je matematički alat koji se koristi pri rješavanju parcijalnih diferencijalnih i običnih diferencijalnih jednadžbi, te je u širokoj upotrebi u raznim inženjerskim i fizikalnim problemima, uključujući analizu električnih krugova. U ovom radu analiziraju se svojstva Laplaceove transformacije, te njena primjena na obične diferencijalne jednadžbe kao priprema za glavnu temu ovog rada, što jest primjena Laplaceove transformacije na parcijalne diferencijalne jednadžbe. Kroz analizu osnovnih svojstava, rad objašnjava kako Laplaceova transformacija pojednostavljuje rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi pretvarajući ih u algebarske, odnosno parcijalnih diferencijalnih jednadžbi pretvarajući ih u obične.

Ključne riječi: Laplaceova transformacija, parcijalne diferencijalne jednadžbe, obične diferencijalne jednadžbe, valna jednadžba, transportna jednadžba, početni uvjeti, rubni uvjeti.

Summary and key words

The Laplace transform is a powerful mathematical tool used in solving partial differential equations (PDEs) and ordinary differential equations (ODEs), and it is widely applied in various engineering and physical problems, including electrical circuit analysis. This paper analyzes the properties of the Laplace transform and its application to ordinary differential equations as a preparation for the main topic of this work, which is the application of the Laplace transform to PDEs, with an emphasis on electrical engineering. Through the analysis of basic properties and theorems, the paper explains how the Laplace transform simplifies the solution of complex differential equations by converting them into algebraic ones. The historical contributions of Pierre-Simon Laplace are also briefly discussed, highlighting his impact on all engineering disciplines

Keywords: Laplace transform, partial differential equations, ordinary differential equations, wave equation, transport equation, initial conditions, boundary conditions.