SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

METODE RJEŠAVANJA SUSTAVA OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI

Rijeka, rujan 2024.

Endi Turčinović
0069079245

SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

Prijediplomski sveučilišni studij elektrotehnike

Završni rad

METODE RJEŠAVANJA SUSTAVA OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Rijeka, rujan 2024.

Endi Turčinović
0069079245

SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET
POVJERENSTVO ZA ZAVRŠNE ISPITE

Rijeka, 20. ožujka 2024.

Zavod: **Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike**
Predmet: **Inženjerska matematika ET**
Grana: **1.01.07 primijenjena matematika i matematičko modeliranje**

ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: **Endi Turčinović (0069079245)**
Studij: Sveučilišni prijediplomski studij elektrotehnike

Zadatak: **Metode rješavanja sustava običnih diferencijalnih jednadžbi**

Opis zadatka:

U ovom radu potrebno je uvesti problem početnog problema za sustav običnih diferencijalnih jednadžbi, sa specijalnim naglaskom na klasu linearnih sustava. Potrebno je opisati različite metode za analitičko rješavanje inicijalnog problema kao što su metoda supstitucije, operatorska i matrična metoda te istaknuti njihove specifičnosti. U praktičnom dijelu rada potrebno je primijeniti opisane metode na problemima iz inženjerstva koji su modelirani sustavima običnih diferencijalnih jednadžbi.

Rad mora biti napisan prema Uputama za pisanje diplomskih / završnih radova koje su objavljene na mrežnim stranicama studija.

Zadatak uručen pristupniku: 20. ožujka 2024.

Mentor:

izv. prof. dr. sc. Ivan Dražić

Predsjednik povjerenstva za završni ispit:

prof. dr. sc. Dubravko Franković

IZJAVA

Sukladno članku 7. Stavku 1. Pravilnika o završnom radu, završnom ispitu i završetku sveučilišnih prijediplomskih studija Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci od 4. travnja 2023., izjavljujem da sam samostalno izradio završni rad prema zadatku preuzetom dana 20. ožujka 2024.

Rijeka, 7. rujna 2024.

Endi Turčinović

Sadržaj

1. Uvod

Završni rad obrađuje područje rješavanja sustava diferencijalnih jednadžbi te njihovu primjenu u inženjerstvu. Diferencijalne jednadžbe predstavljaju jedan od temeljnih matematičkih alata u modeliranju fizičkih pojava, posebno u području inženjerstva i prirodnih znanosti. Njihova primjena omogućava opisivanje dinamike sustava kroz promjene koje se događaju u vremenu ili prostoru. U elektrotehnici, diferencijalne jednadžbe igraju ključnu ulogu u analizi i projektiranju električnih i elektroničkih sustava, od jednostavnih strujnih krugova do složenih sustava upravljanja i telekomunikacija. U gotovo svim područjima znanosti i inženjerstva, diferencijalne jednadžbe su ključne za formuliranje i rješavanje problema koji uključuju varijable koje su međusobno povezane putem derivacija.

Kroz ovaj završni rad, cilj je istražiti i prikazati kako se diferencijalne jednadžbe koriste za modeliranje i rješavanje problema. Rad će obuhvatiti osnovne tipove diferencijalnih jednadžbi, metode njihovog rješavanja uz neke konkretne primjere iz različitih područja inženjerstva.

U prvom dijelu rada bavimo se osnovnim pojmovima iz teorije običnih diferencijalnih jednadžbi. Definiramo opće i partikularno rješenje te navodimo neke temeljne metode njihova rješavanja kao što je primjerice separacija varijabli. Također pokazujemo opravdanost primjene običnih diferencijalnih jednadžbi.

U trećem poglavlju uvodimo obične linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima s naglaskom na metode njihova rješavanja. Naime, ovaj tip diferencijalnih jednadžbi najčešće se pojavljuje kod sustava običnih diferencijalnih jednadžbi i ključan je za njihovo rješavanje.

U četvrtom poglavlju definiramo sustave običnih diferencijalnih jednadžbi i navodimo neke njihove klasifikacije, dok se u petom i šestom poglavlju bavimo tehnikama rješavanja sustava običnih diferencijalnih jednadžbi, pritom stavljajući naglasak na metodu supstitucije i matričnu metodu. U sedmom poglavlju uvodimo Laplaceove transformacije i pokazujemo kako se one koriste kod rješavanja sustava običnih diferencijalnih jednadžbi, a u zadnjem poglavlju navodimo neke konkretne primjene sustava običnih diferencijalnih jednadžbi u inženjerstvu.

2. Obične diferencijalne jednadžbe

Glavna tema ovog rada su sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi i metode njihova rješavanja. Sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi sastoje se od više običnih diferencijalnih jednadžbi koje ćemo u ovom poglavlju upoznati.

2.1. Pojam obične diferencijalne jednadžbe i njenog rješenja

Pri rješavanju mnogih problema potrebno je naći nepoznatu funkciju $y(x)$ koja mjeri kvantitativnu stranu neke pojave, ako je pritom poznata izvjesna veza nezavisne promjenljive x, nepoznate funkcije $y(x)$ i njenih derivacija $y', y'', ..., y^{(n)}$ dana jednadžbom

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{2.1}$$

gdje je F zadana funkcija. Svaka se jednadžba ovog oblika, koja sadrži barem jednu derivaciju, naziva obična diferencijalna jednadžba.

Primjer 2.1. *Izraz*

$$y'''(x) + 2yxy'' + 3y = \sin x \tag{2.2}$$

primjer je obične diferencijalne jednadžbe.

Osim običnih diferencijalnih jednadžbi imamo i parcijalne diferencijalne jednadžbe koja uključuje parcijalne derivacije. Za razliku od obične diferencijalne jednadžbe, gdje nepoznata funkcija ovisi samo o jednoj varijabli, u parcijalnoj diferencijalnoj jednadžbi nepoznata funkcija ovisi o više varijabli.

Primjer 2.2. *Izraz*

$$u_x(x, y) + u_y(x, y) = \sin(x + y) \tag{2.3}$$

primjer je parcijalne diferencijalne jednadžbe.

Red diferencijalne jednadžbe je red najviše derivacije koja se u jednadžbi pojavljuje. Tako je primjerice jednadžba iz primjera 2.1 obična diferencijalna jednadžba trećeg reda, a jednadžba iz primjera 2.2 parcijalna diferencijalna jednadžba prvog reda.

Rješenje ili integral diferencijalne jednadžbe (2.1) je svaka funkcija $y(x)$ koja zadovoljava tu jednadžbu, dok se graf funkcije $y(x)$ naziva integralna krivulja. Riješiti jednadžbu znači naći sva njezina rješenja.

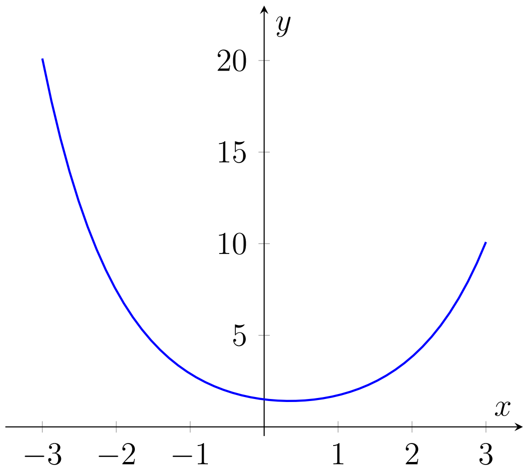
Primjer 2.3. *Funkcija zadana s*

$$y(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}e^x \tag{2.4}$$

jedno je rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$y' + y = e^x. \tag{2.5}$$

Na sljedećoj slici prikazan je integralna krivulja dane diferencijalne jednadžbe.



Slika 2.1. Jedna integralna krivulja diferencijalne jednadžbe $y' + y = e^x$.

2.2. Praktična opravdanost običnih diferencijalnih jednadžbi

Diferencijalne jednadžbe susrećemo u različitim područjima znanosti. Pomoću njih zapisane su razne matematičke formule, a posebno fizikalni zakoni. Tako se primjerice u mehanici često koristi drugi Newtonov zakon zapisan u obliku sljedeće diferencijalne jednadžbe:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} \tag{2.6}$$

gdje je m masa tijela, $\vec{v}$ brzina, a $\vec{F}$ sila koja uzrokuje gibanje. Posebno, ako je m = konst. (kao što je najčešče slučaj) biti će

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}, \tag{2.7}$$

ili

$$m\ddot{\vec{s}} = \vec{F}, \tag{2.8}$$

gdje je $\vec{s}$ položaj, a točkasti operator predstavlja derivaciju po vremenskoj varijabli t.

U toplini se često koristi Newtonov zakon hlađenja koji glasi

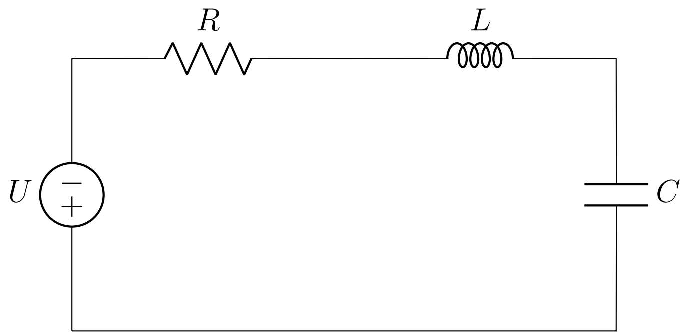
$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_{ok}), \tag{2.9}$$

gdje je T temperatura tijela, T_{ok} temperatura okoline i k koeficijent koji se za različite materijale utvrđuje eksperimentalno.

Česta je i uporaba tzv. populacijske jednadžbe koja izražava činjenicu da je brzina promjene izvjesne populacije srazmjerna momentalnom broju jedinki $y(t)$, a glasi

$$\frac{dy}{dt} = ky. \tag{2.10}$$

Kao primjer iz elektrotehnike možemo uzeti jedan običan RLC krug prikazan na slici 2.2.



Slika 2.2. Serijski RLC krug.

Prema Kirchhoffovom zaknu jednadžba tog kruga glasi

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = U, \tag{2.11}$$

gdje su naponi s lijeve strane redom naponi na otporniku, zavojnici i kondenzatoru.

Ovaj se izraz može zapisati u obliku diferencijalno-integralne jednadžbe:

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = U, \tag{2.12}$$

u kojoj nam R predstavlja omski otpor otpornika, L induktivitet zavojnice, C kapacitet kondezatora, dok je $i(t)$ struja u strujnom krugu, a U vrijednost napona izvora.

2.3. Opće i partikularno rješenje

Neposrednim uvrštavanjem možemo vidjeti da osim navedenog rješenja u primjeru 2.3 i funkcija

$$y(x) = 2e^{-x} + \frac{1}{2}e^x \tag{2.13}$$

je također jedno rješenje zadane jednadžbe. Štoviše, sve funkcije oblika

$$y(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x \tag{2.14}$$

za sve vrijednosti $C \in \mathbb{R}$ rješenja su zadane diferencijalne jednadžbe.

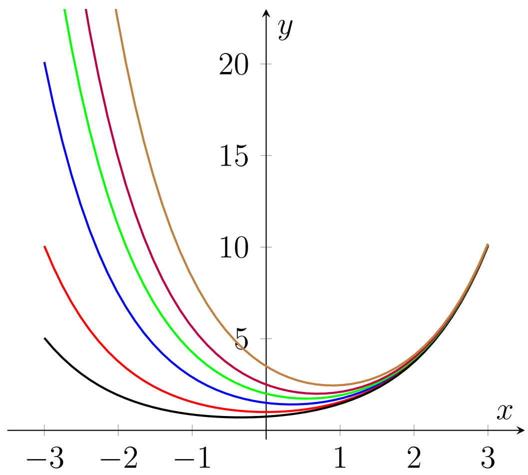
Ovo nam pokazuje da diferencijalna jednadžba prvog reda ima beskonačno mnogo rješenja, a izraz koji obuhvaća sva ta rješenja zove se opće rješenje. Formalno funkcija

$$x \mapsto y(x, C), \tag{2.15}$$

gdje je C proizvoljna konstanta naziva se opće rješenje diferencijalne jednadžbe **??**, ako je funkcija $y(x, C)$ rješenje diferencijalne jednadžbe za svaku vrijednost konstante C.

Posebno ili partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe je svako rješenje koje je moguće dobiti iz općeg uz odgovarajući izbor konstante C. Tako je funkcija u primjeru 2.3 partikularno rješenje dobiveno uvrštavanjem vrijednosti konstante $C = 1$.

Geometrijski gledano, opće rješenje linearne jednadžbe je jednoparametarski skup krivulja za koje smo rekli da se zovu integralne krivulje, a svaka integralna krivulja predstavlja jedno partikularno rješenje. Opće rješenje obične diferencijalne jednadžbe iz primjera 2.3 prikazano je na sljedećoj slici.



Slika 2.3. Grafički prikaz općeg rješenja diferencijalne jednadžbe $y' + y = e^x$.

Opće rješenje osim u eksplicitnom obliku $y(x, C)$ može biti dano implicitnom funkcijom

$$\phi(x, y, C) = 0, \tag{2.16}$$

dok će u nekim slučajevima biti predočeno parametarskim jednadžbama

$$x = x(p, C), y = y(p, C) \tag{2.17}$$

gdje je p parametar.

Postavlja se pitanje kako se bira konstanta C koja definira partikularno rješenje. To radimo nametanjem dodatnih uvjeta koji se obično nazivaju početni uvjeti. Broj uvjeta koje treba nametnuti ovisi o redu jednadžbe, odnosno za definiranje partikularnog rješenja obično treba onoliko uvjeta koliki je red jednadžbe. Problem koji se sastoji od diferencijalne jednadžbe i početnog uvjeta naziva se Cauchyjev problem.

Primjer 2.4. *Neka je zadan sljedeći Cachyjev problem:*

$$\begin{cases} y' + 2y = 3, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{2.18}$$

Opće rješenje ove diferencijalne jednadžbe dano je izrazom:

$$y(x) = \frac{3}{2} + Ce^{-2x}. \tag{2.19}$$

Odredimo sada partikularno rješenje koje zadovoljava zadani početni uvjet. Uvrštavanjem uvjeta u opće rješenje dobivamo:

$$1 = \frac{3}{2} + Ce^{0}, \tag{2.20}$$

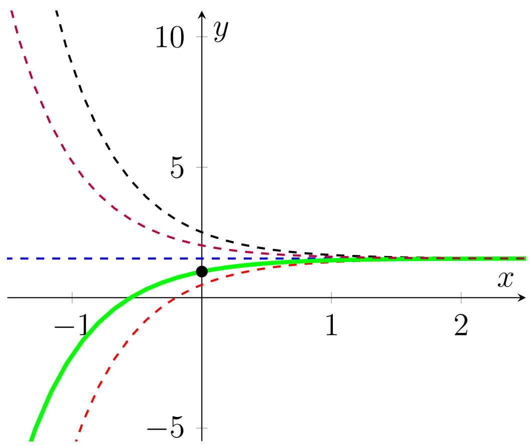
$$1 = \frac{3}{2} + C, \tag{2.21}$$

$$C = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}. \tag{2.22}$$

Dakle, traženo partikularno rješenje je:

$$y(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}. \tag{2.23}$$

Rješenje ovog problema prikazano je na sljedećoj slici.



Slika 2.4. Grafički prikaz rješenja zadanog Cauchyjevog problema s označenim početnim uvjetom. Isprekidane linije predstavljaju integralne krivulje koje ne zadovoljavaju početni uvjet.

2.4. Rješavanje obične diferencijalne jednažbe

Rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi je izuzetno kompleksan zadatak zbog širokog spektra mogućih oblika tih jednadžbi i ponašanja njihovih rješenja. U praksi se susrećemo s raznim vrstama običnih diferencijalnih jednadžbi, od jednostavnih linearnih jednadžbi koje se mogu riješiti osnovnim metodama, do vrlo složenih nelinearnih jednadžbi za koje često ne postoji eksplicitno rješenje.

Zbog te raznolikosti, razvijen je čitav niz metoda za rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi. Ove metode uključuju analitičke pristupe, koji teže pronalaženju egzaktnih rješenja, te numeričke tehnike, koje omogućuju aproksimaciju rješenja kada je analitički pristup nepraktičan ili nemoguć. Svaka od ovih metoda ima svoje prednosti i ograničenja, ovisno o prirodi jednadžbe koja se rješava.

Svakako treba naglasiti da univerzalna metoda rješavanja običnih diferencijalnih jednadžbi ne postoji i da rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi zahtijeva ne samo poznavanje teorije već i praktične vještine u odabiru odgovarajuće metode ovisno o specifičnostima problema. Ova raznolikost metoda i složenost problema čini područje diferencijalnih jednadžbi jednim od najbogatijih i najdinamičnijih polja u matematici i primijenjenim znanostima.

Pokažimo sada na primjeru jednu jednostavnu metodu rješavanja obične diferencijalne jednadžbe koja se zove metoda direktne integracije.

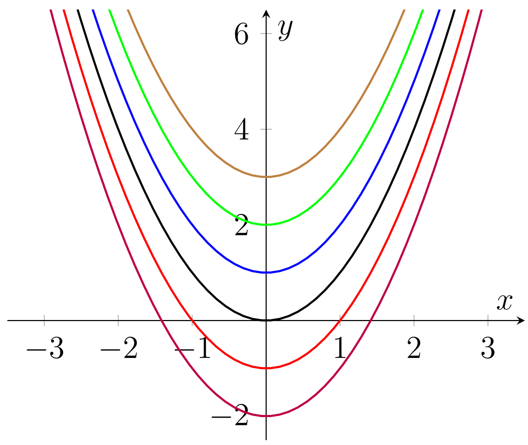
Primjer 2.5. *Riješimo običnu diferencijalnu jedndžbu zadanu s*

$$y' = 2x. \tag{2.24}$$

Integriranjem obiju strana ove jednadžbe dobiva se

$$y = x^2 + C, \tag{2.25}$$

što je opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe. Skup integralnih krivulja koji odgovara ovom rješenju prikazan je na sljedećoj slici.



Slika 2.5. Grafički prikaz općeg rješenja diferencijalne jednadžbe $y' = 2x$.

3. Obične linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima

Jedna od metoda rješavanja sustava običnih diferencijalnih jednadžbi jest metoda supstitucije u kojoj sustav diferencijalnih jednadžbu svodimo na jednu diferencijalnu jednadžbu višeg reda. U ovom radu uglavnom se bavimo linearnim sustavima s konstantnim koeficijentima koji će se onda svoditi na linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima koje obrađujemo u ovom poglavlju.

Obična diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima je diferencijalna jednadžba koja se može zapisati u obliku

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = g(x), \tag{3.1}$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ konstante, $y(x)$ je nepoznata funkcija, a $g(x)$ je poznata funkcija nezavisne varijable x. Ako je $g(x) = 0$, jednadžba je homogena, dok je u suprotnom nehomogena.

3.1. Homogene jednadžbe

Homogena diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima je oblika

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0, \tag{3.2}$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ konstante.

Da bismo riješili homogenu jednadžbu, pretpostavljamo njeno rješenje u obliku

$$y(x) = e^{\lambda x}. \tag{3.3}$$

Uvrštavanjem (3.3) u (3.2) dobivamo:

$$a_n \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \cdots + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0. \tag{3.4}$$

Budući da $e^{\lambda x}$ nije nikada jednako nuli, možemo (**??**) podijeliti s $e^{\lambda x}$ i dobiti algebarsku jednadžbu:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0, \tag{3.5}$$

koja se u tom kontekstu naziva karakteristična jednadžba.

Rješenja (korijeni) karakteristične jednadžbe (3.5) su

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \tag{3.6}$$

i oni definiraju rješenja diferencijalne jednadžbe (3.2). Naglasimo da tih korijena ima n ukoliko je n stupanj polinoma koji definira karakterističnu jednadžbu, ali da među tih n korijena može biti istih. Ako se neki korijen pojavljuje više puta za njega kažemo da je korijen višestrukosti m, gdje je m broj ponavljanja tog korijena.

Ako su svi korijeni različiti, opće rješenje jednadžbe (3.2) je

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}. \tag{3.7}$$

Ako su neki korijeni višestruki, recimo ako je λ_1 korijen višestrukosti m, tada rješenja uključuju i polinom varijable x:

$$(C_1 + C_2 x + \cdots + C_m x^{m-1}) e^{\lambda_1 x}. \tag{3.8}$$

Napomenimo da je (3.8) onaj dio izraza (3.7) koji se odnosi na korijene vrijednosti λ_1.

Ako su korijeni realni brojevi, rješenja navodimo u obliku eksponencijalnih funkcija kako je prikazano. Međutim, ako su korijeni kompleksni brojevi, recimo $\lambda = \alpha \pm i\beta$, tada rješenje navodimo u obliku:

$$y(x) = e^{\alpha x} \left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x) \right). \tag{3.9}$$

Pokažimo sada na nekoliko primjera kako se rješavaju ovakve jednadžbe.

Primjer 3.1. *Riješimo jednadžbu*

$$y^{IV} - 6y''' + 11y'' - 6y' = 0. \tag{3.10}$$

Karakteristična jednadžba ove diferencijalne jednadžbe je oblika

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 11\lambda^2 - 6\lambda = 0, \tag{3.11}$$

odnosno

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0. \tag{3.12}$$

Prema tome, korijeni karakteristične jednadžbe su:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2, \quad \lambda_4 = 3. \tag{3.13}$$

Budući su svi korijeni različiti, opće rješenje diferencijalne jednadžbe bit će linearna kombinacija eksponencijalnih funkcija oblika $e^{r\lambda}$, gdje su λ korijeni karakteristične jednadžbe u skladu s (3.7)*. Dakle, opće rješenje je*

$$y(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{3x}, \tag{3.14}$$

odnosno

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{3x}, \tag{3.15}$$

gdje su C_1, C_2, C_3, C_4 konstante.

Primjer 3.2. *Riješimo jednadžbu*

$$y^V - 4y^{IV} + 8y''' - 4y'' = 0. \tag{3.16}$$

Karakteristična jednadžba ove diferencijalne jednadžbe je oblika

$$\lambda^5 - 4\lambda^4 + 8\lambda^3 - 4\lambda^2 = 0, \tag{3.17}$$

odnosno

$$\lambda^2(\lambda - 2)^3 = 0. \tag{3.18}$$

Budući da je $\lambda_1 = 0$ korijen višestrukosti 2, a $\lambda_2 = 2$ korijen višestrukosti 3, opće rješenje jednadžbe je

$$y(x) = (C_1 + C_2x)e^{0x} + (C_3 + C_4x + C_5x^2)e^{2x}, \tag{3.19}$$

odnosno

$$y(x) = C_1 + C_2x + (C_3 + C_4x + C_5x^2)e^{2x}. \tag{3.20}$$

Primjer 3.3. *Riješimo jednadžbu*

$$y^V - 3y^{IV} + 3y''' - 5y'' + 6y' - 4y = 0. \tag{3.21}$$

Karakteristična jednadžba ove diferencijalne jednadžbe je oblika

$$\lambda^5 - 3\lambda^4 + 3\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda - 4 = 0, \tag{3.22}$$

odnosno

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - (1 + i))(\lambda - (1 - i)) = 0. \tag{3.23}$$

Ova jednadžba ima dva različita realna korijena $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -2$, te jedan konjugirano kompleksni par korijena $\lambda_3 = 1 + i$ i $\lambda_4 = 1 - i$.

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe bit će linearna kombinacija eksponencijalnih i sinusno-kosinusnih funkcija. Za realne korijene $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -2$, rješenje je u obliku eksponencijalnih funkcija, dok za konjugirano kompleksne korijene $\lambda_3 = 1 + i$ i $\lambda_4 = 1 - i$, rješenje sadrži eksponencijalne i trigonometrijske funkcije. Dakle, opće rješenje je:

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x} + e^x(C_3\cos(x) + C_4\sin(x)). \tag{3.24}$$

3.2. Nehomogene jednadžbe

Nehomogena jednadžba ima oblik

$$a_ny^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1y'(x) + a_0y(x) = g(x), \tag{3.25}$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ konstante, a $g(x)$ poznata funkcija.

Opće rješenje nehomogene jednadžbe sastoji se od rješenja homogenog dijela jednadžbe $y_h(x)$ i partikularnog rješenja čitave jednadže $y_p(x)$, odnosno vrijedi

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x). \tag{3.26}$$

Homogenim dijelom jednadžbe smatramo homogenu jednadžbu

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0, \tag{3.27}$$

što znači da funkciju $y_h(x)$ određujemo na način opisan u prethodnom dijelu. Funkciju $y_p(x)$ određivat ćemo metodom neodređenih koeficijenata.

3.2.1. Metoda neodređenih koeficijenata

Metoda neodređenih koeficijenata koristi se kada je $g(x)$ jednostavna funkcija poput polinoma, eksponencijalne funkcije, sinusnih ili kosinusnih funkcija. Pretpostavlja se oblik partikularnog rješenja $y_p(x)$ s neodređenim koeficijentima koji se zatim određuju uvrštavanjem u polaznu jednadžbu.

Primjerice, ako je

$$g(x) = e^{\alpha x} \tag{3.28}$$

pretpostavljamo

$$y_p(x) = Ae^{\alpha x}. \tag{3.29}$$

Ako je nehomogeni dio već prisutan u općem rješenju homogenog dijela, da bismo izbjegli ponavljanje u rješenju, moramo pomnožiti pretpostavljeni oblik partikularnog rješenja s x^m gdje je m višestrukost pripadnog korijena karakteristične jednadžbe.

Pokažimo sada na nekoliko primjera kako funkcionira metoda neodređenih koeficijenata.

Primjer 3.4. *Riješimo sljedeću nehomogenu diferencijalnu jednadžbu:*

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}. \tag{3.30}$$

Prvo rješavamo homogeni dio jednadžbe:

$$y_h'' - 3y_h' + 2y_h = 0, \tag{3.31}$$

čija je karakteristična jednadžba:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0. \tag{3.32}$$

Dobijamo dva realna korijena:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \tag{3.33}$$

pa je opće rješenje homogenog dijela:

$$y_h(x) = C_1e^{2x} + C_2e^x. \tag{3.34}$$

Budući da je desna strana jednadžbe e^{3x}, pretpostavljamo da će partikularno rješenje biti oblika:

$$y_p(x) = Ae^{3x}, \tag{3.35}$$

gdje je A nepoznati koeficijent koji trebamo odrediti.

Izračunajmo prve dvije derivacije pretpostavljenog partikularnog rješenja. Slijedi:

$$y_p'(x) = 3Ae^{3x}, \tag{3.36}$$

$$y_p''(x) = 9Ae^{3x}. \tag{3.37}$$

Sada uvrstimo $y_p(x)$, $y_p'(x)$ i $y_p''(x)$ u polaznu jednadžbu. Dobivamo

$$9Ae^{3x} - 3(3Ae^{3x}) + 2(Ae^{3x}) = e^{3x}, \tag{3.38}$$

$$9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} = e^{3x}, \tag{3.39}$$

$$2Ae^{3x} = e^{3x}. \tag{3.40}$$

Podijelimo obje strane s e^{3x} i dobivamo

$$2A = 1, \tag{3.41}$$

$$A = \frac{1}{2}. \tag{3.42}$$

Prema tome, traženo partikularno rješenje je:

$$y_p(x) = \frac{1}{2}e^{3x}. \tag{3.43}$$

Konačno rješenje nehomogene jednadžbe je zbroj rješenja homogenog dijela i partikularnog rješenja:

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^x + \frac{1}{2}e^{3x}. \tag{3.44}$$

Primjer 3.5. *Riješimo nehomogenu diferencijalnu jednadžbu:*

$$y''' - 2y'' = 3. \tag{3.45}$$

Homogeni dio jednadžbe je:

$$y_h''' - 2y_h'' = 0, \tag{3.46}$$

a njegova karakteristična jednadžba poprima oblik

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 = 0. \tag{3.47}$$

Rješavanjem ove jednadžbe dobivamo dva korijena:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2, \tag{3.48}$$

pri čemu je λ_1 dvostruki korijen, pa je opće rješenje homogenog dijela

$$y_h(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x}. \tag{3.49}$$

Budući da je desna strana jednadžbe konstanta 3, pretpostavili bismo da je partikularno rješenje oblika:

$$y_p(x) = A. \tag{3.50}$$

Međutim, takav se oblik već pojavljuje u općem rješenju i dolazi od korijena $\lambda = 0$. Stoga moramo partikularno rješenje pomnožiti s x^2. Kvadrat stavljamo jer je to korijen višestrukosti 2. Dakle, partikularno rješenje postaje:

$$y_p(x) = Ax^2. \tag{3.51}$$

Izračunajmo sada derivacije partikularnog rješenja $y_p(x) = Ax^2$. Dobivamo:

$$y_p'(x) = 2Ax, \tag{3.52}$$

$$y_p''(x) = 2A, \tag{3.53}$$

$$y_p'''(x) = 0. \tag{3.54}$$

Sada uvrstimo $y_p(x)$, $y_p'(x)$, $y_p''(x)$ i $y_p'''(x)$ u polaznu jednadžbu:

$$y_p''' - 2y_p'' = 3. \tag{3.55}$$

Dobivamo

$$0 - 2(2A) = 3, \tag{3.56}$$

$$A = -\frac{3}{4}. \tag{3.57}$$

Partikularno rješenje je sada oblika:

$$y_p(x) = -\frac{3}{4}x^2. \tag{3.58}$$

Konačno rješenje nehomogene jednadžbe je:

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2. \tag{3.59}$$

3.2.2. Metoda varijacije konstanti

Metoda varijacije parametara je općenitija i primjenjiva na širi spektar funkcija $g(x)$ i uglavnom je koristimo ako funkcija $g(x)$ nema neki jednostavni oblik, tj. nije polinom, eksponencijalna, sinusna ili kosinusa funkcija.

Kod ove metode pretpostavlja se da opće rješenje zadane jednadžbe ima oblik:

$$y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x), \tag{3.60}$$

gdje su $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ rješenja homogene jednadžbe

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0, \tag{3.61}$$

a $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ funkcije koje se određuju rješavanjem sustava:

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) + \cdots + u_n'(x)y_n(x) = 0, \tag{3.62}$$

$$u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) + \cdots + u_n'(x)y_n'(x) = 0, \tag{3.63}$$

$$\vdots \tag{3.64}$$

$$u_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + u_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \cdots + u_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0, \tag{3.65}$$

$$u_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + u_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + u_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = g(x). \tag{3.66}$$

Primijetimo da su ove funkcije kod općeg rješenja homogene jednadžbe konstante, zbog čega se ova metoda i naziva metoda varijacije konstanti.

Pokažimo kako ova metoda funkcionira na jednom primjeru.

Primjer 3.6. *Riješimo diferencijalnu jednadžbu:*

$$y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}. \tag{3.67}$$

Homogeni dio jednadžbe je:

$$y_h'' + y_h = 0, \tag{3.68}$$

s karakterističnom jednadžbom:

$$\lambda^2 + 1 = 0. \tag{3.69}$$

Rješenja karakteristične jednadžbe su:

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i, \tag{3.70}$$

pa je opće rješenje homogenog dijela:

$$y_h(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x). \tag{3.71}$$

Sada pretpostavljamo da opće rješenje polazne jednadžbe ima oblik:

$$y(x) = u_1(x)\cos(x) + u_2(x)\sin(x), \tag{3.72}$$

pri čemu funkcije $u_1(x)$ i $u_2(x)$ određujemo iz sustava

$$u_1'(x)\cos(x) + u_2'(x)\sin(x) = 0, \tag{3.73}$$

$$-u_1'(x)\sin(x) + u_2'(x)\cos(x) = \frac{1}{\cos(x)}. \tag{3.74}$$

Iz prve jednadžbe je:

$$u_1'(x) = -u_2'(x)\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -u_2'(x)\tan(x), \tag{3.75}$$

što uvrštavanjem u drugu jednadžbu daje:

$$-u_2'(x)\tan(x)\sin(x) + u_2'(x)\cos(x) = \frac{1}{\cos(x)}. \tag{3.76}$$

Pojednostavljivanjem dobivamo:

$$u_2'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \tag{3.77}$$

a integriranjem slijedi:

$$u_2(x) = \tan(x) + C_2. \tag{3.78}$$

Sada iz prve jednadžbe za $u_1'(x)$ dobivamo

$$u_1'(x) = -\tan(x), \tag{3.79}$$

odnosno

$$u_1(x) = \ln|\cos(x)| + C_1. \tag{3.80}$$

Sada za konačno rješenje vrijedi

$$y(x) = (\ln|\cos(x)| + C_1)\cos(x) + (\tan(x) + C_2)\sin(x), \tag{3.81}$$

odnosno

$$y(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x) + \ln|\cos(x)|\cos(x) + \tan(x)\sin(x). \tag{3.82}$$

4. Sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi

Sustav običnih diferencijalnih jednadžbi je skup diferencijalnih jednadžbi u kojima se javlja jedna nezavisna varijabla t i određen broj nepoznatih funkcija

$$x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), \tag{4.1}$$

koje u jednadžbama mogu biti uključene i putem derivacija.

Primjer 4.1. *Sustav običnih diferencijalnih jednadžbi oblika*

$$\begin{aligned}
x_1'''' + 2x_2''' - x_3'' + 3x_4 - 4x_5 &= 0,\\
-x_2'''' + x_1''' + 5x_3'' - 3x_4 + x_5' &= 0,\\
3x_3'''' - 4x_1'' + 2x_2''' + 6x_3 + x_5'' &= 0,\\
x_4'''' - 2x_1''' + x_2'' + 4x_3' - 5x_5 &= 0,\\
-x_5'''' + 3x_1'' - 2x_2''' + x_3' - 6x_4 &= 0
\end{aligned} \tag{4.2}$$

je primjer sustava običnih diferencijalnih jednadžbi s pet nepoznatih funkcija x_1, x_2, ..., x_5 nezavisne varijable t.

4.1. Kanonska forma sustava običnih diferencijalnih jednadžbi

U teoriji diferencijalnih jednadžbi pokazuje se da je svaki sustav jednadžbi bilo kojeg reda moguće svesti na sustav jednadžbi prvog reda te je tog razloga dovoljno promatrati samo sustave jednadžbi prvog reda. Takav sustav u svojoj najopćenitijoj formi izgleda ovako:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n),\\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n),\\
&\cdots\\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n),
\end{aligned} \tag{4.3}$$

gdje su f_n neke unaprijed zadane funkcije. Ovakva se forma obično naziva normalna ili kanonska forma sustava običnih diferencijalnih jednadžbi.

Pokažimo sada taj postupak na primjeru.

Primjer 4.2. *Razmotrimo sustav diferencijalnih jednadžbi drugog reda s dvije funkcije $y_1(t)$ i $y_2(t)$:*

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y_1(t)}{dt^2} + 3\frac{dy_1(t)}{dt} + 2y_1(t) &= \sin(t), \\
\frac{d^2y_2(t)}{dt^2} + 4\frac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t) &= \cos(t).
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

Da bismo ovaj sustav diferencijalnih jednadžbi drugog reda sveli na sustav jednadžbi prvog reda, definirajmo nove varijable:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= y_1(t), \qquad x_2(t) = \frac{dy_1(t)}{dt}, \\
x_3(t) &= y_2(t), \qquad x_4(t) = \frac{dy_2(t)}{dt}.
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

Sada možemo zapisati jednadžbe za $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ *i* $x_4(t)$ *kao:*

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t), \\
\frac{dx_2(t)}{dt} &= \sin(t) - 3x_2(t) - 2x_1(t), \\
\frac{dx_3(t)}{dt} &= x_4(t), \\
\frac{dx_4(t)}{dt} &= \cos(t) - 4x_4(t) - x_3(t).
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

Na taj način smo originalni sustav diferencijalnih jednadžbi drugog reda sveli na sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda za funkcije $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ *i* $x_4(t)$.

Opće rješenje sustava običnih diferencijalnih jednadžbi, analogno kao i kod jedne jednadžbe uključuje sve moguće rješenja sustava i obično sadrži n nepoznatih konstanti (jednu za svaku nepoznatu funkciju). Ovo rješenje predstavlja cijelu familiju funkcija koje zadovoljavaju diferencijalne jednadžbe uključene u sustav.

4.2. Linearni i nelinearni sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi

Linearni sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi su sustavi u kojima su sve diferencijalne jednadžbe linearne u odnosu na nepoznate funkcije i njihove derivacije. Opći oblik linearnog sustava običnih diferencijalnih jednadžbi za n nepoznatih funkcija $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ može se zapisati kao:

$$
\frac{dx_1(t)}{dt} = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t), \tag{4.7}
$$

$$
\frac{dx_2(t)}{dt} = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t), \tag{4.8}
$$

$$
\vdots
$$

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t), \tag{4.9}$$

gdje su $a_{ij}(t)$ koeficijenti koji mogu biti funkcije vremena t (ili konstante), a $b_i(t)$ su poznate funkcije vremena t koje predstavljaju slobodne članove.

Nelinearni sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi su sustavi u kojima barem jedna diferencijalna jednadžba nije linearna u odnosu na nepoznate funkcije ili njihove derivacije.

U inženjerstvu često se nalazi na sustave koji se modeliraju skupom linearnih diferencijalnih jednadžbi, posebice onih s konstantnim koeficijentima.

Primjer 4.3. *Razmotrimo sljedeći linearni sustav običnih diferencijalnih jednadžbi:*

$$\frac{dx_1}{dt} = 3x_1 + 2x_2, \tag{4.10}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 4x_2. \tag{4.11}$$

Ovaj sustav je linearan jer su obje jednadžbe linearne kombinacije x_1 i x_2.

Primjer 4.4. *Razmotrimo sada sljedeći nelinearni sustav običnih diferencijalnih jednadžbi:*

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1^2 + x_2 \tag{4.12}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \sin(x_1) + x_1x_2 \tag{4.13}$$

Ovaj sustav je nelinearan jer se u prvoj jednadžbi pojavljuje x_1^2, a u drugoj $\sin(x_1)$ i produkt x_1x_2.

Linearni sustav običnih diferencijalnih jednadžbi je homogen ako su svi slobodni članovi u jednadžbama jednaki nuli. To znači da se jednadžbe sustava mogu zapisati bez članova koji ne sadrže nepoznate funkcije.

Opći oblik homogenog linearnog sustava za n nepoznatih funkcija $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ može se zapisati kao:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t), \tag{4.14}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t), \tag{4.15}$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t). \tag{4.16}$$

Drugim riječima, homogeni sustav ne sadrži slobodne članove $b_i(t)$ (koji bi ovisili samo o varijabli t ili bili konstante), tj. $b_1(t) = b_2(t) = \cdots = b_n(t) = 0$.

Primjer 4.5. *Razmotrimo sljedeći sustav:*

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 3x_2, \tag{4.17}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 4x_2. \tag{4.18}$$

Ovaj sustav je homogen jer ne sadrži slobodne članove.

Primjer 4.6. *Razmotrimo sljedeći sustav:*

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 3x_2 + 5 \tag{4.19}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 4x_2 + 7 \tag{4.20}$$

Ovdje 5 *i* 7 *predstavljaju slobodne članove, što čini sustav nehomogenim.*

4.3. Autonomni i neautonomni sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi

Autonomni sustav običnih diferencijalnih jednadžbi je sustav u kojemu derivacije nepoznatih funkcija ovise samo o tim funkcijama, a ne o nezavisnoj varijabli (najčešće vremenu t. Drugim riječima, autonomni sustavi nemaju eksplicitnu ovisnost o varijabli t.

Opći oblik autonomnog sustava za n nepoznatih funkcija $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ može se zapisati kao:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{4.21}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{4.22}$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{4.23}$$

Primjer 4.7. *Razmotrimo sljedeći sustav:*

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1^2 - x_2, \tag{4.24}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2. \tag{4.25}$$

Ovaj sustav je autonoman jer ni jedna od jednadžbi ne sadrži eksplicitnu ovisnost o varijabli t.

Neautonomni sustav običnih diferencijalnih jednadžbi je sustav u kojemu derivacije nepoznatih funkcija ovise i o nepoznatim funkcijama i o nezavisnoj varijabli (npr. vremenu t.

Opći oblik neautonomnog sustava za n nepoznatih funkcija $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ može se zapisati kao:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{4.26}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{4.27}$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{4.28}$$

Primjer 4.8. *Razmotrimo sljedeći sustav:*

$$\frac{dx_1}{dt} = tx_1 + \sin(t), \tag{4.29}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2 + e^t. \tag{4.30}$$

Ovaj sustav je neautonoman jer obje jednadžbe sadrže eksplicitnu ovisnost o vremenu t.

5. Rješavanje sustava običnih diferencijalnih jednadžbi metodom supstitucije

Neka nam je zadan sustav običnih diferencijalnih jednadžbi u svojoj kanonskoj formi s:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ &\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n), \end{aligned} \tag{5.1}$$

uz iste oznake kao u prethodnom poglavlju. Ovaj se sustav svodi na jednu diferencijalnu jednadžbu n-tog reda tako da uočimo jednu nepoznatu funkciju, na primjer $x_1(t)$ pa nađemo njene derivacije:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}, \frac{d^3x_1}{dt^3}, ..., \frac{d^nx_1}{dt^n}. \tag{5.2}$$

Iz prve jednadžbe sustava, prema pravilu za derivaciju složene funkcije slijedi

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + ... + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}, \tag{5.3}$$

te ako uvrstimo u ovu jednadžbu u izraze za derivacije $\frac{dx_i}{dt}, i = 1, 2, ..., n$ iz sustava dobit ćemo

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = g_2(t, x_1, x_2, ..., x_n). \tag{5.4}$$

Analogno dobijemo

$$\frac{d^3x_1}{dt^3} = g_3(t, x_1, x_2, ..., x_n), \tag{5.5}$$

a postupak možemo nastaviti do sustava:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \frac{d^2x_q}{dt^2} &= g_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ &\cdots \\ \frac{d^nx_1}{dt^n} &= g_n(t, x_1, x_2, ..., x_n).y \end{aligned} \tag{5.6}$$

Iz sustava (5.6) teoretski je moguće eliminirati $n - 1$ nepoznatu funkciju $x_2, ..., x_n$. Ipak treba napomenuti da je to izvedivo računski samo u najjednostavnijim slučajevima, kada kao rezultat te eliminacije dobijemo

$$F(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, ..., \frac{d^nx_1}{dt^n}). \tag{5.7}$$

Ovo je diferencijalna jednadžba n - tog reda za nepoznatu funkciju x_1 ali smo umjesto x_1 mogli uzeti bilo koju drugu nepoznatu funkciju.

Opće rješenje jednadžbe (5.7) je sada oblika

$$x_1 = \varphi_1(t, C_1, C_2, ..., C_n). \tag{5.8}$$

Ako iz ovog izraza izračunamo derivacije funkcije $x_1(t)$ i uvrstimo ih u (5.6), dobijemo nepoznate funkcije $x_2, ..., x_n$ sustava običnih jednadžbi, a ne diferencijalnih, iz kojega u jednostavnijem slučaju možemo izračunati

$$\begin{aligned} x_2 &= \varphi_2(t, C_1, C_2, ..., C_n) \\ &\cdots \\ x_n &= \varphi_n(t, C_1, C_2, ..., C_n). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Funkcije (5.8) i (5.9) tvore opće rješenje zadanog sustava.

Pokažimo sada na nekoliko primjera kako ova metoda funkcionira. Najprije razmatramo jedan homogeni sustav.

Primjer 5.1. *Riješimo sustav običnih diferencijalnih jednadžbi zadan s*

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 4y, \\ y' &= -2x + y. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Deriviranjem prve jednadžbe slijedi

$$x'' = 3x' + 4y', \tag{5.11}$$

u što uvrštavamo drugu jednadžbu. Dobivamo

$$x'' = 3x' + 4(y - 2x), \tag{5.12}$$

odnosno

$$x'' = 3x' + 4y - 8x \tag{5.13}$$

Sada iz prve jednadžbe izrazimo y:

$$y = \frac{1}{4}(x' - 3x), \tag{5.14}$$

što uvrstimo u jednadžbu za x''. Slijedi

$$x'' = 3x' + x' - 3x - 8x, \tag{5.15}$$

odnosno

$$x'' = 4x' - 11x. \tag{5.16}$$

Dobili smo homogenu linearnu jednadžbu s konstantnim koeficijentima koju rješavamo kroz karakterističnu jednadžbu:

$$r^2 - 4r + 11 = 0, \tag{5.17}$$

čija su rješenja

$$r = 2 \pm i\sqrt{7}. \tag{5.18}$$

Sada dobivamo opće rješenje za $x(t)$:

$$x(t) = e^{2t}\left(C_1\cos(\sqrt{7}t) + C_2\sin(\sqrt{7}t)\right) \tag{5.19}$$

Kada znamo $x(t)$, možemo pronaći $y(t)$ iz prve jednadžbe. Najprije izračunamo $x'(t)$:

$$x'(t) = 2e^{2t}\left(C_1\cos(\sqrt{7}t) + C_2\sin(\sqrt{7}t)\right) + e^{2t}\left(-C_1\sqrt{7}\sin(\sqrt{7}t) + C_2\sqrt{7}\cos(\sqrt{7}t)\right), \tag{5.20}$$

što uvrštavamo u izraz za $y(t)$. Slijedi:

$$\begin{gathered} y(t) = \frac{1}{4}\left[2e^{2t}\left(C_1\cos(\sqrt{7}t) + C_2\sin(\sqrt{7}t)\right) + \right. \\ \left. e^{2t}\left(-C_1\sqrt{7}\sin(\sqrt{7}t) + C_2\sqrt{7}\cos(\sqrt{7}t)\right) - 3e^{2t}\left(C_1\cos(\sqrt{7}t) + C_2\sin(\sqrt{7}t)\right)\right] \end{gathered} \tag{5.21}$$

Konačno, rješenje sustava je:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{2t}\left(C_1\cos(\sqrt{7}t) + C_2\sin(\sqrt{7}t)\right), \\ y(t) &= \frac{1}{4}\left[e^{2t}\left(-C_1\cos(\sqrt{7}t) + C_2\sqrt{7}\cos(\sqrt{7}t) + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. (2-\sqrt{7})C_1\sin(\sqrt{7}t) - 3C_2\sin(\sqrt{7}t)\right)\right], \end{aligned} \tag{5.22}$$

gdje su C_1 i C_2 konstante.

Pokažimo sada kako se rješava početni problem, odnosno problem u kojem su nam uz sustav poznati i početni uvjeti.

Primjer 5.2. *Riješimo sustav običnih diferencijalnih jednadžbi*

$$\begin{aligned} x' &= 2x + 3y, \\ y' &= -x + 4y, \end{aligned} \tag{5.23}$$

uz početne uvjete:

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0. \tag{5.24}$$

Prvu jednadžbu deriviramo s obzirom na t. Slijedi:

$$x'' = 2x' + 3y'. \tag{5.25}$$

Sada uvršavamo izraz za y' iz sustava u jednadžbu za x'':

$$x'' = 2x' + 3(4y - x), \tag{5.26}$$

što možemo preurediti kao:

$$x'' = 2x' + 12y - 3x. \tag{5.27}$$

Iz prve jednadžbe izrazimo y:

$$y = \frac{1}{3}(x' - 2x), \tag{5.28}$$

te ga uvrstimo u jednadžbu za x''. Slijedi

$$x'' = 2x' + 12\left(\frac{1}{3}(x' - 2x)\right) - 3x, \tag{5.29}$$

odnosno

$$x'' = 2x' + 4(x' - 2x) - 3x, \tag{5.30}$$

$$x'' - 6x' + 11x = 0. \tag{5.31}$$

Karakteristična jednadžba ove jednadžbe glasi:

$$r^2 - 6r + 11 = 0, \tag{5.32}$$

a njena su rješenja

$$r = 3 \pm i\sqrt{2}. \tag{5.33}$$

Opće rješenje za $x(t)$ je sada oblika:

$$x(t) = e^{3t}\left(C_1\cos(\sqrt{2}t) + C_2\sin(\sqrt{2}t)\right). \tag{5.34}$$

Sada izračunamo derivaciju funkcije $x(t)$:

$$x'(t) = 3e^{3t}\left(C_1\cos(\sqrt{2}t) + C_2\sin(\sqrt{2}t)\right) + e^{3t}\left(-C_1\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) + C_2\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)\right). \tag{5.35}$$

Izraz za $y(t)$ dobijemo iz prve jednadžbe uvrštavanjem $x'(t)$ i $x(t)$:

$$\begin{gathered} y(t) = \frac{1}{3}\left[3e^{3t}\left(C_1\cos(\sqrt{2}t) + C_2\sin(\sqrt{2}t)\right) + \right. \\ \left. e^{3t}\left(-C_1\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) + C_2\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)\right) - 2e^{3t}\left(C_1\cos(\sqrt{2}t) + C_2\sin(\sqrt{2}t)\right)\right]. \end{gathered} \tag{5.36}$$

Sada uvrstimo početne uvjete $x(0) = 1$ i $y(0) = 0$. Slijedi

$$x(0) = e^0\left(C_1\cos(0) + C_2\sin(0)\right) = C_1 = 1 \tag{5.37}$$

te

$$y(0) = \frac{1}{3}\left[3C_1 + C_2\sqrt{2} - 2C_1\right] = \frac{1}{3}\left(C_1 + C_2\sqrt{2}\right), \tag{5.38}$$

$$0 = \frac{1}{3}(1 + C_2\sqrt{2}). \tag{5.39}$$

Konačno rješenje je:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{3t}\left(\cos(\sqrt{2}t) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\right), \\ y(t) &= e^{3t}\left(\frac{1}{3}\cos(\sqrt{2}t) - \frac{2}{3\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\right). \end{aligned} \tag{5.40}$$

U sljedećem je primjeru dan sustav s većim brojem nepoznanica.

Primjer 5.3. *Riješimo sustav običnih diferencijalnih jednadžbi zadan s:*

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + x_2, \\ x_2' &= x_1 + 3x_2 + x_3, \\ x_3' &= x_2 + 2x_3 + x_4, \\ x_4' &= x_3 + 4x_4. \end{aligned} \tag{5.41}$$

Iz prve jednadžbe možemo izraziti x_2:

$$x_2 = x_1' - 2x_1. \tag{5.42}$$

Zatim zamjenjujemo ovaj izraz za x_2 u drugu jednadžbu:

$$x_2' = (x_1' - 2x_1)' + 3(x_1' - 2x_1) + x_3. \tag{5.43}$$

Deriviramo izraz:

$$x_2' = x_1'' - 2x_1' + 3x_1' - 6x_1 + x_3 = x_1'' + x_1' - 6x_1 + x_3. \tag{5.44}$$

Sada možemo izraziti x_3:

$$x_3 = x_2' - x_1'' - x_1' + 6x_1. \tag{5.45}$$

Zatim zamjenjujemo ovaj izraz za x_3 u treću jednadžbu:

$$x_3' = (x_2' - x_1'' - x_1' + 6x_1)' + 2(x_2' - x_1'' - x_1' + 6x_1) + x_4. \tag{5.46}$$

Deriviramo izraz:

$$x_3' = x_2'' - x_1''' - x_1'' + 6x_1' + 2x_2' - 2x_1'' - 2x_1' + 12x_1 + x_4. \tag{5.47}$$

Slijedi:

$$x_3' = x_2'' + 2x_2' - x_1''' - 3x_1'' + 4x_1' + 12x_1 + x_4. \tag{5.48}$$

Sada možemo izraziti x_4:

$$x_4 = x_3' - x_2'' - 2x_2' + x_1''' + 3x_1'' - 4x_1' - 12x_1. \tag{5.49}$$

Zadnja jednadžba, koja uključuje x_4, postaje:

$$x_4' = (x_3' - x_2'' - 2x_2' + x_1''' + 3x_1'' - 4x_1' - 12x_1)' + 4(x_3' - x_2'' - 2x_2' + x_1''' + 3x_1'' - 4x_1' - 12x_1). \tag{5.50}$$

Deriviramo i sređujemo sve članove:

$$x_4' = x_1^{(4)} + 5x_1''' + 10x_1'' + 10x_1' + 5x_1. \tag{5.51}$$

Ovo je homogena linearna diferencijalna jednadžba četvrtog reda za $x_1(t)$. Karakteristična jednadžba za ovu diferencijalnu jednadžbu je:

$$r^4 + 5r^3 + 10r^2 + 10r + 5 = 0 \tag{5.52}$$

Korijeni karakteristične jednadžbe su:

$$r_1 = -1, \quad r_2 = -1, \quad r_3 = -1 + \sqrt{2}i, \quad r_4 = -1 - \sqrt{2}i. \tag{5.53}$$

S obzirom na to da imamo dvojni realni korijen $r_1 = r_2 = -1$ i dva kompleksna korijena $r_3 = -1 + \sqrt{2}i$ i $r_4 = -1 - \sqrt{2}i$, opće rješenje za $x_1(t)$ je:

$$x_1(t) = e^{-t}\left(C_1 + C_2 t + C_3\cos(\sqrt{2}t) + C_4\sin(\sqrt{2}t)\right) \tag{5.54}$$

Koristimo izraze za $x_2(t)$, $x_3(t)$ i $x_4(t)$ koje smo dobili ranije. Izračunamo derivaciju $x_1'(t)$:

$$\begin{aligned} x_1'(t) = -e^{-t}&\left(C_1 + C_2 t + C_3\cos(\sqrt{2}t) + C_4\sin(\sqrt{2}t)\right) + \\ e^{-t}&\left(C_2 + C_3\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) - C_4\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)\right) \end{aligned} \tag{5.55}$$

Tada je:

$$\begin{aligned} x_2(t) = -e^{-t}&\left(C_1 + C_2 t + C_3\cos(\sqrt{2}t) + C_4\sin(\sqrt{2}t)\right) + \\ e^{-t}&\left(C_2 + C_3\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) - C_4\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)\right) \\ -2e^{-t}&\left(C_1 + C_2 t + C_3\cos(\sqrt{2}t) + C_4\sin(\sqrt{2}t)\right) \end{aligned} \tag{5.56}$$

Za $x_3(t)$ i $x_4(t)$ izrazi su slični, a dobivamo ih koristeći ranije dobivene odnose.

Konačno rješenje za sustav je:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-t}\left(C_1 + C_2 t + C_3\cos(\sqrt{2}t) + C_4\sin(\sqrt{2}t)\right), \\ x_2(t) &= e^{-t}\left(-3C_1 - 3C_2 t + (C_2 - 2C_3\cos(\sqrt{2}t)) - (2C_4 + C_4\sqrt{2})\sin(\sqrt{2}t)\right), \\ x_3(t) &= e^{-t}\left(6C_1 + 6C_2 t + 3C_3\cos(\sqrt{2}t) + 3C_4\sin(\sqrt{2}t)\right), \\ x_4(t) &= e^{-t}\left(4C_1 + 4C_2 t - C_2\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) + C_4\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)\right). \end{aligned} \tag{5.57}$$

gdje su C_1, C_2, C_3, i C_4 konstante.

Riješimo sada još jedan primjer nehomogenog sustava.

Primjer 5.4. *Odredimo opće rješenje sustava običnih diferencijalnih jednadžbi zadanog s:*

$$\begin{aligned} x_1' &= 4x_1 + 9x_2 + 5t + 12, \\ x_2' &= x_1 + 4x_2 + 3t. \end{aligned} \tag{5.58}$$

Iz druge jednadžbe slijedi:

$$x_1 = x_2' - 4x_2 - 3t, \tag{5.59}$$

što uvrštavamo u prvu jednadžbu. Dobivamo

$$x_1' = 4(x_2' - 4x_2 - 3t) + 9x_2 + 5t + 12, \tag{5.60}$$

$$x_1' = 4x_2' - 7x_2 - 7t + 12. \tag{5.61}$$

Deriviranjem prve jednadžbe slijedi

$$x_1' = x_2'' - 4x_2' - 3, \tag{5.62}$$

što uvrštavanjem u dobiveni izraz daje

$$x_2'' - 4x_2' - 3 = 4x_2' - 7x_2 - 7t + 12, \tag{5.63}$$

odnosno

$$x_2'' - 8x_2' + 7x_2 = -7t + 15. \tag{5.64}$$

Ova jednadžba je linearna diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima i desnom stranom koja ovisi o vremenu.

Pripadna homogena jednadžba je:

$$x_2'' - 8x_2' + 7x_2 = 0, \tag{5.65}$$

a njena karakteristična jednadžba glasi:

$$r^2 - 8r + 7 = 0. \tag{5.66}$$

Rješenja karakteristične jednadžbe su

$$r_1 = 7, \quad r_2 = 1. \tag{5.67}$$

Opće rješenje homogene jednadžbe je:

$$x_{2h}(t) = C_1 e^{7t} + C_2 e^t \tag{5.68}$$

Partikularno rješenje pretpostavljamo u obliku:

$$x_{2p}(t) = At + B. \tag{5.69}$$

Uvrštavanjem u jednadžbu dobijamo:

$$0 - 8A + 7(At + B) = -7t + 15 \tag{5.70}$$

Odakle slijedi:

$$7A = -7 \quad \Rightarrow \quad A = -1, \tag{5.71}$$

te

$$-8A + 7B = 15 \quad \Rightarrow \quad 8 + 7B = 15 \quad \Rightarrow \quad B = 1. \tag{5.72}$$

Tada je partikularno rješenje:

$$x_{2p}(t) = -t + 1 \tag{5.73}$$

Konačno rješenje za x_2 je:

$$x_2(t) = C_1 e^{7t} + C_2 e^{t} - t + 1 \tag{5.74}$$

Deriviramo $x_2(t)$:

$$x_2'(t) = 7C_1 e^{7t} + C_2 e^{t} - 1 \tag{5.75}$$

I uvrstimo i izraz za $x_1(t)$:

$$x_1(t) = (7C_1 e^{7t} + C_2 e^{t} - 1) - 4(C_1 e^{7t} + C_2 e^{t} - t + 1) - 3t, \tag{5.76}$$

$$x_1(t) = 7C_1 e^{7t} + C_2 e^{t} - 1 - 4C_1 e^{7t} - 4C_2 e^{t} + 4t - 4 - 3t, \tag{5.77}$$

$$x_1(t) = 3C_1 e^{7t} - 3C_2 e^{t} + t - 5 \tag{5.78}$$

Konačno rješenje sustava glasi:

$$x_1(t) = 3C_1 e^{7t} - 3C_2 e^{t} + t - 5, \tag{5.79}$$

$$x_2(t) = C_1 e^{7t} + C_2 e^{t} - t + 1. \tag{5.80}$$

6. Rješavanje sustava običnih diferencijalnih jednadžbi matričnom metodom

Linearne sustave s konstantim koeficijentima možemo riješavati i na drugi način korištenjem matričnog postupka. Sustav možemo napisati u obliku matrične jednakosti

$$\dot{x} = Ax + B, \tag{6.1}$$

gdje je

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{b2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}.$$

Opće rješenje moguće je napisati u obliku

$$x = x_h + x_p \tag{6.2}$$

gdje je x_h opće rješenje pridruženog homogenog sustava

$$\dot{x} = Ax, \tag{6.3}$$

a x_p jedno partikularno rješenje zadanog nehomogenog sustava.

Rješenje sustava (6.3) tražimo po analogiji s linearnom diferencijalnom jednadžbom prvog reda, u obliku

$$x = ye^{\lambda t} \tag{6.4}$$

gdje je y nepoznati vektor. Tada je

$$\dot{x} = \lambda y e^{\lambda t}, \tag{6.5}$$

što uvrštavanjem u (6.3) daje

$$(A - \lambda E)y = 0, \tag{6.6}$$

gdje je E jedinična matrica.

Ovakva se jednadžba naziva karakteristična jednadžba sustava te je ta jednadžba ekvivalentra sustavu

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n &= 0, \\ a_{21}y_1 + (a_{22} - \lambda)y_2 + \cdots + a_{2n}y_n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + (ann - \lambda)y_n &= 0. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Da bi ovaj sustav imao netrivijalno rješenje mora biti

$$Det(A - \lambda E) = 0. \tag{6.8}$$

Ovo je jednadžba n- tog reda sa nepoznanicom λ čija se rješenja zovu svojstvene vrijednosti matrice A, a rješenja su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Jednostavnosti radi promatramo samo slučaj kada su sve ove vrijednosti realne i međusobno različite. Svakoj vrijednosti od λ pripada vektor s koordinatama $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ koje su rješenje sustava te se taj vektor naziva svojstveni vektor matrice A.

Može se pokazati da je tako dobiveni skup vektora $\{y^1, y^2, \ldots, y^n\}$ linearno nezavisan te dobivamo da je opće rješenje sustava (6.3)

$$y_h = C_1 y^1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + C_n y^n e^{\lambda_n t}, \tag{6.9}$$

gdje su $C_1, \ldots, C_n$ proizvoljne konstante.

Riješimo sada ponovo primjer

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4x_1 + 9x_2 + 5t + 12 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 4x_2 + 3t \end{aligned}$$

Slijedi:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5t + 12 \\ 3t \end{bmatrix},$$

pa jednadžba (6.8) poprima oblik

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 9 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{6.10}$$

odnosno

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0. \tag{6.11}$$

Rješenja su e $\lambda_1 = 1$ i$\lambda_2 = 7$ za koje iz (6.7) naalzimo pripadne vektore.

Za $\lambda_1 = 1$ sustav postaje

$$\begin{aligned} 3y_1 + 9y_2 &= 0 \\ y_1 + 3y_2 &= 0, \end{aligned}$$

pa je npr. $y_1 = 3, y_2 = -1$ jedno rješenje. Slično, nalazimo $y_1 = 3, y_2 = 1$ kao jedno od rješenja za $\lambda_2 = 7$. Pripadni vektori su

$$y_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad y_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{6.12}$$

pa je rješenje homogenog sustava

$$x_h = C_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{7t}. \tag{6.13}$$

Ovime smo dobili rješenje homogenog dijela sustav. Konačno rješenje sustava dobivamo na način opisan u prethodnom poglavlju.

7. Laplaceova transformacija

Pierre-Simon Laplace, francuski matematičar i astronom, prvi je uveo ovu transformaciju krajem 18. stoljeća. Iako je Laplaceova transformacija u početku bila razvijena za rješavanje problema u astronomiji i mehanici, njezin puni potencijal postao je očigledan tek kasnije, kada su je inženjeri i znanstvenici počeli koristiti u analizi električnih i mehaničkih sustava.

Laplaceova transformacija je matematički alat koji je postao ključan u analizi i sintezi dinamičkih sustava, osobito u inženjerskim disciplinama kao što su elektrotehnika, strojarstvo i upravljanje sustavima. Ova transformacija omogućava pretvaranje diferencijalnih jednadžbi, koje opisuju dinamiku sustava, u algebarske jednadžbe koje su jednostavnije za rješavanje. Pri tome matematička operacija deriviranja prelazi u množenje s Laplaceovom varijablom s, a integriranje u dijeljenje s varijablom s.

Laplaceova transformacija funkcije $f(t)$ definira se integralom:

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt. \tag{7.1}$$

Jedan od ključnih elemenata Laplaceove transformacije su njezina linearna svojstva, što znači da transformacija linearne kombinacije funkcija odgovara linearnoj kombinaciji njihovih transformacija.

Iako je Laplaceova transformacija moćan alat, ona ima i svoja ograničenja. Jedno od glavnih ograničenja je da se može primijeniti samo na funkcije koje su definirane za $t \geq 0$ i koje su eksponencijalno ograničene. To znači da funkcije koje rastu brže od eksponencijalne funkcije nisu pogodne za ovu transformaciju. Pored toga, Laplaceova transformacija može biti kompleksna za funkcije koje imaju diskontinuitete ili singularitete. Uz to može se desiti i da pri praktičnoj primjeni, posebno u digitalnim računalima, mogu se javiti numerički problemi izračuna. Također nije primjenjiva za nelinearne sustave koji nisu prethodno linearizirani.

Navedimo sada osnovna svojstva Laplaceove transformacije nužna za rješavanje sustava običnih diferencijalnih jednadžbi.

Teorem 7.1 (Linearnost integralne transformacije)**.** *Neka su zadane funkcije $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ te neka je $\mathcal{L}$ Laplaceova transformacija. Vrijedi:*

$$\mathcal{L}\left\{af(t) + bg(t)\right\} = a\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} + b\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}, \tag{7.2}$$

pri čemu su a i b proizvoljne konstante.

Teorem 7.2 (Teorem sličnosti)**.** *Neka je f funkcija koja zadovoljava uvjete za postojanje Laplaceove transformacije. Tada za realnu konstantu $\omega > 0$ vrijedi*

$$\mathcal{L}\left\{f(\omega t)\right\} = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{s}{\omega}\right). \tag{7.3}$$

Teorem 7.3 (Teorem o prigušenju (pomaku u slici))**.** *Neka je $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)$ i $a \in \mathbb{R}$. Tada je*

$$\mathcal{L}\left\{e^{at} f(t)\right\} = F(s-a). \tag{7.4}$$

Teorem 7.4 (Teorem o derivaciji slike)**.** *Ako je $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)$, tada je*

$$\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n F^{(n)}(s),\ n \in \mathbb{N}. \tag{7.5}$$

Teorem 7.5 (Teorem o slici derivacije)**.** *Ako je $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)$, tada je*

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = -f(0) + sF(s). \tag{7.6}$$

Teorem 7.6 (Teorem o slici derivacije n-tog reda)**.** *Ako je $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)$, tada je*

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0). \tag{7.7}$$

Teorem 7.7 (Teorem o pomaku originala)**.** *Ako je $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, a $u(t)$ Heavisideova fukcija, tada je*

$$\mathcal{L}\left\{f(t-a)u(t-a)\right\} = e^{-as} F(s). \tag{7.8}$$

Teorem 7.8 (Teorem o slici Diracove delta funkcije)**.** *Ako je $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)$, tada je*

$$\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\} = 1. \tag{7.9}$$

Korištenjem navedenih teorema, kao i mnogih drugih, napravljene su posebne tablice koje nam prikazuju slike velikog broja funkcija. Primjer takve tablice prikazan je u tablici 7.1.

7.1. Rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi korištenjem Laplaceove transformacije

Pokažimo sada kako se Laplaceove transformacije koriste za rješavanje običnih diferencijalnih jednažbi.

Razmotrimo diferencijalnu jednadžbu drugog reda u kojoj se s desne strane pojavljuje Diracova delta funkcija:

$$y'' + 3y' + 2y = \delta(t-1) \tag{7.10}$$

s početnim uvjetima:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \tag{7.11}$$

Tablica 7.1. Tablica Laplaceovih transformacija

Redni broj	$f(t)$	$F(w) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1.	1	$\frac{1}{w}$
2.	e^{at}	$\frac{1}{w-a}$
3.	t^n	$\frac{n!}{w^{n+1}}$
4.	$\sin(at)$	$\frac{a}{w^2+a^2}$
5.	$\cos(at)$	$\frac{w}{w^2+a^2}$
6.	$e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(w-a)^2+b^2}$
7.	$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{w-a}{(w-a)^2+b^2}$
8.	$t\sin(at)$	$\frac{2aw}{(w^2+a^2)^2}$
9.	$t\cos(at)$	$\frac{w^2-a^2}{(w^2+a^2)^2}$

Primijenimo Laplaceovu transformaciju na obje strane diferencijalne jednadžbe. Koristimo teorem o slici derivacije, slici delta funkcije, linearnost i teorem o pomaku originala:

$$\mathcal{L}\{y''\} + 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-1)\} \tag{7.12}$$

Dobivamo: Zamijenimo ove izraze u jednadžbu:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = e^{-s}, \tag{7.13}$$

a zbog početnih uvjeta $y(0) = 0$ i $y'(0) = 0$, jednadžba postaje:

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = e^{-s}. \tag{7.14}$$

Nadalje je:

$$Y(s)(s^2 + 3s + 2) = e^{-s}, \tag{7.15}$$

$$Y(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 + 3s + 2}, \tag{7.16}$$

$$Y(s) = e^{-s}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right). \tag{7.17}$$

Inverznom Laplaceovom transformacijom slijedi

$$y(t) = u(t-1)\left(e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)}\right), \tag{7.18}$$

gdje je $u(t-1)$ Heavisideova stepenasta funkcija. Rješenje se može napisati i u obliku:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } t < 1, \\ e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)} & \text{za } t \geq 1. \end{cases} \tag{7.19}$$

7.2. Rješavanje sustava diferencijalnih jednadžbi korištenjem Laplaceove transformacije

Pokažimo sada na primjeru kako se Laplaplaceve transformacije koriste kod rješavanja sustava običnih diferencijalnih jednadžbi.

Razmotrimo sljedeći sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda:

$$\begin{aligned} x_1'(t) + 2x_1(t) &= 3x_2(t) + u(t), \\ x_2'(t) + 4x_2(t) &= 2x_1(t), \end{aligned} \tag{7.20}$$

gdje su $x_1(t)$ i $x_2(t)$ funkcije vremena t, a $u(t)$ je ulazna funkcija. Pretpostavimo da su početni uvjeti $x_1(0) = 0$ i $x_2(0) = 0$, te da je ulazna funkcija $u(t) = \delta(t)$

Transformiramo jednadžbe u Laplaceovu domenu, slijedi:

$$\begin{aligned} sX_1(s) + 2X_1(s) &= 3X_2(s) + 1, \\ sX_2(s) + 4X_2(s) &= 2X_1(s). \end{aligned} \tag{7.21}$$

Dobivamo sustav algebarskih jednadžbi:

$$\begin{aligned} (s+2)X_1(s) - 3X_2(s) &= 1, \\ -2X_1(s) + (s+4)X_2(s) &= 0. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Iz druge jednadžbe izražavamo $X_2(s)$ preko $X_1(s)$:

$$X_2(s) = \frac{2}{s+4}X_1(s). \tag{7.23}$$

Zatim uvrstimo u prvu jednadžbu:

$$(s+2)X_1(s) - \frac{6}{s+4}X_1(s) = 1. \tag{7.24}$$

Pojednostavljivanjem dobijamo:

$$X_1(s)\left[\frac{(s+2)(s+4)-6}{s+4}\right]=1, \tag{7.25}$$

$$X_1(s)=\frac{s+4}{s^2+6s+2}. \tag{7.26}$$

Sada možemo izračunati $X_2(s)$:

$$X_2(s)=\frac{2}{s+4}X_1(s)=\frac{2}{s+4}\cdot\frac{s+4}{s^2+6s+2}=\frac{2}{s^2+6s+2}. \tag{7.27}$$

Na kraju primjenjujemo inverznu transformaciju kako bismo dobili rješenja $x_1(t)$ i $x_2(t)$ u vremenskoj domeni.

$$x_1(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{s^2+6s+2}\right\}, \tag{7.28}$$

$$x_2(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+6s+2}\right\}. \tag{7.29}$$

8. Sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi u inženjerstvu

U ovom ćemo poglavlju na nekoliko primjera prikazati primjene sustava običnih diferencijalnih jednadžbi u inženjerstvu. U prvom primjeru prikazujemo primjenu običnih diferencijalnih jednadžbi na problem oscilatora koji u drugom primjeru proširujemo na sustav opruga koji se modelira sustavom običnih diferencijalnih jednadžbi.

Primjer 8.1. *Razmotrimo prigušeno gibanje harmonijskog oscilatora pod utjecajem vanjske sile:*

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t), \tag{8.1}$$

gdje je $m = 1$ *masa oscilatora,* $c = 0.5$ *koeficijent prigušenja,* $k = 4$ *krutost oscilatora, dok je vanjska sila opisana funkcijom* $F(t) = 2\sin(t)$*. Pretpostavit ćemo da je* $x(0) = 1$ *i* $\dot{x}(0) = 0$*, čime smo zadali početni položaj i početnu brzinu, odnosno početne uvjete.*

Ovu ćemo jednadžbu riješiti Laplaceovim transformacijama. Primijenimo li Laplaceovu transformaciju na obje strane diferencijalne jednadžbe (8.1) *dobivamo:*

$$s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + c(sX(s) - x(0)) + kX(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} \tag{8.2}$$

Zbog početnih uvjeta je

$$s^2X(s) - s \cdot 1 + 0 + 0.5(sX(s) - 1) + 4X(s) = \frac{2}{s^2+1}, \tag{8.3}$$

odakle slijedi

$$s^2X(s) + 0.5sX(s) + 3.5X(s) = \frac{2}{s^2+1} + s, \tag{8.4}$$

$$X(s)(s^2 + 0.5s + 3.5) = \frac{2 + s(s^2+1)}{s^2+1}, \tag{8.5}$$

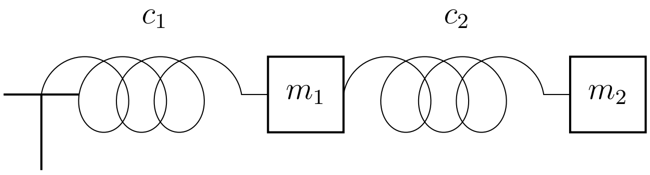
$$X(s)(s^2 + 0.5s + 3.5) = \frac{s^3 + s + 2}{s^2+1}, \tag{8.6}$$

$$X(s) = \frac{s^3 + s + 2}{(s^2+1)(s^2 + 0.5s + 3.5)}. \tag{8.7}$$

Primijenimo inverznu Laplaceovu transformaciju na ovaj izraz, dobivamo:

$$x(t) = e^{-0.25t}\,(1.5\sin(t) + 0.5\cos(t)) + \sin(t). \tag{8.8}$$

Primjer 8.2. *Mase* $m_1 = 2$ *i* $m_2 = 1$ *obješene su na oprugama s koeficijentima prigušenja* $c_1 = 4$ *i* $c_2 = 3$ *kako je prikazano na slici 8.1. Masa* m_1 *je povezana s fiksnom točkom pomoću opruge s konstantom elastičnosti* c_1*, dok je masa* m_1 *povezana s masom* m_2 *preko opruge s konstantom elastičnosti* c_2*. Odredimo sustav običnih diferencijalnih jednadžbi koji modelira opisanu situaciju.*



Slika 8.1. Sustav opruga.

Prema drugom Newtonovom zakonu za ovaj sustav vrijede jednadžbe

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -c_1x_1 + c_2(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -c_2(x_2 - x_1), \end{aligned}$$

gdje su x_1 i x_2 položaji masa m_1 i m_2, a $\ddot{x}_1$ i $\ddot{x}_2$ njihova ubrzanja. Prva jednadžba opisuje gibanje mase m_1, koja je pod utjecajem opruge c_1 pričvršćene za fiksnu točku, te opruge c_2 koja ju povezuje s masom m_2. Druga jednadžba opisuje gibanje mase m_2, koja je pod utjecajem samo opruge c_2.

Uvrstimo li zadane vrijednosti dobijemo sustav koji izgleda

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\frac{7}{2}x_1 + \frac{3}{2}c_2 \\ \ddot{x}_2 &= 3x_1 - ex_2 \end{aligned}$$

odnosno u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{8.9}$$

Kako smo opisali u poglavlju o primjeni matrične metode, ovaj sustav rješavamo supstitucijom $x = ye^{\omega t}$, odnosno $\ddot{x} = y\omega^2 e^{\omega t}$. Označimo li $\omega^2 = \lambda$, razmatramo jednadžbu za λ oblika:

$$\begin{vmatrix} -\frac{7}{2} - \lambda & \frac{3}{2} \\ 3 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{8.10}$$

odnosno

$$2\lambda^2 + 13\lambda + 12 = 0. \tag{8.11}$$

Rješenja ove jednadžbe su $\lambda_1 \approx 1,11$, $\lambda_2 \approx 5,39$, a od tuda slijedi da je $\omega_{1,2} \approx \pm 1,05i$, $\omega_{3,4} \approx \pm 2,32$. Stoga je opće rješenje

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.63 \\ 1 \end{bmatrix} (K_1 e^{1,05it} + K_2 e^{-1,05it}) + \begin{bmatrix} -0.80 \\ 1 \end{bmatrix} (K_3 e^{2,32it} + K_4 e^{-2,32it}), \tag{8.12}$$

odnosno

$$\begin{aligned} x_1 &\approx 0.63a\cos 1,05t + 0.63b\sin 1.05t - 0.80c\cos 2,32t - 0.80d\sin 2,32t \\ x_2 &\approx a\cos 1,05t + b\sin 1,05t + c\cos 2,32t + d\sin 2,32t, \end{aligned}$$

gdje konstante a, b, c, d možemo odrediti iz početnih uvjeta ako ih nametnemo.

Prikažimo još jedan primjer primjene sustava običnih diferencijalnih jednadžbi u elektrotehnici.

Primjer 8.3. *Razmotrimo serijsko-paralelni RLC krug koji se sastoji od:*

- *otpornika R_1 i induktora L_1 spojenih u seriju,*
- *kondenzatora C i otpornika R_2 spojenih paralelno s R_1 i L_1,*
- *izvora napona $V(t)$.*

Struje u krugu su:

- *$I_1(t)$ - struja kroz serijski spoj R_1 i L_1,*
- *$I_2(t)$ - struja kroz paralelni spoj R_2 i C.*

Sustav diferencijalnih jednadžbi za struje $I_1(t)$ i $I_2(t)$ je:

$$L_1 \frac{d^2 I_1(t)}{dt^2} + R_1 \frac{dI_1(t)}{dt} = \frac{dV(t)}{dt} - \frac{I_2(t)}{C}, \tag{8.13}$$

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = \frac{dI_2(t)}{dt} + \frac{I_2(t)}{R_2 C}. \tag{8.14}$$

9. Zaključak

Diferencijalne jednadžbe predstavljaju neizostavan alat u modernoj elektrotehnici, omogućavajući inženjerima da precizno modeliraju, analiziraju i optimiziraju širok spektar električnih i elektroničkih sustava. Kroz ovaj završni rad istraženi su osnovni koncepti diferencijalnih jednadžbi, metode njihovog rješavanja, te njihove konkretne primjene, s posebnim naglaskom na sustave običnih diferencijalnih jednadžbi.

U radu su obrađene obične diferencijalne jednadžbe i sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi, najprije s teorijskog aspekta pri čemu se definiraju opće i partikularno rješenje i navode neke temeljne klasifikacije.

Značajan dio rada posvećen je tehnikama rješavanja sustava običnih diferencijalnih jednadžbi, pri čemu je naglasak stavljen na linearne sustave. Pritom su obrađene dvije temeljene metode - metoda supstitucije i matrična metoda.

U radu je objašnjena i primjena Laplaceovih transformacija na rješavanje sustava običnih diferencijalnih jednadžbi - tehnika koja rješavanje diferencijalnih jednadžbi transformira u rješavanje algebarskih jednadžbi, ali i omogućava rješavanje sustava koji uključuju kompleksne nediferencijabilne funkcije koje se klasičnim metodama ne mogu riješiti.

U zadnjem dijelu rada prikazana je i konkretna primjena sustava običnih diferencijalnih jednadžbu u inženjerstvu. Može se zaključiti da su diferencijalne jednadžbe i njihovi sustavi temelj za razumijevanje i analizu inženjerskih sustava, te ključni element u razvoju novih tehnologija i inovacija.

Literatura

[1] Flajolet, P.; Gourdon, X.; Dumas, P.: "Mellin transforms and asymptotics: Harmonic sums", Theoretical Computer Science 144, pp. 3-58, 1995.

[2] Davies, P.: "Integral Transforms and Their Applications", Springer, Berlin, 1978.

[3] Stojković, N.: "Elektronika 1 - zavodska skripta", Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Rijeka, 2015.

[4] "Pierre Simon de Laplace", s Interneta, http://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=35431, 05.09.2018.

[5] "Poisson's and Laplace's equations", s Interneta, https://ece.illinois.edu/, 05.09.2018.

[6] Stojković N.; Naglić V.; Mijat N.: "Teorija mreža i linija", Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Rijeka, 2008.

[7] Kamenarović I.: "Inženjerska matematika 1", Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Rijeka, 1997.

[8] Kamenarović I.: "Matematika 3", Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Rijeka, 1992.

Sažetak i ključne riječi

U radu se definiraju osnovni pojmovi iz teorije običnih diferencijalnih jednadžbi i sustava običnih diferencijalnih jednadžbi. Objašnjava se pojam općeg i partikularnog rješenja te se navode temeljene klasifikacije sustava običnih diferencijalnih jednadžbi. Prikazani su različiti načini za rješavanje sustava diferencijalnih jednadžbi uz brojne primjere. Detaljno su prikazane metoda supstitucije i matrična metoda, a prikazana je i primjena Laplaceovih transformacija kod rješavanja sustava običnih diferencijalnih jednadžbi. Objašnjena je i primjena sustava običnih diferencijalnih jednadžbi u inženjerstvu.

Ključne riječi: Obične diferencijalne jednadžbe, sustavi diferencijalnih jednadžbi, metoda supstitucije, matrična metoda, Laplaceova transformacija

Summary and key words

The paper defines basic concepts from the theory of ordinary differential equations and systems of ordinary differential equations. The concept of general and particular solution is explained and the basic classifications of systems of ordinary differential equations are stated. Various ways to solve systems of differential equations are presented with numerous examples. The substitution method and the matrix method are presented in detail, and the application of Laplace transformations in solving systems of ordinary differential equations is also presented. The application of the system of ordinary differential equations in engineering is also explained.

Keywords: Ordinary differential equations, systems of differential equations, method of substitution, matrix method, Laplace transform.